

Statisztikus Fizika Gyakorlat

2016. február 11.

I. rész

Néhány hasznos matematikai formula

1. Gauss-integrál

Vezessük le a következő integrált:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (1)$$

Célszerű a kifejezés négyzetét vizsgálni!

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy. \quad (2)$$

Az integrált írjuk át polárkoordinátákba!

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ dx dy &= r d\varphi dr. \end{aligned} \quad (3)$$

A keresett integrál a következő alakot ölti:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr. \quad (4)$$

Végezzünk el még egy változó cserét!

$$\begin{aligned} u &= r^2, \\ \frac{du}{dr} &= 2r \rightarrow du = 2r dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Így már elemi integrációs szabályokkal kiértékelhető összefüggésre jutunk:

$$I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{2} du = \pi [-e^{-u}]_0^{\infty} = \pi. \quad (6)$$

A keresett integrál tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (7)$$

Egy egyszerű változó cserével lássuk be a Gauss-integrál egyszerű általánosítását:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (8)$$

$$ax^2 = t^2, \quad (9)$$

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{a} \rightarrow dt = \sqrt{a} dx. \quad (10)$$

Kapjuk tehát hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (11)$$

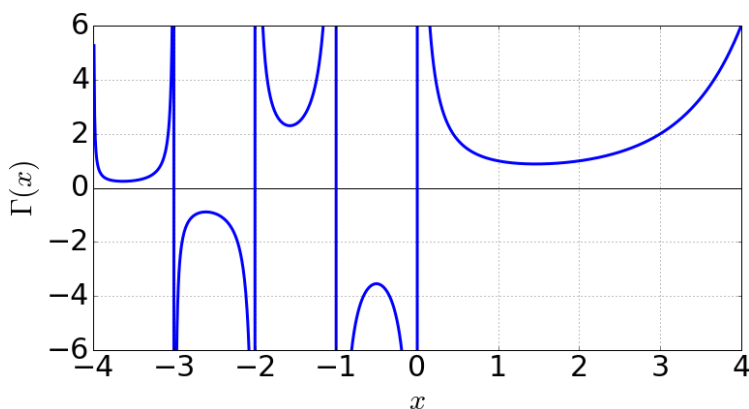
HF-01: Lássuk be hogy ha $a > 0$ valós szám akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c} \quad (12)$$

Útmutatás:

- Alakítsuk teljes négyzetté a kitevőben szereplő polinomot!
- A Gauss-integrál invariáns az integrandus „eltolására”!
- A négyzetes tag együtthatójától egy alkalmas változó cserével szabadulhatunk meg.

2. A Gamma-függvény néhány tulajdonsága



1. ábra. A Gamma függvény

A Gamma-függvény:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (13)$$

A fenti definíció segítségével lássuk be hogy

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (14)$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{v'} \underbrace{t^x}_{u'} dt \quad (15)$$

$$= \underbrace{[t^x(-e^{-t})]_0^{\infty}}_0 - \int_0^{\infty} \underbrace{-e^{-t}}_v \underbrace{xt^{x-1}}_{u'} dt \quad (16)$$

$$= x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (17)$$

$$= x\Gamma(x) \quad (18)$$

ahol kihasználtuk a parciális integrálás szabályát

$$\int u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)dt \quad (19)$$

és az alábbi két ismert összefüggést

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}, \quad (20)$$

$$\partial_t t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1}. \quad (21)$$

Lássuk be a következő két összefüggést is!

$$\Gamma(1) = 1 \quad (22)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (23)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt \quad (24)$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} dt \quad (25)$$

$$= [-e^{-t}]_0^\infty = 1 \quad (26)$$

Felhasználva a (14) és (22) összefüggéseket a $\Gamma(x)$ függvényt tetszőleges pozitív egész számokra meghatározhatjuk:

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 \quad (27)$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 \quad (28)$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (29)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N} \quad (30)$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1/2-1} dt \quad (31)$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}} dt \quad (32)$$

Hajtsuk végre a következő változó cserét:

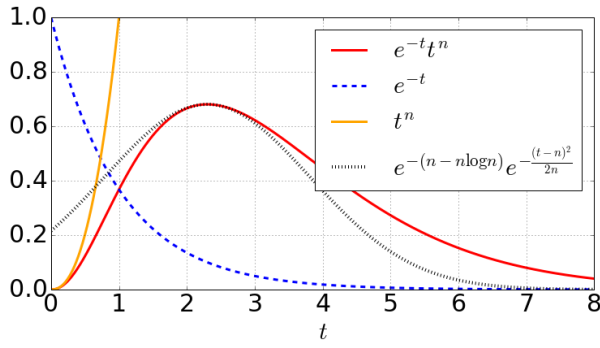
$$u = t^{1/2}, \quad (33)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{t^{1/2}}. \quad (34)$$

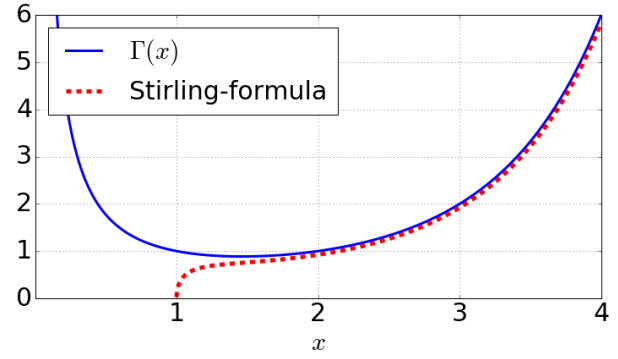
Így kapjuk hogy

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} 2du, \quad (35)$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (36)$$



(a) A Stirling-formula levezetése során alkalmazott közelítés



(b) A Stirling-formula és a Γ -függvény

2. ábra. Stirling közelítés

Termodinamikai határesetek vizsgálata során sokszor fogunk találkozni olyan esetekkel amikor a $\Gamma(n)$ függvényt a $n \gg 1$ értékekre kell kiértékelnünk.

Lássuk be a következő hasznos közelítő formulát:

Stirling-formula:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (37)$$

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \quad (38)$$

$$= \int_0^\infty e^{-t+n \ln t} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-f_n(t)} dt,$$

$$f_n(t) = t - n \ln t. \quad (39)$$

Fejtsük sorba az $f_n(t)$ függvényt a minimuma körül!

$$\partial_t f_n(t) = 1 - \frac{n}{t}, \quad (40)$$

$$\partial_t f_n(t_0) = 0 \rightarrow t_0 = n. \quad (41)$$

Elegendő elvégezni a sorfejtést másod rendig. Azaz a következő közelítéssel élünk:

$$f_n(t) \approx f_n(t_0) + \partial_t f_n(t_0) (t - t_0) + \frac{1}{2} \partial_t^2 f_n(t_0) (t - t_0)^2, \quad (42)$$

$$\partial_t^2 f_n(t) = \frac{n}{t^2} \rightarrow \partial_t^2 f_n(t_0) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad (43)$$

$$f_n(t) \approx n - n \ln n + \underbrace{\partial_t f_n(t_0) (t - t_0)}_{\text{by def}=0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right) (t - n)^2. \quad (44)$$

Vissza írva ezt a (38) kifejezésbe:

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \\ &= \int_0^\infty e^{-f_n(t)} dt \\ &\approx e^{-(n - n \ln n)} \int_0^\infty e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}} dt. \end{aligned} \quad (45)$$

A kifejezésben szereplő integrál alsó határát kiterjeszthetjük $-\infty$ -ig hiszen feltettük hogy $n \gg 1$:

$$\begin{aligned} n! &\approx e^{-(n-n \ln n)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}} dt \\ &= e^{-(n-n \ln n)} \sqrt{2\pi n}. \end{aligned} \quad (46)$$

Ahol felhasználtuk a Gauss-integrálra vonatkozó (8) azonosságot. A kapott eredmény pedig nem más mint maga a (37) Stirling-formula. Sokszor fogunk találkozni a Stirling-formula logaritmusával:

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \quad (47)$$

$$\ln \Gamma(n) \approx n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n) \quad (48)$$

3. D -dimenziós gömb térfogata

Sokszor szükségünk lesz több dimenziós integrálok elvégzésére. Ezen integrálok elvégzésében rendszerint segítségünkre lesz az adott dimenzióbeli gömb térfogata. Vizsgáljuk meg hát hogy hogyan függ a térfogat kifejezése a dimenziótól:

dimenzió	$V_D(r)$	$S_D(r)$
1	$2r$	
2	πr^2	$2\pi r$
3	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
\vdots		
D	$C_D r^D$	$C_D D r^{D-1}$

Egy adott dimenzióban egy adott sugarú gömb térfogata $V_D(r)$ és a felülete között az alábbi általános összefüggés teremt kapcsolatot:

$$V_D(r) = \int_0^r S_D(\varrho) d\varrho, \quad (49)$$

$$C_D r^D = C_D D \int_0^r \varrho^{D-1} d\varrho \quad (50)$$

Határozzuk meg C_D értékét! Induljunk ki D darab Gauss-integrál szorzatából:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^D = \pi^{D/2} \quad (51)$$

Mivel az integrandus „gömb szimmetrikus” ezért elég csak a sugár irányú integrálra koncentrálnunk.

$$\begin{aligned} \pi^{D/2} &= \int \underbrace{e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2)}}_{e^{-r^2}} \overbrace{dx_1 dx_1 \dots dx_D}^{DC_D r^{D-1} dr} \\ &= DC_D \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{D-1} dr \end{aligned} \quad (52)$$

Alkalmazzunk egy változó cserét:

$$u = r^2, \quad (53)$$

$$\frac{du}{dr} = 2r \rightarrow du = 2r dr.$$

$$dr = u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{2} \quad (54)$$

$$\pi^{D/2} = DC_D \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{D}{2}-1} \frac{du}{2}, \quad (55)$$

$$\pi^{D/2} = C_D \frac{D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) = C_D \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right). \quad (56)$$

A keresett együttható tehát:

$$C_D = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)}. \quad (57)$$

Kiértékelve ezt az összefüggést vissza kapjuk a már ismert együtthatókat:

$$D = 1 \rightarrow C_1 = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = 2 \quad (58)$$

$$D = 2 \rightarrow C_2 = \frac{\pi^{2/2}}{\Gamma(2)} = \pi \quad (59)$$

$$D = 3 \rightarrow C_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi}{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\pi \quad (60)$$

4. Pauli mátrixok és $\frac{1}{2}$ -spin algebra

4.1. A $\hat{\rho}$ sűrűségmátrix általános tulajdonságai

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha| \quad (61)$$

Feltesszük hogy a bázis teljes ortonormált rendszert alkot:

$$\langle\beta| \alpha\rangle = \delta_{\alpha,\beta}. \quad (62)$$

és természetesen a $w_{\alpha} > 0$ súlyok összege egységnyi:

$$\sum_{\alpha} w_{\alpha} = 1. \quad (63)$$

Ezekből

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger}, \quad (64)$$

$$\text{Tr}\hat{\rho} = 1, \quad (65)$$

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2 \leq 1. \quad (66)$$

Az utolsó egyenlőség tiszta állapotokra áll fenn, azaz ha igaz, hogy

$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle \langle\varphi|. \quad (67)$$

4.2. Két állapotú kvantum rendszerek

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$|\varphi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = 1, \rightarrow aa^* + bb^* = 1 \quad (70)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \sigma_0 \quad (73)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (74)$$

II. rész

Állapot számolás

Állapotok száma adott E energia alatt:

$$\text{Klasszikus rendszer: } \Omega_0(E) = \frac{1}{h^N} \int_{H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < E} (dp dq)^N \quad (75)$$

$$\text{Kvantumos rendszer: } \Omega_0(E) = \sum_{E_n < E} 1 = \sum_n \Theta(E - E_n) \quad (76)$$

Weyl-szabály:

$$h = dp dq \quad (77)$$

5. Egy darab, dobozba zárt, egy dimenziós részecske

5.1. Klasszikus

$$\Omega_0(E) = \int_{\frac{p^2}{2m} < E} \frac{dp dq}{h} = \frac{2a}{h} \sqrt{2mE} \quad (78)$$

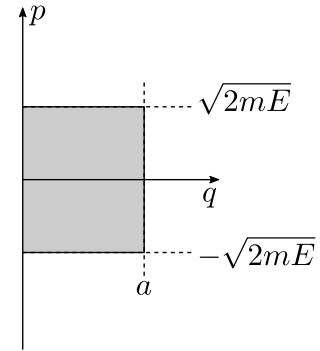
5.2. Kvantumos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi = E \psi \quad (79)$$

$$\psi_k^\infty(x) = e^{ikx} \quad (80)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (81)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (82)$$



3. ábra. Klasszikus dobozba zárt részecske fázistere

a) Zárt peremfeltétel

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad (83)$$

$$\psi_k^{\text{zárt}}(x) = \frac{\psi_k^\infty(x) - \psi_{-k}^\infty(x)}{2i} = \sin(kx) \quad (84)$$

$$\psi(a) = 0 \rightarrow k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max} \quad (85)$$

$$k_{\max} = \frac{n_{\max}\pi}{a} \quad (86)$$

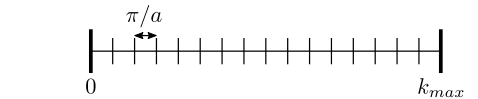
$$E_{\max} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n_{\max}\pi}{a} \right)^2 \quad (87)$$

$$\Omega_0(E) = \left\lfloor \frac{a}{\pi\hbar} \sqrt{2mE} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a}{h} \sqrt{2mE} \right\rfloor \quad (88)$$

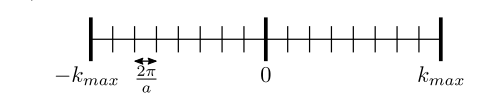
b) Periodikus peremfeltétel

$$\psi_k^{\text{periodikus}}(x) = \psi_k^\infty(x) = e^{ikx} \quad (89)$$

a) zárt peremfeltétel



b) periodikus peremfeltétel



4. ábra. Kvantumos dobozba zárt részecske hullámszámtérben

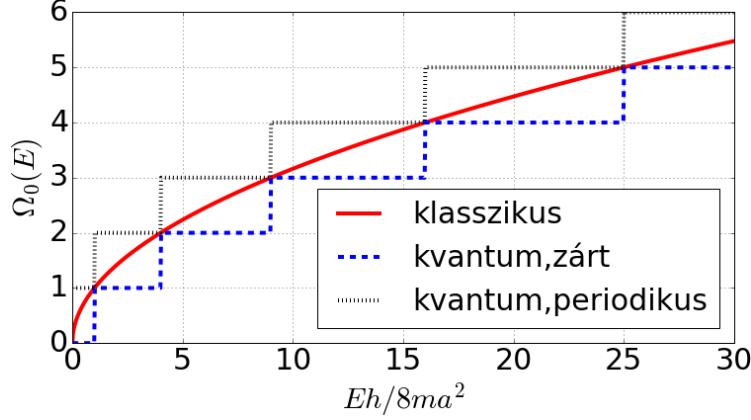
$$\psi(x+a) = \psi(x), \quad (90)$$

$$\rightarrow e^{ikx} = e^{ikx+ika} \quad (91)$$

$$\rightarrow ka = 2n\pi \quad (92)$$

$$n = -n_{max} \dots 0 \dots n_{max} \quad (93)$$

$$\Omega_0(E) = 2 \left\lfloor \frac{a}{2\pi} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \right\rfloor + 1 = 2 \left\lfloor \frac{a}{h} \sqrt{2mE} \right\rfloor + 1 \quad (94)$$



5. ábra. Dobozba zárt részecske állapotainak száma

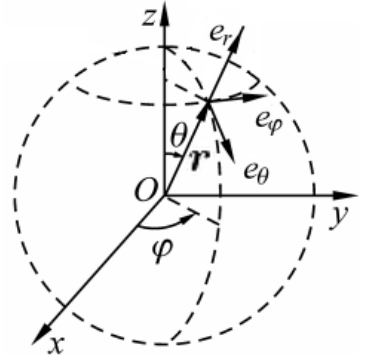
6. Rotátor

A rotátor egy egy térbeli tömegpont melynek r távolsága a koordináta rendszer középpontjától időben állandó.

6.1. Klasszikus

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = r \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ -r\dot{\vartheta} \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= r^2 \left(\dot{\vartheta}^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi - \frac{\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin(2\vartheta) \sin(2\varphi)}{2} \right) \\ \dot{y}^2 &= r^2 \left(\dot{\vartheta}^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \frac{\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin(2\vartheta) \sin(2\varphi)}{2} \right) \\ \dot{z}^2 &= r^2 \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (96)$$



6. ábra. Rotátor és a gömbi koordináta rendszer

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = r^2 \left[\underbrace{\dot{\vartheta}^2 (\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta)}_1 + \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \right] \quad (97)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (98)$$

$$= \frac{1}{2} m r^2 [\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta] \quad (99)$$

$$= \frac{1}{2} \Theta [\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta] \quad (100)$$

$$\mathcal{L} = E_{kin} \rightarrow p_{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \Theta \dot{\vartheta}, \quad p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \quad (101)$$

$$H = E_{kin} = \frac{1}{2\Theta} \left(p_{\vartheta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \quad (102)$$

$$\Omega_0(E) = \frac{1}{h} \int_{H < E} d\vartheta d\varphi dp_{\vartheta} dp_{\varphi} \quad (103)$$

$$= \frac{1}{h} \sqrt{2E\Theta} \sqrt{2E\Theta} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{\text{"térszög"}=4\pi} \quad (104)$$

$$\Omega_0(E) = \frac{E\Theta}{h} \quad (105)$$

6.2. Kvantumos

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2\Theta} \quad (106)$$

$$E_l = \frac{l(l+1)}{2\Theta} \quad (107)$$

$$\Omega_0(E) = \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) = (l_{max}+1)^2 \quad (108)$$

7. Harmonikus oszcillátor

7.1. Klasszikus

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (109)$$

$$\Omega_0(E) = \frac{1}{h} \int_{H < E} dp dq = \frac{1}{h} \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \pi \quad (110)$$

$$\Omega_0(E) = \frac{E}{\hbar\omega} \quad (111)$$

7.2. Kvantumos

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (112)$$

$$n_{max} = \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (113)$$

$$\Omega_0(E) = \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 \quad (114)$$