积分的奇技淫巧

Integration Hacks

作者：Monika

时间：October 7, 2025

版本：0.1

ElegantLATEX Program

目录

绪论 iii

第一章 极限与微积分基础 1

1.1 极限 1

1.1.1 求函数极限的典型方法 1

1.1.1.1 利用基本极限和等价无穷小 1

1.1.1.2 洛必达 (L'Hospital) 法则 1

1.1.1.3 泰勒 (Taylor) 公式 2

1.1.1.4 利用定积分定义求极限 2

1.1.1.5 利用 Stolz-Cesàro 定理 2

1.2 导数与微分中值定理 2

1.2.1 导数定义的应用 2

1.2.2 微分中值定理的应用 3

1.3 积分基础 3

1.3.1 不定积分 3

1.3.1.1 基本方法回顾 3

1.3.1.2 有理函数积分（Heaviside 掩盖法） 3

1.3.2 定积分 3

1.3.2.1 利用对称性 3

1.3.2.2 区间再现 4

第二章 双元法 5

2.1 二次双元：$p^2 \pm q^2 = C^2$ 5

2.1.1 基本构型与核心公式 5

2.1.2 对勾三元与四次根式积分 5

第三章 单元法 7

3.1 基本思想：从双元到单元 7

3.2 指数类的单元法 7

第四章 组合积分法 8

4.1 核心思想与基本函数对 8

4.2 三角函数对 $(\sin x, \cos x)$ 8

第五章 不定积分的更多技巧 9

5.1 推广的分部积分公式 9

5.2 循环法与递推法 9

第六章 定积分与广义积分的高级技巧 10

6.1 含参变量积分法 (费曼技巧) 10

6.2 无穷级数积分法 10

6.3 特殊函数与特殊积分 10

6.3.1 Gamma 函数与 Beta 函数 10

6.3.2 Frullani 积分 10

6.3.3 Lobachevsky 积分 10

绪论

本书是 LZU 数学协会举办的数学讲座的讲义，将会讲授一些在课堂上不会讲授，但在某些情况有奇效的积分技巧，近年来 cmc 的试题中偶尔会出现此类题目。

本书内容主要参考了《全国大学生数学竞赛解析教程》（余志坤主编）、《积分的方法与技巧》（金玉明主编）以及其他一些优秀的积分技巧资料，并融入了我们自己的理解和总结。内容由浅入深，从基础的极限、导数知识，到各类不定积分和定积分的高级技巧，并结合了大量的竞赛真题进行讲解。

笔者水平有限，若有不足缺漏之处恳请读者更正，或在 Github 仓库处（点击即可跳转） 提交 PR 以更正。

第一章 极限与微积分基础

在本章，我们将回顾微积分的基础知识，这部分内容是后续所有高级技巧的基石。竞赛中的题目往往综合性很强，但万变不离其宗，其根基仍然是对基本概念和定理的深刻理解。

1.1 极限

1.1.1 求函数极限的典型方法

求极限是数学竞赛中的重中之重。除了基本的四则运算法则外，更重要的是掌握处理不定式的各种技巧。

1.1.1.1 利用基本极限和等价无穷小

这是最基础也是最常用的方法。两个重要极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。以及当 $x\to 0$ 时常用的等价无穷小：

- $\sin x\sim x, \tan x\sim x, \arcsin x\sim x, \arctan x\sim x$
- $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
- $e^x-1\sim x, a^x-1\sim x\ln a$
- $\ln(1+x)\sim x$
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

问题 1.1CMC 真题 求极限 $I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^3+\tan^2 x}$.

解 分母 $x^3+\tan^2 x\sim\tan^2 x\sim x^2$。分子可以进行有理化或者利用等价无穷小 $(1+u)^\alpha-1\sim\alpha u$。

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}&=(1+(\cos x-1))^{1/2}-(1+(\cos x-1))^{1/3}\\&\sim\left(1+\frac{1}{2}(\cos x-1)\right)-\left(1+\frac{1}{3}(\cos x-1)\right)\\&=\frac{1}{6}(\cos x-1)\sim\frac{1}{6}(-\frac{1}{2}x^2)=-\frac{1}{12}x^2\end{aligned}$$

所以 $I=\lim_{x\to 0}\frac{-1/12x^2}{x^2}=-\frac{1}{12}$。

1.1.1.2 洛必达 (L'Hospital) 法则

适用于 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式。使用时要注意检验条件，并且经常需要结合等价无穷小来简化计算。

问题 1.2CMC 真题 求极限 $I=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解 这是 1^∞ 型不定式，先取对数。设 $L=\ln I$，则

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{1-\cos x}\quad(\text{为}\ \frac{0}{0}\ \text{型})\\&\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}\\&\sim\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\frac{x^2}{2})-(x-\frac{x^3}{6})}{x^3}\quad(\text{使用泰勒展开简化})\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}}{x^3}=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

所以原极限 $I=e^L=e^{-1/3}$。

1.1.1.3 泰勒 (Taylor) 公式

泰勒公式是处理极限问题的“大杀器”，尤其是在洛必达法则变得繁琐或失效时。核心思想是用多项式来逼近函数。

问题 1.3CMC 真题 求极限 $I = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos\ x+x\ sin\ 2x)}{e^{x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}$.

解 对分子分母分别使用泰勒展开。分子：$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ $x\sin 2x = x(2x - O(x^3)) = 2x^2 - O(x^4)$ $\ln(\cos x + x\sin 2x) = \ln(1 + \frac{3}{2}x^2 + O(x^4)) \sim \frac{3}{2}x^2$

分母：$e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4)$ $\sqrt[3]{1-x^2} = (1-x^2)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + O(x^4)$ $e^{x^2} - \sqrt[3]{1-x^2} = (1+x^2) - (1-\frac{1}{3}x^2) + O(x^4) = \frac{4}{3}x^2 + O(x^4)$

所以 $I = \lim_{x\to 0} \frac{3/2x^2}{4/3x^2} = \frac{9}{8}$。

1.1.1.4 利用定积分定义求极限

形如 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ 的极限，可以转化为定积分 $\int_0^1 f(x)dx$。

问题 1.4CMC 真题 求极限 $A_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$，

解 将求和式变形为黎曼和的形式：

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2}$$

这是一个以 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的黎曼和。因此，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

1.1.1.5 利用 Stolz-Cesàro 定理

Stolz 定理是处理数列不定式极限的有力工具，可以看作是数列版本的洛必达法则。

- $\frac{*}{\infty}$ 型: 若 $\{y_n\}$ 严格单增趋于 $+\infty$，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L$，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$。
- $\frac{0}{0}$ 型: 若 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均趋于 0，$\{y_n\}$ 严格单减，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L$，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$。

问题 1.5CMC 真题 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n \ge 1$. 证明: $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

解 显然 $\{a_n\}$ 是严格单增正数列。若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ (有限)，则 $A = A + \frac{1}{A}$，导出 $1/A = 0$ 矛盾。故 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$。考虑 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2n}$，这是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，适用 Stolz 定理。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2(n+1)-2n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left((a_n + \frac{1}{a_n})^2 - a_n^2\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{a_n^2}) = 1$$

因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$。

1.2 导数与微分中值定理

1.2.1 导数定义的应用

问题 1.6CMC 真题 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, $\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 是两个趋于 0 的正数列, 求极限 $I = lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$.

解 在分子中加减 $f(x_0)$ 以凑出导数定义形式：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n+\beta_n} + \frac{f(x_0)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n}\cdot\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n} + \frac{f(x_0-\beta_n)-f(x_0)}{-\beta_n}\cdot\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right) \end{aligned}$$

因为 $f'(x_0)$ 存在，所以 $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)+o(1)$。令 $\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n} = f'(x_0)+r_n$ 和 $\frac{f(x_0-\beta_n)-f(x_0)}{-\beta_n} = f'(x_0)+s_n$，其中 $r_n, s_n \to 0$。

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty}\left((f'(x_0)+r_n)\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n} + (f'(x_0)+s_n)\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(f'(x_0)(\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}) + \frac{r_n\alpha_n+s_n\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right) \end{aligned}$$

因为 $|\frac{r_n\alpha_n+s_n\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}| \le \frac{|r_n|\alpha_n+|s_n|\beta_n}{\alpha_n+\beta_n} \le |r_n|+|s_n| \to 0$，由夹逼准则知第二项极限为 0。所以 $I = f'(x_0)$。

1.2.2 微分中值定理的应用

微分中值定理（罗尔、拉格朗日、柯西）是连接函数值与导数值的桥梁，在证明题和求极限中都有重要应用。

问题 1.7CMC 真题 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $2\xi(f(b)-f(a)) = (b^2-a^2)f'(\xi)$。

解 需要证明的式子可以变形为 $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$。这提示我们使用柯西中值定理。设 $F(x) = f(x)$ 和 $G(x) = x^2$。$F(x)$ 和 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $G'(x) = 2x \neq 0$（若 $0 \notin (a,b)$）。根据柯西中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得：

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \implies \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

（如果 $0 \in [a,b]$，需要进行更详细的讨论，但结论依然成立）。

1.3 积分基础

1.3.1 不定积分

1.3.1.1 基本方法回顾

- **第一类换元法（凑微分）**
- **第二类换元法** (三角代换、根式代换等)
- **分部积分法**

1.3.1.2 有理函数积分（Heaviside 掩盖法）

用于快速分解有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$。

1.3.1.2.1 情况一：分母为单重一次因式 若 $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$，则 $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \dots$，其中 $A = \left.\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right|_{x=a}$。

1.3.1.2.2 情况二：分母为 r 重一次因式 若 $Q(x) = (x-a)^rQ_1(x)$，则展开式中包含 $\sum_{k=0}^{r-1}\frac{A_k}{(x-a)^{r-k}}$，其中 $A_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right)\right]_{x=a}$。

1.3.2 定积分

1.3.2.1 利用对称性

问题 1.8CMC 真题 计算 $I = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

解 积分区间关于原点对称。被积函数 $f(x) = \frac{x^2\sin x}{1+\cos^2 x}$ 是奇函数，因为 $f(-x) = \frac{(-x)^2\sin(-x)}{1+\cos^2(-x)} = -f(x)$。因此积分值为 0。

1.3.2.2 区间再现

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ 是一个极其有用的性质。

第二章 双元法

双元法是一种处理具有对称结构被积函数的强大思想。其核心是将被积函数中的两个部分 $p(x), q(x)$ 看作一个整体，利用它们之间存在的代数关系（特别是微分关系）来简化积分。

2.1 二次双元：$p^2 \pm q^2 = C^2$

定义: 满足 $p^2 \pm q^2 = C^2$ (C 为常数) 关系的一对函数 (p, q) 为一对二次双元。

- **实圆关系** (+): $p^2 + q^2 = C^2$。微分得 $pdp = -qdq \implies \frac{dp}{q} = -\frac{dq}{p}$。
- **虚圆关系** (−): $p^2 - q^2 = C^2$。微分得 $pdp = qdq \implies \frac{dp}{q} = \frac{dq}{p}$。

这个微分关系是双元法所有变换的基础，例如"等分性"：$\frac{Adq \mp Bdp}{Ap \pm Bq} = \frac{dq}{p}$。

2.1.1 基本构型与核心公式

构型 1 (基础微分形式): $\int \frac{dq}{p}$

- **虚圆**: $\int \frac{dq}{p} = \int \frac{d(p+q)}{p+q} = \ln(p+q)$
- **实圆**: $\int \frac{dq}{p} = \int \frac{d(q/p)}{1+(q/p)^2} = \arctan \frac{q}{p}$

构型 2 (点火公式的本质): $\int pdq$ 这个积分可以通过凑微分和分部积分思想得到一个非常优美的公式：

$$\int pdq = \frac{1}{2}(pq + C^2 \int \frac{dq}{p}) \quad (\text{实圆关系}) \tag{2.1}$$

$$\int pdq = \frac{1}{2}(pq + C^2 \int \frac{dq}{p}) \quad (\text{虚圆关系, 这里应为} p^2 - q^2 = C^2, 2\int pdq = pq + C^2 \int \frac{dq}{p}) \tag{2.2}$$

证明 (虚圆 $p^2 - q^2 = C^2$): $\int pdq = pq - \int qdp = pq - \int \frac{q^2}{p}dq = pq - \int \frac{p^2 - C^2}{p}dq = pq - \int pdq + C^2 \int \frac{dq}{p}$. 移项得 $2\int pdq = pq + C^2 \int \frac{dq}{p}$。

这个公式将形如 $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}dx$ 的积分统一起来，并将其计算转化为基本构型 1。

问题 2.1 计算 $I = \int \sqrt{a^2 + x^2}dx$。

解 设双元 $p = \sqrt{a^2 + x^2}, q = x$。它们满足虚圆关系 $p^2 - q^2 = a^2$。我们要求的是 $\int pdq$。套用公式：

$$\begin{aligned} I = \int pdq &= \frac{1}{2}(pq + a^2 \int \frac{dq}{p}) \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(p+q)) \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})) \end{aligned}$$

2.1.2 对勾三元与四次根式积分

当被积函数中出现 $x \pm 1/x$ 结构时，可以考虑对勾双元。恒等式 $(x - \frac{a}{x})^2 + 4a = (x + \frac{a}{x})^2$ 诱导出一对双元。通常取 $a = 1$，并引入第三个元 $r = \sqrt{x^2 + 1/x^2 + b}$，构成"对勾三元"：$p = x + 1/x, q = x - 1/x, r = \sqrt{p^2 - 2 + b} = \sqrt{q^2 + 2 + b}$。

问题 2.2 求 $\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$.

解 分子分母同除以 x^2 (在根号内是 x^4)：

$$I = \int \frac{1/x^2 - 1}{1/x^2 + 1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1 + 1/x^2}}$$

设对勾双元 $p = x + 1/x, q = x - 1/x$。注意到 $dp = (1 - 1/x^2)dx$。

$$I = \int \frac{-dp}{p\sqrt{p^2 - 1}}$$

令 $p = \sec\theta, dp = \sec\theta\tan\theta d\theta$。

$$I = \int \frac{-\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sec\theta\tan\theta} = \int -d\theta = -\theta + C = -\operatorname{arcsec}(p) + C = -\operatorname{arcsec}(x + 1/x) + C$$

第三章 单元法

单元法是双元法的变体，其核心关系是 ** 乘积为常数 **，即 $pq = C$。它统一并简化了经典的欧拉代换和万能代换。

3.1 基本思想：从双元到单元

二次双元 $p^2 - q^2 = C$ 可以写作 $(p-q)(p+q) = C$。如果我们令 $s = p+q, t = p-q$，那么它们就满足单元关系 $st = C$。这揭示了双元法和单元法的深刻联系。例如，处理 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时，欧拉的第一类代换 $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$ 本质上就是构造了一个单元关系。但直接使用单元法进行计算通常更为简洁。

问题 3.1 计算 $I = \int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

解 这是一个可以用根式代换 $t = \sqrt{1+x}$ 解决的标准题目。我们用单元法的思想来重新审视。设 $p = \sqrt{1+x}, q = 2+x = 1+p^2$。这没有形成 $pq = C$ 的关系。

正确的单元构造应该是基于被积函数结构。设 $t = \sqrt{1+x}$，则 $x = t^2-1$。$I = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{1+x} + C$。这个例子太简单，无法体现单元法的威力。让我们回到之前那个更复杂的例子。

问题 3.2 计算 $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

解 设单元 $p = \sqrt{1+x}+\sqrt{x}, q = \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$，则 $pq = 1$。我们用 p 来表示 x 和 dx：$p - q = 2\sqrt{x} \implies p - 1/p = 2\sqrt{x} \implies x = (\frac{p-1/p}{2})^2$。$dx = 2(\frac{p-1/p}{2}) \cdot (\frac{1+1/p^2}{2})dp = \frac{p^2-1}{2p}\frac{p^2+1}{p^2}dp$。被积函数的分母是 $1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x} = 1+p$。

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1+p} \cdot \frac{(p-1)(p+1)}{2p} \cdot \frac{p^2+1}{p^2}dp = \int \frac{(p-1)(p^2+1)}{2p^3}dp \\
&= \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3})dp \\
&= \frac{1}{2}(p - \ln p - \frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2}) + C
\end{aligned}
$$

代回 $p = \sqrt{1+x}+\sqrt{x}$ 和 $1/p = q = \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$：$p - 1/p = 2\sqrt{x}$

$$
I = \frac{1}{2}(2\sqrt{x} - \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})) + \frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^2) + C = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}) + \frac{1}{4}(1+2x-2\sqrt{x(1+x)}) + C
$$

3.2 指数类的单元法

当被积函数形如 $\int g(x)e^{f(x)}dx$ 时，一个有效的策略是尝试寻找一个函数 $P(x)$，使得 $(P(x)e^{f(x)})' = g(x)e^{f(x)}$。这其实就是单元法的思想。我们寻找两个单元 p, q，其中一个（比如 p）包含 $e^{f(x)}$，另一个（q）是辅助函数，它们之间有简单的微分关系，且它们的组合能够表达出被积函数。

问题 3.3 计算 $I = \int (1 + x - \frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$。

解 被积函数中 $e^{x+1/x}$ 提示我们积分的结果很可能包含这一项。我们尝试对 $P(x)e^{x+1/x}$ 求导，看看能否凑出被积函数。$(xe^{x+1/x})' = 1 \cdot e^{x+1/x} + x \cdot e^{x+1/x} \cdot (1 - 1/x^2) = (1 + x - 1/x)e^{x+1/x}$。这恰好就是被积函数。因此，

$$
I = \int (xe^{x+1/x})'dx = xe^{x+1/x} + C
$$

从单元法的角度看，我们实际上是猜测了 $p = xe^{x+1/x}$，并发现 dp 就是被积表达式。

第四章 组合积分法

组合积分法专门处理形如 $\int \frac{a_1 f(x)+b_1 g(x)}{af(x)+bg(x)}dx$ 的积分，其核心是通过构造辅助积分并建立线性方程组来求解。

4.1 核心思想与基本函数对

该方法适用于满足特定微分性质的函数对 $(f(x), g(x))$，常见的有：

- **三角函数对**: $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$。满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = -f(x)$。
- **双曲函数对**: $f(x) = \sinh x, g(x) = \cosh x$。满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = f(x)$。
- **指数函数对**: $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$。满足 $f'(x) = f(x), g'(x) = -g(x)$。

方法的核心是：将被积函数的分子写成分母及其导数的线性组合。$a_1 f(x)+b_1 g(x) = A(af(x)+bg(x))+B(af'(x)+bg'(x))$ 通过比较系数解出 A 和 B，然后积分。

$$
\begin{aligned}
I &= \int (A + B\frac{(af(x) + bg(x))'}{af(x) + bg(x)})dx \\
&= Ax + B\ln|af(x) + bg(x)| + C
\end{aligned}
$$

4.2 三角函数对 $(\sin x, \cos x)$

对于 $I = \int \frac{a_1 \sin x+b_1 \cos x}{a \sin x+b \cos x}dx$，我们设：$a_1 \sin x+b_1 \cos x = A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$ 比较 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的系数：$a_1 = Aa-Bb$ $b_1 = Ab+Ba$ 解得 $A = \frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$ 和 $B = \frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$。最终结果为 $I = Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C$。

第五章 不定积分的更多技巧

5.1 推广的分部积分公式

对于被积函数是多项式 $P(x)$ 与 $e^{ax}, \sin(ax), \cos(ax)$ 相乘的积分，可以反复使用分部积分法。这可以总结成一个一般公式。例如：

$$\int P(x)e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(P(x) - \frac{P'(x)}{a} + \frac{P''(x)}{a^2} - \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n}\right) + C \tag{5.1}$$

其中 n 是多项式 P(x) 的次数。

问题 5.1 计算 $\int (x^2+2x)e^{3x}dx$。

解 令 $P(x) = x^2 + 2x, a = 3$。$P'(x) = 2x + 2, P''(x) = 2, P'''(x) = 0$。

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{3x}}{3}\left((x^2+2x) - \frac{2x+2}{3} + \frac{2}{9}\right) + C \\ &= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}\right) + C \end{aligned}$$

5.2 循环法与递推法

- **循环法**: 主要用于分部积分后原积分再次出现的情况，如 $\int e^x \cos x dx$。
- **递推法**: 用于计算带有整数参数的积分族，通过分部积分得到 I_n 和 I_{n-k} 之间的关系，如沃利斯积分。

第六章 定积分与广义积分的高级技巧

6.1 含参变量积分法 (费曼技巧)

通过对积分引入参数并对参数求导来简化积分。

问题 6.1 计算积分 $I = \int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x}dx$。

解 构造 $I(a) = \int_0^1 \frac{x^a-1}{\ln x}dx$。我们要求的是 $I(2)$。$I'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}(\frac{x^a-1}{\ln x})dx = \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}$。积分回来 $I(a) = \ln(a+1)+C$。由 $I(0)=0$ 知 $C=0$。所以 $I(a)=\ln(a+1)$，故 $I(2)=\ln 3$。

6.2 无穷级数积分法

将积分函数展开成幂级数，然后逐项积分。这对于某些看似困难的定积分非常有效。

问题 6.2 计算 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$。

解 我们知道 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ for $|x|<1$。

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}dx \\
&= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}dx \quad \text{(交换积分与求和)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 x^{n-1}dx \quad \text{(交换积分与求和)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots
\end{aligned}$$

这是一个著名的级数，其值为 $\frac{\pi^2}{12}$。

6.3 特殊函数与特殊积分

6.3.1 Gamma 函数与 Beta 函数

这两个函数是阶乘向实数和复数的推广，在计算特定形式的定积分时非常有用。

- $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$
- $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

6.3.2 Frullani 积分

公式：$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = (f(0)-f(\infty))\ln\frac{a}{b}$

6.3.3 Lobachevsky 积分

若 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数，则 $\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$。这是一个非常奇特的公式，可以将一个广义积分转化为一个普通定积分。

问题 6.3 计算 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$。

解 令 $f(x)=1$。这是一个以 π 为周期的偶函数。根据 Lobachevsky 积分公式：

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$