

# Statisztikus Fizika Gyakorlat

2016. február 15.

## I. rész

# Néhány hasznos matematikai formula

## 1. Gauss-integrál

Vezessük le a következő integrált:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (1)$$

Célszerű a kifejezés négyzetét vizsgálni!

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy. \quad (2)$$

Az integrált írjuk át polárkoordinátákba!

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ dx dy &= r d\varphi dr. \end{aligned} \quad (3)$$

A keresett integrál a következő alakot ölti:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr. \quad (4)$$

Végezzünk el még egy változó cserét!

$$\begin{aligned} u &= r^2, \\ \frac{du}{dr} &= 2r \rightarrow du = 2r dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Így már elemi integrációs szabályokkal kiértékelhető összefüggésre jutunk:

$$I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{2} du = \pi [-e^{-u}]_0^{\infty} = \pi. \quad (6)$$

A keresett integrál tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (7)$$

Egy egyszerű változó cserével lássuk be a Gauss-integrál egyszerű általánosítását:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (8)$$

$$ax^2 = t^2, \quad (9)$$

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{a} \rightarrow dt = \sqrt{a} dx. \quad (10)$$

Kapjuk tehát hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (11)$$

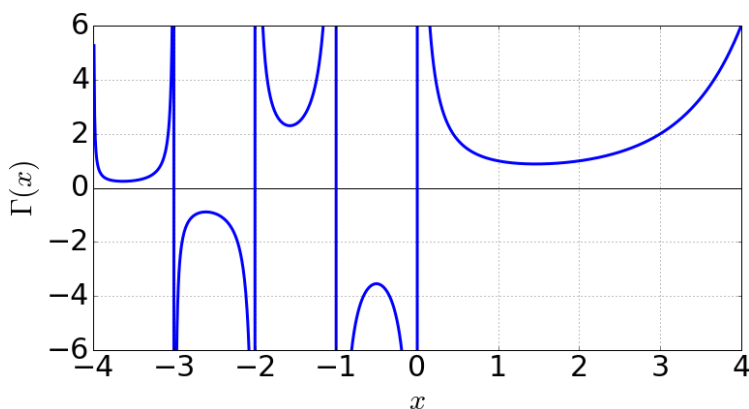
**HF-01:** Lássuk be hogy ha  $a > 0$  valós szám akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c} \quad (12)$$

Útmutatás:

- Alakítsuk teljes négyzetté a kitevőben szereplő polinomot!
- A Gauss-integrál invariáns az integrandus „eltolására”!
- A négyzetes tag együtthatójától egy alkalmas változó cserével szabadulhatunk meg.

## 2. A Gamma-függvény néhány tulajdonsága



1. ábra. A Gamma függvény

### A Gamma-függvény:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (13)$$

A fenti definíció segítségével lássuk be hogy

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (14)$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{v'} \underbrace{t^x}_{u'} dt \quad (15)$$

$$= \underbrace{[t^x(-e^{-t})]_0^{\infty}}_0 - \int_0^{\infty} \underbrace{-e^{-t}}_v \underbrace{xt^{x-1}}_{u'} dt \quad (16)$$

$$= x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (17)$$

$$= x\Gamma(x) \quad (18)$$

ahol kihasználtuk a parciális integrálás szabályát

$$\int u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)dt \quad (19)$$

és az alábbi két ismert összefüggést

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}, \quad (20)$$

$$\partial_t t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1}. \quad (21)$$

Lássuk be a következő két összefüggést is!

$$\Gamma(1) = 1 \quad (22)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (23)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt \quad (24)$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} dt \quad (25)$$

$$= [-e^{-t}]_0^\infty = 1 \quad (26)$$

Felhasználva a (14) és (22) összefüggéseket a  $\Gamma(x)$  függvényt tetszőleges pozitív egész számokra meghatározhatjuk:

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 \quad (27)$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 \quad (28)$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (29)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N} \quad (30)$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1/2-1} dt \quad (31)$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}} dt \quad (32)$$

Hajtsuk végre a következő változó cserét:

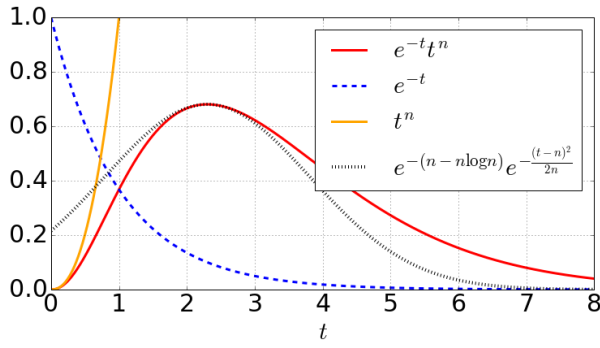
$$u = t^{1/2}, \quad (33)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{t^{1/2}}. \quad (34)$$

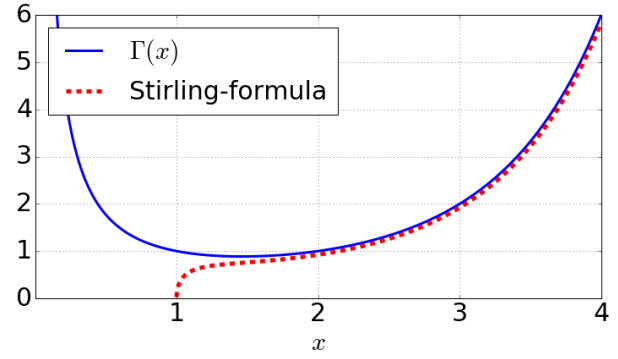
Így kapjuk hogy

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} 2du, \quad (35)$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (36)$$



(a) A Stirling-formula levezetése során alkalmazott közelítés



(b) A Stirling-formula és a  $\Gamma$ -függvény

2. ábra. Stirling közelítés

Termodinamikai határesetek vizsgálata során sokszor fogunk találkozni olyan esetekkel amikor a  $\Gamma(n)$  függvényt a  $n \gg 1$  értékekre kell kiértékelnünk.

Lássuk be a következő hasznos közelítő formulát:

**Stirling-formula:**

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (37)$$

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \quad (38)$$

$$= \int_0^\infty e^{-t+n \ln t} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-f_n(t)} dt,$$

$$f_n(t) = t - n \ln t. \quad (39)$$

Fejtsük sorba az  $f_n(t)$  függvényt a minimuma körül!

$$\partial_t f_n(t) = 1 - \frac{n}{t}, \quad (40)$$

$$\partial_t f_n(t_0) = 0 \rightarrow t_0 = n. \quad (41)$$

Elegendő elvégezni a sorfejtést másod rendig. Azaz a következő közelítéssel élünk:

$$f_n(t) \approx f_n(t_0) + \partial_t f_n(t_0) (t - t_0) + \frac{1}{2} \partial_t^2 f_n(t_0) (t - t_0)^2, \quad (42)$$

$$\partial_t^2 f_n(t) = \frac{n}{t^2} \rightarrow \partial_t^2 f_n(t_0) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad (43)$$

$$f_n(t) \approx n - n \ln n + \underbrace{\partial_t f_n(t_0) (t - t_0)}_{\text{by def}=0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right) (t - n)^2. \quad (44)$$

Vissza írva ezt a (38) kifejezésbe:

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \\ &= \int_0^\infty e^{-f_n(t)} dt \\ &\approx e^{-(n - n \ln n)} \int_0^\infty e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}} dt. \end{aligned} \quad (45)$$

A kifejezésben szereplő integrál alsó határát kiterjeszthetjük  $-\infty$ -ig hiszen feltettük hogy  $n \gg 1$ :

$$\begin{aligned} n! &\approx e^{-(n-n \ln n)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}} dt \\ &= e^{-(n-n \ln n)} \sqrt{2\pi n}. \end{aligned} \quad (46)$$

Ahol felhasználtuk a Gauss-integrálra vonatkozó (8) azonosságot. A kapott eredmény pedig nem más mint maga a (37) Stirling-formula. Sokszor fogunk találkozni a Stirling-formula logaritmusával:

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \quad (47)$$

$$\ln \Gamma(n) \approx n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n) \quad (48)$$

### 3. $D$ -dimenziós gömb térfogata

Sokszor szükségünk lesz több dimenziós integrálok elvégzésére. Ezen integrálok elvégzésében rendszerint segítségünkre lesz az adott dimenzióbeli gömb térfogata. Vizsgáljuk meg hát hogy hogyan függ a térfogat kifejezése a dimenziótól:

dimenzió	$V_D(r)$	$S_D(r)$
1	$2r$	
2	$\pi r^2$	$2\pi r$
3	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
$\vdots$		
$D$	$C_D r^D$	$C_D D r^{D-1}$

Egy adott dimenzióban egy adott sugarú gömb térfogata  $V_D(r)$  és a felülete között az alábbi általános összefüggés teremt kapcsolatot:

$$V_D(r) = \int_0^r S_D(\varrho) d\varrho, \quad (49)$$

$$C_D r^D = C_D D \int_0^r \varrho^{D-1} d\varrho \quad (50)$$

Határozzuk meg  $C_D$  értékét! Induljunk ki  $D$  darab Gauss-integrál szorzatából:

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^D = \pi^{D/2} \quad (51)$$

Mivel az integrandus „gömb szimmetrikus” ezért elég csak a sugár irányú integrálra koncentrálnunk.

$$\begin{aligned} \pi^{D/2} &= \int \underbrace{e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2)}}_{e^{-r^2}} \overbrace{dx_1 dx_1 \dots dx_D}^{DC_D r^{D-1} dr} \\ &= DC_D \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{D-1} dr \end{aligned} \quad (52)$$

Alkalmazzunk egy változó cserét:

$$u = r^2, \quad (53)$$

$$\frac{du}{dr} = 2r \rightarrow du = 2r dr.$$

$$dr = u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{2} \quad (54)$$

$$\pi^{D/2} = DC_D \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{D}{2}-1} \frac{du}{2}, \quad (55)$$

$$\pi^{D/2} = C_D \frac{D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) = C_D \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right). \quad (56)$$

A keresett együttható tehát:

$$C_D = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)}. \quad (57)$$

Kiértékelve ezt az összefüggést vissza kapjuk a már ismert együtthatókat:

$$D = 1 \rightarrow C_1 = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = 2 \quad (58)$$

$$D = 2 \rightarrow C_2 = \frac{\pi^{2/2}}{\Gamma(2)} = \pi \quad (59)$$

$$D = 3 \rightarrow C_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi}{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\pi \quad (60)$$

## 4. Pauli mátrixok és $\frac{1}{2}$ -spin algebra

### 4.1. A $\hat{\rho}$ sűrűségmátrix általános tulajdonságai

Kvantumos rendszerek statisztikus vizsgálatában kulcs szerep jut a  $\hat{\rho}$  sűrűségmátrixnak:

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha|, \quad (61)$$

ahol  $|\alpha\rangle$  a rendszer valamely tiszta állapotát jelöli és a  $w_{\alpha} > 0$  valószínűségi súlyok összege egységnyi:

$$\sum_{\alpha} w_{\alpha} = 1. \quad (62)$$

Ezekből

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger}, \quad (63)$$

$$\text{Tr}\hat{\rho} = 1, \quad (64)$$

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2 \leq 1. \quad (65)$$

Az utolsó egyenlőség tiszta állapotokra áll fenn, azaz ha igaz, hogy

$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle \langle\varphi|. \quad (66)$$

### 4.2. Két állapotú kvantum rendszerek

A legegyszerűbb nem triviális kvantum rendszer két állapottal bír. Gondoljunk egy magányos elektron spin szabadsági fokára! Ebben az esetben a két dimenziós Hilbert-teret kifeszítő bázisvektorok választhatóak például a spin  $z$  komponensének sajátvektorjaiként:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Egy általános tiszta állapot ezek lineár kombinációjaként áll elő:

$$|\varphi\rangle = a |\uparrow\rangle + b |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Az állapotok normáltsága megszorítja a két kifejtési együtthatót:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = 1, \rightarrow aa^* + bb^* = 1. \quad (69)$$

Ezen a Hilbert-téren ható hermitikus operátorok, mint például a  $\hat{\rho}$  sűrűségmátrix, a Pauli-mátrixok  $\sigma_{x,y,z}$  és az egység mátrix  $\sigma_0$  segítségével.

**Pauli-mátrixok:**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (70)$$

**Identitás:**

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (71)$$

A teljesség igénye nélkül tekintsünk át néhány a Pauli-mátrixokra vonatkozó hasznos azonosságot! A Pauli-mátrixok négyzete az egység, illetve két Pauli-mátrix szorzata a harmadik mátrixszal arányos (sorrendtől függően  $\pm i$  faktoriall):

$$\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \sigma_0. \quad (72)$$

Vezessük be a Pauli-mátrixokból alkotott  $\vec{\sigma}$  vektort:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (73)$$

A (72) szorzat szabályokból következik hogy:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = a_p \sigma_p b_q \sigma_q \quad (74)$$

$$= i \varepsilon_{pqk} a_p b_q \sigma_k + \delta_{pq} a_p b_q \sigma_0 \quad (75)$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \sigma_0 + i (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} \quad (76)$$

Mivel a Pauli-mátrixok nyoma eltűnik ezért tetszőleges lineár kombinációik nyoma is eltűnik:

$$\text{Tr}((\vec{a} \cdot \vec{\sigma})) = 0. \quad (77)$$

Szintén a szorzat szabályok és a nyomtalanság következménye hogy

$$\text{Tr}((\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \sigma_i) = a_i. \quad (78)$$

Pauli-mátrixok lineárkombinációjának determinánsa az együttható vektor hosszának négyzetével arányos:

$$\det(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = -\vec{a} \cdot \vec{a} = -a^2, \quad (79)$$

ahol

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (80)$$

Vizsgáljuk meg hogy egy általános  $2 \times 2$ -es hermitikus mátrix mikor lehet egy rendszer sűrűség mátrixa! Induljunk a legáltalánosabb alakból:

$$\hat{\rho} = d_0 \sigma_0 + \vec{d} \cdot \vec{\sigma} = d_0 \sigma_0 + d_x \sigma_x + d_y \sigma_y + d_z \sigma_z \quad (81)$$

$$= \begin{pmatrix} d_0 + d_z & d_x - i d_y \\ d_x + i d_y & d_0 - d_z \end{pmatrix} \quad (82)$$

Mivel a Pauli-mátrixok nyoma zérus, ezért  $\sigma_0$  együtthatóját (64) egyértelműen meghatározza:

$$\text{Tr} \hat{\rho} = 1 \rightarrow d_0 = \frac{1}{2}. \quad (83)$$



A  $\hat{\rho}^2$ -re vonatkozó (65) kritérium a  $\vec{d}$  vektor hosszára ró megszorítást:

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 = \text{Tr} \left( (d_0 \sigma_0 + \vec{d} \cdot \vec{\sigma}) (d_0 \sigma_0 + \vec{d} \cdot \vec{\sigma}) \right) \quad (84)$$

$$= \text{Tr} \left( (d_0^2 + d^2) \sigma_0 \right) = 2 (d_0^2 + d^2). \quad (85)$$

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 \leq 1 \rightarrow 0 \leq d \leq \frac{1}{2}. \quad (86)$$

### 4.3. Példák

#### a) Tiszta állapot:

A kétállapotú kvantumrendszer egy tetszőleges állapotát szokás a Bloch-gömb  $\theta$  és  $\phi$  szögeivel paraméterezni:

$$|\varphi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle. \quad (87)$$

Számítsuk ki ebben a tiszta állapotban a sűrűség mátrixot:

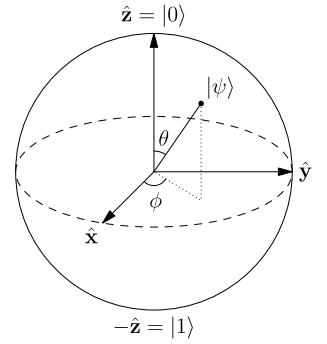
$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle \langle\varphi| \quad (88)$$

$$\hat{\rho} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + e^{-i\phi} \frac{\sin(\theta)}{2} |\uparrow\rangle \langle\downarrow| \quad (89)$$

$$+ e^{i\phi} \frac{\sin(\theta)}{2} |\downarrow\rangle \langle\uparrow| + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \quad (90)$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-i\phi} \frac{\sin(\theta)}{2} \\ e^{i\phi} \frac{\sin(\theta)}{2} & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) & e^{-i\phi} \sin(\theta) \\ e^{i\phi} \sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (91)$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\sigma_0 + \sin(\theta) \cos(\phi) \sigma_x + \sin(\theta) \sin(\phi) \sigma_y + \cos(\theta) \sigma_z) \quad (92)$$



3. ábra. A Bloch-gömb

$$d = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Tr} \hat{\rho} = 1, \quad \text{Tr} \hat{\rho}^2 = 1 \quad (93)$$

#### b) Teljesen kevert állapot:

Határozzuk meg a  $|\uparrow\rangle$  és  $|\downarrow\rangle$  állapotok 1/2 valószínűséggel vett statisztikus keverékének sűrűség mátrixát:

$$\hat{\rho} = \frac{|\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow|}{2}, \quad (94)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (95)$$

$$d = 0 \rightarrow \text{Tr} \hat{\rho} = 1, \quad \text{Tr} \hat{\rho}^2 = \frac{1}{2} \quad (96)$$

**c) Részlegesen kevert állapot**

Határozzuk meg a  $|\uparrow\rangle$  és  $|\downarrow\rangle$  állapotok  $p$  valószínűséggel vett statisztikus keverékének sűrűség mátrixát:

$$\hat{\rho} = p |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + (1-p) |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \quad (97)$$

$$= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{2} + \left(p - \frac{1}{2}\right) \sigma_z \quad (98)$$

$$d = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \text{Tr}\hat{\rho} = 1, \quad \text{Tr}\hat{\rho}^2 = \frac{1}{2} + \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (99)$$

**HF-02:** Tekintsük egy két állapotú rendszer két ( $|\alpha\rangle$  és  $|\beta\rangle$ ) nem ortogonális állapotából ( $\langle\alpha|\beta\rangle = x$ )  $p$  valószínűséggel kevert állapotot. Határozzuk meg  $\text{Tr}\hat{\rho}^2$ -t !

## II. rész

# Állapot számolás

**Állapotok száma adott  $E$  energia alatt:**

$$\text{Klasszikus rendszer: } \Omega_0(E) = \frac{1}{h^N} \int_{H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < E} (dp dq)^N \quad (100)$$

$$\text{Kvantumos rendszer: } \Omega_0(E) = \sum_{E_n < E} 1 = \sum_n \Theta(E - E_n) \quad (101)$$

**Állapotok száma  $E$  és  $E + \delta E$  között:**

$$\Omega(E, \delta E) = \Omega_0(E + \delta E) - \Omega_0(E) \quad (102)$$

**Állapotsűrűség:**

$$\omega(E) = \frac{d\Omega_0}{dE} = \lim_{\delta E \rightarrow 0} \frac{\Omega(E, \delta E)}{\delta E} \quad (103)$$

**Fázis térfogat elem szabály:**

$$h = dp dq \quad (104)$$

Az alábbiakban három egyszerűen számítható rendszer állapotainak számát határozzuk meg klasszikus és kvantumos módszerekkel.

## 5. Egy darab, dobozba zárt, egy dimenziós részecske

### 5.1. Klasszikus

A Hamilton-függvény csak a kinetikus energiából származó tagot tartalmazza:

$$H = \frac{p^2}{2m}. \quad (105)$$

Egy adott  $E$  energia alatti állapotok a fázis térben egy ellipszist jelölnek ki, melynek felülete adja  $\Omega_0$ -t:

$$\Omega_0(E) = \int_{H < E} \frac{dp dq}{h} = \frac{2a}{h} \sqrt{2mE}. \quad (106)$$

### 5.2. Kvantumos

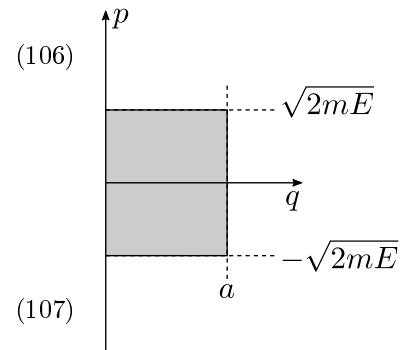
A kvantummechanikai leírás a Schrödinger-egyenlet megoldásával kezdődik.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi = E \psi, \quad (107)$$

$$\psi_k^\infty(x) = e^{ikx}, \quad (108)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (109)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (110)$$



4. ábra. Klasszikus dobozba zárt részecske fázistere

Itt feltettük hogy egy végtelen rendszert vizsgálunk. A véges rendszer állapotait illetve spektrumát a végtelen rendszerből a megfelelő peremfeltételek kirovásával és azok teljesítésével kapjuk. Vizsgáljuk meg a két leggyakrabban tárgyalt peremfeltételt!

### a) Zárt peremfeltétel

$$\psi(0) = \psi(a) = 0. \quad (111)$$

Adott  $E$  energián a zárt peremfeltételt teljesítő hullámfüggvényt előáll mint a  $k$  és a  $-k$  hullámszámokhoz tartozó hullámfüggvények lineárkombinációja:

$$\psi_k^{\text{zárt}}(x) = \frac{\psi_k^{\infty}(x) - \psi_{-k}^{\infty}(x)}{2i} = \sin(kx) \quad (112)$$

A peremfeltétel megköti a  $k$  hullámszám lehetséges értékét:

$$\psi(a) = 0 \rightarrow k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max}, \quad (113)$$

$$k_{\max} = \frac{n_{\max}\pi}{a}, \quad (114)$$

$$E_{\max} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n_{\max}\pi}{a} \right)^2. \quad (115)$$

Adott  $E$  energia alatt lévő állapotok száma tehát

$$\Omega_0(E) = \left\lfloor \frac{a}{\pi\hbar} \sqrt{2mE} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a}{h} \sqrt{2mE} \right\rfloor \quad (116)$$

ahol bevezettük a  $\lfloor x \rfloor$  jelölést  $x$  valós szám egész részére.

### b) Periodikus peremfeltétel

Ha periodikus peremfeltétellel élünk akkor a végtelen rendszer síkhullám megoldásai megfelelő  $k$  hullámszámok mellett már kielégítő megoldásai a Schrödinger egyenletnek:

$$\psi_k^{\text{periodikus}}(x) = \psi_k^{\infty}(x) = e^{ikx}, \quad (117)$$

$$\psi(x+a) = \psi(x), \quad (118)$$

$$\rightarrow e^{ikx} = e^{ikx+ika} \quad (119)$$

$$\rightarrow ka = 2n\pi \quad (120)$$

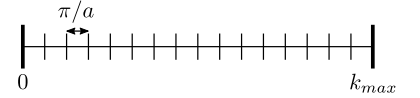
$$n = -n_{\max} \dots 0 \dots n_{\max} \quad (121)$$

Adott  $E$  energia alatt lévő állapotok száma tehát

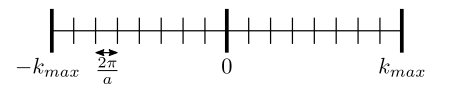
$$\Omega_0(E) = 2 \left\lfloor \frac{a}{2\pi} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \right\rfloor + 1 = 2 \left\lfloor \frac{a}{h} \sqrt{2mE} \right\rfloor + 1 \quad (122)$$

Mindkét peremfeltétel esetén teljesül tehát hogy nagy energiákra a klasszikus állapot-szám jó közelítése a kvantumos kifejezéseknek.

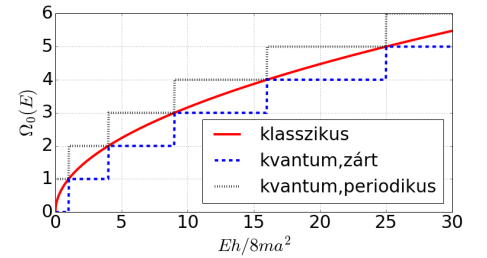
a) zárt peremfeltétel



b) periodikus peremfeltétel



5. ábra. Kvantumos dobozba zárt részecske hullámszámtérben



6. ábra. Dobozba zárt részecske állapotainak száma

## 6. Rotátor

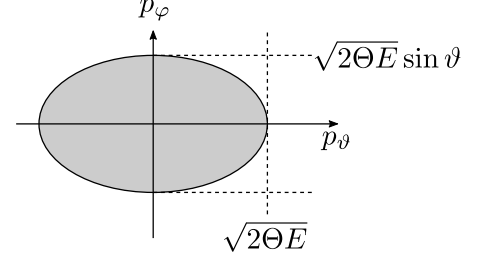
A rotátor egy egy térbeli tömegpont melynek  $r$  távolsága a koordináta rendszer közép-pontjától időben állandó, azaz

$$\frac{d}{dt}r = \dot{r} = 0. \quad (123)$$

### 6.1. Klasszikus

Fejezzük ki a pozíció és a sebesség vektorokat gömbi polárkoordináta rendszerben

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = r \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ -r\dot{\vartheta} \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (124)$$



7. ábra. A rotátor fázisterének impulzus altere

A sebesség négyzete tehát

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= r^2 \left( \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi - \frac{\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin(2\vartheta) \sin(2\varphi)}{2} \right), \\ \dot{y}^2 &= r^2 \left( \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \frac{\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin(2\vartheta) \sin(2\varphi)}{2} \right), \\ \dot{z}^2 &= r^2 \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (125)$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = r^2 \left[ \underbrace{\dot{\vartheta}^2 (\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta)}_1 + \dot{\varphi}^2 \overbrace{(\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi)}^{\sin^2 \vartheta} \right]. \quad (126)$$

A kinetikus energia szögváltozókkal kifejezve a következő alakot ölti

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (127)$$

$$= \frac{1}{2}mr^2 [\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta], \quad (128)$$

$$= \frac{1}{2}\Theta [\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta]. \quad (129)$$

A Lagrange-függvény szokásos deriváltjaiból a szögváltozókhoz konjugált impulzusok

$$\mathcal{L} = E_{kin}, \rightarrow p_{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \Theta \dot{\vartheta}, \quad p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}, \quad (130)$$

és a Hamilton-függvény pedig

$$H = E_{kin} = \frac{1}{2\Theta} \left( p_{\vartheta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \vartheta} \right). \quad (131)$$

Adott  $E$  energia alatti állapotok száma az impulzus térben egy ellipszis területének számításával illetve a koordinátákban egy gömb felületének számításával kapható meg

$$\Omega_0(E) = \frac{1}{h^2} \int_{H < E} d\vartheta d\varphi dp_{\vartheta} dp_{\varphi}, \quad (132)$$

$$= \frac{1}{h^2} \pi \sqrt{2E\Theta} \sqrt{2E\Theta} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{\text{"t érszög" } = 4\pi}, \quad (133)$$

$$\Omega_0(E) = \frac{2\Theta E}{h^2}. \quad (134)$$

## 6.2. Kvantumos

A kvantumos leíráshoz egy forgó test Hamilton-operátorából indulunk ki:

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2\Theta}. \quad (135)$$

Ennek az operátornak a spektruma

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\Theta}. \quad (136)$$

Egy adott  $E$  energia és az alatta lévő legnagyobb impulzus momentum érték  $l_{max}$  kapcsolata tehát

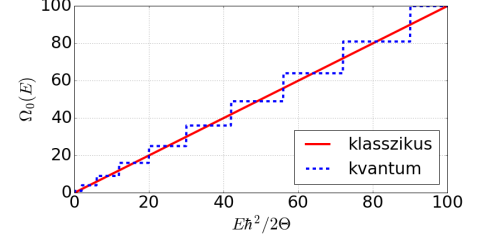
$$l_{max}(l_{max} + 1) = \left\lfloor \frac{2\Theta E}{\hbar^2} \right\rfloor. \quad (137)$$

Mivel minden  $l$  állapot  $(2l+1)$ -szeresen degenerált ezért az adott  $E$  energia alatti állapotok összege előáll páratlan számok összegeként:

$$\Omega_0(E) = \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) = (l_{max} + 1)^2. \quad (138)$$

A klasszikus kifejezést vissza kapjuk ha  $l_{max} \gg 1 \rightarrow l_{max}(l_{max} + 1) \approx (l_{max} + 1)^2$ , ekkor

$$\Omega_0(E) \approx \frac{2\Theta E}{\hbar^2}. \quad (139)$$



8. ábra. A klasszikus és kvantumos rotátor állapotainak száma

## 7. Harmonikus oszcillátor

A harmonikus oszcillátor (és a hidrogén atom ...) sok szempontból az elméleti számítások állatorvosi lova. Határozzuk meg az állapotok számát ebben az egyszerű rendszerben is.

### 7.1. Klasszikus

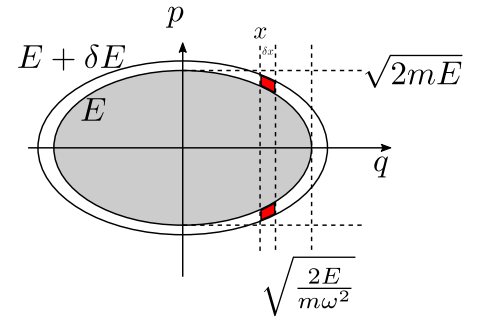
A Hamilton-függvény alakjából

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (140)$$

jól látszik hogy egy adott  $E$  energia egy ellipszist határoz meg, azaz az állapotok száma

$$\Omega_0(E) = \frac{1}{h} \int_{H < E} dp dq = \frac{1}{h} \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \pi, \quad (141)$$

$$\Omega_0(E) = \frac{E}{\hbar\omega}. \quad (142)$$



9. ábra. Az oszcillátor fázistere

### 7.2. Kvantumos

A kvantumos állapotszámoláshoz induljunk ki a harmonikus oszcillátor spektrumából:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (143)$$

Azaz egy adott  $E$  energia alatt az  $n$  index maximális értéke

$$n_{max} = \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad (144)$$

amiből

$$\Omega_0(E) = \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (145)$$

Itt is látjuk hogy nagy energiákra vagy a  $\hbar \rightarrow 0$  határesetben a klasszikus és a kvantumos állapotszám megegyezik.

### 7.3. Egy érdekes feladat

Mikrokanonikus sokaságot feltételezve lássuk be hogy annak a valószínűsége hogy egy klasszikus harmonikus oszcillátor helyzete  $x$  és  $x + \delta x$  között van,  $P(x, x + \delta x)$ , megegyezik az oszcillátor ezen intervallumban eltöltött ideje,  $t(x, x + \delta x)$ , és a periódus idő,  $T_{per} = \frac{2\pi}{\omega}$ , hányadosával:

$$P(x, x + \delta x) = \frac{t(x, x + \delta x)}{T_{per}} \quad (146)$$

A kérdéses tartományban töltött idő a tartomány hosszával egyenesen a tartományon történő áthaladás sebességével viszont fordítottan arányos. Az arányossági tényező 2 hszen odafele és visszafelé is időzünk  $x$  közelében!

$$t(x, x + \delta x) = 2 \frac{\delta x}{v(x)}. \quad (147)$$

A vizsgált  $P(x, x + \delta x)$  valószínűség a megfelelő fázistér térfogatok arányával kifejezve:

$$P(x, x + \delta x) = \frac{2dp(x)\delta x/h}{\Omega(E, \delta E)} = \frac{2 \frac{dp(x)}{dE} \delta E \delta x/h}{\Omega(E, \delta E)} \quad (148)$$

Felhasználva  $\Omega$  definícióját (100) és a harmonikus oszcillátor állapotainak számát (142) kapjuk, hogy

$$\Omega(E, \delta E) = \frac{d\Omega_0}{dE} \delta E = \frac{2\pi}{h\omega} \delta E. \quad (149)$$

Felhasználva a harmonikus oszcillátor energiáját

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (150)$$

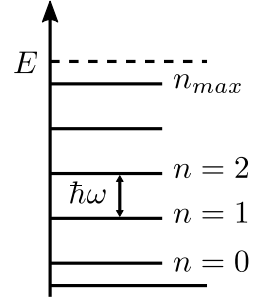
$adp/dE$  derivált (talán nem túl meglepő módon)

$$\frac{1}{\frac{dp}{dE}} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v. \quad (151)$$

A fentieket visszahelyettesítve (148)-be kapjuk, hogy

$$P(x, x + \delta x) = \frac{2 \frac{1}{v} \delta E \delta x/h}{\frac{2\pi}{h\omega} \delta E} = 2 \frac{\frac{\delta x}{v}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{t(x, x + \delta x)}{T_{per}}. \quad (152)$$

q.e.d (nem kvantum elektrodinamika...)



10. ábra. Az oszcillátor spektruma