TURUNAN (DERIVATIF)

Definisi Turunan

Turunan fungsi f adalah f' yang nilainya pada bilangan x didefinisikan oleh:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Untuk semua x dengan limit tersebut ada

contoh

Andaikan $f(x) = 13x - 6$

Cari $f'(4)$

Solusi:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(13(4+h) - 6) - (13(4) - 6)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 13 \\ &= 13 \end{aligned}$$

SOAL

Dengan menggunakan definisi, tentukan turunan dari fungsi

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Pada $x = 1$ dan $x = 3$

Notasi turunan

Persamaan $f'(x)$ didefinisikan oleh aturan:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Karena $y = f(x)$ maka persamaan itu dapat pula dinyatakan dalam

bentuk: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Bentuk-bentuk $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ serta $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ lazim dinotasikan dengan $\frac{df}{dx}$ yang disebut

dengan notasi Leibniz

Jadi untuk menyatakan turunan suatu fungsi f(x)=y dapat digunakan notasi-nitasi berikut: $f'(x)$ atau $\frac{df}{dx}$

Notasi $\frac{df}{dx}$ dapat juga ditafsirkan sebagai: $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f)$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y)$

Dimana $\frac{d}{dx}$ menyatakan operasi turunan terhadap x.

Aturan Pencarian Turunan

ATURAN FUNGSI KONSTANTA

Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta maka untuk sembarang $x, f'(x) = 0$

Aturan Pencarian Turunan

ATURAN FUNGSI IDENTITAS

Jika $f(x) = x$ maka untuk sembarang $x, f'(x) = 1$

Aturan Pencarian Turunan

ATURAN PANGKAT

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

Aturan Pencarian Turunan

ATURAN KELIPATAN KONSTANTA

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdefinisikan, maka

$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$

Aturan Pencarian Turunan

ATURAN JUMLAH

Jika u dan v fungsi yang terdiferensialkan, maka $(u+v)' = u' + v'$

contoh

$$y = 8x^3 + 2x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 24x^2 + 2$$

$$y = x^3 + x^{-\frac{1}{2}} + 3 \;\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

Aturan Pencarian Turunan

ATURAN SELISIH

Jika u dan v fungsi yang terdiferensialkan, maka $(u - v)' = u' - v'$

Aturan Pencarian Turunan

ATURAN PERKALIAN

Jika u dan u fungsi yang terdiferensialkan, maka

$$(uv)' = u'v + uv'$$

contoh

$$y = (x+2)(2x+1) \Longrightarrow \frac{dy}{dx}(x+2)(2) + (2x+1)(1) = 4x+5$$

Aturan Pencarian Turunan

ATURAN HASIL BAGI

Jika u dan v fungsi yang terdiferensialkan, maka

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

contoh

$$\boldsymbol{y = \frac{(2x^2 + x)}{(x^3 + 3)}}$$

Fungsi y berbentuk $\frac{u}{v}$,

Maka

$$u = 2x^2 + x \Longrightarrow u' = 4x + 1$$

$$v = x^3 + 3 \Longrightarrow v' = 3x^2$$

Sehingga

$$y' = \frac{(4x + 1)(x^3 + 3) - (2x^2 + x)(3x^2)}{(x^3 + 3)^2}$$

$$y' = \frac{4x^4 + x^3 + 12x + 3 - 6x^4 - 3x^3}{(x^3 + 3)^2}$$

$$y' = \frac{-2x^4 - 2x^3 + 12x + 3}{(x^3 + 3)^2}$$

Aturan Rantai

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit

$$y = f\left(g(x)\right) = (f \circ g)(x)$$

Jika g terdiferensial di x dan f terdiferensial di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ terdiferensial di x dan

$$(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

contoh

$$y = (x^2 + 3)^3$$

Misal $u = x^2 + 3$ maka $y = u^3$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (3u^2)(2x)$$

$$= 3(x^2 + 3)^2(2x)$$

$$= 6x^5 + 36x^3 + 54x$$

Turunan Tingkat Tinggi

Operasi pendiferensialan mengambil sebuah fungsi f dan menghasilkan sebuah fungsi baru f'. Jika f' kita diferensialkan menghasilkan fungsi lain dinyatakan oleh f'' dan disebut turunan kedua dari f, dan seterusnya.