



积分的奇技淫巧

Integration Hacks

作者: Monika

时间: October 7, 2025

版本: 0.1



目录

绪论	ii
第一章 基础知识	1
1.1 极限	1
1.2 导数	1
1.3 洛必达法则	1
1.4 泰勒展开	1
1.5 常用求极限方法	1
1.6 积分	2
1.6.1 积分的定义	2
1.6.2 什么叫积不出来?	2
1.6.3 不定上下限积分的求导公式	2
1.6.4 积分中值定理	2
1.6.5 基本不定积分方法	2
1.6.5.1 凑微分	2
1.6.5.2 分部积分	2
1.6.6 换元	2
1.6.6.1 万能代换	2
1.6.6.2 根式代换	2
1.6.6.3 倒代换	2
1.6.6.4 部分分式法	2
1.6.6.5 留数法	2
1.6.7 基本定积分方法	2
1.6.7.1 区间再现	2
1.6.7.2 点火	2
第二章 双元法	3
第三章 单元法	4
第四章 组合积分法	5
第五章 其他小方法	6
5.1 费曼求导法	6
5.2 循环法	6
5.3 先求递推, 再求特值	6
5.4 rullani (傅汝兰尼) 积分公式	6
第六章 版本更新历史	7
参考文献	8
附录 A 积分表	9

绪论

本书是是 LZU 数学协会举办的数学讲座的讲义，将会讲授一些在课不上不会讲授，但在某些情况有奇效的积分技巧，近年来 cmc 的试题中偶尔会出现此类题目

笔者水平有限，若有不足缺漏之处恳请读者更正，或在 [Github 仓库处](#)（[点击即可跳转](#)）提交 PR 以更正

第一章 基础知识

在本章列举出关于微积分最基础的知识，读者应做到在看到本章的所有题目时能瞬间反应出答案来

1.1 极限

所谓的极限，就是 Approach，不断地逼近一个值，但是始终不会到达
用数学语言来讲就是

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得当 } x \in [a - \epsilon, a + \epsilon], |f(x) - A| < \epsilon \quad (1.1)$$

如果函数是多元函数，则定义为从任意路径趋近于该点的值都相同，注意是任意路径而不是任意角度，取所有斜率的直线并不能穷尽所有路径，比如下面这个

问题 1.1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$ 是否存在？

如果你取所有斜率的直线，比如 $y = kx$ ，而误以为直线能穷尽所有路径，就会得出极限为零的错误答案

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(kx^2)}{(1+k)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{(1+k)}x = 0$$

解 不存在，取路径 $y = -x + x^2$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(-x-x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1-x) = -1$ 这条路径得到的值和 $y = kx$ 路径得到的值不同，所以极限不存在

1.2 导数

我们使用最朴素的导数理解方式，自变量发生微小变化后，因变量会随之发生一个微小变化，这两个变化的比值就是导数，也是斜率

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \quad (1.2)$$

利用这个定义不难算出一些初等函数的导数，这里只以 x^n 和 $\sin x$ 的导数为例

例 1.1

$$(x^n)' = \frac{\Delta x^n}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + \dots - x^n}{1} \quad (1.3)$$

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^{ax})' = ae^x$, $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot a^x$

问题 1.2 $(x^x)' = ?$, $(x^{x^x})' = ?$

解 $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$, $(x^x)' = e^{x \ln x}()$

1.3 洛必达法则

1.4 泰勒展开

1.5 常用求极限方法

(1) 利用基本极限; (2) 利用无穷小替换; (3) 利用 L' Hospital (洛必达) 法则; (4) 利用四抖。r (泰勒) 公式; (5) 利用导数的定义.

1.6 积分

1.6.1 积分的定义

1.6.2 什么叫积不出来？

1.6.3 不定上下限积分的求导公式

1.6.4 积分中值定理

1.6.5 基本不定积分方法

1.6.5.1 凑微分

1.6.5.2 分部积分

1.6.6 换元

1.6.6.1 万能代换

1.6.6.2 根式代换

1.6.6.3 倒代换

1.6.6.4 部分分式法

1.6.6.5 留数法

1.6.7 基本定积分方法

1.6.7.1 区间再现

1.6.7.2 点火

第二章 双元法

第三章 单元法

第四章 组合积分法

第五章 其他小方法

5.1 费曼求导法

5.2 循环法

5.3 先求递推，再求特值

5.4 rullani (傅汝兰尼) 积分公式

第六章 版本更新历史

2025/10/07 更新：编写第一章

参考文献

- [1] Charles T Carlstrom and Timothy S Fuerst. “Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis”. In: *The American Economic Review* (1997), pp. 893–910. ISSN: 0002-8282.
- [2] 方军雄. “所有制、制度环境与信贷资金配置”. In: *经济研究* 12 (2007), pp. 82–92. ISSN: 0577-9154.
- [3] Qiang Li, Liwen Chen, and Yong Zeng. “The Mechanism and Effectiveness of Credit Scoring of P2P Lending Platform: Evidence from Renrendai.com”. In: *China Finance Review International* 8.3 (2018), pp. 256–274.
- [4] 刘凤良, 章潇萌, and 于泽. “高投资、结构失衡与价格指数二元分化”. In: *金融研究* 02 (2017), pp. 54–69. ISSN: 1002-7246.
- [5] 吕捷 and 王高望. “CPI 与 PPI “背离” 的结构性解释”. In: *经济研究* 50.04 (2015), pp. 136–149. ISSN: 0577-9154.
- [6] Vincenzo Quadrini. “Financial Frictions in Macroeconomic Fluctuations”. In: *FRB Richmond Economic Quarterly* 97.3 (2011), pp. 209–254.

参考文献尚未编排，此处使用的是模板的默认参考文献，作废

附录 A 积分表