1 Исчисление высказываний

1.1 Предметный язык и язык исследователя (метаязык). Соглашения об обозначениях. Схемы формул.

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

1.2 Язык исчисления высказываний.

Определение. Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

1. Атомарное высказывание — пропозициональная переменная: A, B', C_{1234}
2. Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
   (a) Отрицание: $(\neg\alpha)$
   (b) Конъюнкция: $(\alpha \,\&\, \beta)$ *или* $(\alpha \wedge \beta)$
   (c) Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$
   (d) Импликация: $(\alpha \to \beta)$ *или* $(\alpha \supset \beta)$

Пример.

$$(((A \to B) \vee (B \to C)) \vee (C \to A))$$

1.3 Оценка высказываний, общезначимость, следование.

1.3.1

Чтобы задать оценку высказываний: Зафиксируем множество истинностных значений $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$

Определим функцию оценки переменных (*интерпретацию*) $f : P \to V$
(P — множество пропозициональных переменных). Если $[\![A]\!] = \text{Л}$ и $[\![B]\!] = \text{И}$, то $[\![(A \to B) \to (B \to A)]\!] = \text{Л}$

1.3.2

Синтаксис для указания функции оценки переменных

$$[\![\alpha]\!]^{X_1:=v_1,\ \ldots,\ X_n:=v_n}$$

Это всё метаязык — потому полагаемся на здравый смысл

$$[\![A \,\&\, B \,\&\, (C \to C)]\!]^{A:=\text{И},\ B:=[\![\neg A]\!]}$$

1.3.3

1. Переменные

$$[\![X]\!] = f(X) \qquad [\![X]\!]^{X:=a} = a$$

2. Отрицание

$$[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} \text{Л}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = \text{И} \\ \text{И}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

3. Конъюнкция

$$[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \text{И} \\ \text{Л}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

4. Дизъюнкция

$$[\![\alpha \vee \beta]\!] = \begin{cases} \text{Л}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \text{Л} \\ \text{И}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

5. Импликация

$$[\![\alpha \to \beta]\!] = \begin{cases} \text{Л}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = \text{И},\ [\![\beta]\!] = \text{Л} \\ \text{И}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

1.3.4

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение $A \to A$ — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной A:

$$[\![A \to A]\!]^{A:=И} = И$$
$$[\![A \to A]\!]^{A:=Л} = И$$

Выражение $A \to \neg A$ тавтологией не является:

$$[\![A \to \neg A]\!]^{A:=И} = Л$$

1.3.5

1. Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

2. Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима.*

3. Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима.*

4. Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима.*

1.4 Доказуемость, гипотезы (контекст), выводимость.

1.4.1

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

1. является аксиомой — существует замена метапеременных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу δ_i, либо

2. получается из $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$ по правилу Modus Ponens — существуют такие индексы $j < i$ и $k < i$, что $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$.

1.4.2

(доказательство формулы α) — такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$.

Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство. Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

1.4.3

(вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$) — такая последовательность $\delta_1, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

1. является аксиомой;

2. либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих;

3. либо является одной из гипотез: существует $t : \delta_i \equiv \gamma_t$.

1.4.4

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, (Γ, Δ_1, ...) списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \Delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

1.5 Корректность, полнота, противоречивость и непротиворечивость (эквивалентные формулировки).

1.5.1 Корректность

Лемма. Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, $\vdash \alpha$ влечёт $\models \alpha$.

Лемма. Если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$

1.5.2 Полнота

Лемма. Теория полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ влечёт $\vdash \alpha$.

1.6 Теорема о дедукции для исчисления высказываний (формулировка). Теорема о полноте исчисления высказываний (формулировка)

1.6.1 Теорема о дедукции для исчисления высказываний

Теорема. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

1.6.2 Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема. Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

2 Топологическое пространство

2.1 Определение.

2.1.1

Определение. Топологическим пространством называется упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, причём:

1. $\varnothing, X \in \Omega$
2. если $A_1, \dots, A_n \in \Omega$, то $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$;
3. если $\{A_\alpha\}$ — семейство множеств из Ω, то и $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$.

Множество Ω называется *топологией*. Элементы Ω называются открытыми множествами.

2.2 Метрическое пространство.

2.2.1

Определение. Метрикой на X назовём множество, на котором определена функция расстояния $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника)

Определение. Открытым ε-шаром с центром в точке $x \in X$ назовём $O_\varepsilon(x) = \{t \in X \mid d(x, t) < \varepsilon\}$.
Определение. Если X — некоторое множество и d — метрика на X, то будем говорить, что топологическое пространство, задаваемое базой $\mathcal{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in X\}$, порождено метрикой d.

2.3 Примеры (топология стрелки, Зарисского, топология на дереьвях).

2.3.1 Топология стрелки

Определение. Топология стрелки: $\langle \mathbb{R}, \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\} \rangle$ — открыты все положительные лучи.

2.3.2 Топология Зарисского

2.3.3 Топология на дереьвях

Определение. Пусть некоторый лес задан конечным множеством вершин V и отношением $(\preceq)$, связывающим предков и потомков ($a \preceq b$, если b — потомок a). Тогда подмножество его вершин $X \subseteq V$ назовём открытым, если из $a \in X$ и $a \preceq b$ следует, что $b \in X$.
Лемма. Лес связен (является одним деревом) тогда и только тогда, когда соответствующее ему топологическое пространство связно.

2.4 Открытые и замкнутые множества. Связность. Компактность.

2.4.1 Открытые и замкнутые множества.

Определение. Множество Ω называется *топологией.* **Определение.** Элементы Ω называются открытыми множествами.

2.4.2 Связность.

Определение. Пространство $\langle X, \Omega \rangle$ связно, если нет $A, B \in \Omega$, что $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$ и $A, B \neq \varnothing$.

2.4.3 Компактность.

Определение. Будем говорить, что множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.
Пример. Множество $\{0, 1\}$ в дискретной топологии компактно.
Пример. Интервал $(0, 1)$ в $\mathbb{R}$ не компактен — например, рассмотрим покрытие $\{(\varepsilon, 1) \mid \varepsilon \in (0, 1)\}$

2.5 Непрерывные функции. Путь. Линейная связность.

2.5.1 Непрерывные функции.

Определение. Функция $f : X \to Y$ непрерывна, если прообраз любого открытого множества открыт.
Пример. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ всегда непрерывна (при дискретной топологии на $\mathbb{N}$), поскольку любое множество в $\mathbb{N}$ открыто.

2.5.2 Путь.

2.5.3 Линейная связность.

3 Интуиционистское исчисление высказываний

3.1 Доказательства чистого существования.

Теорема. Любое непрерывное отображение f шара в $\mathbb{R}^n$ на себя имеет неподвижную точку
Теорема. Существует пара иррациональных чисел a и b, такая, что a^b — рационально.

3.2 BHK-интерпретация.

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

1. $\alpha \ \& \ \beta$ построено, если построены α и β
2. $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
3. $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
4. $\perp$ — конструкция, не имеющая построения
5. $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \to \perp$

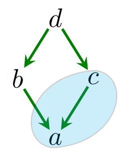
3.3 Решётки.

Определение. Решёткой называется упорядоченная пара: $\langle X, (\preceq)\rangle$, где X — некоторое множество, а $(\preceq)$ — частичный порядок на X, такой, что для любых $a, b \in X$ определены $a + b = \sup\{a, b\}$ и $a \cdot b = \inf\{a, b\}$.

Пример. $\langle \Omega, (\subseteq)\rangle$ — решётка. $\langle \mathbb{N}\backslash\{1\}, (\vdots)\rangle$ — не решётка.

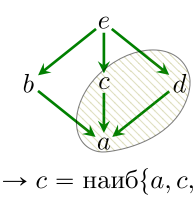
3.4 Дистрибутивная решётка. Пентагон и диамант.

Определение. Дистрибутивной решёткой называется такая, что для любых a, b, c выполнено $a\cdot(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Определение. Импликативная решётка — такая, в которой для любых элементов есть псевдодополнение.
Лемма. Любая импликативная решётка — дистрибутивна.
Определение. Псевдодополнением $a \to b$ называется наибольший из $\{x \mid a \cdot x \preceq b\}$.
Пример.

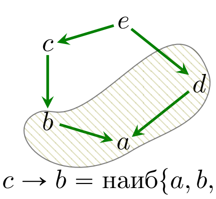


$$a \cdot b = a$$
$$b \cdot b = b$$
$$c \cdot b = a$$
$$d \cdot b = b$$

Здесь $b \to c = \text{наиб}\{x \mid b \cdot x \preceq c\} = \text{наиб}\{a, c\} = c$
Пример. (нет псевдодополнения: диамант и пентагон)



$b \to c = \text{наиб}\{a, c, d\}$



$c \to b = \text{наиб}\{a, b, d\}$

3.5 Булевы и псевдобулевы алгебры.

Определение. 0 — наименьший элемент решётки, а 1 — наибольший элемент решётки.
Лемма. В любой импликативной решётке $\langle X, (\preceq)\rangle$ есть 1.
Определение. Импликативная решётка с 0 — псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга). В такой решётке определено $\sim a := a \to 0$.
Определение. Булева алгебра — псевдобулева алгебра, в которой $a + \sim a = 1$ для всех a.

3.6 Алгебра Линденбаума.

Определение. Определим предпорядок на высказываниях: $\alpha \le \beta := \alpha \vdash \beta$ в интуиционистском исчислении высказываний. Также $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \le \beta$ и $\beta \le \alpha$.
Определение. Пусть L — множество всех высказываний. Тогда алгебра Линденбаума $\mathcal{L} = L/_{\approx}$.
Теорема. $\mathcal{L}$ — псевдобулева алгебра.

3.7 Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах (формулировка, идея доказательства).

Теорема. Пусть $[\![\alpha]\!] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$. Такая оценка интуиционистского исчисления высказываний алгеброй Линденбаума является согласованной.
Теорема. Интуиционистское исчисление высказываний полно в псевдобулевых алгебрах: если $\models \alpha$ во всех псевдобулевых алгебрах, то $\vdash \alpha$.

3.8 Модели Крипке. Вынужденность.

Определение. Модель Крипке $\langle \mathcal{W}, \preceq, (\Vdash) \rangle$:

1. $\mathcal{W}$ — множество миров, $(\preceq)$ — нестрогий частичный порядок на $\mathcal{W}$;
2. $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ — отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash X$, то $W_j \Vdash X$.

Доопределим вынужденность:

1. $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$;
2. $W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$;
3. $W \Vdash \alpha \to \beta$, если всегда при $W \preceq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$
4. $W \Vdash \neg\alpha$, если всегда при $W \preceq W_1$ выполнено $W_1 \not\Vdash \alpha$.

Будем говорить, что $\Vdash \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех $W \in \mathcal{W}$. Будем говорить, что $\models_\kappa \alpha$, если $\Vdash \alpha$ во всех моделях Крипке.

3.9 Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам.

Лемма. Если $W_1 \Vdash \alpha$ и $W_1 \preceq W_2$, то $W_2 \Vdash \alpha$
Теорема. Пусть $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ — некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.

3.10 Нетабличность ИИВ (формулировка теоремы).

Определение. Пусть задано V, значение $T \in V$ («истина»), функция $f_P : P \to V$, функции $f_\&, f_\vee, f_\to : V \times V \to V$, функция $f_\neg : V \to V$.

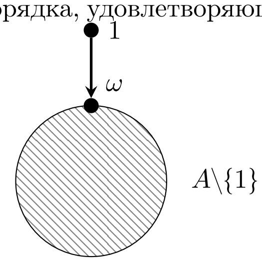
Тогда оценка $[\![X]\!] = f_P(X)$, $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$, $[\![\neg\alpha]\!] = f_\neg([\![\alpha]\!])$ — табличная.
Определение. Табличная модель конечна, если V конечно.
Теорема. Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний.

4 Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний.

4.1 Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$.

Определение. Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, (\preceq) \rangle$ определим операцию «гёделевизации»: $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})}) \rangle$, где отношение $(\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})$ — минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:

1. $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, если $a \preceq_{\mathcal{A}} b$ и $a, b \notin \{\omega, 1\}$;
2. $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, если $a \neq 1$;
3. $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



Теорема. $\Gamma(\mathcal{A})$ — гёделева алгебра.
Теорема. Рассмотрим оценку $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}}$. Тогда она является согласованной с ИИВ.

4.2 Дизъюнктивность ИИВ (формулировка).

Определение. Исчисление дизъюнктивно, если при любых α и β из $\vdash \alpha \vee \beta$ следует $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.
Определение. Решётка гёделева, если $a + b = 1$ влечёт $a = 1$ или $b = 1$.
Теорема. Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно.

5 Разрешимость интуиционистского исчисления высказываний (формулировка).

Теорема. Если $\nvdash \alpha$ в ИИВ, то существует $\mathcal{G}$, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$, причём $|\mathcal{G}| \leqslant 2^{2^{|\alpha|+2}}$.
Теорема. ИИВ разрешимо.

6 Исчисление предикатов.

6.1 Язык исчисления предикатов.

Определение.

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   (a) Предметные переменные: a, b, c, $\ldots$, метапеременные x, y.
   (b) Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, $\ldots$
   (c) Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, $\ldots$
   (a) Предикатные выражения: $P(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременная P.
   Имена: A, B, C, $\ldots$
   (b) Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \mathbin{\&} \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi)$.
   (c) Кванторы: $(\forall x.\varphi)$ и $(\exists x.\varphi)$.

6.2 Сокращения метаязыка для исчисления предикатов.

Определение.

1. Метапеременные:
   (a) ψ, ϕ, π, $\ldots$ — формулы
   (b) P, Q, $\ldots$ — предикатные символы
   (c) θ, $\ldots$ — термы
   (d) f, g, $\ldots$ — функциональные символы
   (e) x, y, $\ldots$ — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a.\, \underbrace{A \vee B \vee C \to \exists b.\, \underbrace{D \mathbin{\&} \neg E}_{\exists b....}}_{\forall a....}) \mathbin{\&} F$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:
   (a) $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
   (b) $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
   (c) 0 вместо z
   (d) $\ldots$

6.3 Следование в исчислении предикатов.

Определение. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$, если выполнено два условия:

1. α выполнено всегда, когда выполнено $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$;
2. α не использует кванторов по переменным, входящим свободно в $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из Γ, то $\Gamma \models \alpha$

6.4 Теорема о дедукции в исчислении предикатов (формулировка).

Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

6.5 Теорема о корректности исчисления предикатов (формулировка).

Теорема. Если θ свободен для подстановки вместо x в φ, то $[\![\varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\varphi[x := \theta]]\!]$
Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из $FV(\Gamma)$, то $\Gamma \models \alpha$