

# 1 Исчисление предикатов

## 1.1 Исчисление предикатов

### 1.1.1 Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная  $\theta$ .
  - (a) Предметные переменные:  $a, b, c, \dots$ , метAPEReменные  $x, y$ .
  - (b) Функциональные выражения:  $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменные  $f, g, \dots$
  - (c) Примеры:  $r, q(p(x, s), r)$ .
3. Логические выражения: метAPEReменные  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .
  - (a) Предикатные выражения:  $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменная  $P$ .  
Имена:  $A, B, C, \dots$
  - (b) Связки:  $(\varphi \vee \psi), (\varphi \& \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi)$ .
  - (c) Кванторы:  $(\forall x. \varphi)$  и  $(\exists x. \varphi)$ .

### 1.1.2 Сокращения записи, метаязык

1. МетAPEReменные:
  - (a)  $\psi, \phi, \pi, \dots$  — формулы
  - (b)  $P, Q, \dots$  — предикатные символы
  - (c)  $\theta, \dots$  — термы
  - (d)  $f, g, \dots$  — функциональные символы
  - (e)  $x, y, \dots$  — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$\underbrace{(\forall a. A \vee B \vee C \rightarrow \exists b. \underbrace{D \& \neg E}_{\exists b. \dots}) \& F}_{\forall a. \dots}$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:

- (a)  $(\theta_1 = \theta_2)$  вместо  $E(\theta_1, \theta_2)$
- (b)  $(\theta_1 + \theta_2)$  вместо  $p(\theta_1, \theta_2)$
- (c)  $0$  вместо  $z$
- (d)  $\dots$

### 1.1.3 Оценка исчисления предикатов

**Определение.** Оценка — упорядоченная четвёрка  $\langle D, F, P, E \rangle$ , где:

1.  $D$  — предметное множество;
2.  $F$  — оценка для функциональных символов; пусть  $f_n$  —  $n$ -местный функциональный символ:

$$F_{f_n} : D^n \rightarrow D$$

3.  $P$  — оценка для предикатных символов; пусть  $T_n$  —  $n$ -местный предикатный символ:

$$P_{T_n} : D^n \rightarrow V \quad V = \{\text{И}, \text{Л}\}$$

4.  $E$  — оценка для предметных переменных.

$$E(x) \in D$$

### 1.1.4 Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

1. Правила для связок  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$  остаются прежние;

2.  $\llbracket f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = F_{f_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$

3.  $\llbracket P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = P_{T_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$

4.

$$\llbracket \forall x. \phi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = И \text{ при всех } t \in D \\ Л, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = Л \end{cases}$$

5.

$$\llbracket \exists x. \phi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = И \\ Л, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = Л \text{ при всех } t \in D \end{cases}$$

## 1.2 Общезначаимость, следование, выводимость

### 1.2.1 Общезначаимость

**Определение.** Формула исчисления предикатов общезначаима, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых  $D$ ,  $F$ ,  $P$  и  $E$ .

### 1.2.2 Следование, выводимость

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде  $\theta$  свободен для подстановки вместо  $x$  в  $\varphi$ ):

11.  $(\forall x. \varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$

12.  $\varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x. \varphi$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде  $x$  не входит свободно в  $\varphi$ ):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x. \psi} \text{ Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x. \psi) \rightarrow \varphi} \text{ Правило для } \exists$$

**Определение.** Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.

## 1.3 Теорема о дедукции для исчисления предикатов

### 1.3.1 Теорема

**Теорема.** Если  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

### 1.3.2 Следование

**Определение.**  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$ , если выполнено два условия:

1.  $\alpha$  выполнено всегда, когда выполнено  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ;
2.  $\alpha$  не использует кванторов по переменным, входящим свободно в  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ .

**Теорема.** Если  $\Gamma \vdash \alpha$  и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из  $\Gamma$ , то  $\Gamma \models \alpha$

## 1.4 Корректность

### 1.4.1 Теорема

**Теорема.** Если  $\theta$  свободен для подстановки вместо  $x$  в  $\varphi$ , то  $\llbracket \varphi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \varphi[x := \theta] \rrbracket$

## 2 Непротиворечивое множество формул

### 2.1 Непротиворечивое множество формул

#### 2.1.1 Определение

**Определение.**  $\Gamma$  — *непротиворечивое множество формул*, если  $\Gamma \not\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$  для любого  $\alpha$

#### 2.1.2 Примеры

1. непротиворечиво:

- $\Gamma = \{A \rightarrow B \rightarrow A\}$
- $\Gamma = \{P(x, y) \rightarrow \neg P(x, y), \forall x. \forall y. \neg P(x, y)\};$

2. противоречиво:

- $\Gamma = \{P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P\}$   
так как  $P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P \vdash \neg P \ \& \ \neg\neg P$

3. пусть  $D = \mathbb{Z}$  и  $P(x) \equiv (x > 0)$ , аналогом для этой модели будет  $\Gamma = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$

### 2.2 Полное непротиворечивое множество формул

**Определение.**  $\Gamma$  — *полное* непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, если:

1.  $\Gamma$  содержит только замкнутые бескванторные формулы;
2. если  $\alpha$  — некоторая замкнутая бескванторная формула, то  $\alpha \in \Gamma$  или  $\neg\alpha \in \Gamma$ .

**Определение.**  $\Gamma$  — *полное* непротиворечивое множество замкнутых формул, если:

1.  $\Gamma$  содержит только замкнутые формулы;
2. если  $\alpha$  — некоторая замкнутая формула, то  $\alpha \in \Gamma$ , или  $\neg\alpha \in \Gamma$ .

**Теорема.** Пусть  $\Gamma$  — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула  $\varphi$ , хотя бы  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  или  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  — непротиворечиво.

### 2.3 Доказательство существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов.

#### 2.3.1 Модель для множества формул

**Определение.** Моделью для множества формул  $F$  назовём такую модель  $\mathcal{M}$ , что при всяком  $\varphi \in F$  выполнено  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$

Альтернативное обозначение:  $\mathcal{M} \models \varphi$ .

#### 2.3.2 Теорема

**Теорема.** Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель.

#### 2.3.3 Доказательство теоремы о существовании модели

**Лемма.** Пусть  $\varphi$  — бескванторная формула, тогда  $\mathcal{M} \models \varphi$  тогда и только тогда, когда  $\varphi \in M$

**Доказательство теоремы.**

Пусть  $M$  — непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул.

По теореме о пополнении существует  $M'$  — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что  $M \subseteq M'$ .

По лемме  $M'$  имеет модель, эта модель подойдёт для  $M$ .

### 2.4 Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

#### 2.4.1 Теорема

**Теорема.** Если  $M$  — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

## 2.5 Полнота исчисления предикатов

### 2.5.1 Следствие

Следствие (из теоремы Гёделя о полноте). Исчисление предикатов полно.

## 3 Машина Тьюринга. Задача об останове, её неразрешимость. Неразрешимость исчисления предикатов.

### 3.1 Машина Тьюринга.

**Определение.** Машина Тьюринга:

1. Внешний алфавит  $q_1, \dots, q_n$ , выделенный символ-заполнитель  $q_\varepsilon$
2. Внутренний алфавит (состояний)  $s_1, \dots, s_k$ ;  $s_s$  — начальное,  $s_f$  — допускающее,  $s_r$  — отвергающее.
3. Таблица переходов  $\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \leftrightarrow \rangle$

**Определение.** Состояние машины Тьюринга:

1. Бесконечная лента с символом-заполнителем  $q_\varepsilon$ , текст конечной длины.
2. Головка над определённым символом.
3. Символ состояния (состояние в узком смысле) — символ внутреннего алфавита.

### 3.2 Задача об останове, её неразрешимость.

#### 3.2.1 Разрешимость.

**Определение.** Язык — множество строк

**Определение.** Язык  $L$  разрешим, если существует машина Тьюринга, которая для любого слова  $w$  переходит в допускающее состояние, если  $w \in L$ , и в отвергающее, если  $w \notin L$ .

#### 3.2.2 Неразрешимость задачи останова.

**Определение.** Рассмотрим все возможные описания машин Тьюринга. Составим упорядоченные пары: описание машины Тьюринга и входная строка. Из них выделим язык останавливающихся на данном входе машин Тьюринга.

**Теорема.** Язык всех останавливающихся машин Тьюринга неразрешим.

### 3.3 Неразрешимость исчисления предикатов: доказательство

**Теорема.** Язык всех доказуемых формул исчисления предикатов неразрешим. Т.е. нет машины Тьюринга, которая бы по любой формуле  $\alpha$  определяла, доказуема ли она.

**Доказательство.** Пусть существует машина Тьюринга, разрешающая любую формулу. На её основе тогда несложно построить некоторую машину Тьюринга, перестраивающую любую машину  $S$  (с допускающим состоянием  $s_f$  и входом  $y$ ) в её ограничения  $C$  и разрешающую формулу ИП  $C \rightarrow \exists w_l. \exists w_r. F_{S,y}(w_l, w_r, s_f)$ . Эта машина разрешит задачу останова.

## 4 Порядок теории (0, 1, 2). Теории первого порядка. Аксиоматика Пеано. Арифметические операции. Формальная арифметика.

### 4.1 Порядок теории (0, 1, 2).

#### 4.1.1 Теория первого порядка

**Определение.** Теорией первого порядка назовём исчисление предикатов с дополнительными («нелогическими» или «математическими»):

1. предикатными и функциональными символами;
2. аксиомами.

Сущности, взятые из исходного исчисления предикатов, назовём *логическими*

### 4.1.2 Порядок логики/теории

Порядок	Кванторы	Формализует суждения...	Пример
нулевой	запрещены	об отдельных значениях	И.В.
первый	по предметным переменным $\{2, 3, 5, 7, \dots\} = \{t \mid \forall p. \forall q. (p \neq 1 \ \& \ q \neq 1) \rightarrow (t \neq p \cdot q)\}$	о множествах	И.П.
второй	по предикатным переменным $S = \{\{t \mid P(t)\} \mid \varphi[p := P]\}$	о множествах множеств	Типы
...	...	...	...

## 4.2 Аксиоматика Пеано.

### 4.2.1 Натуральные числа: аксиоматика Пеано, 1889

определено/выполнено:

$\mathbb{N} : 1, 2, \dots$  или  $\mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$

**Определение.**  $N$  (или, более точно,  $\langle N, 0, (') \rangle$ ) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее

1. Операция «штрих»,  $(') : N \rightarrow N$ , причем нет  $a, b \in N$ , что  $a \neq b$ , но  $a = b'$ .  
Если  $x = y'$ , то  $x$  назовём следующим за  $y$ , а  $y$  — предшествующим  $x$ .

2. Константа  $0 \in N$ : нет  $x \in N$ , что  $x' = 0$ .

3. Индукция. Каково бы ни было свойство («предикат»)  $P : N \rightarrow V$ , если:

(a)  $P(0)$

(b) При любом  $x \in N$  из  $P(x)$  следует  $P(x')$

то при любом  $x \in N$  выполнено  $P(x)$ .

Как построить? Например, в стиле алгебры Линденбаума:

1.  $N$  — язык, порождённый грамматикой  $\nu ::= 0 \mid \nu \langle ' \rangle$

2.  $0$  — это «0»,  $x'$  — это  $x ++ \langle ' \rangle$

## 4.3 Арифметические операции.

### 4.3.1 Обозначения и определения

**Определение.**  $1 = 0'$ ,  $2 = 0''$ ,  $3 = 0'''$ ,  $4 = 0''''$ ,  $5 = 0'''''$ ,  $6 = 0''''''$ ,  $7 = 0'''''''$ ,  $8 = 0''''''''$ ,  $9 = 0'''''''''$

**Определение.**

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Например,

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' = ((0'' + 0)')' = ((0'')')' = 0''' = 4$$

**Определение.**

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если } b = 0 \\ a \cdot c + a, & \text{если } b = c' \end{cases}$$

### 4.3.2 Коммутативность сложения.

**Теорема.**  $a + b = b + a$

## 4.4 Формальная арифметика.

**Определение.** Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими ...

1. двухместными функциональными символами  $(+)$ ,  $(\cdot)$ ; одноместным функциональным символом  $(')$ , нульместным функциональным символом  $0$ ;

2. двухместным предикатным символом  $(=)$ ;

3. восемью нелогическими аксиомами:

$$(A1) \ a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$$

$$(A2) \ a = b \rightarrow a' = b'$$

$$(A3) \ a' = b' \rightarrow a = b$$

$$(A4) \ \neg a' = 0$$

$$(A5) \ a + 0 = a$$

$$(A6) \ a + b' = (a + b)'$$

$$(A7) \ a \cdot 0 = 0$$

$$(A8) \ a \cdot b' = a \cdot b + a$$

4. нелогической схемой аксиом индукции  $\psi[x := 0] \ \& \ (\forall x. \psi \rightarrow \psi[x := x']) \rightarrow \psi$  с метапеременными  $x$  и  $\psi$ .

## 5 Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции. функций вычисления простых чисел. Частичный логарифм. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Характеристические функции. Функция Аккермана.

### 5.1 Примитивно-рекурсивные функции

**Определение (Примитивы  $Z, N, U, S$ ).**

1. Примитив «Ноль» ( $Z$ )  $Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$
2. Примитив «Инкремент» ( $N$ )  $N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad N(x_1) = x_1 + 1$
3. Примитив «Проекция» ( $U$ ) — семейство функций; пусть  $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$   
 $U_n^k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad U_n^k(\vec{x}) = x_k$
4. Примитив «Подстановка» ( $S$ ) — семейство функций; пусть  $g : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$   
 $S\langle g, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x}))$

### 5.2 Примитивная рекурсия

#### 5.2.1 Определения.

**Определение.** [примитив «примитивная рекурсия»,  $R$ ] Пусть  $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  и  $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Тогда  $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y - 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

**Определение.** Функция  $f$  — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов  $Z, N, U, S$  и  $R$ .

**Теорема.**  $f(x) = x + 2$  примитивно-рекурсивна

**Лемма.**  $f(a, b) = a + b$  примитивно-рекурсивна

#### 5.2.2 Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел
4. Неформально: все функции, вычисляемые конечным числом вложенных циклов for:

```
for (int i1 = 0; i1 < g1(x1...xn); i1++) {
    for (int i2 = 0; i2 < g2(x1...xn, i1); i2++) {
        ...
        for (int ik = 0; ik < gk(x1...xn, i1, i2...); ik++) {
            // выражение без циклов
        }
        ...
    }
}
```

### 5.3 Частичный логарифм.

### 5.4 Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике.

**Теорема.** Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.

**Теорема.** Любая представимая в Ф.А. функция рекурсивна.

## 5.5 Характеристические функции.

## 5.6 Функция Аккермана.

**Определение.** Функция Аккермана:

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & m = 0 \\ A(m - 1, 1), & m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

## 6 Бета-функция Гёделя. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.

### 6.1 Бета-функция Гёделя.

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины. **Определение.**  $\beta$ -функция Гёделя:  $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь  $(\%)$  — остаток от деления.

**Теорема.**  $\beta$ -функция Гёделя представима в Ф.А. формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление  $b$  на  $x$  с остатком: найдутся частное  $(q)$  и остаток  $(d)$ , что  $b = q \cdot x + d$  и  $0 \leq d < x$ .

**Теорема.** Если  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$ , то найдутся такие  $b, c \in \mathbb{N}_0$ , что  $a_i = \beta(b, c, i)$

### 6.2 Гёделева нумерация.

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	$k, n$	Гёделев номер
3	(	17	&	0	0, 0	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	(.)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	$x_k$	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\rightarrow$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	$f_k^n$			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	$P_k^n$			

2. Формула.  $\phi \equiv s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ . Гёделев номер:  $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$ .

3. Доказательство.  $\Pi = \delta_0 \delta_1 \dots \delta_{k-1}$ , его гёделев номер:  $\ulcorner \Pi \urcorner = 2^{\ulcorner \delta_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \delta_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{\ulcorner \delta_{k-1} \urcorner}$

### 6.3 Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.

#### 6.3.1 Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

**Теорема.** Пусть функция  $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$  представима в Ф.А. формулой  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$ . Тогда примитив  $M\langle f \rangle$  представим в Ф.А. формулой

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \& \forall u. u < y \rightarrow \neg \varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

**Теорема.** Если  $f$  — рекурсивная функция, то она представима в Ф.А.

#### 6.3.2 Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем  $f$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . По представимости нам известна  $\varphi$ , что  $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ . Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.
3. Параллельный перебор значений и доказательств:  $s = 2^y \cdot 3^p$ . Переберём все  $s$ , по  $s$  получим  $y$  и  $p$ . Проверим, что  $p$  — код доказательства  $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ .

## 7 Непротиворечивость (эквивалентные определения), $\omega$ -непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера. Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики. Неполнота расширений формальной арифметики. Ослабленные варианты: арифметика Пресбургера, система Робинсона.

### 7.1 Непротиворечивость (эквивалентные определения), $\omega$ -непротиворечивость.

### 7.2 Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики.

**Определение.** Если для любой формулы  $\phi(x)$  из  $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\bar{1}), \vdash \phi(\bar{2}), \dots$  выполнено  $\not\vdash \exists x. \neg \phi(x)$ , то теория *омега-непротиворечива*.

**Теорема.** Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- Если формальная арифметика непротиворечива, то  $\not\vdash \sigma(\bar{\sigma})$ .
- Если формальная арифметика  $\omega$ -непротиворечива, то  $\not\vdash \neg \sigma(\bar{\sigma})$ .

### 7.3 Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера.

**Определение.**  $\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2$        $\theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$

**Определение.** Пусть  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$ , если  $\vdash \neg \xi(\bar{\ulcorner \xi \urcorner})$ . Пусть  $\omega_2$  выражает  $W_2$  в формальной арифметике.

**Теорема.** Рассмотрим  $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_2, q)$ . Тогда  $\not\vdash \rho(\bar{\ulcorner \rho \urcorner})$  и  $\not\vdash \neg \rho(\bar{\ulcorner \rho \urcorner})$ .  $\rho(\bar{\ulcorner \rho \urcorner})$ : «Меня легче опровергнуть, чем доказать»

### 7.4 Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики.

**Определение.** *Семантически* полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

*Синтаксически* полная теория — теория, в которой для каждой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \neg \alpha$ .

**Теорема.** Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

### 7.5 Неполнота расширений формальной арифметики.

**Определение.** Теория  $\mathcal{S}$  — расширение теории  $\mathcal{T}$ , если из  $\vdash_{\mathcal{T}} \alpha$  следует  $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$

**Определение.** Теория  $\mathcal{S}$  — рекурсивно-аксиоматизируемая, если найдётся теория  $\mathcal{S}'$  с тем же языком, что:

1.  $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\vdash_{\mathcal{S}'} \alpha$ ;
2. Множество аксиом теории  $\mathcal{S}'$  рекурсивно.

**Теорема.** Если  $\mathcal{S}$  — непротиворечивое рекурсивно-аксиоматизируемое расширение формальной арифметики, то в ней можно доказать аналоги теорем Гёделя о неполноте арифметики.

### 7.6 Ослабленные варианты: арифметика Пресбургера, система Робинсона.

#### 7.6.1 Арифметика Пресбургера

**Определение.** Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы 0, 1, (+), нелогический предикатный символ (=) и следующие нелогические аксиомы, называется арифметикой Пресбургера.

$$\begin{aligned} &\neg(0 = x + 1) \\ &x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \\ &x + 0 = x \\ &x + (y + 1) = (x + y) + 1 \\ &(\varphi(0) \ \& \ \forall x. \varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \rightarrow \forall y. \varphi(y) \end{aligned}$$

**Теорема.** Арифметика Пресбургера разрешима и синтаксически и семантически полна.



### 7.6.2 Сужение: система Робинсона

**Определение.** Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы  $0$ ,  $(+)$  и  $(\cdot)$ , нелогический предикатный символ  $(=)$  и следующие нелогические аксиомы, называется системой Робинсона.

$$\begin{array}{ll}
a = a & a = b \rightarrow b = a \\
a = b \rightarrow b = c \rightarrow a = c & a = b \rightarrow a' = b' \\
a' = b' \rightarrow a = b & \neg 0 = a' \\
a = b \rightarrow a + c = b + c \ \& \ c + a = c + b & a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c \ \& \ c \cdot a = c \cdot b \\
\neg a = 0 \rightarrow \exists b. a = b' & a + 0 = a \\
a + b' = (a + b)' & a \cdot 0 = 0 \\
a \cdot b' = a \cdot b + a &
\end{array}$$

Система Робинсона неполна: аксиомы — в точности утверждения, необходимые для доказательства теорем Гёделя. Система Робинсона не имеет схем аксиом.

## 8 Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, *Consis.* Лемма об автоссылках. Условия Гильберта-Бернайса-Лёба. Неразрешимость формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости истины.

### 8.1 Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, *Consis.*

#### 8.1.1 *Consis*

**Лемма.**  $\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

**Определение.** Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

Обозначим  $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

**Определение.** Формулой *Consis* назовём формулу  $\neg \pi(\ulcorner 1 = 0 \urcorner)$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

#### 8.1.2 Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

**Теорема.** Если *Consis* доказуем, то формальная арифметика противоречива.

### 8.2 Лемма об автоссылках.

**Лемма.** Лемма об автоссылках. Для любой формулы  $\phi(x_1)$  можно построить такую замкнутую формулу  $\alpha$  (не использующую неаксиоматических предикатных и функциональных символов), что  $\vdash \phi(\ulcorner \alpha \urcorner) \leftrightarrow \alpha$ .

### 8.3 Условия Гильберта-Бернайса-Лёба.

**Определение.** Будем говорить, что формула  $\psi$ , выражающая отношение Proof, формула  $\pi$  и формула *Consis* соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы  $\alpha$ :

1.  $\vdash \alpha$  влечет  $\vdash \pi(\ulcorner \alpha \urcorner)$
2.  $\vdash \pi(\ulcorner \alpha \urcorner) \rightarrow \pi(\ulcorner \pi(\ulcorner \alpha \urcorner) \urcorner)$
3.  $\vdash \pi(\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner) \rightarrow \pi(\ulcorner \alpha \urcorner) \rightarrow \pi(\ulcorner \beta \urcorner)$

### 8.4 Неразрешимость формальной арифметики.

**Теорема.** Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима

### 8.5 Теорема Тарского о невыразимости истины.

**Теорема.** Не существует формулы  $\varphi(x)$ , что  $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = \text{И}$  (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда  $x \in \text{Тг}_{\text{ФА}}$ .

Однако, если взять  $D = \mathbb{R}$ , истина становится выразима (алгоритм Тарского).

## 9 Лямбда-исчисление. Пред-лямбда-термы и лямбда-термы. Альфа-эквивалентность, бета-редукция и бета-эквивалентность. Теорема Чёрча-Россера. Комбинатор неподвижной точки. Комбинаторный базис $SK$ . Истина и ложь. Чёрчевские нумералы. Натуральный вывод. Импликативный фрагмент интуиционистского исчисления высказываний. Просто-типизированное лямбда исчисление. Изоморфизм Карри-Ховарда (высказывание, доказательство, импликация, конъюнкция, дизъюнкция, ложь).

### 9.1 Лямбда-исчисление.

$$\Lambda ::= (\lambda x. \Lambda) | (\Lambda \ \Lambda) | x$$

Мета-язык:

1. Мета-переменные:
  - (a)  $A \dots Z$  — мета-переменные для термов.
  - (b)  $x, y, z$  — мета-переменные для переменных.
2. Правила расстановки скобок аналогичны правилам для кванторов:
  - (a) Лямбда-выражение ест всё до конца строки
  - (b) Аппликация левоассоциативна

**Примеры.**

1.  $a \ b \ c \ (\lambda d. e \ f \ \lambda g. h) \ i \equiv \left( \left( ((a \ b) \ c) \ (\lambda d. ((e \ f) \ (\lambda g. h))) \right) i \right)$
2.  $0 := \lambda f. \lambda x. x; \quad (+1) := \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x); \quad (+2) := \lambda x. (+1) \ ((+1) \ x)$

### 9.2 Пред-лямбда-термы и лямбда-термы.

### 9.3 Альфа-эквивалентность, бета-редукция и бета-эквивалентность.

#### 9.3.1 Альфа-эквивалентность

$$FV(A) = \begin{cases} \{x\}, & A \equiv x \\ FV(P) \cup FV(Q), & A \equiv P \ Q \\ FV(P) \setminus \{x\}, & A \equiv \lambda x. P \end{cases}$$

**Определение.**  $A =_\alpha B$ , если и только если выполнено одно из трёх:

1.  $A \equiv x, B \equiv y, x \equiv y$ ;
2.  $A \equiv P_a Q_a, B \equiv P_b Q_b$  и  $P_a =_\alpha P_b, Q_a =_\alpha Q_b$ ;
3.  $A \equiv (\lambda x. P), B \equiv (\lambda y. Q), P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$ , где  $t$  не входит в  $A$  и  $B$ .

#### 9.3.2 Бета-редукция

**Определение.** Терм вида  $(\lambda x. P) \ Q$  — бета-редекс.

**Определение.**  $A \rightarrow_\beta B$ , если:

1.  $A \equiv (\lambda x. P) \ Q, B \equiv P \ [x := Q]$ , при условии свободы для подстановки;
2.  $A \equiv (P \ Q), B \equiv (P' \ Q')$ , при этом  $P \rightarrow_\beta P'$  и  $Q = Q'$ , либо  $P = P'$  и  $Q \rightarrow_\beta Q'$ ;
3.  $A \equiv (\lambda x. P), B \equiv (\lambda x. P')$ , и  $P \rightarrow_\beta P'$ .

#### 9.3.3 Бета-эквивалентность

**Определение.**  $(=_\beta)$  — транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание  $(\rightarrow_\beta)$ .

## 9.4 Теорема Чёрча-Россера.

**Теорема (Чёрча-Россера).** Для любых термов  $N, P, Q$ , если  $N \rightarrow_{\beta} P$ ,  $N \rightarrow_{\beta} Q$ , и  $P \neq Q$ , то найдётся  $T$ :  $P \rightarrow_{\beta} T$  и  $Q \rightarrow_{\beta} T$ .

**Теорема.** Если у термина  $N$  существует нормальная форма, то она единственна

## 9.5 Комбинатор неподвижной точки.

**Теорема.** Для любого термина  $N$  найдётся такой терм  $R$ , что  $R =_{\beta} N R$ .

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x)).$$

## 9.6 Комбинаторный базис $SK$ .

**Определение.** Комбинатор — лямбда-терм без свободных переменных

**Определение.**  $S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x z (y z)$ ,  $K := \lambda x.\lambda y.x$ ,  $I := \lambda x.x$

**Теорема.** Пусть  $N$  — некоторый замкнутый лямбда-терм. Тогда найдётся выражение  $C$ , состоящее из комбинаторов  $S, K$ , что  $N =_{\beta} C$

## 9.7 Истина и ложь.

$$T = \lambda x.\lambda y.x$$

$$F = \lambda x.\lambda y.y$$

## 9.8 Чёрчевские нумералы.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

**Определение.** Чёрчевский нумерал  $\bar{n} = \lambda f.\lambda x.f^{(n)}(x)$

## 9.9 Натуральный вывод.

1. Формулы языка (секвенции) имеют вид:  $\Gamma \vdash \alpha$ . Правила вывода:

$$\frac{\text{посылка 1} \quad \text{посылка 2} \quad \dots}{\text{заключение}} \quad (\text{аннотация})$$

2. Аксиома:

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \quad (\text{акс.})$$

3. Правила введения связок:

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}$$

4. Правила удаления связок:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}$$

5. Пример доказательства:

$$\frac{\frac{\frac{}{A \& B \vdash A \& B} (\text{акс.})}{A \& B \vdash B} (\text{удал}\&)}{A \& B \vdash B \& A} \quad \frac{\frac{\frac{}{A \& B \vdash A \& B} (\text{акс.})}{A \& B \vdash A} (\text{удал}\&)}{A \& B \vdash B \& A} (\text{введ}\&)$$

## 9.10 Импликативный фрагмент интуиционистского исчисления высказываний.

**Определение.** Импликационный фрагмент интуиционистской логики:

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

**Теорема.** Если  $\Gamma \vdash \alpha$ , то  $\Gamma \vdash_{\rightarrow} \alpha$ .

**9.12** Изоморфизм Карри-Ховарда (высказывание, доказательство, импликация, конъюнкция, дизъюнкция, ложь).

$$\frac{\frac{\frac{\Phi \vdash a : \alpha}{Ax} \quad \frac{\Phi \vdash f : \alpha \rightarrow \beta}{Ax}}{\Phi \vdash f a : \beta} App \quad \frac{}{\Phi \vdash n : \beta \rightarrow \perp} Ax}{\frac{\frac{f : \alpha \rightarrow \beta, n : \beta \rightarrow \perp, a : \alpha \vdash n (f a) : \perp}{f : \alpha \rightarrow \beta, n : \beta \rightarrow \perp \vdash \lambda a^\alpha. n (f a) : \neg \alpha} \lambda}{f : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda n^{\beta \rightarrow \perp}. \lambda a^\alpha. n (f a) : \neg \beta \rightarrow \neg \alpha} \lambda} \lambda f^{\alpha \rightarrow \beta}. \lambda n^{\beta \rightarrow \perp}. \lambda a^\alpha. n (f a) : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \lambda$$

12