Домашняя работа №1

Михаил Корнилович

Сентябрь 2022

1 Задача №1

$$\begin{cases} f_1(n) \le c_1 g_1(n) \\ f_2(n) \le c_2 g_2(n) \end{cases} \Rightarrow f_1(n)+f_2(n) \le c_1 g_1(n)+c_2 g_2(n) \Rightarrow f_1(n)+f_2(n) \le \mathcal{O}(g_1(n)+g_2(n))$$

2 Задача №2

Имеем по определению:
$f(n) \le c_1 f(n)$ и $g(n) \le c_2 g(n)$
Также:
$min(f(n), g(n)) \le max(f(n), g(n)) \le max(f(n), g(n))$
Распишем это неравенство, используя определение:
$min(c_1 f(n), c_2 g(n)) \le max(f(n), g(n)) \le max(c_1 f(n), c_2 g(n))$
Полчуается $\exists c_1, c_2 : max(f(n), g(n))$ ограничена сверху и снизу $\Rightarrow$
$\Rightarrow max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$

3 Задача №3

Чтобы это равенство оказалось верным, нужно доказать, что:
$\sum_{i=1}^{n+5} 2^i \le c \cdot 2^n$
Воспользуемся математической индукцией.
База индукции:
Пусть $n_0 = 0$, а $c = 62$, тогда $62 \le 62$ - верно
Индукционный переход:
Пусть для n неравенство $\sum_{i=1}^{n+5} 2^i \le c \cdot 2^n$ верно.
Проверим его для n + 1:

$$\sum_{i=1}^{n+6} 2^i \le c \cdot 2^{(n+1)} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+5} 2^i + 2^{n+6} \le 2c \cdot 2^n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+5} 2^i + 2^{n+6} \le c \cdot 2^n + c \cdot 2^n$$

Т.к. $\sum_{i=1}^{n+5} 2^i \le c \cdot 2^n$ верно, нам надо проверить только то, что $2^{n+6} \le c \cdot 2^n$

$$2^{n+6} \le c \cdot 2^n \Leftrightarrow 2^6 \cdot 2^n \le c \cdot 2^n \Leftrightarrow 2^6 \le c$$

Последнее неравенство верно, т.к. c - любое число, следовательно
$\sum_{i=1}^{n+5} 2^i = \mathcal{O}(2^n)$

4 Задача №4

Чтобы равенство оказалочь верным нужно доказать, что:
$c \cdot n^3 \le \frac{n^3}{6} - 7 \cdot n^2$
Воспользуемся математической индукцией.
База индукции:
Пусть $n = 1$ и $c = \frac{-41}{6}$, тогда:

$\frac{-41}{6} \leq \frac{-41}{6}$
Индукционный переход:

Пусть для n неравенсто $c \cdot n^3 \leq \frac{n^3}{6} - 7 \cdot n^2$ верно. Распишем его:

$$c \cdot n^3 \leq \frac{n^3}{6} - 7 \cdot n^2 \Rightarrow 6c \cdot n \leq n - 42 \Rightarrow n(6c-1) \leq -42 \qquad (1)$$

Проверим его для n + 1:

$$c \cdot (n+1)^3 \leq \frac{(n+1)^3}{6} - 7 \cdot (n+1)^2 \Rightarrow 6c \cdot (n+1)^3 \leq (n+1)^3 - 7 \cdot (n+1)^2 \Rightarrow (n+1)^3(6c-1) \leq -7 \cdot (n+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)(6c-1) \leq -7 \qquad (2)$$

Из (1) следует то, что $(6c-1) < 0$. Зная это, (2) неравенсто становиться верным.

Следовательно,

$$\frac{n^3}{6} - 7 \cdot n^2 = \Omega(n^3)$$

5 Задача №5

Ответ:

$$1, n^{\frac{1}{logn}}, (\frac{3}{2})^2, loglogn, \sqrt{logn}, log^2 n, (\sqrt{2})^{logn}, n, 2^{logn}, nlogn, log(n!),$$
$$n^2, 4^{logn}, n^3, log(n)!, (logn)^{logn}, n^{loglogn}, n \cdot 2^n, e^n, 2^{2^n}, 2^{2^{n+1}}, n!, (n+1)!$$