

INTEGRAL

Penyusun : Nur Aini Indah H, S.Pd. ; Imam Indra Gunawan, S.Si.

Editor : Drs. Kato Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.

Imam Indra Gunawan, S.Si.

A. DEFINISI INTEGRAL

Pada bab sebelumnya sudah dibahas tentang diferensial (turunan), sekarang akan dibahas tentang integral. Hubungan antara turunan dengan integral yaitu integral merupakan invers (kebalikan) dari diferensial (turunan). Oleh karena itu, integral juga disebut anti diferensial (anti turunan).

Suatu fungsi F dikatakan sebagai anti turunan (integral) dari fungsi f apabila $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x dalam domain dari F .

Integral dari $f(x)$ dinotasikan sebagai :

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{jika dan hanya jika} \quad F'(x) = f(x),$$

dengan C sembarang konstanta.

B. INTEGRAL TAK TENTU

Hasil pengintegralan $f(x)$ dengan berbentuk $F(x) + C$ dinamakan integral tak tentu. Berikut beberapa sifat integral tak tentu:

$$1. \int k dx = kx + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \text{ dengan } n \neq -1$$

$$3. \int kx^n dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + C, \text{ dengan } n \neq -1$$

$$4. \int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$5. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Keterangan:

k, C : konstanta

Contoh:

$$1. \int 2 dx = \dots$$

Jawab:

$$\int 2 dx = 2x + c$$

$$2. \int 10x dx = \dots$$

Jawab:

$$\int 10x^1 dx = \frac{10}{1+1} x^{1+1} + c = \frac{10}{2} x^2 + c$$

$$3. \int -9x^8 dx = ..$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \int -9x^8 dx &= -\frac{9}{8+1} x^{8+1} + C \\ &= -\frac{9}{9} x^9 + C = -x^9 + C \end{aligned}$$

$$4. \int \frac{-6}{x^4} dx = ..$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \int \frac{-6}{x^4} dx &= \int -6x^{-4} dx = \frac{-6}{-4+1} x^{-4+1} + c \\ &= \frac{-6}{-3} x^{-3} + c = 2x^{-3} + c \\ &= \frac{2}{x^3} + c \end{aligned}$$

$$5. \int \sqrt[5]{x^3} dx = ..$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \int \sqrt[5]{x^3} dx &= \int x^{\frac{3}{5}} dx \\ &= \frac{1}{1+\frac{3}{5}} x^{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C \\ &= \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + C \end{aligned}$$

$$6. \int (3x^2 - 7) dx = ..$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 7) dx &= \int 3x^2 dx - \int 7 dx \\ &= \frac{3}{2+1} x^{2+1} + c_1 - (7x + c_2) \\ &= \frac{3}{3} x^3 + c_1 - 7x - c_2 \\ &= x^3 - 7x + C \end{aligned}$$

$$7. \int 5x^2(x-3) dx = ..$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \int 5x^2(x-3) dx &= \int (5x^3 - 15x^2) dx \\ &= \int 5x^3 dx - \int 15x^2 dx \\ &= \frac{5}{3+1} x^{3+1} + c_1 - \left(\frac{15}{2+1} x^{2+1} + c_2 \right) \\ &= \frac{5}{4} x^4 + c_1 - \frac{15}{3} x^3 - c_2 \\ &= \frac{5}{4} x^4 - 5x^3 + C \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL 1

Hitunglah!

$$1. a. \int 8 dx = ..$$

$$b. \int -7 dx = ..$$

$$c. \int \frac{3}{4} dx = ..$$

$$d. \int dx = ..$$

$$e. \int - dx = ..$$

$$2. a. \int 3x dx = ..$$

$$b. \int 14x dx = ..$$

$$c. \int -6x dx = ..$$

$$d. \int x dx = ..$$

$$e. \int \frac{5}{6} x dx = ..$$

$$3. a. \int 6x^2 dx = ..$$

$$b. \int -5x^8 dx = ..$$

$$c. \int 3x^5 dx = ..$$

$$d. \int \frac{1}{2} x^3 dx = ..$$

$$e. \int \frac{3}{5} x^2 dx = ..$$

4. a. $\int \frac{3}{x^2} dx = ..$

b. $\int \frac{-2}{x^4} dx = ..$

c. $\int \frac{2}{3x^5} dx = ..$

d. $\int \frac{1}{x^3} dx = ..$

e. $\int \frac{-1}{x^6} dx = ..$

5. a. $\int \sqrt{x} dx = ..$

b. $\int \sqrt[3]{x^4} dx = ..$

c. $\int x\sqrt{x} dx = ..$

6. a. $\int (6x+5) dx = ..$

b. $\int (2x^2 - 14x + 16) dx = ..$

c. $\int (-8x^4 + x^3 - x^2 + 4x - 1) dx = ..$

d. $\int (9x^2 - \sqrt{x} + \frac{8}{x^4}) dx = ..$

e. $\int (x^4 - \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^3}) dx = ..$

7. a. $\int 3x^2(x-4) dx = ..$

b. $\int (x-1)(5x+4) dx = ..$

c. $\int \left(\frac{3x^2 + 4x}{x} \right) dx = ..$

d. $\int \left(\frac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^2} \right) dx = ..$

e. $\int \left(\frac{x^2 - 6x - 2}{\sqrt{x}} \right) dx = ..$

----- Good Luck -----

B. INTEGRAL SUBSTITUSI

Definisi :

Jika $u = g(x)$ maka $du = g'(x)$ dengan g suatu fungsi yang dapat diturunkan dan F adalah integral dari f , maka:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C$$

Rumus Integral Substitusi

$$6. \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, \text{ dengan } n \neq -1$$

$$7. \int ku^n du = \frac{k}{n+1} u^{n+1} + C, \text{ dengan } n \neq -1$$

Keterangan :

u : fungsi dalam x

du : turunan pertama dari u

Contoh:

1. $\int 4x(x^2 + 5)^3 dx = ...$

Jawab:

Misalkan $u = x^2 + 5$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 4x(x^2 + 5)^3 dx = \int u^3 \cdot 4x \frac{du}{2x}$$

$$= \int u^3 \cdot 2 du = 2 \int u^3 du$$

$$= \frac{2}{3+1} u^{3+1} + C = \frac{2}{4} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{2} u^4 + C = \frac{1}{2} (x^2 + 5)^4 + C$$

$$2. \int \frac{2x}{(x^2-3)^8} dx = \dots$$

Jawab:

Misalkan $u = (x^2 - 3)$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\begin{aligned} \int 2x(x^2-3)^{-8} dx &= \int u^{-8} \cdot 2x \cdot \frac{du}{2x} \\ &= \int u^{-8} du = \frac{1}{-8+1} u^{-8+1} + C \\ &= \frac{1}{-7} u^{-7} + C = \frac{1}{-7} (x^2-3)^{-7} + C \end{aligned}$$

$$3. \int 2x\sqrt{x^2+4} dx = \dots$$

Jawab:

Misalkan $u = x^2 + 4$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\begin{aligned} \int 2x(x^2+4)^{\frac{1}{2}} dx &= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot \frac{du}{2x} \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (x^2+4)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+4)^3} + C \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL 2

Hitunglah!

1. a. $\int 2x(x^2+3)^5 dx = \dots$
- b. $\int 6x^2(2x^3-1)^{10} dx = \dots$
- c. $\int 4x^3(x^4-2)^8 dx = \dots$
- d. $\int (x+3)^7 dx = \dots$
- e. $\int 6x(x^2-10)^6 dx = \dots$
- f. $\int 12x^2(x^3+4)^9 dx = \dots$
- g. $\int (2x+3)(x^2+3x-1)^{10} dx = \dots$

$$2. a. \int \frac{2x}{(x^2-3)^8} dx = \dots$$

$$b. \int \frac{-6x}{(x^2+1)^{10}} dx = \dots$$

$$c. \int \frac{6x+1}{(3x^2+x-2)^4} dx = \dots$$

$$3. a. \int 2x\sqrt{x^2+5} dx = \dots$$

$$b. \int 8x\sqrt{x^2-1} dx = \dots$$

$$c. \int (2x+1)\sqrt{x^2+x} dx = \dots$$

----- Good Luck -----

C. INTEGRAL PARSIAL

$$8. \int u dv = uv - \int v du$$

Keterangan :

u, v : fungsi dalam x

dv : turunan pertama v

du : turunan pertama u

Contoh:

$$\int 3x(8x+5)^4 dx = \dots$$

Jawab:

Misalkan $u = 3x$, $dv = (8x+5)^4 dx$

$$du = 3 dx \quad v = \int (8x+5)^4 dx = \frac{1}{40} (8x+5)^5 + C$$

$$\begin{aligned}
 \int 3x(8x+5)^4 dx &= u \cdot v - \int v du \\
 &= 3x \cdot \frac{1}{40} (8x+5)^5 - \int \frac{1}{40} (8x+5)^5 3 dx \\
 &= \frac{3}{40} x (8x+5)^5 - \frac{3}{40} \int (8x+5)^5 dx \\
 &= \frac{3}{40} x (8x+5)^5 - \frac{3}{40} \cdot \frac{1}{48} (8x+5)^6 + C \\
 &= \frac{3}{40} x (8x+5)^5 - \frac{1}{640} (8x+5)^6 + C
 \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL 3

Hitunglah!

- $\int 6x(6x+1)^5 dx = ..$
- $\int 2x(x-3)^{10} dx = ..$
- $\int x^3(x^2+3)^5 dx = ..$
- $\int 2x^3(3x^2-4)^5 dx = ..$
- $\int x^3 \sqrt{4-2x^2} dx = ..$

----- Good Luck -----

D. INTEGRAL TRIGONOMETRI

$$\begin{aligned}
 9. \quad &a. \int \sin x dx = -\cos x + C \\
 &b. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C \\
 &c. \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \\
 10. \quad &a. \int \cos x dx = \sin x + C \\
 &b. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C \\
 &c. \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C
 \end{aligned}$$

Contoh:

$$1. \int \sin 3x dx = ..$$

Jawab:

$$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

$$2. \int \cos(2x+4) dx = ..$$

Jawab:

$$\int \cos(2x+4) dx = \frac{1}{2} \sin(2x+4) + C$$

$$3. \int 6 \sin 2x dx = ..$$

Jawab:

$$\begin{aligned}
 \int 6 \sin 2x dx &= -\frac{6}{2} \cos 2x + C \\
 &= -3 \cos 2x + C
 \end{aligned}$$

4. $\int (\sin x + \cos x) dx = ..$

Jawab:

$$\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

5. $\int \sin x \cos x dx = ..$

Jawab:

$$\int \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cos 2x + C = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$$

6. $\int x \cos x dx = ..$

Jawab:

Misalkan $u = x$, $dv = \cos x dx$

$$du = dx, v = \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - (-\cos x) + C$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

LATIHAN SOAL 4

Hitunglah!

1. a. $\int \sin x dx = ..$

b. $\int \sin 2x dx = ..$

c. $\int \sin(4x-1) dx = ..$

d. $\int \sin(2-3x) dx = ..$

2. a. $\int \cos x dx = ..$

b. $\int \cos 6x dx = ..$

c. $\int \cos(3x+6) dx = ..$

d. $\int \cos(1-5x) dx = ..$

3. a. $\int 8 \sin 2x dx = ..$

b. $\int 10 \cos 5x dx = ..$

c. $\int -8 \sin(4x-3) dx = ..$

d. $\int \frac{1}{4} \cos(2x+6) dx = ..$

4. a. $\int (\cos 6x - \sin 2x) dx = ..$

b. $\int 2 \sin x \cos x dx = ..$

c. $\int (1-2 \sin^2 x) dx = ..$

5. a. $\int \sin 2x \cos 2x dx = ..$

b. $\int \frac{\sin 2x}{(1-\sin^2 x)^3} dx = ..$

6. a. $\int x \cos 3x dx = ..$

b. $\int x \sin x dx = ..$

c. $\int x^2 \sin x dx = ..$

----- Good Luck -----

E. INTEGRAL TENTU

$$11. \int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a \\ = F(a) - F(b)$$

Keterangan:

$f(x)$: turunan pertama dari $F(x)$

a : batas atas

b : batas bawah

Contoh:

$$1. \int_0^8 6x^2 dx = ..$$

Jawab:

$$\int_0^8 6x^2 dx = \left[\frac{6}{3} x^3 \right]_0^8 \\ = 2(8)^3 - 2.(0)^3 = 1024$$

$$2. \int_1^4 (3x^2 + 4x - 4)dx = ..$$

Jawab:

$$\int_1^4 (3x^2 + 4x - 4)dx = \left[x^3 + 2x - 4x \right]_1^4 \\ = ((4)^3 + 2.4 - 4.4) - ((1)^3 + 2.1 - 4.1) \\ = 56 - (-1) = 57$$

$$3. \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx = ..$$

$$\frac{1}{2}\pi$$

Jawab:

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx = \left[\sin x \right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\ = \sin \frac{3}{2}\pi - \sin \frac{1}{2}\pi \\ = (-1) - 1 = -2$$

LATIHAN SOAL 5

Hitunglah!

$$1. a. \int_1^4 3x^2 dx = ..$$

$$b. \int_0^2 10x dx = ..$$

$$c. \int_0^1 20x^3 dx = ..$$

$$d. \int_{-1}^2 8 dx = ..$$

$$2. a. \int_0^3 (3x^2 + 6x - 1)dx = ..$$

$$b. \int_1^2 (6x^2 - 2x + 1)dx = ..$$

$$c. \int_2^6 (x + 4)dx = ..$$

$$d. \int_{-1}^1 (8x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx = ..$$

$$3. a. \int_0^{\pi} \sin x dx = ..$$

$$b. \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx = ..$$

$$c. \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin 2x dx = ..$$

$$d. \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin 2x dx = ..$$

F. PENGGUNAAN INTEGRAL TENTU

Menghitung luas daerah tak beraturan dengan pendekatan luas persegi panjang

Permasalahan untuk diskusi bersama:

Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$; sumbu x , $x = 0$ dan $x = 3$ seperti pada gambar disamping !

jawab

Dengan membagi daerah yang diarsir dengan

beberapa persegi panjang dengan lebar $\Delta x = \frac{1}{2}$ (tampak gambar 2), maka luas daerah

yang diarsir didapat dari pendekatan luas persegi panjang.

Untuk interval :

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} ; \text{Luas} = f(0) \cdot \Delta x = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 ; \text{Luas} = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$1 \leq x \leq \frac{3}{2} ; \text{Luas} = f(1) \cdot \Delta x = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 ; \text{Luas} = f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Delta x = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

$$2 \leq x \leq \frac{5}{2} ; \text{Luas} = f(2) \cdot \Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 3 ; \text{Luas} = f\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Delta x = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{8}$$

$$\text{Luas daerah yang diarsir} \approx 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{9}{8} + 2 + \frac{25}{8} \approx \frac{55}{8}$$

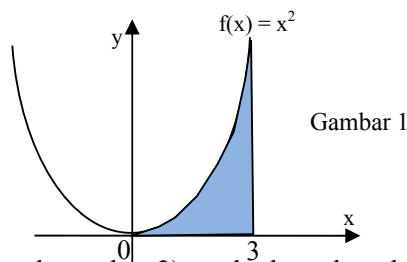
Bentuk penjumlahan diatas dapat disimbolkan sebagai :

$$L \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x ; \text{ dengan } n : \text{ banyak persegi panjang yang terbentuk.}$$

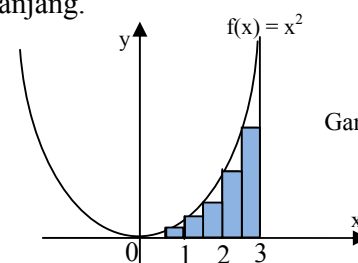
Tentu saja hasil diatas bukan hasil yang sesungguhnya, melainkan didapat melalui pendekatan.

Semakin kecil lebar (Δx) yang dibuat maka semakin teliti hasil yang didapat (makin mendekati luas yang sesungguhnya). Hal ini ditunjukkan dengan semakin kecilnya daerah yang tidak diarsir pada gambar 2. Dengan memperkecil lebar ($\Delta x \rightarrow 0$), maka banyak persegi panjang (n) semakin banyak ($n \rightarrow \infty$). Sehingga luas daerah yang sebenarnya dapat ditentukan dengan :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_b^a f(x) dx$$



Gambar 1

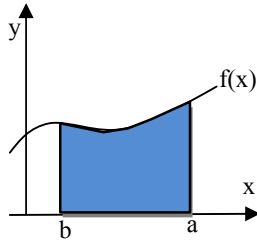


Gambar 2

1. LUAS DAERAH

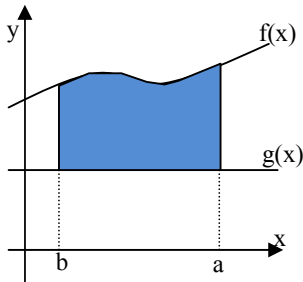
Luas daerah yang dibatasi kurva dengan sumbu x bila :

a. daerah berada di atas sumbu x



$$L = \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

b. daerah berada di antara dua kurva $f(x)$ dan $g(x)$



$$L = \int_b^a [f(x) - g(x)]dx$$

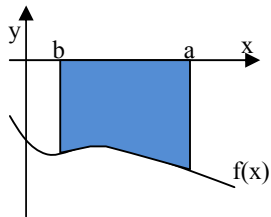
Keterangan:

$f(x)$: kurva yang berada di atas

$g(x)$: kurva yang berada di bawah

a, b : titik potong kurva $f(x)$ dan $g(x)$
atau batas atas & batas bawah

c. daerah berada di bawah sumbu x



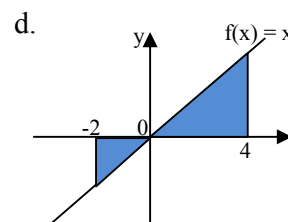
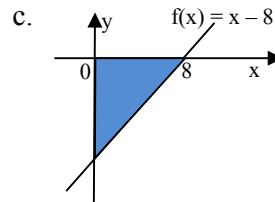
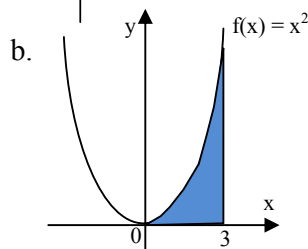
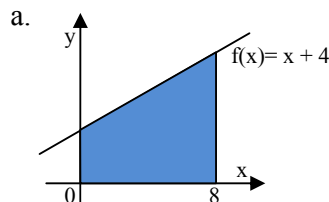
dengan menganggap daerah yang diarsir dibatasi oleh kurva $y = 0$; $f(x)$; $x = b$ dan $x = a$ maka luasnya dirumuskan

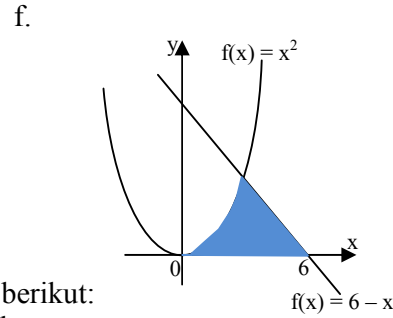
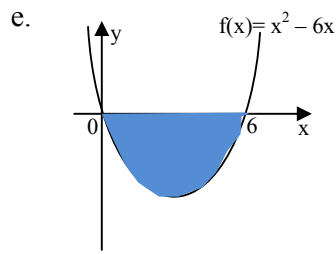
$$L = \int_b^a [0 - f(x)]dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$L = -\int_b^a f(x)dx = -[F(a) - F(b)]$$

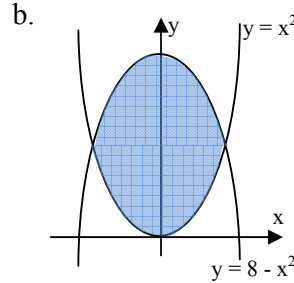
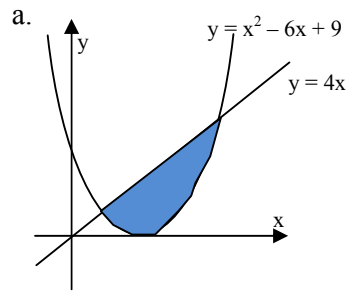
LATIHAN SOAL 6

1. Hitunglah luas daerah yang diarsir berikut:





2. Hitunglah luas daerah yang diarsir berikut:



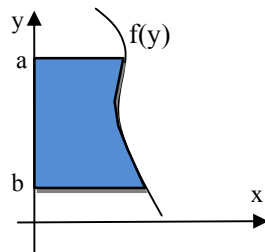
3. Hitunglah luas daerah yang dibatasi :

- $f(x) = 4x - x^2$; sumbu x ; antara $x = 0$ dan $x = 3$
- $f(x) = x^2 - 2x - 3$; sumbu x ; antara $x = 0$ dan $x = 2$
- $y = x^2$; $y = x + 2$
- $y = x^2 - 4x$; $y = -x^2$

----- Good Luck -----

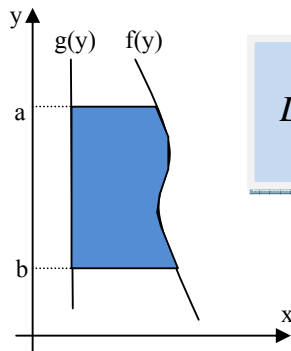
Dengan cara yang sama, luas daerah yang dibatasi kurva dengan sumbu y bila :

a. daerah berada di kanan sumbu y



$$L = \int_b^a f(y) dy = F(a) - F(b)$$

b. daerah berada di antara dua kurva $f(y)$ dan $g(y)$



$$L = \int_b^a [f(y) - g(y)] dy$$

Keterangan:

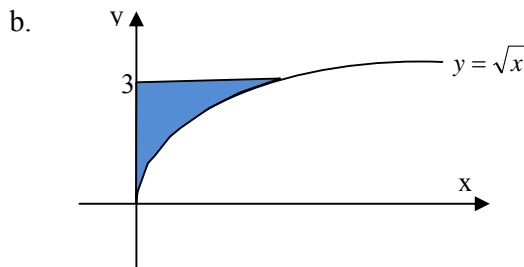
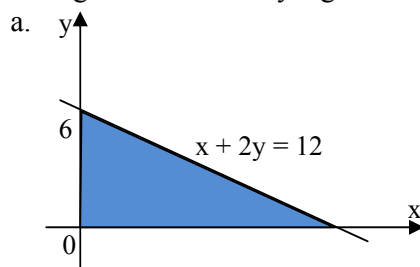
$f(y)$: kurva yang berada di kanan

$g(y)$: kurva yang berada di kiri

a, b : titik potong kurva $f(y)$ dan $g(y)$
atau batas atas & batas bawah

LATIHAN SOAL 7

1. Hitunglah luas daerah yang diarsir berikut:



2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi parabola $y^2 = 4x$ dan $4x - 3y = 4$

----- Good Luck -----

Menghitung volume benda putar dengan pendekatan volume tabung

Volume benda putar adalah volume bangun ruang yang terbentuk dari hasil pemutaran suatu daerah di bidang datar terhadap garis tertentu (sumbu rotasi).

Permasalahan untuk diskusi bersama:

Hitunglah volume benda putar dari daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$; sumbu x , $x = b$ dan $x = a$, jika daerah diputar mengelilingi sumbu x sebesar 360° (gambar 1)!

jawab

Bangun ruang yang terjadi seperti tampak pada gambar 2.

Dengan membagi bangun ruang dengan beberapa bagian (hampir menyerupai tabung) dengan tinggi sama (Δx), maka volume benda putar yang terbentuk didapat dari pendekatan volume tabung.

Ambil satu bagian sembarang, misal yang diarsir.

Volume daerah yang diarsir adalah

$\Delta V \approx \text{Volume tabung}$

$$\approx \pi \cdot r^2 \cdot t$$

$$\approx \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot \Delta x$$

Untuk n bagian yang terjadi maka volume benda

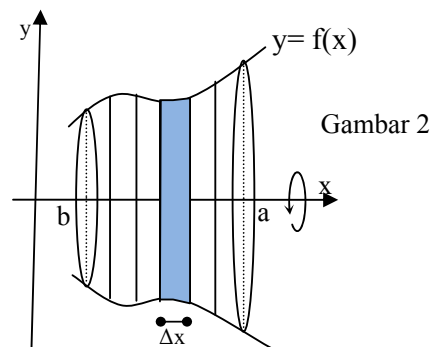
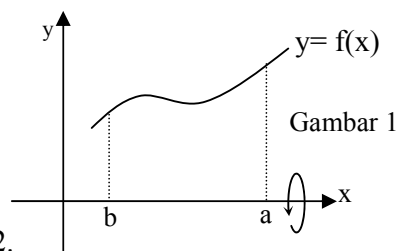
putarnya adalah $V \approx \sum_{i=1}^n \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$

Semakin kecil tinggi (Δx) yang dibuat maka semakin teliti hasil yang didapat (makin mendekati volume yang sesungguhnya). Dengan memperkecil tinggi ($\Delta x \rightarrow 0$), maka $n \rightarrow \infty$. Sehingga volume benda putar yang sebenarnya dapat ditentukan dengan :

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

$$= \int_b^a \pi \cdot [f(x_i)]^2 dx$$

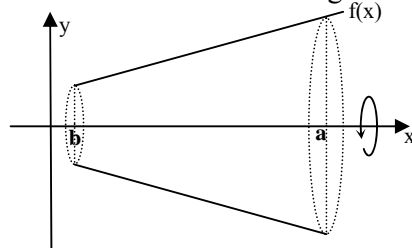
$$= \pi \int_b^a [f(x_i)]^2 dx$$



2. VOLUME BENDA PUTAR

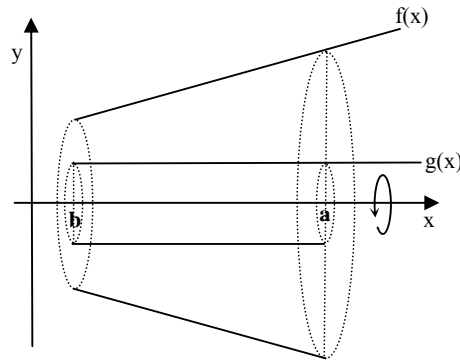
a. Volume Benda Putar bila daerah diputar mengelilingi sumbu x sebesar 360°

- ◆ Daerah dibatasi kurva dengan sumbu x



$$V = \pi \int_b^a [f(x)]^2 dx$$

- ◆ Daerah berada di antara dua kurva $f(x)$ dan $g(x)$



$$V = \pi \int_b^a ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Keterangan:

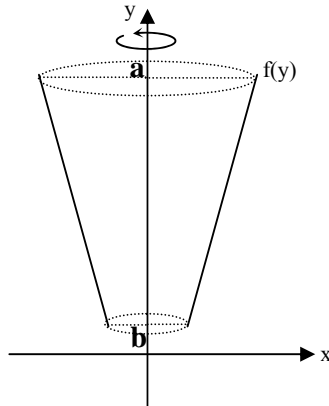
$f(x)$: kurva yang berada di atas

$g(x)$: kurva yang berada di bawah

a, b : titik potong kurva $f(x)$ dan $g(x)$

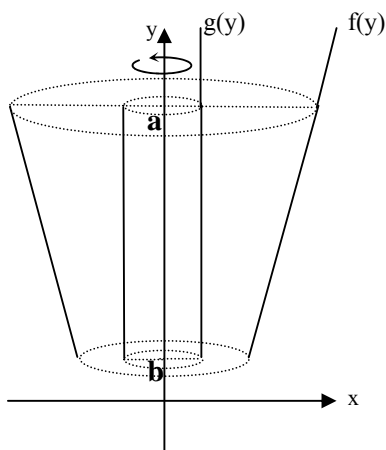
b. Volume Benda Putar bila daerah diputar mengelilingi sumbu y sebesar 360°

- ◆ Daerah dibatasi kurva dengan sumbu y



$$V = \pi \int_b^a [f(y)]^2 dy$$

- ♦ Daerah berada di antara dua kurva $f(y)$ dan $g(y)$



$$V = \pi \int_b^a ([f(y)]^2 - [g(y)]^2) dy$$

Keterangan:

$f(y)$: kurva yang berada di atas/kanan

$g(y)$: kurva yang berada di bawah/kiri

a, b : titik potong kurva $f(y)$ dan $g(y)$

LATIHAN SOAL 8

- Tentukan volume benda putar jika daerah yang dibatasi kurva berikut diputar mengelilingi sumbu x sebesar 360°
 - $f(x) = x - 2$; dengan batas $2 \leq x \leq 6$
 - $f(x) = 8 - x$; dengan batas $2 \leq x \leq 4$
 - $f(x) = x^2$; dengan batas $0 \leq x \leq 3$
 - $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; dengan batas $-1 \leq x \leq 2$
- Tentukan volume benda putar jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$; $y = x + 2$; diputar mengelilingi sumbu x sebesar 360°
- Tentukan volume benda putar jika daerah yang dibatasi kurva berikut diputar mengelilingi sumbu y sebesar 360°
 - $y = x - 2$; dengan batas $2 \leq y \leq 6$
 - $y = 4 - x$; dengan batas $2 \leq y \leq 4$
 - $y = x^2$; dengan batas $0 \leq y \leq 5$
- Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $x = y^2$; $y = 2$; $y = 0$ diputar mengelilingi sumbu y sebesar 360°

----- Good Luck -----

DAFTAR PUSTAKA

- Noomandiri, BK. , Matematika SMA Untuk Kelas XII Program Ilmu Alam,
Penerbit Erlangga, Jakarta, 2004
- Purcell, Edwin J. Varberg Dale, Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I, Edisi kelima
Penerbit Erlangga, Jakarta, 1987
- Sartono Wirodikromo , Matematika Untuk SMA kelas XII Program Ilmu Alam,
Penerbit Erlangga, Jakarta, 2006

UJI KOMPETENSI

1. Hitunglah :

a. $\int (18x^2 + 2x - 1)dx = ..$

b. $\int (x^3 + 6x^2 - x + 7)dx = ..$

c. $\int \left(\frac{4x^6 + 3x^5 - 8}{x^5} \right) dx = ..$

d. $\int \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}} \right) dx = ..$

e. $\int (x + 3)(x^2 - 5x + 6)dx = ..$

f. $\int x^3 (2x^2 + 3)^2 dx = ..$

2. Tentukan fungsi $f(x)$ jika diketahui :

a. $f'(x) = 15x^2 - 4x - 5$ dan $f\left(\frac{2}{5}\right) = 0$

b. $f'(x) = 2x - 5$ dan $f(1) = 2$

c. $f'(x) = 12x - 2$ dan $f(-3) = 48$

3. Tentukan nilai a , jika diketahui : $\int_1^a (2x - 3)dx = 12$

4. Hitunglah :

a. $\int (5x + 1)(5x^2 + 2x - 8)^6 dx = ..$

b. $\int \left(\frac{12x}{\sqrt{2x^2 + 5}} \right) dx = ..$

5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva :

a. $f(x) = x^2 - x + 2$ dengan batas $-1 \leq x \leq 2$

b. $f(x) = 3x^2 + 4x - 7$ dengan batas $0 \leq x \leq 2$

c. $y = 2 - x$ dan $y = x^2$

d. $y = 6 - x$ dan $y = \sqrt{x}$

6. Hitunglah :

a. $\int 8x^2 \sin(x^3 - 8)dx = ..$

b. $\int \frac{2x \cos \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} dx = ..$

7. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah antara kurva $y = x + 7$ dan $y = 7 - x^2$ diputar mengelilingi sumbu x sebesar 360°

----- Good Luck -----

LATIHAN PEMANTAPAN
(Soal-Soal yang Sering Keluar dalam UN)

01. EBT-SMA-96-29

Ditentukan $F'(x) = 3x^2 + 6x + 2$ dan $F(2) = 25$.

$F'(x)$ adalah turunan dari $F(x)$, maka

$F(x) = \dots$

A. $3x^3 + 6x^2 + 2x - 27$

B. $x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

C. $x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

D. $x^3 + 3x^2 + 2x + 49$

E. $x^3 + 3x^2 + 2x - 49$

02. EBT-SMA-95-28

Diketahui $F'(x) = 3x^2 - 4x + 2$ dan

$F(-1) = -2$, maka

$F(x) = \dots$

A. $x^3 - 3x^2 + 2x - 13$

B. $x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

C. $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$

D. $9x^3 - 12x^2 + 2x - 13$

E. $9x^3 - 12x^2 + 2x + 4$

03. MD-96-17

$F'(x) = (x+1)(x+2)$. Jika $F(-3)$, maka $F(x) = \dots$

A. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2x$

B. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x - 2x$

C. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2x - 3$

D. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2x + 3$

E. $(x+1)^2 \frac{(x+2)}{4}$

04. MA-99-08

Diketahui $\frac{dF}{dx} = ax + b$

$$F(0) - F(-1) = 3$$

$$F(1) - F(0) = 5$$

$a + b = \dots$

A. 8

B. 6

C. 2

D. -2

E. -4

05. MD-94-25

Jika $f(x) = \int (x^2 + 2x - 1) dx$ dan $f(1) = 0$

, maka $f(x) = \dots$

A. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - \frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x - \frac{1}{3}$

06. MD-84-26

Jika $F'(x) = 1 - 2x$ dan $F(3) = 4$, maka $F(x)$ adalah ...

A. $2x^2 - x - 11$

B. $-2x^2 + x + 19$

C. $x^2 - 2x - 10$

D. $x^2 + 2x + 11$

E. $-x^2 + x + 10$

07. MD-91-25

Jika $F'(x) = 8x - 2$ dan $F(5) = 36$ maka

$F(x) = \dots$

A. $8x^2 - 2x - 159$

B. $8x^2 - 2x - 154$

C. $4x^2 - 2x - 74$

D. $4x^2 - 2x - 54$

E. $4x^2 - 2x - 59$

08. MA-94-02

Diketahui $\frac{df(x)}{dx} = \sqrt[3]{x}$. Jika $f(4) = 19$,

maka $f(1) = \dots$

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. 6

09. EBT-SMA-92-29

Diketahui $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$ dan $F(4)$

$= 9$. Jika $F'(x)$ turunan dari $F(x)$, maka

$F(x) = \dots$

A. $2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}$

B. $2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - \frac{1}{3}$

E. $2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}$

10. EBT-SMA-88-28

Ditentukan $F'(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ dan

$F(-1) = 0$, maka

$F(x) = \dots$

- A. $-\frac{1}{x} - 1$
- B. $-\frac{1}{x} + x$
- C. $-\frac{1}{x^3} + x$
- D. $-\frac{1}{x} + x + 2$
- E. $\frac{1}{x^3} + x + 2$

11. EBT-SMA-90-36

Turunan fungsi F adalah f yang ditentukan oleh $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$.

Apabila ditentukan $F(-1) = 0$ maka

$F(x) = \dots$

- A. $x^3 - 2x^2 + 6x$
- B. $x^3 - 2x^2 + 6x - 5$
- C. $x^3 - 2x^2 + 6x - 9$
- D. $x^3 - 2x^2 + 6x + 5$
- E. $x^3 - 2x^2 + 6x + 9$

12. EBT-SMA-87-28

$\int (x^2 + 2) dx$ adalah ...

- A. $\frac{1}{3}x^3 + 2x + C$
- B. $2x^3 + 2x + C$
- C. $\frac{1}{2}x^3 + 2x + C$
- D. $\frac{1}{3}x^3 + 2x + C$
- E. $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C$

13. MD-85-21

$\int \frac{1}{2x\sqrt{x}} dx = \dots$

- A. $-\frac{1}{\sqrt{x}} + c$
- B. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c$
- C. $\frac{1}{\sqrt{x}} + c$
- D. $\frac{2}{\sqrt{x}} + c$
- E. $-\frac{1}{2\sqrt{x}} + c$

14. MD-81-28

$\int \sin 2x dx = \dots$

- A. $\frac{1}{2} \cos 2x + C$
- B. $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$
- C. $2 \cos 2x + C$
- D. $-2 \cos 2x + C$
- E. $-\cos 2x + C$

15. EBT-SMA-97-30

Nilai $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} (3 \cos x - 5 \sin x) dx = \dots$

- A. $4 - 4\sqrt{3}$
- B. $-1 - 3\sqrt{3}$
- C. $1 - \sqrt{3}$
- D. $-1 + \sqrt{3}$
- E. $4 + 4\sqrt{3}$

16. EBT-SMA-96-30

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x + 6 \cos x) dx = \dots$

- A. $2 + 6\sqrt{2}$
- B. $6 + 2\sqrt{2}$
- C. $6 - 2\sqrt{2}$
- D. $-6 + 2\sqrt{2}$
- E. $-6 - 2\sqrt{2}$

17. EBT-SMA-90-38

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos 3x) dx = \dots$

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. 0
- D. $-\frac{1}{2}$
- E. $-\frac{2}{3}$

18. EBT-SMA-89-36

Diberikan $\int 15x^2 (x^3 - 1)^4 dx$, selesaikan dengan langkah-langkah berikut :

- a. Misalkan $U = x^3 - 1$
Tentukan dU
- b. Ubahlah menjadi $\int f(U) dU$ dan selesaikan
- c. Hitung integral di atas untuk $x = 0$ sampai $x = 1$

19. EBT-SMA-02-35

$$\int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} x\sqrt{x^2-2}dx = \dots$$

- A. 24
- B. $18\frac{2}{3}$
- C. 18
- D. $17\frac{1}{3}$
- E. 17

20. EBT-SMA-01-27

$$\text{Hasil } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-5}} = \dots$$

- A. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3-5} + C$
- B. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3-5} + C$
- C. $\frac{1}{6}\sqrt{x^3-5} + C$
- D. $\frac{1}{9}\sqrt{x^3-5} + C$
- E. $\frac{1}{12}\sqrt{x^3-5} + C$

21. EBT-SMA-99-30

$$\text{Hasil } \int \frac{18x^2}{\sqrt{2x^3+8}} dx = \dots$$

- A. $-\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+8} + C$
- B. $9\sqrt{2x^2+8} + C$
- C. $\frac{1}{6}\sqrt{2x^2+8} + C$
- D. $6\sqrt{2x^2+8} + C$
- E. $36\sqrt{2x^2+8} + C$

22. EBT-SMA-95-32

$$\text{Diketahui } f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-4}} \text{ maka}$$

$$\int f(x)dx = \dots$$

- A. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-4} + C$
- B. $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-4} + C$
- C. $\frac{2}{3}x\sqrt{3x^2-4} + C$
- D. $2x\sqrt{3x^2-4} + C$
- E. $2\sqrt{3x^2-4} + C$

23. EBT-SMA-03-33

$$\text{Nilai } \int x \sin(x^2+1) dx = \dots$$

- A. $-\cos(x^2+1) + C$
- B. $\cos(x^2+1) + C$
- C. $-\frac{1}{2} \cos(x^2+1) + C$

$$\text{D. } \frac{1}{2} \cos(x^2+1) + C$$

$$\text{E. } -2 \cos(x^2+1) + C$$

24. EBT-SMA-88-30

$$\int \sin^5 x \cos x dx \text{ adalah } \dots$$

- A. $\frac{1}{6} \sin^6 x + C$
- B. $\frac{1}{6} \cos^6 x + C$
- C. $-\frac{1}{6} \sin^6 x + C$
- D. $-\frac{1}{6} \cos^6 x + C$
- E. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$

25. MD-91-26

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \dots$$

- A. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$
- B. $\frac{1}{4} \cos^4 x + C$
- C. $-\frac{1}{4} \cos^2 x + C$
- D. $\frac{1}{3} \sin^2 x + C$
- E. $-\frac{1}{3} \sin^4 x + C$

26. EBT-SMA-97-32

$$\text{Hasil dari } \int \frac{6dx}{3x+5} \text{ adalah } \dots$$

- A. $6 \ln(3x+5) + C$
- B. $3 \ln(3x+5) + C$
- C. $3 \ln(6x+5) + C$
- D. $2 \ln(3x+5) + C$
- E. $\ln(3x+5) + C$

27. MD-82-19

$$\int_{-2}^4 \left(x+4-\frac{1}{2}x^2\right) dx = \dots$$

- A. 2
- B. 18
- C. $20\frac{1}{3}$
- D. 22
- E. $24\frac{1}{3}$

28. MA-79-03

$$\int_0^2 (3x^2 - 3x + 7) dx = \dots$$

- A. 16
- B. 10
- C. 6
- D. 13
- E. 22

29. MD-83-19

$\int_1^2 \frac{x-1}{x^3} dx$ sama dengan ...

- A. $-1\frac{1}{6}$
- B. $\frac{1}{8}$
- C. $\frac{7}{8}$
- D. 1
- E. $1\frac{1}{2}$

30. MD-87-24

$\int_1^2 \frac{dx}{x^3} = \dots$

- A. $\frac{3}{8}$
- B. $\frac{5}{8}$
- C. $\frac{63}{64}$
- D. $-1\frac{1}{64}$
- E. $\frac{7}{8}$

31. EBT-SMA-02-30

Hasil dari $\int_{-1}^1 x^2(x-6)dx = \dots$

- A. -4
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. 0
- D. $\frac{1}{2}$
- E. $4\frac{1}{2}$

32. EBT-SMA-89-33

Nilai $\int_0^2 (2x-1)^3 dx = \dots$

- A. 10
- B. 20
- C. 40
- D. 80
- E. 160

33. MD-87-19

Jika $b > 0$ dan $\int_1^b (2x-3) dx = 12$, maka nilai $b = \dots$

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6
- E. 7

34. MD-84-16

Jika p banyaknya himpunan bagian dari $(1,2)$ dan q akar positif persamaan $x^2 +$

$2x - 3 = 0$, maka $\int_q^p (8-2x)dx = \dots$

- A. 9
- B. 5
- C. 3
- D. 2
- E. -6

35. MD-93-22

Jika $\int_0^a \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} dx = \frac{3}{10}$, $\int_0^b (2x-3)dx = 4$ dan

$a, b > 0$, maka nilai $a^2 + 2ab + b^2$ adalah ...

- A. 10
- B. 15
- C. 20
- D. 25
- E. 30

36. MD-84-29

Jika $\int_1^y (1+x) dx = 6$, maka nilai y dapat diambil ...

- A. 6
- B. 5
- C. 4
- D. 3
- E. 2

37. MD-95-27

Jika p banyaknya faktor prima dari 42 dan q akar positif persamaan $3x^2 - 5x - 2 = 0$, maka ...

$\int_q^p (5-3x)dx = \dots$

- A. $-3\frac{1}{2}$
- B. $-2\frac{1}{2}$
- C. $2\frac{1}{2}$
- D. $3\frac{1}{3}$
- E. $5\frac{1}{2}$

38. UAN-SMA-04-30

Gradien garis singgung di sembarang titik pada suatu kurva ditentukan oleh rumus $y' = 3x^2 - 6x + 2$. Jika kurva tersebut melalui titik $(1, -5)$, maka persamaan kurvanya adalah ...

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$
- B. $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
- C. $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
- D. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
- E. $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

39. MA-93-06

Jika $\frac{df(x)}{dx} = x^3 + x^{-3}$ dan $f(1) = -\frac{11}{20}$

maka $\int_1^2 f(x) dx = \dots$

- A. 2
- B. 1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{1}{4}$
- E. $-\frac{1}{4}$

39. MD-83-20

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \dots$

- A. 2
- B. 0
- C. π
- D. 1
- E. $\frac{1}{2}$

40. EBT-SMA-00-28

Hasil dari $\int \cos x \cos 4x dx = \dots$

- A. $-\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$
- B. $\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{6} \sin 3x + C$
- C. $\frac{2}{5} \sin 5x + \frac{2}{5} \sin 3x + C$
- D. $\frac{1}{2} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin 3x + C$
- E. $-\frac{1}{2} \sin 5x - \frac{1}{2} \sin 3x + C$

41. EBT-SMA-99-29

Nilai $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \cos x dx = \dots$

- A. $\frac{5}{6}$
- B. $\frac{4}{6}$

- C. $\frac{5}{12}$
- D. $-\frac{5}{12}$
- E. $-\frac{5}{6}$

42. EBT-SMA-03-32

Nilai dari $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x \sin x dx = \dots$

- A. $-\frac{1}{2}$
- B. $-\frac{1}{6}$
- C. $\frac{1}{12}$
- D. $\frac{1}{8}$
- E. $\frac{5}{12}$

43. EBT-SMA-00-24

Nilai $\int_0^1 5x(1-x)^6 dx = \dots$

- A. $\frac{75}{56}$
- B. $\frac{10}{56}$
- C. $\frac{5}{56}$
- D. $-\frac{7}{56}$
- E. $-\frac{10}{56}$

44. EBT-SMA-93-40

$\int x \sin x dx = \dots$

- A. $x \cos x + \sin x + C$
- B. $-x \cos x + \sin x + C$
- C. $x \sin x - \cos x + C$
- D. $-x \sin x$
- E. $x \cos x$

45. EBT-SMA-96-32

$\int (3x+1) \cos 2x dx = \dots$

- A. $\frac{1}{2} (3x+1) \sin 2x + \frac{3}{4} \cos 2x + C$
- B. $\frac{1}{2} (3x+1) \sin 2x - \frac{3}{4} \cos 2x + C$
- C. $\frac{1}{2} (3x+1) \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x + C$
- D. $-\frac{1}{2} (3x+1) \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x + C$
- E. $-\frac{1}{2} (3x+1) \sin 2x - \frac{3}{4} \cos 2x + C$

Panjang jari tangan menentukan kecerdasan?



Menentukan seseorang cerdas atau tidak tanpa menguji otaknya memang tidaklah mudah. Apalagi jika hanya mengandalkan tampilan fisik. Seringnya kita mendapatkan fakta yang berseberangan. Seseorang dengan tampilan fisik menarik tak berkorelasi positif dengan kemampuan otaknya yang cerdas. Demikian pula sebaliknya. Meski demikian, berdasarkan hasil penelitian ada bagian tubuh manusia yang bisa digunakan untuk mengungkapkan kecerdasan seseorang.

Mark Brosnan salah satu peneliti dari Universitas Bath mengungkapkan bahwa kecerdasan seseorang dapat dilihat dari perbandingan panjang jari manis dan jari telunjuknya. Seorang anak yang memiliki jari manis lebih panjang daripada jari telunjuk cenderung memiliki kemampuan matematika lebih tinggi daripada kemampuan verbal dan bahasa. Jika perbandingan sebaliknya anak umumnya memiliki kemampuan verbal seperti menulis dan membaca yang lebih baik dari matematika. Panjang jari tangan merefleksikan perkembangan bagian-bagian di otak.

Para ilmuwan telah lama mengetahui bahwa pertumbuhan jari-jari tangan manusia berbeda-beda tergantung hormon testosteron dan estrogen di dalam rahim saat bayi dikandung ibunya. Kadar testosteron yang tinggi diyakini mendukung perkembangan bagian otak yang berhubungan dengan matematika dan pandang ruang. Hormon itu pula yang menyebabkan jari manis tumbuh lebih panjang. Estrogen juga mendorong efek yang sama pada bagian otak, namun yang berhubungan dengan kemampuan verbal. Hormon ini mendukung pertumbuhan jari telunjuk, sehingga lebih panjang dari jari manis.

Untuk menguji hubungan kecerdasan dengan rasio panjang jari tangan, Brosnan dan koleganya membandingkan tes scholastic (SAT) semacam psikotes kepada calon siswa yang mendaftar sekolah dengan panjang cap jari setiap siswa yang telah diminta sebelumnya. Mereka mengukur panjang jari-jari secara teliti menggunakan jangka sorong yang memiliki tingkat ketelitian 0,01 mm. Kemudian rasio panjang jari dicatat untuk memperkirakan perbandingan kadar testosteron dan estrogen.

Hasil tes siswa laki-laki dan perempuan dipisahkan. Mereka menemukan hubungan yang jelas antara tingginya paparan testosteron terlihat dari panjang jari manis yang lebih panjang daripada jari telunjuk dengan nilai uji matematika yang tinggi. Juga tingginya paparan estrogen dengan kemampuan bahasa dan verbal pada sebagian anak perempuan. "Rasio panjang jari memberikan kita gambaran mengenai kemampuan pribadi yang berhubungan dengan kognitif (daya pikir)." Ujar Brosnan yang akan melaporkan temuannya dalam *British Journal of Psychology*.

Sumber : Harian pikiran rakyat, 31 Mei 2007