

Домашняя работа №1

Михаил Корнилович

Сентябрь 2022

1 Задача №1

$$\begin{cases} f_1(n) \leq c_1 g_1(n) \\ f_2(n) \leq c_2 g_2(n) \end{cases} \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \leq \mathcal{O}(g_1(n) + g_2(n))$$

2 Задача №2

Имеем по определению:

$$f(n) \leq c_1 f(n) \text{ и } g(n) \leq c_2 g(n)$$

Также:

$$\min(f(n), g(n)) \leq \max(f(n), g(n)) \leq \max(f(n), g(n))$$

Распишем это неравенство, используя определение:

$$\min(c_1 f(n), c_2 g(n)) \leq \max(f(n), g(n)) \leq \max(c_1 f(n), c_2 g(n))$$

Получается $\exists c_1, c_2 : \max(f(n), g(n))$ ограничена сверху и снизу \Rightarrow
 $\Rightarrow \max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$

3 Задача №3

Чтобы это равенство оказалось верным, нужно доказать, что:

$$\sum_{i=1}^{n+5} 2^i \leq c \cdot 2^n$$

Воспользуемся математической индукцией.

База индукции:

Пусть $n_0 = 0$, а $c = 62$, тогда $62 \leq 62$ - верно

Индукционный переход:

Пусть для n неравенство $\sum_{i=1}^{n+5} 2^i \leq c \cdot 2^n$ верно.

Проверим его для $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+6} 2^i \leq c \cdot 2^{(n+1)} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+5} 2^i + 2^{n+6} \leq 2c \cdot 2^n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+5} 2^i + 2^{n+6} \leq c \cdot 2^n + c \cdot 2^n$$

Т.к. $\sum_{i=1}^{n+5} 2^i \leq c \cdot 2^n$ верно, нам надо проверить только то, что $2^{n+6} \leq c \cdot 2^n$

$$2^{n+6} \leq c \cdot 2^n \Leftrightarrow 2^6 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n \Leftrightarrow 2^6 \leq c$$

Последнее неравенство верно, т.к. c - любое число, следовательно

$$\sum_{i=1}^{n+5} 2^i = \mathcal{O}(2^n)$$

4 Задача №4

Чтобы равенство оказалось верным нужно доказать, что:

$$c \cdot n^3 \leq \frac{n^3}{6} - 7 \cdot n^2$$

Воспользуемся математической индукцией.

База индукции:

Пусть $n = 1$ и $c = \frac{-41}{6}$, тогда:

$$\frac{-41}{6} \leq \frac{-41}{6}$$

Индукционный переход:

Пусть для n неравенство $c \cdot n^3 \leq \frac{n^3}{6} - 7 \cdot n^2$ верно. Распишем его:

$$c \cdot n^3 \leq \frac{n^3}{6} - 7 \cdot n^2 \Rightarrow 6c \cdot n \leq n - 42 \Rightarrow n(6c - 1) \leq -42 \quad (1)$$

Проверим его для $n + 1$:

$$c \cdot (n+1)^3 \leq \frac{(n+1)^3}{6} - 7 \cdot (n+1)^2 \Rightarrow 6c \cdot (n+1)^3 \leq (n+1)^3 - 42 \cdot (n+1)^2 \Rightarrow (n+1)^3(6c-1) \leq -42 \cdot (n+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)(6c-1) \leq -42 \quad (2)$$

Из (1) следует то, что $(6c-1) < 0$. Зная это, (2) неравенство становится верным.

Следовательно,

$$\frac{n^3}{6} - 7 \cdot n^2 = \Omega(n^3)$$

5 Задача №5

Ответ:

$$1, n^{\frac{1}{\log n}}, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \log \log n, \sqrt{\log n}, \log^2 n, (\sqrt{2})^{\log n}, n, 2^{\log n}, n \log n, \log(n!), \\ n^2, 4^{\log n}, n^3, \log(n)!, (\log n)^{\log n}, n^{\log \log n}, n \cdot 2^n, e^n, 2^{2^n}, 2^{2^{n+1}}, n!, (n+1)!$$