1 Исчисление высказываний

1.1 Предметный язык и язык исследователя (метаязык). Соглашения об обозначениях. Схемы формул.

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

1.2 Оценка высказываний, общезначимость, следование.

1.2.1

Чтобы задать оценку высказываний: Зафиксируем множество истинностных значений $V = \{И, Л\}$

Определим функцию оценки переменных (*интерпретацию*) $f : P \to V$
(P — множество пропозициональных переменных). Если $[\![A]\!] = Л$ и $[\![B]\!] = И$, то $[\![(A \to B) \to (B \to A)]\!] = Л$

1.2.2

Синтаксис для указания функции оценки переменных

$$[\![\alpha]\!]^{X_1:=v_1,\ \dots,\ X_n:=v_n}$$

Это всё метаязык — потому полагаемся на здравый смысл

$$[\![A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} (C \to C)]\!]^{A:=И,\ B:=[\![\neg A]\!]}$$

1.2.3

1. Переменные
$$[\![X]\!] = f(X) \qquad [\![X]\!]^{X:=a} = a$$

2. Отрицание
$$[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} Л, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = И \\ И, & \textit{иначе} \end{cases}$$

3. Конъюнкция
$$[\![\alpha \mathbin{\&} \beta]\!] = \begin{cases} И, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = И \\ Л, & \textit{иначе} \end{cases}$$

4. Дизъюнкция
$$[\![\alpha \vee \beta]\!] = \begin{cases} Л, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = Л \\ И, & \textit{иначе} \end{cases}$$

5. Импликация
$$[\![\alpha \to \beta]\!] = \begin{cases} Л, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = И,\ [\![\beta]\!] = Л \\ И, & \textit{иначе} \end{cases}$$

1.2.4

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение $A \to A$ — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной A:

$$[\![A \to A]\!]^{A:=И} = И$$
$$[\![A \to A]\!]^{A:=Л} = И$$

Выражение $A \to \neg A$ тавтологией не является:

$$[\![A \to \neg A]\!]^{A:=И} = Л$$

1.2.5

1. Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$$

2. Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима.*

3. Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима.*

4. Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима.*

1.3 Доказуемость, гипотезы (контекст), выводимость.

1.3.1

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

1. является аксиомой — существует замена метапеременных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу δ_i, либо

2. получается из $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}$ по правилу Modus Ponens — существуют такие индексы $j < i$ и $k < i$, что $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$.

1.3.2

(доказательство формулы α) — такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$.

Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство. Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

1.3.3

(вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$) — такая последовательность $\delta_1, \ldots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

1. является аксиомой;

2. либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих;

3. либо является одной из гипотез: существует $t : \delta_i \equiv \gamma_t$.

2 Корректность, полнота, противоречивость и непротиворечивость (эквивалентные формулировки).