Lectures DM term2

Михаил Корнилович

15 февраля 2023 г.

1 Теория вероятности

1.1 Вероятное пр-во

Ω - элементарные исходы (мн-во конечное и счётное)
p - дискретное плотность вероятности $p : \Omega \to [0, 1]$

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(w) = 1$$

Событие (случайное) $A \subset \Omega$

1.2 Примеры

1. Честная монета $\Omega = \{0, 1\},\ p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$.
2. Нечестная монета $\Omega = \{0, 1\},\ p(1) = p, p(0) = q, p + q = 1$
3. Честная игральная кость $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, p(\omega) = \frac{1}{6}$

1.3 Верояиность события

$P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega) = \mathbb{P}(A) = Pr(A)$ - формула вероятности события.

Nota bene
Не существет дискретного вероятного пространства с бесконечным числом равновероятных исходов.

1.4 Независимые события

A и B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ **- условная вероятность A при условии B**

1.5 Произведение вероятных пространств

$$\Omega_1, p_1$$
$$\Omega_2, p_2$$
$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$
$$p(< \omega_1, \omega_2 >) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$$

$\forall A_1 \subset \Omega_1\ \forall A_2 \subset \Omega_2$

$A_1 \times \Omega_2, \Omega_1 \times A_2$ - независимы.

Доказательство

$$P(A_1 \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \times A_2) = P(A_1 \times A_2) = \sum_{a \in A_1, b \in A_2} p(<a, b>) = \sum_{a \in A_1} \sum_{b \in B_1} p_1(a) p_2(b) =$$

$$\sum_{a \in A_1} p_1(a) (\sum_{b \in A_2} p_2(b)) = P_1(A_1) P_2(A_2)$$

Конец доказательства

1.6 Независимость для более чем 2 событий

$A_1 A_2 .. A_n$ - события

1. Попарно независимы. A_i, A_j - независимы

2. Независимы в совокупности.

   $$\forall I \subset \{1, 2, .., n\} P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i), \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

1.7 Формула полной вероятности

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n, \quad i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$$

Полная система событий.

Дано: $P(A_i) \quad P(B|A_i)$

Найти: $P(B)$

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i)$ **- формула полной вероятности**

1.8 Формула Байеса

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(B|A_i) p(A_i)}$$