APLIKASI INTEGRAL

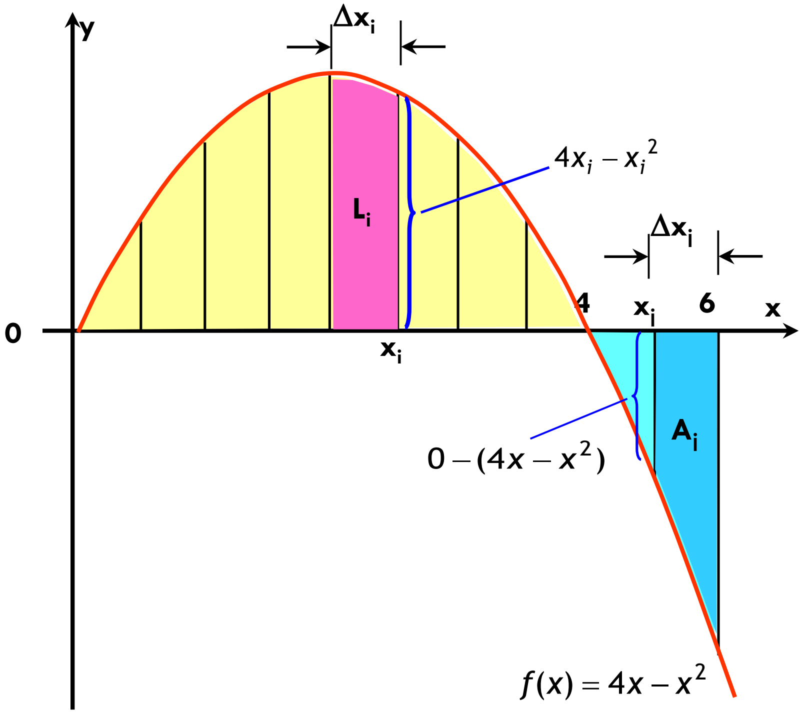
MENGHITUNG LUAS DAERAH DENGAN INTEGRAL

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = 4x - x^2$, sumbu x, dan garis $x = 6$

Langkah penyelesaian:

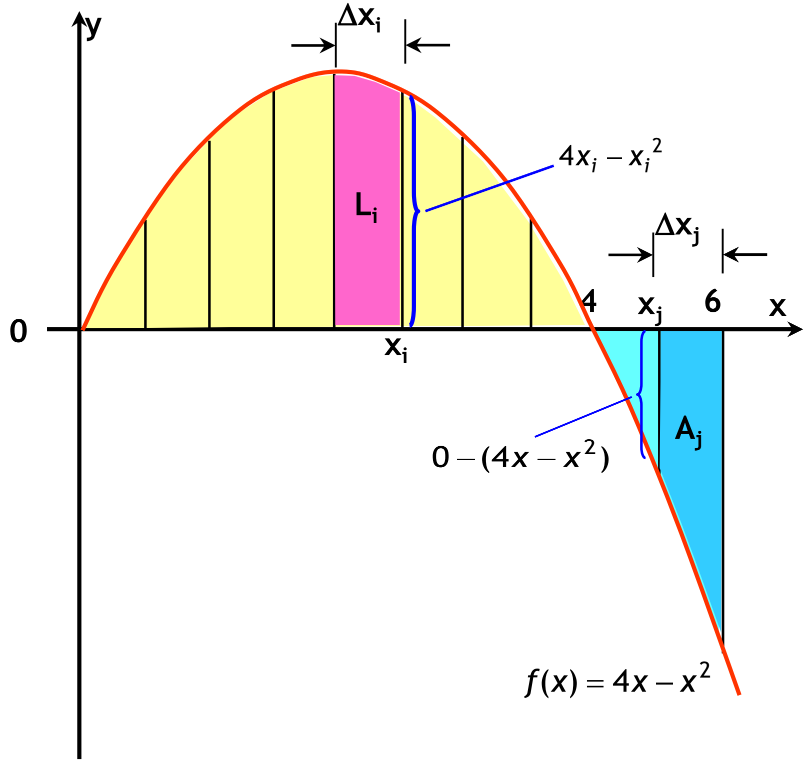
1. Gambar dan Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan $A_i \approx -(4x_i - x_i^2)\Delta x_i$
3. Jumlahkan : $L \approx \sum(4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan $A \approx \sum -(4x_i - x_i^2)\Delta x_i$
4. Ambil limitnya $L = \lim \sum (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan $A = \lim \sum -(4x_i - x_i^2)\Delta x_i$
5. Nyatakan dalam integral

$$L = \int_0^4 (4x - x^2)dx\ ;\ A = \int_4^6 -(4x - x^2)dx$$



$$L = \int_0^4 (4x - x^2)dx$$
$$= \left[2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^4$$
$$= 2(4^2) - \tfrac{1}{3}(4^3) - 0$$
$$= 32 - \frac{64}{3}$$

$$A = \int_4^6 -(4x - x^2)dx$$
$$= \left[-2x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^6$$
$$= -2(6^2) + \tfrac{1}{3}(6^3) - \left(-2(4^2) + \tfrac{1}{3}(4^3)\right)$$
$$= -72 + \frac{216}{3} + 32 - \frac{64}{3} = \frac{152}{3} - 40$$



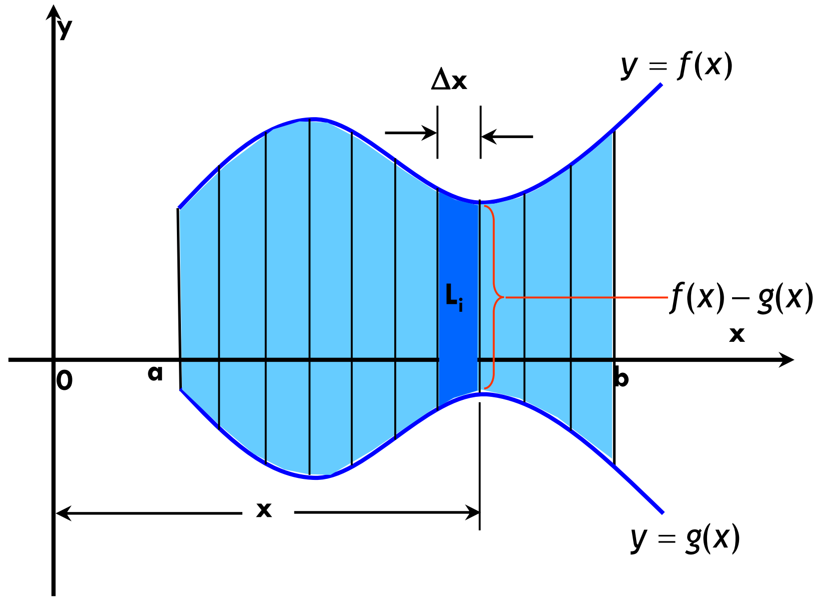
$$\text{Luas daerah} = 32 - \tfrac{64}{3} + \tfrac{152}{3} - 40 = 21\frac{1}{3}$$

LUAS DAERAH ANTARA DUA KURVA

Perhatikan kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) > g(x)$ pada selang $[a, b]$ di bawah ini. Dengan menggunakan cara: *partisi, aproksimasi, jumlahkan, ambil limitnya, integralkan*, maka dapat ditentukan luas daerah antara dua kurva tersebut.

Langkah penyelesaian:

1. Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
3. Jumlahkan : $L \approx \sum [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
4. Ambil limitnya : $L = \lim \sum [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
5. Nyatakan dalam integral tertentu: $L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$



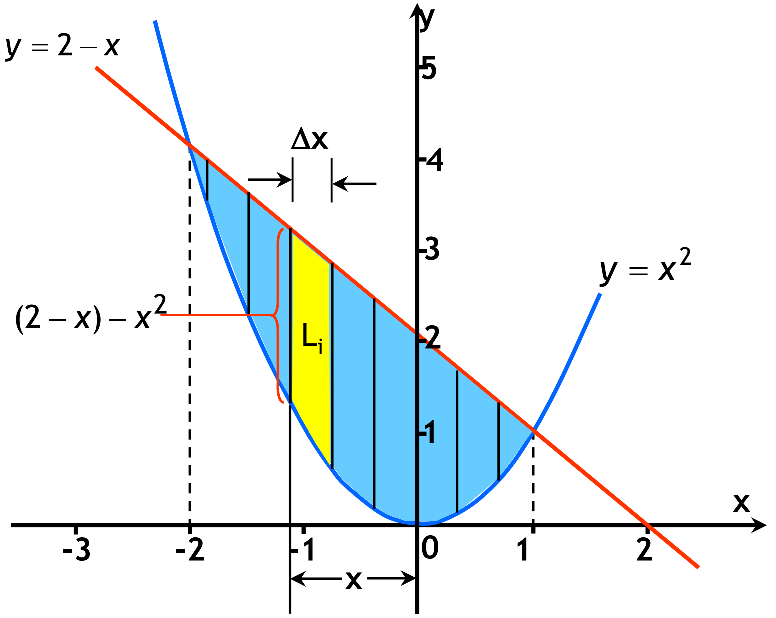
Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2 - x$

Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva

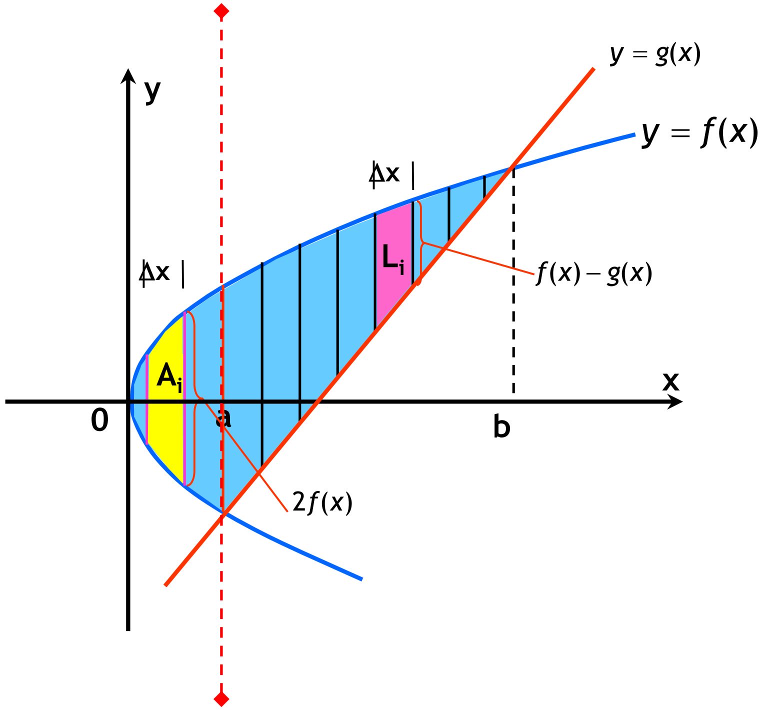
   $x^2 = 2 - x \;\rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$

   diperoleh x = -2 dan x =
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya $L_i \approx (2 - x - x^2)\Delta x$
5. Nyatakan dalam integral tertentu $\mathrm{L} = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)\,dx$

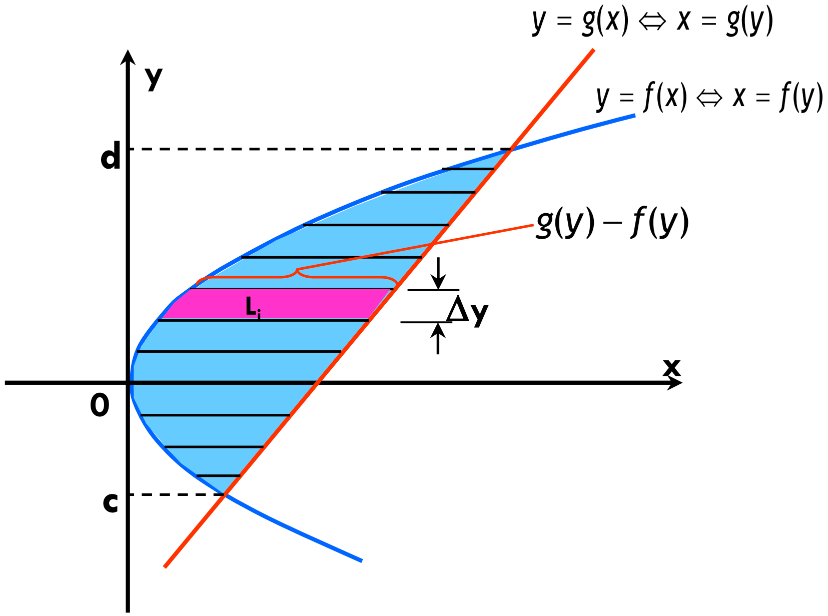


Untuk kasus tertentu pemartisian secara vertikal menyebabkan ada dua bentuk integral. Akibatnya diperlukan waktu lebih lama untuk menghitungnya.

$$\text{Luas daerah} = \int_0^a 2f(x)\,dx + \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

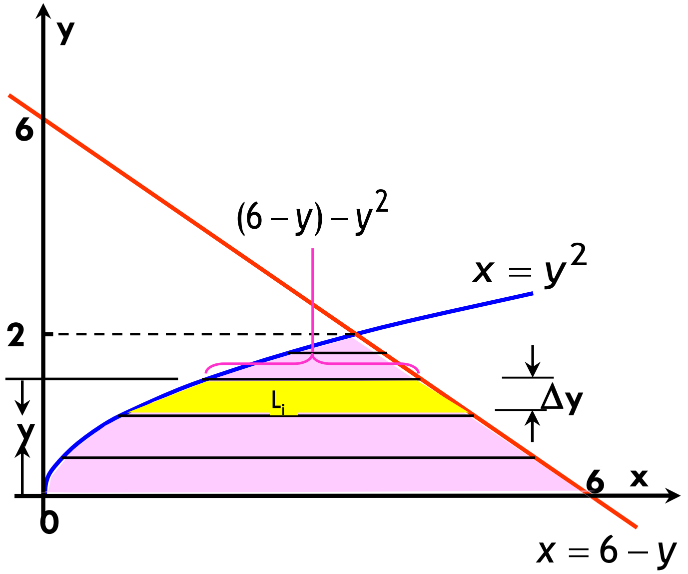


Jika daerah tersebut dipartisi secara horisontal, maka akan diperoleh satu bentuk integral yang menyatakan luas daerah tersebut. Sehingga penyelesaiannya menjadi lebih sederhana dari sebelumnya.



Luas daerah = $\int_{c}^{d} (g(y) - f(y))dy$

Hitunglah luas daerah di kuadran I yang dibatasi kurva $y^2 = x$, garis $x + y = 6$, dan sumbu x



Luas daerah = $\int_0^2 \left(6 - y - y^2\right) dy$

TUGAS

Dengan menggunakan integral, tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis/kurva berikut

1. $y = x + 6, y = x^3$ dan $2y + x = 0$
2. $(-1,4), (2,-2), (5,1)$ (mencari luas segitiga dengan titik sudut tersebut)
3. $y = \sqrt{x}, y = x - 4, x = 0$
4. $y = x^2 - 2x, y = -x^2$
5. $y = x^2 - 9, y = (2x - 1)(x + 3)$
6. $x = 8y - y^2, x = 0$
7. $x = -6y^2 + 4y, x + 3y - 2 = 0$
8. $4y^2 - 2x = 0, 4y^2 + 4x - 12 = 0$