# Math

T. Monedero
Natixis Fixed Income Department:
quantitative analysis

March 11, 2020

**Abstract**

## Contents

# 1 Mesure et Integration

## 1.1 Mesure

### 1.1.1 Espace Mesurable

**Définition 1 (Classes Monotones)** *Soit $X$ un sous-ensemble $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ appelé une classe monotone si :*

- $X \in \mathcal{N}$.
- *Si* $A, B \in \mathcal{N}$, *et* $A \subset B$ *alors* $B \setminus A \in \mathcal{N}$
- *Si* $A_n \in \mathcal{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *et que* $A_n \subset A_{n+1}$ *alors* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.

**Remarque 2** • *Si $A \in \mathcal{N}$, alors $A^C = X \setminus A \in \mathcal{N}$*

- *Toute tribu est une classe monotone*
- *Une classe monotone est une tribu ssi elle est stable par intersection finie.*
- *Toute intersection de classe monotone est encore une classe monotone. Si $F$ est une famille de parties de $X$, on peut définir*
$$\mathcal{N}(F) = \bigcap_{\text{classe monotone sur } X,\ F \subset \mathcal{N}} \mathcal{N}$$
*Alors, $\mathcal{N}(F)$ est une classe monotone sur $X$ appelée la classe monotone engendrée par $F$. C'est la petite classe monotone sur $X$ qui contient $F$.*

**Définition 3** *Soit $X$ un ensemble. On appelle tribu ou $\sigma$- algèbre sur $X$ une famille $\mathcal{M}$ de partie de $X$ possédant les propriétés suivantes :*

- *$X \in \mathcal{M}$.*
- *Si $A \in \mathcal{M}$, alors $A^C \in \mathcal{M}$ ( ou $A^C = X \setminus A$ est le complémentaire de $A$ dans $X$ ).*
- *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.*

*Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les parties mesurables de $X$. On dit que $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable.*

$\mathcal{M} = \{\varnothing, X\}$ est la plus petite tribu de $X$ et $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ la plus grande. De plus, $\mathcal{M}$ est stable par union ou intersection finie. En effet, si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ car $\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^C$. Enfin, si $A$ et $B$ sont mesurables, alors la différence non symétrique $A \setminus B = A \bigcap B^C \in \mathcal{M}$.

**Lemme 4** *Soit $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque de tribus sur $X$. Alors $\mathcal{M} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$ est encore une tribu sur $X$.*

**Définition 5** *Soit $F$ une famille de parties de $X$ et $\left\{\mathcal{M}_i^F\right\}_{i\in I}$ la famille de tribus sur $X$ contenant $F$ ( i.e $\forall i \in I$, $F \subset \mathcal{M}_i^F$ ). On note*
$$\sigma(F) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i^F$$
*la tribu engendrée par $F$ sur $X$. C'est le plus petite tribu sur $X$ qui contient $F$.*

**Lemme 6** *Si $F \subset \mathcal{P}(X)$ est une famille de partie de $X$ stable par intersections finies alors $\mathcal{N}(F) = \sigma(F)$.*

**Corollary 7** *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable muni de deux mesures $\mu$ et $\upsilon$. Supposons qu'il existe une famille $F$ de parties de $\mathcal{M}$ telle que*

- *$F$ est stable par intersection finie et $\sigma(F) = \mathcal{M}$*
- *$\mu(A) = \upsilon(A)$, $\forall A \in F$*

*On suppose en outre que*

- *soit que* $\mu(X) = \upsilon(X) < \infty$

- *soit qu'il existeune famille* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $F$*, telle que* $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$ *et* $\mu(E_n) = \upsilon(E_n) < \infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\mu = \upsilon, \text{ ie } \mu(A) = \upsilon(A), \; \forall A \in \mathcal{M}$$

**Example 8 (Unicité de la mesure de Lebesgue)** *On prend* $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $F$ *la famille des pavés ouverts et* $E_n = ]-n, n[^d$. *En appliquan le b) du corrolaire ci dessus, on voit qu'une mesure borelienne sur* $\mathbb{R}^d$ *finie sur les bornés est entierement déterminée par ses valeurs sur les pavés ouverts. Ceci montre donc l'unicité de la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$.

**Définition 9** *Unt topologie sur* $X$ *est une famille* $\mathcal{T}$ *de parties de* $X$ *telles que :*

- $\varnothing \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

- *Si* $O_1, ..., O_n \in \mathcal{T}$*, alors* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$.

- *Si* $\{O_i\}_{i\in I}$ *est une famille quelconque d'éléments de* $\mathcal{T}$ *alors* $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
  *Les éléments de* $\mathcal{T}$ *s'appelent les ouverts de* $X$*. On dit que (* $X$*,* $\mathcal{T}$ *) est un espace topologique*

**Définition 10** *Soit (* $X$*,* $\mathcal{T}$ *) un espace topologique. On appelle tribu de Borel sur* $X$ *la tribu engendrée par les ouverts de* $X$ *:* $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{T})$ *. La tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est engendrée par les intervalles* $]a, +\infty[$ *pour* $a \in \mathbb{R}$.

### 1.1.2 Mesure Positive

**Définition 11 (Mesure Exterieure)** *Soit* $X$ *un esemble quelconque. On appelle mesure extérieur sur* $X$ *une application* $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ *telle que*

- $\mu^*(\varnothing) = 0$

- $\mu^*$ *est croissante :* $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ *si* $A \subset B$

- $\mu^*$ *est sous additive : si* $\{A_n\}_n$ *est une famille de parties de* $X$ *alors :* $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$

**Définition 12 (Regularité)** *Soit* $X$ *un ensemble muni d'une mesure extérieure* $\mu^*$*. On dit qu'une partie* $B \subset X$ *est* $\mu^*$*-régulière si pour toutes parties* $A$ *de* $X$ *on a*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*\left(A \cap B^C\right)$$

*On note* $\mathcal{M}(\mu^*)$ *l'ensemble des parties* $\mu^*$*-régulière de* $X$.

**Définition 13** *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. On appelle mesure positive sur $X$ une application $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty[$ verifiant :*

- $\mu(\varnothing) = 0$
- *Additivité dénonbrable : si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurables deux a deux disjoints alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$$

*On dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré.*

**Proposition 14** *Une mesure positive possède les propriètés suivantes :*

- *Si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ ( Monotonie ).*
- *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$ ( Sous additivité ).*
- *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right)$.*
- *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \supset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ avec $\mu\left(A_0\right) < \infty$ alors $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right)$.*

**Proposition 15** *$\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu sur $X$ contenant toutes les parties $B \subset X$ telles que $\mu^*(B) = 0$ et la restriction de $\mu^*$ à $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure.*

### 1.1.3 Completion de Mesure

**Définition 16** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré. On dit que*

- *$A \subset X$ est négligeable pour la mesure $\mu$ si $A \in \mathcal{M}$ et $\mu(A) = 0$.*
- *La mesure $\mu$ est complète si tout sous ensemble d'un ensemble négligéable est encore négligéable.*

**Proposition 17** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré. Soit $\mathcal{M}^*$ l'ensemble de toutes les parties $E$ de $X$ telles qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$. On définit alors $\mu^*(E) = \mu(A)$. Ainsi, $\mathcal{M}^*$ est une tribu sur $X$ et $\mu^*$ une mesure complète $\mathcal{M}$ sur qui prolonge $\mu$.*

### 1.1.4 Mesure de Lebesgue

**Theorem 18** *Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée $\lambda$, telle que*

$$\lambda(]a, b[) = b - a, \forall a, b \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus a < b$$

*$\lambda$ est appellée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue est diffuse : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{x\}) = 0$. Par conséquent,*

$$\lambda(]a, b[) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a, \ a \leq b$$

**Définition 19** *On appelle tribu de Lebesque sur $\mathbb{R}$ , et on note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, la tribu qui complète la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue $\lambda$. On appelle encore mesure de Lebesgue la mesure complétée $\lambda$: $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$.*

**Définition 20** *Un pavé $P$ de $\mathbb{R}^d$ est un produit dintervalles bornés $P = I_1 \times I_2 \times ... \times I_d$, $I_j \subset \mathbb{R}$ intervalle borné. La mesure du pavé $P$ est notée*

$$mes(P) = l(I_1) \cdot l(I_2) \cdot ... \cdot l(I_d)$$

*ou $l(I_j)$ est la longueur du segment $I_j$.Pour toute partie $A$ de $\mathbb{R}^d$, on définit*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} mes(P_i) \mid A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i,\ P_i \text{ pavé ouvert de } \mathbb{R}^d \right\}$$

*L'infimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables de $A$ par des pavées ouverts.*

**Theorem 21** *On a les assertions suivantes :*

- *$\lambda^*$ est une mesure exterieue sur $\mathbb{R}^d$*
- *La tribu $\mathcal{M}(\lambda^*)$ contient la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*
- *$\lambda^*(P) = mes(P)$, pour tout pavé $P \subset \mathbb{R}^d$*

**Définition 22** *On appelle mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ la restriction, notée $\lambda$, de la mesure exterieure $\lambda^*$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ou à $\mathcal{M}(\lambda^*)$.*

**Lemme 23** *Si $P, P_1, ..., P_N$ sont des pavés de $\mathbb{R}^d$ avec $P \subset \bigcup_{i=1}^N Pi$ alors*

$$mes(P) \leq \sum_{i=1}^{N} mes(Pi)$$

**Theorem 24** *Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, notée $\lambda$, telle que pour tout pavé $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$, on ait*

$$\lambda(P) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

*Comme précedemment, on peut compléter la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et étendre la mesure $\lambda$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. La mesure de Lebesgue ( sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ) possède les priopriètés suivantes :*

- *$\lambda$ est invariante par translation et rotation*
- *$\lambda$ est régulière, i.e $\forall E \subset \mathbb{R}^d$ mesurable on a :*

  - *$\lambda(P) = \sup \{\lambda(K) \mid K$ compact, $K \subset E\}$ ( regularité intérieure ).*
  - *$\lambda(P) = \inf \{\lambda(V) \mid V$ ouvert, $V \supset E\}$ ( regularité exterieure ).*

On sait que $\lambda$ se prolonge en une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), N)$ ou $N = \{A \subset \mathbb{R}^d \mid \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ avec $A \subset b$ et $\lambda$
est l'ensemble des parties négligéables.

On sait aussi que $\lambda$ se prolonge a la tribu $\mathcal{M}(\lambda^*) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathcal{M}(\lambda^*) = \{B \subset \mathbb{R}^d \mid \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^C),\ \forall A \subset$
On peut se demander si $\mathcal{M}(\lambda^*)$ est beaucoup plus grande que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et si elle à un lien avec la tribu complétée $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

**Proposition 25** • *On a* $\mathcal{M}(\lambda^*) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

- *Soit* $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *ou* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. *La mesure de Lebesgue est invariante par translation au sens ou pour tout* $A \in \mathcal{M}$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$, *on a* $x + A \in \mathcal{M}$ *et* $\lambda(x + A) = \lambda(A)$.
- *Si* $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ *est une mesure invaiante par translation et finie sur les bornés alors il existe une constante* $c \geq 0$ *telle que* $\mu = c\lambda$

**Theorem 26** • $\forall A \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ *on a :*

- $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K$ *compact,* $K \subset A\}$ *( regularité intérieure ).*
- $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) \mid U$ *ouvert,* $U \supset A\}$ *( regularité exterieure ).*

### 1.1.5 Représentation de Riez et comparaison avec l'intégrale de Rieman

## 1.2 Théorie de l'intégration

### 1.2.1 Fonction Mesurable

**Definitions**

**Définition 27** *Soit* $(X, \mathcal{M},)$ *et* $(Y, \mathcal{N})$ *deux espaces mesurables. On dit qu'une application* $f : X \to Y$ *est mesurable pour les tribus* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N}$ *si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M},\ \forall\ B \in \mathcal{N}$$

**Remarque 28** *Etant donnée deux espaces topologiques* $(X, \mathcal{T})$ *et* $(Y, \mathcal{S})$, *la definition d'application continue pour les topologies* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{S}$ *est analogue à celle de mesurabilité, i.e*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{T},\ \forall\ B \in \mathcal{S}$$

**Remarque 29** *Si* $Y$ *est un ensemble quelconque,* $\mathcal{N} = \{\varnothing, Y\}$ *est la plus petite tribu sur* $Y$ *rendant* $f$ *mesurable. La tribu image de* $\mathcal{M}$ *par* $f$

$$\mathcal{N}^* = \left\{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\right\}$$

*est la plus grande tribu sur* $Y$ *rendant* $f$ *mesurable.*

**Remarque 30** *Si* $X$ *est un ensemble quelconque,* $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ *est la plus grande tribu sur* $X$ *rendant* $f$ *mesurable. La tribu engendrée par* $f$

$$\mathcal{M}^* = \left\{\ f^{-1}(B) \mid\ B \in \mathcal{N}\right\}$$

*est la plus petite tribu sur* $X$ *rendant* $f$ *mesurable.*

**Stabilité**

- Si $f : (X_1, \mathcal{M}_1) \to (X_2, \mathcal{M}_2)$ et $g : (X_2, \mathcal{M}_2) \to (X_3, \mathcal{M}_3)$ sont mesurables, alors $g \circ f : (X_1, \mathcal{M}_1) \to (X_3, \mathcal{M}_3)$ est mesurable.
- Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, $(Y, T)$ un espace topologique, $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ des applications mesurables et $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ une application continue. Alors, $h : X \to Y$ definie par $\forall x \in X$, $h(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x))$ est mesurable.
- Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Alors $f + g$, $fg$, $\min(f, g)$, $\max(f, g)$ sont mesurables.
- Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable,. alors $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \min(f, 0)$ et $|f| = f_+ + f_-$ sont mesurables.
- Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable et si $\forall x \in X$, $f(x) \neq 0$, alors $g$ définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est mesurable.
- Soit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} + \{-\infty, +\infty\}$. Les ouverts de $\bar{\mathbb{R}}$ sont les unions d'intervalles de la forme $[-\infty, a[\,, ]a, b[\,, ]b, +\infty]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions de $X$ dnas $\bar{\mathbb{R}}$. Alors $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sont des applications mesurables avec $\forall x \in X$

$$\begin{aligned}\left(\sup_n f_n\right)(x) &= \sup_n f_n(x)\\ \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} f_k(x)\end{aligned}$$

On definit de meme $\inf\limits_n f_n$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$. En particulier, si $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe $\forall x \in X$ alors $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable. Plus generalement, l'ensemble $\{x \in X \mid \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}\}$ est mesurable.

### 1.2.2 Fonctions étagées

**Définition 31** *Soit $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable. On dit qu'une application mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est étagée si $f$ ne prend qu'une nombre fini de valeurs. Pour $i = 1..n$, on note $\alpha_i$ les valeurs de $f$ et $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$, alors*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$$

**Proposition 32** *Soit $f : (X, \mathcal{M}) \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante de fonctions mesurables étagéees qui converge ponctuellement vers $f$.*

On suppose à present que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré.

**Définition 33** *On note $\varepsilon_+$ l'ensemble des fonctions mesurables étagées $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to [0, +\infty[$. On appelle intégrale de $f$ pour la mesure $\mu$ l'application $I : \varepsilon_+ \to [0, +\infty]$ définie par*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

*et possédant les propriètes suivantes :*

- *$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$, $\forall f, g \in \varepsilon_+$ ( Additivité ).*
- *$\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$ $\forall f \in \varepsilon_+$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ ( Homogénéité ).*
- *Si $f$ et $g \in \varepsilon_+$ et si $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ ( Monotonie ).*

### 1.2.3 Integration Fonction Mesurable Positive

**Définition 34** *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On appelle intègrale de $f$ sur $X$ pour la mesure $\mu$ la quantité*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int h d\mu \mid h \in \varepsilon,\ h \leq f \right\} \in [0, +\infty]$$

*Si $E \subset X$ est une partie mesurable, on note aussi $\int_E f d\mu = \int f \mathbf{1}_E d\mu$. Cette intègrale possède la propriètè de monotonie.*

**Theorem 35 (Convergence monotone)**

*Soit $f_n : X \to [0, +\infty]$ une suite croissante de fonctions mesurables positives et soit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ la limite ponctuelles des $f_n$. Alors $f$ est mesurable et*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

*Cette intègrales possède les propriètés d'additivité et de monotonie.*

**Définition 36** *Dans un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$, on dit qu'une proproètè $P(x)$, $x \in X$ est vrai presque partout ( ou $\mu$ presque partout) si elle est vrai en dehors d'un ensemble négligéable ( $\iff$ de mesure $\mu$ nulle)*

**Proposition 37** *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable.*

- $\forall a > 0,\ \mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu$
- $\int f d\mu = 0 \iff f = 0$ *$\mu$ presque partout*
- *Si $\int f d\mu < \infty$, alors $f < \infty$ $\mu$ presque partout*
- *Si $f$ et $g : X \to [0, +\infty]$ sont mesurables alors $f = g$ $\mu$ presque partout $\Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$*

**Lemme 38 (de Fatou)** *Soit $(f_n : X \to [0, +\infty])_n$ une suite de fonctions mesurables. Alors*

$$\int \left( \liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

**Définition 39 (Mesure a densité)** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On définit une application $\upsilon : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ par*

$$\upsilon(A) = \int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu$$

*Alors $\upsilon$ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ appelée mesure de densité $f$ par rapport a $\mu$. Si $A \in \mathcal{M}$ verifie que $\mu(A) = 0$ alors $\upsilon(A) = 0$, on dit que $\upsilon$ est absolument continue par rapport a $\mu$.*

**Définition 40 (Intégrabilité sur $\mathbb{R}$)** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré quelconque et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que $f$ est intégrable par rapport a si $\mu$ si $\int |f| d\mu < \infty$. Dans ce cas, on pose*

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu$$

*On note $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'espace des fonctions intégrables sur $X$.*

**Remarque 41** *Comme $f_+, f_- \leq |f|$ alors les intégrales de $f_+$ et $f_-$ sont finies et la décomposition à du sens.*

**Proposition 42**
- *$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application $f \to \int f d\mu$ est linéaire*
- *$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu$, $\forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$*
- *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et si $f = g$ $\mu$ presque partout alors $\int f d\mu = \int g d\mu$*
- *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$*

**Définition 43** ***Remarque 44*** *Il est possible d'étendre la définition d'intégrabilité et ces propriétés ( hormis la dernière ) sur l'ensemble $\mathbb{C}$. Dans ce cas $|\cdot|$ est le module et on pose*

$$\int f d\mu = \int \Re(f) d\mu + \int \Im(f) d\mu$$

*On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'espace des fonctions intégrables sur $X$*

**Theorem 45 (de la convergence dominée)** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré et $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que :*

- *La limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe $\forall x \in X$*
- *Il existe $g : X \to [0, +\infty[$ intégrable telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$*

*Alors $f : X \to \mathbb{C}$ est intégrable et on a :*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$$

**Remarque 46** *Il est possible de relaxer l'hypothèse $\forall x \in X$ par pour $\mu$ presque tout $x \in X$.*

**Corollary 47** *Soit $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions intégrables telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu < \infty$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument pour $\mu$ presque tout $x \in X$ vers une fonction $f$ intégrable et on a*

$$\int f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$$

### 1.2.4 Integrale dépendant d'un paramètre

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré et soit $(\Lambda, d)$ un espace métrique ( a définir). On considère une fonction

$$\begin{array}{ccc} f & : & X \times \Lambda \to \mathbb{C} \\ (x, \lambda) & \longmapsto & f(x, \lambda) \end{array}$$

intégrable sur $X$ pour la mesure $\mu$. On peut donc définir la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{C}$ par

$$F(\lambda) = \int_X f(x, \lambda) d\mu_x \equiv \int_X f(x, \lambda) dx \ \forall \lambda \in \Lambda$$

Afin d'harmoniser les notations, on notera pour une fonction $g : X \to \mathbb{C}$ de facon equivalente

$$\int g d\mu = \int g(x) d\mu_x = \int g(x) dx$$

**Theorem 48 (de continuité )** *On suppose*

- $\forall \lambda \in \Lambda$, *la fonction* $x \longmapsto f(x, \lambda)$ *est intégrable ( mesurable suffisant car (3)) sur* $X$.
- *Pour* $\mu$*-presque tout* $x \in X$, *la fonction* $\lambda \longmapsto f(x, \lambda)$ *est continue sur* $\Lambda$
- *Il existe* $g : X \to \mathbb{R}_+$ *intégrable telle que* $\forall \lambda \in \Lambda$ *on ait* $|f(x, \lambda)| \leq g(x)$ *pour* $\mu$*-presque tout* $x \in X$

*Alors la fonction* $F : \Lambda \to \mathbb{C}$ *définie par* $F(\lambda) = \int_X f(x, \lambda) dx$ *est continue sur* $\Lambda$.

**Remarque 49** *Si l'on suppose seulement que* $\lambda \longmapsto f(x, \lambda)$ *est continue en un point* $\lambda_0 \in \Lambda$, *on obtient que* $F$ *est continue en* $\lambda_0$.

**Theorem 50 (de dérivabilité)** *On suppose*

- $\forall \lambda \in \Lambda$, *la fonction* $x \longmapsto f(x, \lambda)$ *est intégrable sur* $X$.
- *Pour* $\mu$*-presque tout* $x \in X$, *la fonction* $\lambda \longmapsto f(x, \lambda)$ *est dérivable sur* $\Lambda$
- *Il existe* $g : X \to \mathbb{R}_+$ *intégrable telle que pour* $\mu$*-presque tout* $x \in X$, *on ait* $|\partial_\lambda f(x, \lambda)| \leq g(x) \ \forall \lambda \in \Lambda$

*Alors l'application* $F : \Lambda \to \mathbb{C}$ *définie par* $F(\lambda) = \int_X f(x, \lambda) dx$ *est dérivable sur* $\Lambda$ *et*

$$F'(\lambda) = \int_X \partial_\lambda f(x, \lambda) dx$$

**Remarque 51**

- $\partial_\lambda f(x, \lambda)$ *est définie presque partout en* $x$ *et la ou elle ne l'est pas on lui met la valeur* $0$.
- *Si* $\Lambda = [a, b]$, *"derivable sur* $\Lambda$*" signifie : derivable sur* $]a, b[$, *derivable à droite en* $a$ *et dérivable à gauch e en* $b$.
- *Meme si on souhaite la dérivabilité de* $F$ *qu'en un point* $\lambda_0 \in \Lambda$, *il faut quand meme supposer (3) pour* $\forall \lambda \in \Lambda$.