电磁学小测试（6.3）

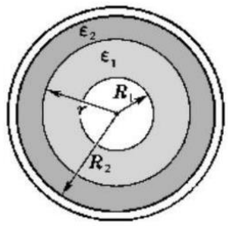
一、简答题

1. 写出真空中的高斯定理、法拉第电磁感应定律、磁高斯定理、安培环路定理和电流的连续性方程的微分形式。

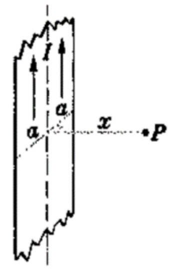
2. 静电场中的导体满足什么性质？怎么在已知导体电荷分布的情况下求导体表面的场强？

二、计算小题

1. 某无限长圆柱形电容器由导体圆柱和与它同轴的导体圆柱构成,内外半径分别 R_1、R_2,其间有两层均匀电介质,分界面的半径为 r,介电常量分别ε_1和ε_2，已知内圆柱带电 Q，求电容器内电场分布。

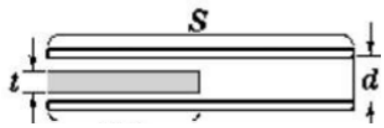


2. 如图所示，电流均匀地流过宽为 $2a$ 的无穷长平面导体薄板。电流大小为 I,通过板的中线并与板面垂直的平面上有一点 P,P 到板的垂直距离为 x(见本题图),设板厚可略去不计，求 P 点的磁感应强度 B.



3. 已知交流电圆频率为ω，纯电阻的阻值为R，电容器电容为C，及电感L。试求下图原件中的阻抗、辐角、及谐振电路时ω满足的条件。

4. 已知平行板电容器的上下极板各带$+Q$、$-Q$的电荷，且极板均为面积是S、边长为L的长方形，两极板间距为d。现将一个厚度为t的导体缓慢（即视为准静过程）、对称地插入电容器，求在导体插入长度为l时导体受电容器的作用力大小。不考虑边缘效应。



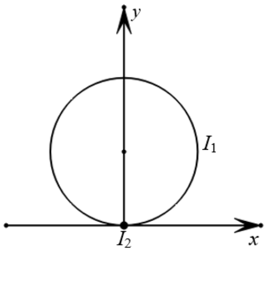
L

三、计算题

初始时刻圆面位于纸面内半径为 R 的单匝圆线圈中通有电流 I_1，线圈与垂直纸面向外的长直导线相切。导线中通有垂直纸面向外的电流 I_2。

（1）求圆心的磁感应强度大小；

（2）求圆线圈相对于过切点和圆心的竖直轴的力矩。



参考答案

一、

1.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

2.

（1）导体等势，内部电场为 0。

（2）$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

二、

1.

$$E = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r}, r < R_1 \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r}, R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

2.

解：（1）将载流薄板分割为一 系列窄条，利用无限长直导线的磁感应强度公式和叠加原理可得

$$B = \int \mathrm{d}B\cos\alpha = \int_{-a}^{a} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I/2a)\ \mathrm{d}l}{\sqrt{x^2+l^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I x}{2\pi a}\int_0^a \frac{\mathrm{d}l}{x^2+l^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\arctan\frac{a}{x}.$$

3.

$$\sqrt{\frac{(\omega L)^2[1+(\omega CR)^2]}{(\omega CR)^2+(1-\omega^2 LC)^2}} \qquad \frac{(\omega CR)^2+1-\omega^2 LC}{\omega^3 RLC^2}$$

$$\omega = \frac{1}{LC - C^2R^2}$$

4.

$$\sigma_1\frac{l}{L} + \sigma_2\frac{L-l}{L} = \frac{Q}{S}$$

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}(d-t) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d$$

解得

$$\sigma_1 = \frac{QLd}{S\left[L(d-t)+lt\right]}$$

$$\sigma_2 = \frac{QL(d-t)}{S\left[L(d-t)+lt\right]}$$

则总能量为

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\left(\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\right)^2 V_1 + \left(\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\right)^2 V_2\right] = \frac{Q^2Ld(d-t)}{2\varepsilon_0 S\left[L(d-t)+lt\right]}$$

则受力为

$$F = \left|-\frac{dW}{dl}\right| = \frac{Q^2Ld(d-t)t}{2\varepsilon_0 S\left[L(d-t)+lt\right]^2}$$

三、

（1）根据方向

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

分别计算

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R^2}2\pi R = \frac{\mu_0 I_1}{2R}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}$$

则有

$$B = \frac{\mu_0}{2R}\sqrt{\left(I_1\right)^2 + \left(\frac{I_2}{\pi}\right)^2}$$

（2）由力矩定义

$$dM = R\sin\left(2\theta\right)dF$$

根据安培力公式及微分关系

$$dF = BI_1\sin\theta dl$$

$$dl = 2Rd\theta$$

整理计算得

$$dM = R\sin\left(2\theta\right)\frac{\mu_0 I_2}{2\pi\cdot 2R\cos\theta}I_1\sin\theta\cdot 2Rd\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi\cos\theta}\sin\left(2\theta\right)\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

积分得

$$M = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi}\int_{-\pi/2}^{-\pi/2}\sin^2\theta d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}$$