

1 Исчисление высказываний

1.1 Предметный язык и язык исследователя (метаязык). Соглашения об обозначениях. Схемы формул.

1.2 Язык исчисления высказываний.

Определение. Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

1. Атомарное высказывание — пропозициональная переменная: A, B', C_{1234}
2. Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
 - (a) Отрицание: $(\neg\alpha)$
 - (b) Конъюнкция: $(\alpha \& \beta)$ или $(\alpha \wedge \beta)$
 - (c) Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$
 - (d) Импликация: $(\alpha \rightarrow \beta)$ или $(\alpha \supset \beta)$

Пример.

$$(((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)) \vee (C \rightarrow A))$$

1.3 Оценка высказываний, общезначимость, следование.

1.3.1 Оценка высказываний.

Определение. Чтобы задать оценку высказываний: Зафиксируем множество истинностных значений $V = \{И, Л\}$

Определим функцию оценки переменных (*интерпретацию*) $f : P \rightarrow V$ (P — множество пропозициональных переменных). Если $\llbracket A \rrbracket = Л$ и $\llbracket B \rrbracket = И$, то $\llbracket (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rrbracket = Л$

1.3.2 Синтаксис.

Определение. Синтаксис для указания функции оценки переменных

$$\llbracket \alpha \rrbracket^{X_1:=v_1, \dots, X_n:=v_n}$$

Это всё метаязык — потому полагаемся на здравый смысл

$$\llbracket A \& B \& (C \rightarrow C) \rrbracket^{A:=И, B:=\llbracket \neg A \rrbracket}$$

1.3.3 Оценка высказываний рекурсивно.

1. Переменные

$$\llbracket X \rrbracket = f(X) \quad \llbracket X \rrbracket^{X:=a} = a$$

2. Отрицание

$$\llbracket \neg\alpha \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Конъюнкция

$$\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = И \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

4. Дизъюнкция

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

5. Импликация

$$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И, \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

1.3.4 Тавтологии

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение $A \rightarrow A$ — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной A :

$$\begin{aligned} \llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=I} &= I \\ \llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=L} &= I \end{aligned}$$

Выражение $A \rightarrow \neg A$ тавтологией не является:

$$\llbracket A \rightarrow \neg A \rrbracket^{A:=I} = L$$

1.3.5 Определения

1. Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

2. Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
3. Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.
4. Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима*.

1.4 Доказуемость, гипотезы (контекст), выводимость.

1.4.1 Вывод

Определение. Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

1. является аксиомой — существует замена метапеременных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу δ_i , либо
2. получается из $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$ по правилу Modus Ponens — существуют такие индексы $j < i$ и $k < i$, что $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_i$.

1.4.2 Доказуемость

Определение. (доказательство формулы α) — такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$. Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство. Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

1.4.3 Выводимость

Определение. (вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$) — такая последовательность $\delta_1, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

1. является аксиомой;
2. либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих;
3. либо является одной из гипотез: существует $t : \delta_i \equiv \gamma_t$.

1.4.4 Контекст

Определение. Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$ списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \Delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

1.5 Корректность, полнота, противоречивость и непротиворечивость (эквивалентные формулировки).

1.5.1 Корректность

Лемма. Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, $\vdash \alpha$ влечёт $\models \alpha$.

Лемма. Если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$

1.5.2 Полнота

Лемма. Теория полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ влечёт $\vdash \alpha$.

1.6 Теорема о дедукции для исчисления высказываний (формулировка). Теорема о полноте исчисления высказываний (формулировка)

1.6.1 Теорема о дедукции для исчисления высказываний

Теорема. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

1.6.2 Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема. Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

2 Топологическое пространство

2.1 Определение.

2.1.1

Определение. Топологическим пространством называется упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, причём:

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. если $A_1, \dots, A_n \in \Omega$, то $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$;
3. если $\{A_\alpha\}$ — семейство множеств из Ω , то и $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$.

Множество Ω называется *топологией*. Элементы Ω называются открытыми множествами.

2.2 Метрическое пространство.

2.2.1

Определение. Метрикой на X назовём множество, на котором определена функция расстояния $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника)

Определение. Открытым ε -шаром с центром в точке $x \in X$ назовём $O_\varepsilon(x) = \{t \in X \mid d(x, t) < \varepsilon\}$.

Определение. Если X — некоторое множество и d — метрика на X , то будем говорить, что топологическое пространство, задаваемое базой $\mathcal{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in X\}$, порождено метрикой d .

2.3 Примеры (топология стрелки, Зарисского, топология на деревьях).

2.3.1 Топология стрелки

Определение. Топология стрелки: $\langle \mathbb{R}, \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \rangle$ — открыты все положительные лучи.

2.3.2 Топология Зарисского

2.3.3 Топология на деревьях

Определение. Пусть некоторый лес задан конечным множеством вершин V и отношением (\leq) , связывающим предков и потомков ($a \leq b$, если b — потомок a). Тогда подмножество его вершин $X \subseteq V$ назовём открытым, если из $a \in X$ и $a \leq b$ следует, что $b \in X$.

Лемма. Лес связан (является одним деревом) тогда и только тогда, когда соответствующее ему топологическое пространство связно.

2.4 Открытые и замкнутые множества. Связность. Компактность.

2.4.1 Открытые и замкнутые множества.

Определение. Множество Ω называется *топологией*. **Определение.** Элементы Ω называются открытыми множествами.

2.4.2 Связность.

Определение. Пространство $\langle X, \Omega \rangle$ связно, если нет $A, B \in \Omega$, что $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ и $A, B \neq \emptyset$.

2.4.3 Компактность.

Определение. Будем говорить, что множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Пример. Множество $\{0, 1\}$ в дискретной топологии компактно.

Пример. Интервал $(0, 1)$ в \mathbb{R} не компактен — например, рассмотрим покрытие $\{(\varepsilon, 1) \mid \varepsilon \in (0, 1)\}$

2.5 Непрерывные функции. Путь. Линейная связность.

2.5.1 Непрерывные функции.

Определение. Функция $f : X \rightarrow Y$ непрерывна, если прообраз любого открытого множества открыт.

Пример. Функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ всегда непрерывна (при дискретной топологии на \mathbb{N}), поскольку любое множество в \mathbb{N} открыто.

2.5.2 Путь.

2.5.3 Линейная связность.

3 Интуиционистское исчисление высказываний

3.1 Доказательства чистого существования.

Теорема. Любое непрерывное отображение f шара в \mathbb{R}^n на себя имеет неподвижную точку

Теорема. Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

3.2 ВНК-интерпретация.

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

1. $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
2. $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
3. $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
4. \perp — конструкция, не имеющая построения
5. $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \rightarrow \perp$

3.3 Решётки.

Определение. Решёткой называется упорядоченная пара: $\langle X, (\leq) \rangle$, где X — некоторое множество, а (\leq) — частичный порядок на X , такой, что для любых $a, b \in X$ определены $a + b = \sup\{a, b\}$ и $a \cdot b = \inf\{a, b\}$.

Пример. $\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$ — решётка. $\langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, (:) \rangle$ — не решётка.

3.4 Дистрибутивная решётка. Пентагон и алмаз.

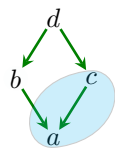
Определение. Дистрибутивной решёткой называется такая, что для любых a, b, c выполнено $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Определение. Импликативная решётка — такая, в которой для любых элементов есть псевдодополнение.

Лемма. Любая импликативная решётка — дистрибутивна.

Определение. Псевдодополнением $a \rightarrow b$ называется наибольший из $\{x \mid a \cdot x \leq b\}$.

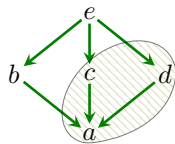
Пример.



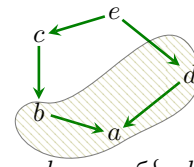
$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= a \\
 b \cdot b &= b \\
 c \cdot b &= a \\
 d \cdot b &= b
 \end{aligned}$$

Здесь $b \rightarrow c = \text{наиб}\{x \mid b \cdot x \leq c\} = \text{наиб}\{a, c\} = c$

Пример. (нет псевдодополнения: алмаз и пентагон)



$$b \rightarrow c = \text{наиб}\{a, c, d\}$$



$$c \rightarrow b = \text{наиб}\{a, b, d\}$$

3.5 Булевы и псевдобулевы алгебры.

Определение. 0 — наименьший элемент решётки, а 1 — наибольший элемент решётки.

Лемма. В любой импликативной решётке $\langle X, (\leq) \rangle$ есть 1.

Определение. Импликативная решётка с 0 — псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга). В такой решётке определено $\sim a := a \rightarrow 0$.

Определение. Булева алгебра — псевдобулева алгебра, в которой $a + \sim a = 1$ для всех a .

3.6 Алгебра Линденбаума.

Определение. Определим предпорядок на высказываниях: $\alpha \leq \beta := \alpha \vdash \beta$ в интуиционистском исчислении высказываний. Также $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$.

Определение. Пусть L — множество всех высказываний. Тогда алгебра Линденбаума $\mathcal{L} = L/\approx$.

Теорема. \mathcal{L} — псевдобулева алгебра.

3.7 Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах (формулировка, идея доказательства).

Теорема. Пусть $\llbracket \alpha \rrbracket = [\alpha]_{\mathcal{L}}$. Такая оценка интуиционистского исчисления высказываний алгеброй Линденбаума является согласованной.

Теорема. Интуиционистское исчисление высказываний полно в псевдобулевых алгебрах: если $\models \alpha$ во всех псевдобулевых алгебрах, то $\vdash \alpha$.

3.8 Модели Крипке. Вынужденность.

Определение. Модель Крипке $\langle \mathcal{W}, \leq, (\Vdash) \rangle$:

1. \mathcal{W} — множество миров, (\leq) — нестрогий частичный порядок на \mathcal{W} ;
2. $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ — отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если $W_i \leq W_j$ и $W_i \Vdash X$, то $W_j \Vdash X$.

Доопределим вынужденность:

1. $W \Vdash \alpha \& \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$;
2. $W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$;
3. $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$, если всегда при $W \leq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$
4. $W \Vdash \neg \alpha$, если всегда при $W \leq W_1$ выполнено $W_1 \not\Vdash \alpha$.

Будем говорить, что $\models \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех $W \in \mathcal{W}$. Будем говорить, что $\models_{\kappa} \alpha$, если $\models \alpha$ во всех моделях Крипке.

3.9 Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам.

Лемма. Если $W_1 \Vdash \alpha$ и $W_1 \leq W_2$, то $W_2 \Vdash \alpha$

Теорема. Пусть $\langle \mathcal{W}, (\leq), (\Vdash) \rangle$ — некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.

3.10 Нетабличность ИИВ (формулировка теоремы).

Определение. Пусть задано V , значение $T \in V$ («истина»), функция $f_P : P \rightarrow V$, функции $f_{\&}, f_{\vee}, f_{\rightarrow} : V \times V \rightarrow V$, функция $f_{\neg} : V \rightarrow V$.

Тогда оценка $\llbracket X \rrbracket = f_P(X)$, $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$, $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$ — табличная.

Определение. Табличная модель конечна, если V конечно.

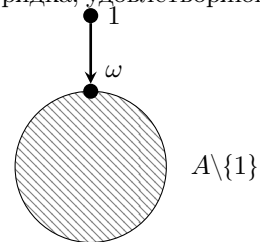
Теорема. Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний.

4 Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний.

4.1 Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$.

Определение. Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, (\leq) \rangle$ определим операцию «гёделевизации»: $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\leq_{\Gamma(\mathcal{A})}) \rangle$, где отношение $(\leq_{\Gamma(\mathcal{A})})$ — минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:

1. $a \leq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, если $a \leq_{\mathcal{A}} b$ и $a, b \notin \{\omega, 1\}$;
2. $a \leq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, если $a \neq 1$;
3. $\omega \leq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



Теорема. $\Gamma(\mathcal{A})$ — гёделева алгебра.

Теорема. Рассмотрим оценку $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}}$. Тогда она является согласованной с ИИВ.

4.2 Дизъюнктивность ИИВ (формулировка).

Определение. Исчисление дизъюнктивно, если при любых α и β из $\vdash \alpha \vee \beta$ следует $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.

Определение. Решётка гёделева, если $a + b = 1$ влечёт $a = 1$ или $b = 1$.

Теорема. Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно.

5 Разрешимость интуиционистского исчисления высказываний (формулировка).

Теорема. Если $\not\vdash \alpha$ в ИИВ, то существует \mathcal{G} , что $\mathcal{G} \models \alpha$, причём $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{|\alpha|+2}}$.

Теорема. ИИВ разрешимо.

6 Исчисление предикатов.

6.1 Язык исчисления предикатов.

Определение.

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPERЕМЕННАЯ θ .
 - (a) Предметные переменные: a, b, c, \dots , метAPERЕМЕННЫЕ x, y .
 - (b) Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метAPERЕМЕННЫЕ f, g, \dots
 - (c) Примеры: $r, q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метAPERЕМЕННЫЕ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
 - (a) Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метAPERЕМЕННАЯ P .
Имена: A, B, C, \dots
 - (b) Связки: $(\varphi \vee \psi), (\varphi \& \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi)$.
 - (c) Кванторы: $(\forall x. \varphi)$ и $(\exists x. \varphi)$.

6.2 Сокращения метаязыка для исчисления предикатов.

Определение.

1. МетAPERЕМЕННЫЕ:
 - (a) ψ, ϕ, π, \dots — формулы
 - (b) P, Q, \dots — предикатные символы
 - (c) θ, \dots — термы
 - (d) f, g, \dots — функциональные символы
 - (e) x, y, \dots — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$\underbrace{(\forall a. A \vee B \vee C \rightarrow \exists b. \underbrace{D \& \neg E}_{\exists b. \dots}) \& F}_{\forall a. \dots}$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:

- (a) $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
- (b) $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
- (c) 0 вместо z
- (d) \dots

6.3 Следование в исчислении предикатов.

Определение. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$, если выполнено два условия:

1. α выполнено всегда, когда выполнено $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$;
2. α не использует кванторов по переменным, входящим свободно в $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из Γ , то $\Gamma \models \alpha$

6.4 Теорема о дедукции в исчислении предикатов (формулировка).

Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α , то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

6.5 Теорема о корректности исчисления предикатов (формулировка).

Теорема. Если θ свободен для подстановки вместо x в φ , то $\llbracket \varphi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \varphi[x := \theta] \rrbracket$

Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из $FV(\Gamma)$, то $\Gamma \models \alpha$