

Compte Rendu de Projet

Physique numérique

—

Transfert radiatif dans le disque galactique par la méthode de Monte-Carlo

Monija SIVARAJAH
Master Physique Fondamentale et Appliquée

Janvier 2025

Table des matières

1	Introduction	3
2	Aspects physiques du transfert radiatif	3
2.1	Relation de Planck-Einstein	3
2.2	Intensité spécifique	3
2.3	Équation du transfert radiatif	3
2.4	Intensité spécifique pour un corps noir	4
3	Méthode Monte Carlo pour le transfert radiatif	4
4	Hypothèses et Implémentation numérique	6
5	Résultats et analyse	7
6	Difficultés rencontrées et amélioration	11
7	Conclusion	12
8	Bibliographie	12

1 Introduction

Le milieu interstellaire, constitué de 99% de gaz et 1% de poussière, est le lieu de plusieurs phénomènes physique. Une étoile émet un rayonnement électromagnétique, les photons qu'elle émet interagissent alors avec le gaz et la poussière. Ces interactions ont pour conséquence la diffusion et l'absorption des photons. Ce phénomène est ce que l'on appelle le transfert radiatif. Selon les hypothèses de départ, les équations du transfert radiatif ne peuvent pas être résolus analytiquement. Il faut donc recourir à des méthodes numériques. Nous allons utiliser lors de ce projet, une méthode connus pour étudier les phénomènes de transfert radiatif, il s'agit de la méthode de Monte Carlo.

2 Aspects physiques du transfert radiatif

2.1 Relation de Planck-Einstein

D'après le modèle corpusculaire de la lumière, un photon possède une énergie donnée par la relation de Planck-Einstein :

$$E = h\nu \quad (1)$$

Où h est la constante de Planck et ν la fréquence du photon.

2.2 Intensité spécifique

Considérons une étoile qui émet un rayonnement caractérisé par une intensité spécifique à la fréquence ν qu'on note I_ν :

$$I_\nu = \frac{dE_\nu}{\cos \theta \, dA \, dt \, d\nu \, d\Omega} \quad (2)$$

Cette relation traduit l'énergie d'un photon en fonction d'une surface élémentaire dA inclinée d'un angle θ par rapport à la normale, d'un angle solide $d\Omega$, pour un intervalle de temps dt et une fréquence $d\nu$.

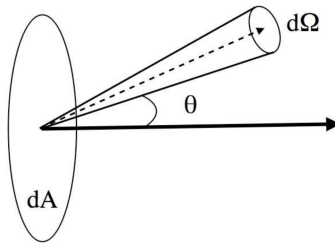


FIGURE 1 – Schéma explicatif de l'intensité spécifique

2.3 Équation du transfert radiatif

La variation de l'intensité spécifique I_ν par rapport à la distance traversée par le photon est donnée par l'équation du transfert radiatif :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu \kappa_\nu + j_\nu \quad (3)$$

Avec :

- I_ν : l'intensité spécifique à la fréquence ν (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$)

- s : la distance parcourue par la photon dans le milieu (en m)
- κ_ν : l'opacité (en m^{-1})
- j_ν : le coefficient d'émission (en $W \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1} \cdot sr^{-1}$)

2.4 Intensité spécifique pour un corps noir

Dans l'approximation de corps noir pour une étoile, l'intensité spécifique (ou la luminance L) est donnée par la loi de Planck :

$$I_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (4)$$

Avec :

- c : célérité de la lumière dans le vide ($3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$)
- k : constante de Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$)

Or, pour un corps noir, λ est la longueur d'onde correspondant au rayonnement maximal, donnée par la loi de Wien :

$$\lambda = \frac{\sigma_w}{T} \quad (5)$$

Où σ_w est la constante de Wien ($2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m.K}$) et T la température absolue de l'étoile. Par ailleurs, on considère une étoile de la galaxie M91 avec une température absolue égale à 7220 K .

3 Méthode Monte Carlo pour le transfert radiatif

Méthode Monte Carlo général

La méthode Monte Carlo permet de donner une estimation d'une grandeur A difficilement calculable. Pour cela, on exprime cette grandeur comme étant l'espérance d'une variable aléatoire X :

$$A = \int_a^b f(x) dx = \mathbb{E}[X] \quad (6)$$

On génère ensuite un échantillon $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ de taille N (N doit être très grand) avec des variables X_i indépendantes et indentiquement distribuées selon la loi de probabilité de X . Or, par définition de la moyenne empirique (*loi faible des grands nombres*) :

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (7)$$

Méthode Monte Carlo pour le transfert radiatif (MCRT)

Dans le cadre de ce projet, la grandeur précédente A correspond à la luminance. On cherchera alors à donner une estimation de la luminance émise par l'étoile et qui est récupérée par une caméra. Pour cela on va calculer la luminance reçue pour chaque pixel de la caméra (L_i) puis calculer la moyenne à partir de la formule ci-dessous :

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i \quad (8)$$

Le calcul de la luminance s'effectue alors en émettant N photons et on étudie l'interaction d'un photon avec le milieu en plusieurs étapes :

★ Par simplification, on considère un milieu isotrope donc les photons émis par l'étoile n'ont pas de direction préférentielle. Les angles polaire et azimutal sont respectivement donnés par :

$$\begin{cases} \theta = \arccos(-1 + 2\zeta) & \theta \in [0, \pi] \\ \phi = 2\pi\zeta & \phi \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (9)$$

Étant donné que ζ est un nombre uniformément distribué entre 0 et 1, ces angles sont donc différents pour chaque photon.

★ On échantillonne ensuite la direction de propagation du photon émis en 3D tout en effectuant une conversion en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} n_x = \sin \theta \cos \phi \\ n_y = \sin \theta \sin \phi \\ n_z = \cos \theta \end{cases} \quad (10)$$

On prend également soin de normaliser cette direction de propagation.

★ On souhaite déterminer si le photon continue son chemin ou s'il est absorbé ou diffusé. Pour cela, il faut calculer la profondeur optique totale, qui dépend des propriétés physiques du milieu et du trajet parcouru par le photon. Or, la loi de Beer-Lambert stipule que la luminance diminue quand le photon traverse un milieu absorbant ou diffusant : $I = I_0 e^{-\tau}$ où I_0 est l'intensité initiale.

Dans cette loi, intervient la profondeur optique τ qui est une mesure de la transparence du milieu c'est-à-dire qu'elle exprime la quantité de lumière atténuée lorsqu'elle traverse un milieu. En ce sens, si $\tau \ll 1$ alors le milieu ne diffuse/absorbe peu donc la quasi-totalité de l'intensité initiale est transmise (le milieu est transparent). Tandis que lorsque $\tau \gg 1$, le milieu est opaque et donc I est quasiment nulle.

De plus, la profondeur optique est exprimée par :

$$\tau = \int_0^s \kappa(x) dx \quad (11)$$

Pour un milieu homogène, $\kappa(x) = \kappa_e$ où κ_e est le coefficient d'extinction ($\kappa_e = \kappa_a + \kappa_s$). Avec :

- κ_a : coefficient d'absorption (en m^{-1})
- κ_s : coefficient de diffusion (en m^{-1})

On en déduit l'expression de la profondeur optique totale : $\tau = \kappa_e s$. On a exprimé ici la distance parcourue par le photon (s) avant une interaction (diffusion ou absorption). On considère que la caméra est située le long de l'axe x, ce qui signifie que $s = s_x$.

★ On calcule ensuite s_x tel que : $s_x = \frac{x_2 - x}{n_x}$. Où x_2 est la distance entre l'étoile et la caméra et x est la position initiale de l'étoile (ici 0).

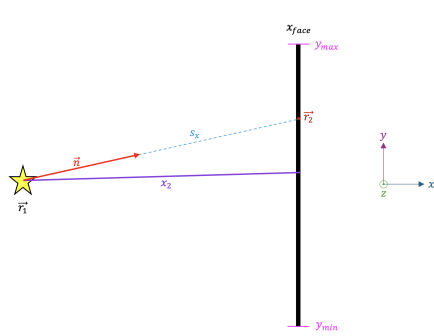
★ Il faut aussi calculer la profondeur optique de diffusion, échantillonnée pour chaque photon de la manière suivante :

$$\tau_{scatter} = -\log(1 - \zeta) \quad (12)$$

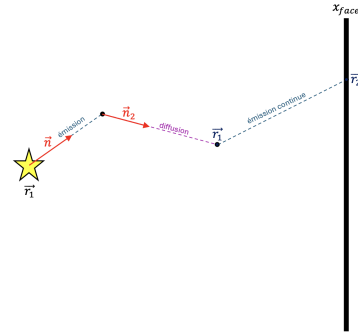
★ On peut désormais étudier les conditions des différentes interactions du photon :

- Le photon émis poursuit son chemin jusqu'à la caméra si $\tau > \tau_{scatter}$. Dans ce cas, on peut calculer la position finale du photon sur la caméra : $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + s_x \vec{n}$. On stocke ensuite les coordonnées de cette position. En effet, $\vec{r}_1 = (x, y, z)$ représente les positions initiales du photon.
- Si la condition précédente n'est pas vérifiée alors le photon peut être diffusé ou absorbé. Pour cela, on introduit l'albédo qui est la probabilité de diffusion du photon telle que $a = \frac{\kappa_s}{\kappa_e}$. On introduit également un nombre aléatoire uniformément distribué entre 0 et 1 et qu'on note a_{random} .
 - Le photon est diffusé si $a_{random} \leq a$. Dans ce cas, un réchantillonnage de la direction de propagation \vec{n}_2 est nécessaire. On peut alors calculer la distance traversée par le photon après cette collision : $s_{collision} = \frac{\tau_{scatter}}{\kappa_e}$. Ainsi, cela permet de calculer la position finale du photon diffusé : $\vec{r}_1 = \vec{r}_1 + s_{collision} \vec{n}_2$. On prendra donc soin de stocker les coordonnées x et y obtenues. On parcourt à nouveau la boucle *while* comme s'il s'agissait d'une nouvelle émission à ces positions, ce qui explique pourquoi cette position finale est nommée \vec{r}_1 .
 - Le photon est absorbé si $a < a_{random} < 1$ car la probabilité d'absorption est $1 - a$.

Le but de la méthode Monte-Carlo pour le transfert radiatif étant de donner une estimation de la luminance, on calcule ensuite la luminance moyenne. On donne ci-dessous un schéma récapitulatif avec quelques notations ainsi qu'un exemple où, après l'émission du photon, il y a diffusion, suivie d'une émission continue :



(a) Schéma explicatif de l'émission continue



(b) Schéma explicatif pour émission + diffusion + émission continue

4 Hypothèses et Implémentation numérique

On suppose l'existence d'une unique étoile au sein du disque galactique car l'étude de N étoiles émettant N photons prendrait beaucoup plus de temps. On considère que cette étoile est au centre du système de coordonnées cartésiennes en $(0, 0, 0)$ et émet un nombre suffisamment élevé de photons (1 000 000). De plus, on suppose par simplification que la caméra se trouve le long de l'axe x et la distance entre l'étoile et la caméra (qu'on note x_2) est de 1 000 parsecs. Un photon qui atteint directement la caméra ne peut pas être absorbé ou diffusé. Il peut être diffusé plusieurs fois tant qu'il ne sort pas des limites de la caméra. Cette caméra est modélisée par une image représentée par le plan (xy) et définit par $x_{min} = y_{min} = -5\,000\,pc$ et $x_{max} = y_{max} = 5\,000\,pc$.

5 Résultats et analyse

Emission simple de photons [*emission.py*]

On commence par négliger l'absorption et la diffusion dans l'hypothèse d'un milieu transparent. On utilise la méthode Monte Carlo défini précédemment mais sans prendre en compte la profondeur optique et l'albédo. On obtient ainsi le graphe ci-dessous :

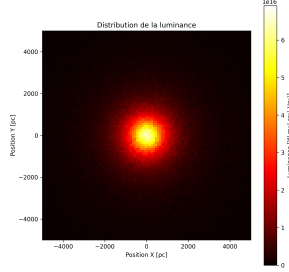


FIGURE 3 – Emission de photons dans un milieu transparent ($T = 7220$ K)

En ajoutant un compteur de photons, on remarque que seulement 411 448 photons atteignent directement la caméra (ce nombre diffère à chaque fois en raison des nombres aléatoires). Les 588 552 photons restant sortent des limites de la caméra ou sont émis dans le sens des x négatif, ce qui entraîne une distance parcourue par le photon (notée s_x) négative.

On remarque ici que la luminance est maximale au centre ($\approx 6.68 \cdot 10^{16} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$) et diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre. En effet, le photon qui atteint la caméra possède un angle α par rapport l'axe (Ox). En raison de ce terme $\cos\alpha$, au centre, lorsque $\alpha = 0$, on a $\cos\alpha = 1$, ce qui implique une intensité maximale. Cependant, on ne peut pas le prendre en compte dans l'expression de la luminance car cela impliquerait un milieu anisotrope avec des directions préférentielles.

Emission de photons avec absorption et diffusion [*emis_diff_abs.py*]

En reprenant le code précédent, on ajoute les calculs nécessaires pour la diffusion et l'absorption. On a considéré ici un milieu quasi-transparent avec un coefficient d'absorption κ_a égale à 0 m^{-1} et un coefficient de diffusion très faible $\kappa_s = 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. On obtient alors la figure suivante :

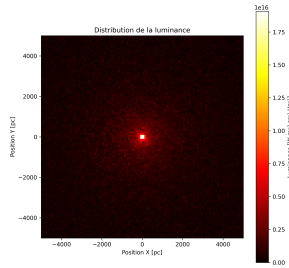
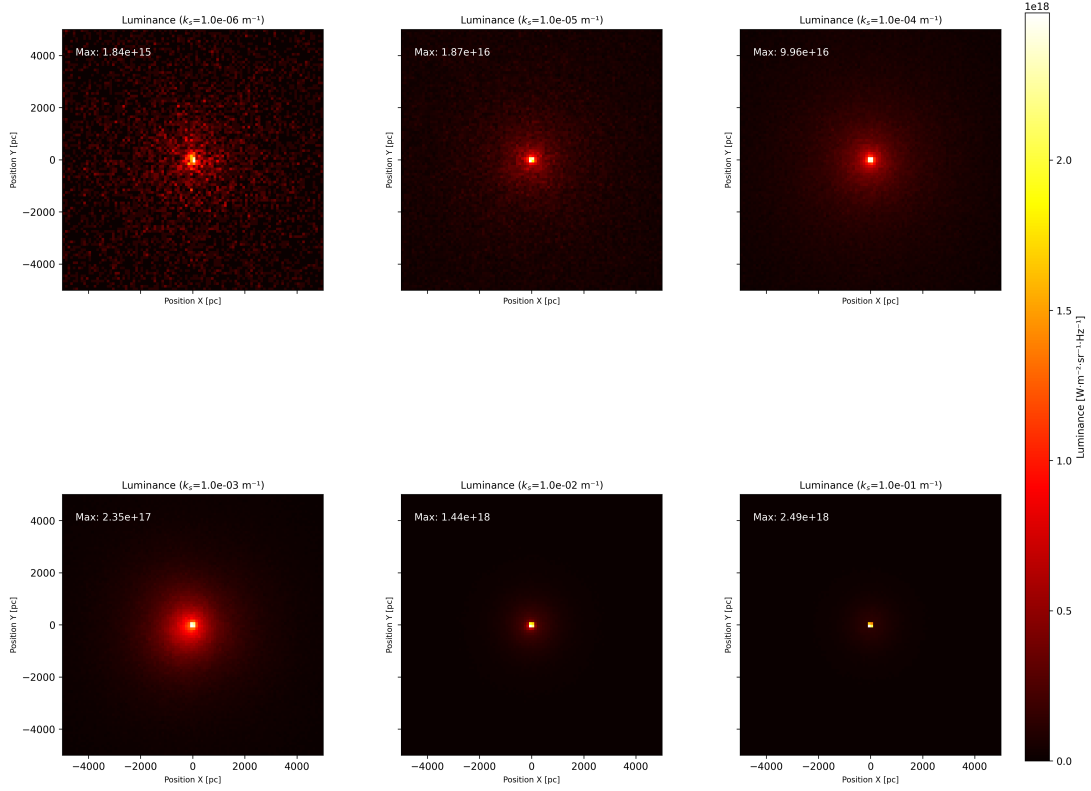


FIGURE 4 – Emission de photons dans un milieu quasi-transparent avec diffusion et absorption

Comme on peut l'observer, le phénomène est similaire à celui observé précédemment : la luminance est maximale au centre puis diminue. Cependant, en raison de l'ajout de conditions supplémentaires le nombre de photons atteignant directement la caméra a diminué (9068). De plus, comme $\kappa_a = 0 \text{ m}^{-1}$ alors le nombre de photons absorbés est nul : l'albédo est suffisant élevé et égale à 1 de sorte à ce qu'on n'atteigne pas la condition $a < a_{\text{random}} < 1$.

Evolution de κ_s [*evol_ks.py*]

On reprend cette fois-ci le code précédent et on fixe le coefficient d'absorption à 0 tandis qu'on fait varier la valeur de κ_s . Avec des valeurs croissantes de ce coefficient, les graphes obtenus sont les suivants :

FIGURE 5 – Emission, absorption et diffusion avec variation de κ_s

On remarque que plus κ_s augmente, plus la luminance augmente et les photons sont de plus en plus centrés. Cependant, ce n'est pas correct car on devrait observer le phénomène inverse. En effet, si on augmente la valeur de κ_s alors on augmente aussi l'albédo. Or, on avait vu que l'albédo correspond à la probabilité de diffusion du photon. En ce sens, lorsque l'on augmente le coefficient de diffusion, on devrait avoir une dispersion des photons car plus de photons devraient être diffusés et donc faire diminuer la luminance. Mais comme la profondeur optique $\tau = \kappa_e s_x$ varie linéairement selon κ_e alors il devient plus probable que la condition d'émission continue du photon soit satisfaite. Ce comportement pourrait indiquer un problème d'implémentation dans le code ou une erreur dans la formule utilisée pour calculer la profondeur optique.

Pour pousser l'analyse, on trace un histogramme du nombre de photons pour chaque événement (émission continue, diffusion, absorption).

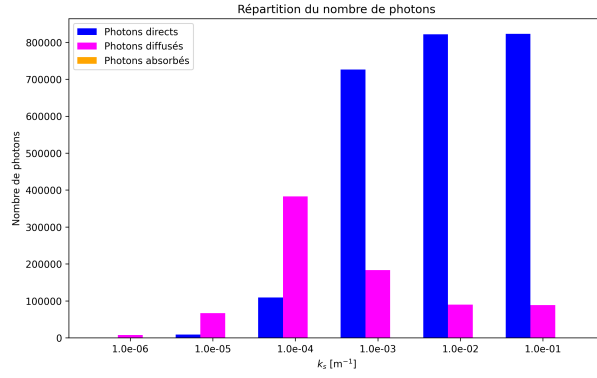


FIGURE 6 – Histogramme des nombres de photons pour chaque événement en faisant varier κ_s

On voit bien que plus κ_s augmente, plus le nombre de photons atteignant directement la caméra augmente (photons directs). Le nombre de photons diffusés augmente jusqu'à $\kappa_s = 10^{-4} m^{-1}$ puis diminue : il s'agit donc de la valeur optimale pour observer une grande diffusion. Quant au nombre de photons absorbés, il reste nul. Donc à cause de cette domination du nombre de photons directs, on ne peut pas voir la dispersion due à la diffusion, ce qui entraîne l'augmentation de la luminance.

Evolution de κ_a [*evol_ka.py*]

Regardons maintenant ce qu'il se passe quand on fait varier κ_a et en fixant κ_s à 0.

Luminance avec variation de k_a

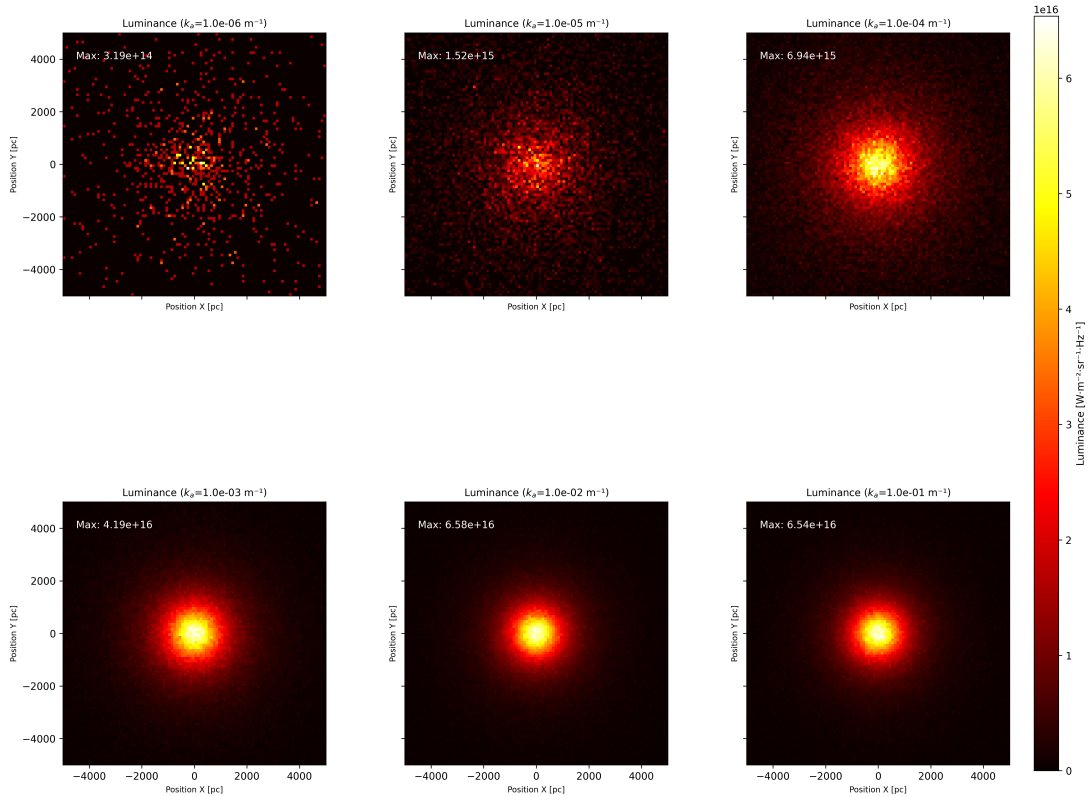


FIGURE 7 – Emission, absorption et diffusion avec variation de κ_a

Dans ce cas également on observe le phénomène inverse. En théorie, en augmentant κ_a , l'albédo devrait diminuer ce qui devrait favoriser l'absorption. Or, ici les photons sont également centrés (mais moins que précédemment). On trace une fois de plus un histogramme des nombres de photons :

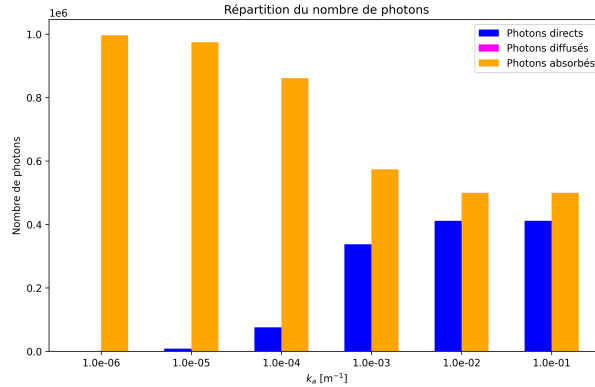
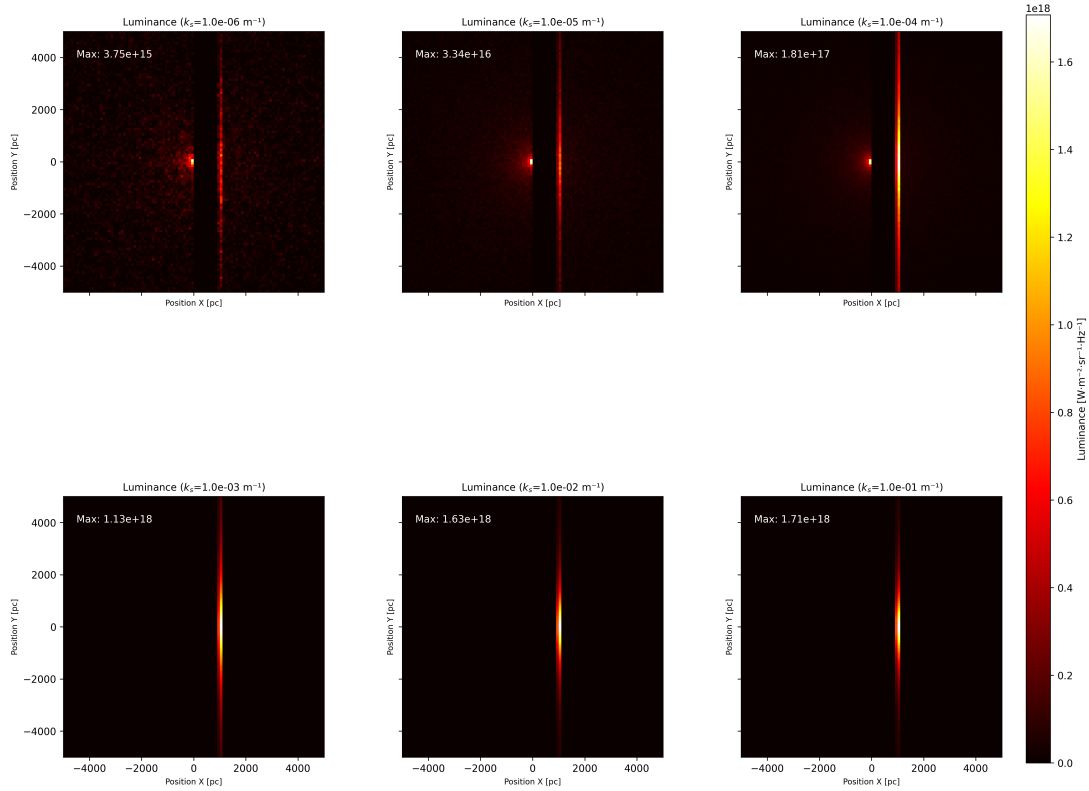


FIGURE 8 – Histogramme des nombres de photons pour chaque événement en faisant varier κ_a

On voit que le nombre de photons diffusés est nul, ce qui est cohérent avec $\kappa_s = 0 m^{-1}$. Pour les trois premiers cas, le nombre de photons absorbés domine par rapport au nombre de photons directs et c'est donc pour cela qu'on ne voit pas beaucoup de photons sur les graphes. Cependant, à partir de $\kappa_s = 10^{-3} m^{-1}$, la différence entre les deux nombres de photons n'est pas significative et reste (presque) équivalente, ce qui explique la ressemblance entre ces trois derniers.

Explication de l'inversement des coordonnées [*evol_ks_false.py*]

Dans la première condition où le photon atteint directement la caméra, on a utilisé $last_x$, $last_y = r2[1], r2[2]$ dans les codes précédents. Mais, on pourrait naturellement penser qu'on est censé avoir $last_x$, $last_y = r2[0], r2[1]$. Regardons ce qu'il se passe dans ce cas :

FIGURE 9 – Emission, absorption, diffusion avec variation de κ_s avec des modifications

Ces graphes prouvent que considérer la deuxième option est incorrecte. En effet, en calculant la position du photon (\vec{r}_2) on projette sur le plan (xy), donc un décalage est effectué tel que le x initial devient le z final ; le y initial devient le x final ; le z initial devient le y final.

Animation pour l'évolution de κ_a [*evol_ka_anim.py*]

J'ai repris le code précédent en ajoutant une animation. L'animation est générée dynamiquement pendant l'exécution du programme. Après avoir tracé les 6 graphes en faisant varier κ_a , on recommence la boucle des N photons.

6 Difficultés rencontrées et amélioration

J'ai commencé directement par le cas 3D, ce qui a rendu la compréhension et l'implémentation des différents cas plus difficiles. Certaines erreurs subsistent, notamment dans les courbes correspondant aux variations de κ_a et κ_s . Bien que que j'ai vérifié les dimensions des formules ainsi que leur exactitude, le problème semble provenir de l'implémentation. La gestion de la diffusion est particulièrement complexe, et il est possible que l'erreur soit liée au rééchantillonnage des directions après diffusion. Pour corriger ce problème, il peut être intéressant de considérer un cas 1D et 2D pour vérifier la validité de l'algorithme. J'ai également essayé de chercher des exemples dans la littérature scientifique mais je n'ai rien trouvé pour le disque galactique.

7 Conclusion

Ce projet avait pour objectif d'étudier le transfert radiatif dans un disque galactique en utilisant la méthode de Monte Carlo. En posant les hypothèses d'un milieu isotrope, homogène avec une unique étoile au centre du disque galactique, on a pu étudier la distribution de la luminance au sein du disque galactique. Pour cela, on a d'abord considéré seulement l'émission puis on a progressivement pris en compte la diffusion et l'absorption. Bien que certains résultats obtenus se soient révélés contre-intuitifs, ce projet a permis d'explorer l'influence des paramètres κ_a et κ_s sur le transfert radiatif. Pour aller plus loin, on pourrait enrichir ce modèle en intégrant des hypothèses supplémentaires, comme la présence de plusieurs étoiles, un milieu anisotrope et non homogène.

Le transfert radiatif peut trouver des applications dans la modélisation des environnements astrophysiques complexes, tels que les disques d'accrétion ou les nébuleuses, mais aussi dans l'étude de l'atmosphère et du climat.

8 Bibliographie

1. Duncan Forgan, *An Introduction to Monte Carlo Radiative Transfer* [https://www.roe.ac.uk/ifa/postgrad/pedagogy/2009_forgan.pdf]
2. Zili He, *Thèse - Vectorized Monte-Carlo method for sensitivity models in radiative transfer : Application to Concentrated Solar Power* [<https://theses.hal.science/tel-04194166>]
3. *Méthode de Monte Carlo* [https://perso.lpsm.paris/~liautaud/teaching/python_hec/tp/TP12.pdf]
4. *Introduction to Monte Carlo Radiation Transfer* [https://misclab.umeoce.maine.edu/boss/classes/RT_Weizmann/MC_book_2.pdf]
5. *Épaisseur optique* [https://fr.wikipedia.org/wiki/Epaisseur_optique]
6. *Radiative transfer* [<https://ipag.osug.fr/~bacmanna/radiativetransfer/rt3-transfequation.pdf>]