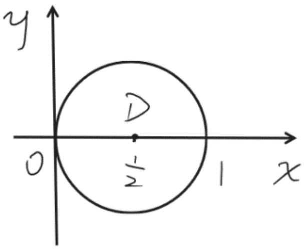
6月份月考-B 卷-答案

1、计算 $\iint_D \sqrt{x}\,dxdy$，其中D是由圆周 $x^2+y^2=x$ 所围区域。

解：画出积分区域D，如图所示。



利用极坐标，可将其表示为：

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le \cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

因此，

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\,d\theta \int_0^{\cos\theta} \sqrt{\rho}\cdot\rho\,d\rho$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{8}{15}$$

2. 应用球坐标变换：$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$，

可将积分区域表示为：Ω：$\begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\theta \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

从而：$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\,dr$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{4}{3}\pi$$

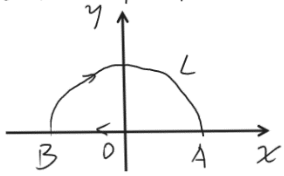
3、计算曲线积分 $\int_L (xy+yz+zx)\,ds$，其中L为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线.

解：因为在L上成立：$xy+yz+zx = \frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]$，

所以：

$$\int_L (xy+yz+zx)\,ds = -\frac{a^2}{2}\int_L ds = -\pi a^3.$$

4. 计算 $I=\int_L (x^2-3y)dx+(y^2-x)dy$，其中L是沿顺时针方向以原点为中心，a为半径的上半圆周。



解：如图，添加辅助线段$\overline{AB}$，它与L所围区域为D，则利用Green公式有

$$I=\int_{L+\overline{AB}}(x^2-3y)dx+(y^2-x)dy-\int_{\overline{AB}}(x^2-3y)dx+(y^2-x)dy$$

$$=-2\iint_D dxdy+\frac{2}{3}a^3=a^2\left(\frac{2}{3}a-\pi\right)$$

5. 计算曲面积分：

$$I=\oiint_\Sigma \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，Σ为椭球面$x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取外侧。

解：在椭球面内作辅助小球面Σ'：$x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$，方向取内侧。

设Ω是$\Sigma+\Sigma'$所围成的空间区域，记

$$P=\frac{x}{r^3},\quad Q=\frac{y}{r^3},\quad R=\frac{z}{r^3}.$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^3-3z^2}{r^5}$$

由Gauss公式：

$$\iint_{\Sigma+\Sigma'} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=0,$$

因此，再次利用Gauss公式，有：

$$\iint_\Sigma \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy=-\iint_{\Sigma'}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$$

$$=\frac{-1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma'}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_\Omega 3\,dxdydz=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 3\cdot\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}=4\pi$$