学风是我们的根

1.每门课1/3课程不上就不允许参加考试，有特殊原因需提前经授课教师批准并备案。

2.必修和限选课程不合格学分累计达15学分降级，累积达20学分退学。

3. 2019级及以后没有补考。

4.除因不可抗力等特殊因素，原则上不允许缓考。缓考不计入平时成绩，因此缓考将很难通过，希望大家最好一次通过。

5.重修课程时间冲突等原因的可申请自修，须经任课教师和学院同意，且每学期自修课程不得超过2门。

6.2019级及以后结业要求：四级成绩≥425，达到人才培养方案规定学分的80%（含）以上。

7.毕业年级学生最迟须大四秋季学期进行毕业资格自查，及时补修，大四春季学期补修或重修课程将会影响毕业。

席力 教授、博导

- ➢1997 兰大物理系磁学专业、学士
- ➢2002 兰大物理院凝聚态物理专业、博士
- ➢2002——兰大物理院讲师、副教授、教授
- ✓2001-2002 加拿大曼尼托巴大学物理与天文系访问学者
- ✓2003-2004 葡萄牙INESC-MN研究所博士后

主要研究方向

1. 自旋电子学与磁存储器件
2. 纳米高频软磁材料与应用
3. 电场/电流驱动磁化强度翻转和磁畴运动特性

- ➢ **发表包括AFM, Carbon, PRB, APL等期刊在内的通讯作者论文90余篇，获批发明专利1项。**
- ➢ **主持NSFC项目3项，军口项目2项，华为项目1项；参与NSFC重大研究计划、科技部稀土新材料重点专项项目各1项。**

联系方式：xili@lzu.edu.cn
本部理工楼1324室
https://orcid.org/0000-0003-0311-8197

数学基础 矢量和场

目录

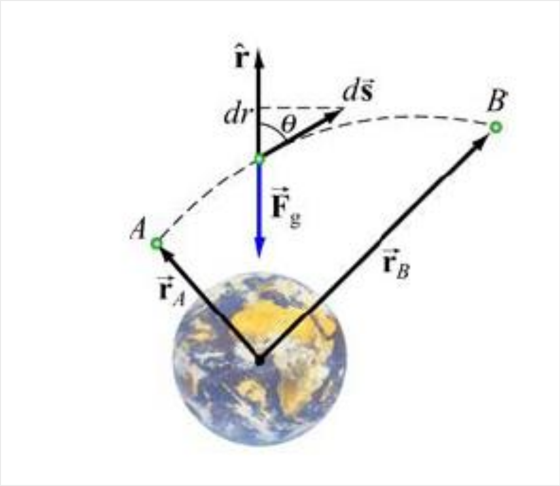
- 一、电磁学数学思想介绍
- 二、矢量和场的运算
  - 1. 矢量的运算
  - 2. 标量场及梯度
  - 3. 矢量场、矢量场的通量与散度
  - 4. 矢量场的环量与旋度
  - 5. 高斯定理、斯托克斯定理

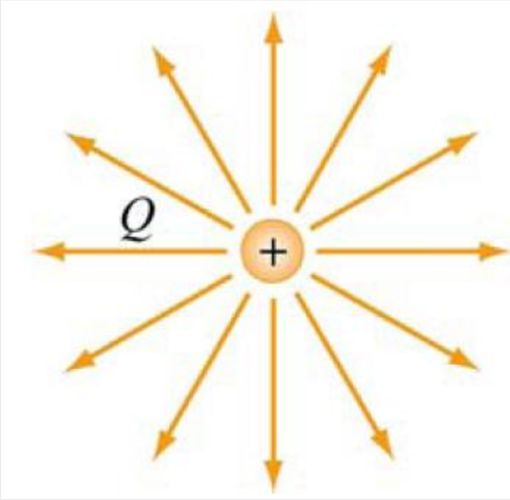
一、电磁学数学思想介绍

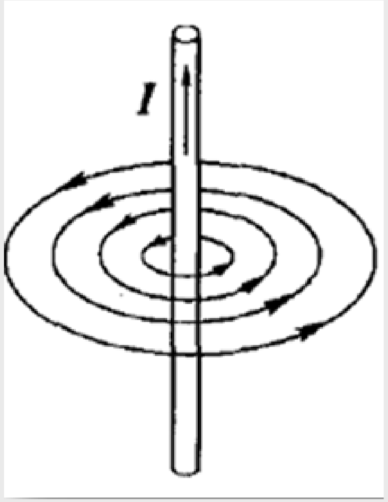
工欲善其事，必先利其器！

力学中质点、刚体矢量分析方法

电磁学中场常用的矢量分析方法







场是什么?

场：如果在空间域Ω上，每一点都存在一确定的物理量A，我们就说：场域Ω上存在由场量A构成的场。场是物质存在的一种形式或媒质，弥散在空间域Ω 上。

物理量的分类
- 标量
- 矢量
- *张量

矢量符号表示的约定：

$\vec{E}$　$\boldsymbol{E}$　　$\vec{r} = r\,\hat{r}$

标量：只有大小，没有方向，这种物理量叫做标量，如温度T、电荷密度ρ，电势 U。

矢量：有大小及方向的物理量叫矢量，如速度 $\vec{V}$ 、电场强度 $\vec{E}$ 。

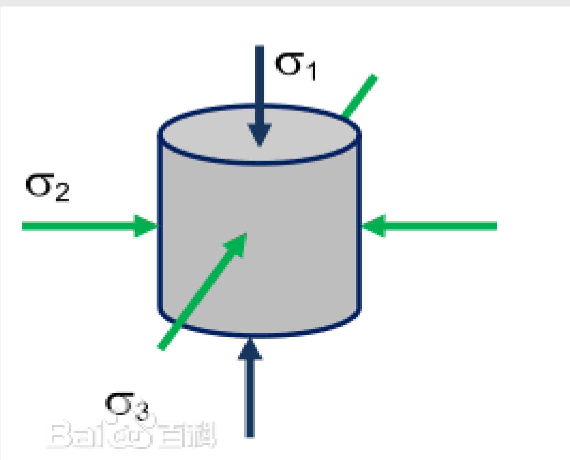
张量：把标量与矢量推广，对物理量进行指标抽象-张量。

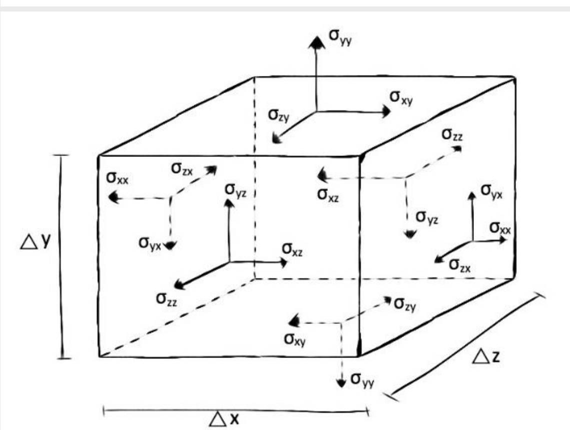
张量实际上就是一个多维数组——通常用矩阵来表示

标量: 零阶张量(magnitude only – 1 component)

矢量：一阶张量(magnitude and one direction – 3 components)

张量的引入：





电导率张量

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

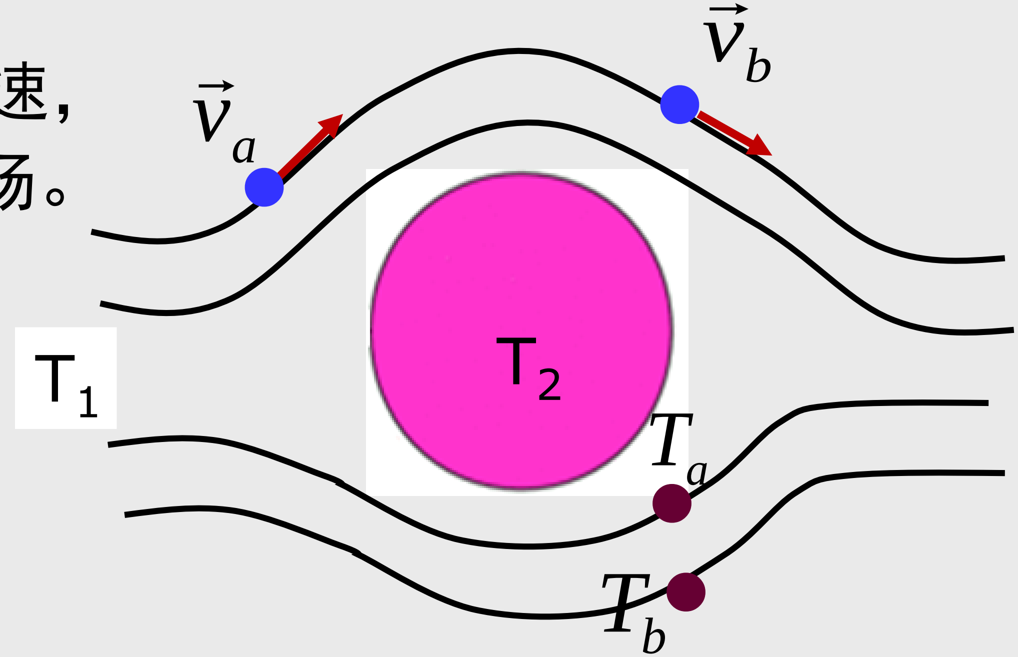
电介质极化：极化率张量

磁介质磁化：磁化率张量

标量、矢量与场的案例

流体冷却装置：

每一点都存在确定的温度和流速，流体里既有温度场，也有流速场。



高压跨步触电

标量：电势差

矢量：电场强度

电场的两种描述方式——电势的分布；电场强度的分布。

二、矢量和场的运算

矢量加减

加减平行四边形法则

矢量乘法

点乘
叉乘

场微分

标量场：
梯度
矢量场：
散度
旋度

场积分

通量
环量

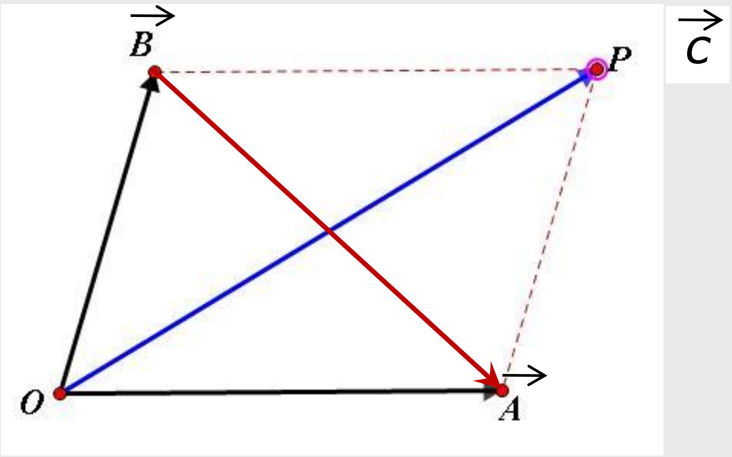
1. 矢量的运算

(1) 矢量的加减运算

矢量 $\vec{\mathbf{A}}$ 在空间可用一有向线段表示 $\vec{A} = |A|\vec{e}_A$

矢量 $\vec{\mathbf{A}}$和 $\vec{B}$通过加法运算定义一个新的矢量 $\vec{C}$ ：

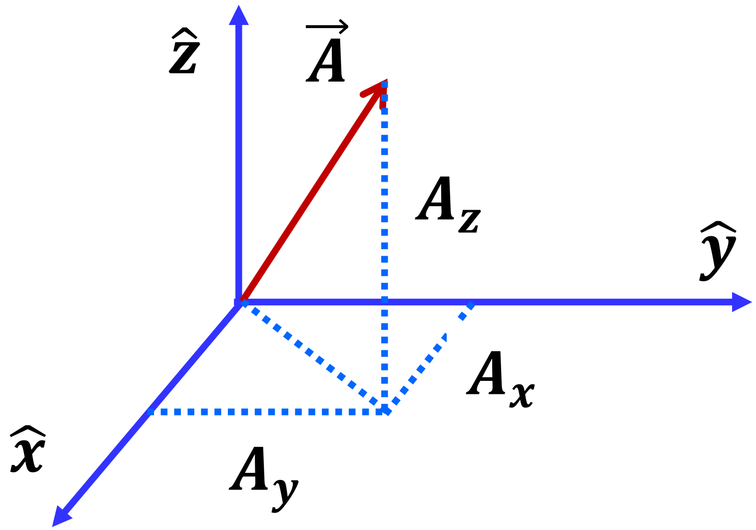
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



- 矢量加法运算按平行四边形法则进行。

- 矢量减法运算：

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$



$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$$

(2) 矢量的乘法运算

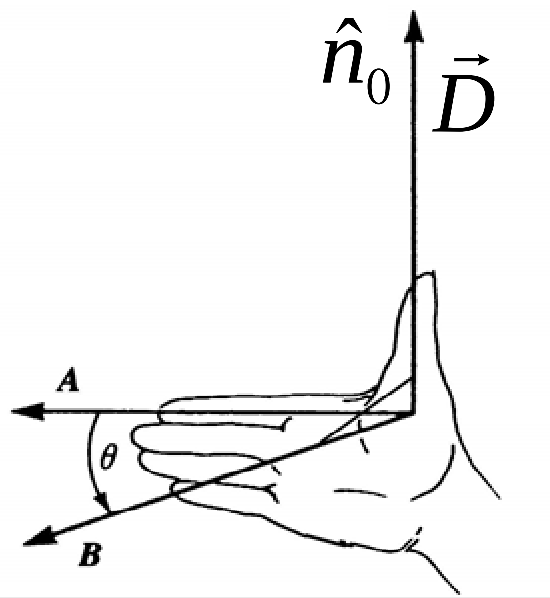
乘法运算定义①：

单位矢量的运算结果

标积： 两矢量$\vec{A}$、$\vec{B}$的标积为一标量C

$$C=\vec{A}\cdot\vec{B}=|A||B|\cos\theta$$

θ是两个矢量间的夹角



矢积： 两矢量$\vec{A}$、$\vec{B}$的矢积为一矢量$\vec{D}$

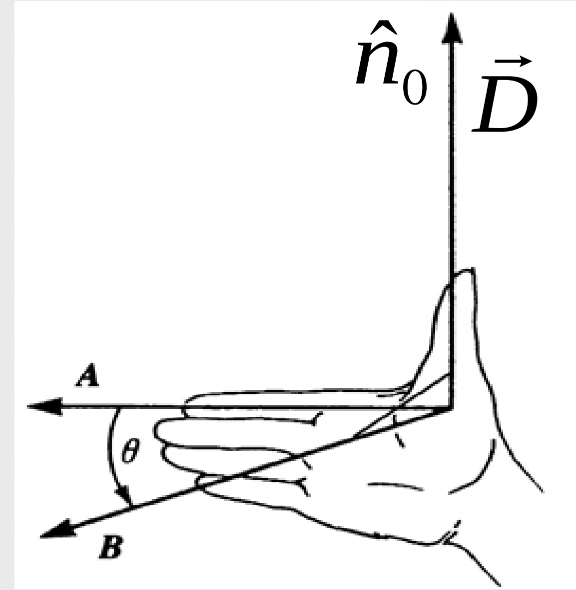
$$\vec{D}=\vec{A}\times\vec{B}=\hat{n}_0|A||B|\sin\theta$$

模量：$|A||B|\sin\theta$　　$\hat{n}_0$：单位方向矢量

根据两矢量标积、矢积的定义，标积满足交换律，矢积则不然，即

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$



物理中哪些物理量需要用点乘和叉乘来表示？

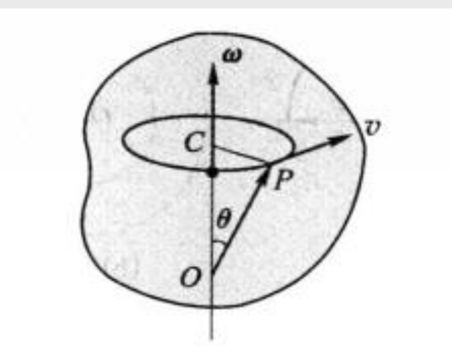
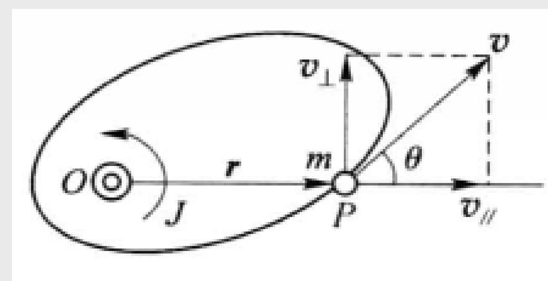


图 A－4　线速度与角速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

动量$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$

角动量$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$



$$\boldsymbol{J}=m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

图 A－5　角动量

$$\boldsymbol{J}=mr^2\boldsymbol{\omega}.$$

矢量乘法运算定义②：

设矢量 $\vec{\mathbf{A}}$ 可表示成

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

矢量 $\vec{\mathbf{B}}$ 为

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

则根据两矢量标积与矢积的定义，直角坐标系中两矢量的标积、矢积为：

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}=\left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right)\cdot\left(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\right)$$

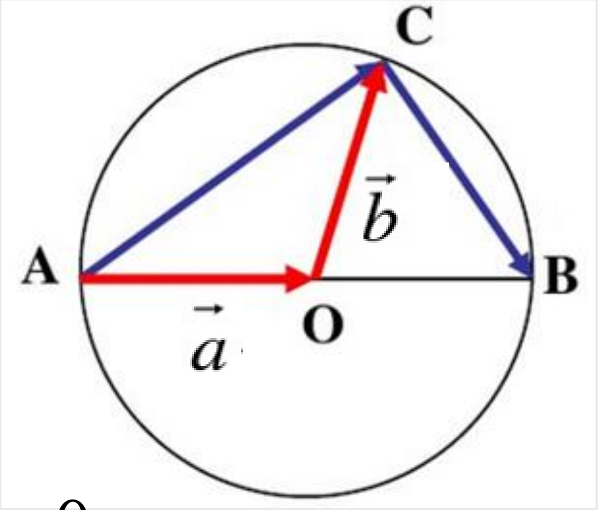
$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=\left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right)\times\left(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\right)$$

$$=\hat{i}\left(A_yB_z-A_zB_y\right)+\hat{j}\left(A_zB_x-A_xB_z\right)+\hat{k}\left(A_xB_y-A_yB_x\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

（3）矢量法在高中数学中的应用



例1. 证明直径所对的圆周角是直角。

如图所示，已知AB为直径，O为圆心，C为圆周上任意一点。求证$\angle ACB = 90^o$。

分析：只需证明向量$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$，即$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

解： 设$\overrightarrow{AO}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$　则$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$，　$\overrightarrow{CB} = ?$　　$\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$

由此可得：$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})$

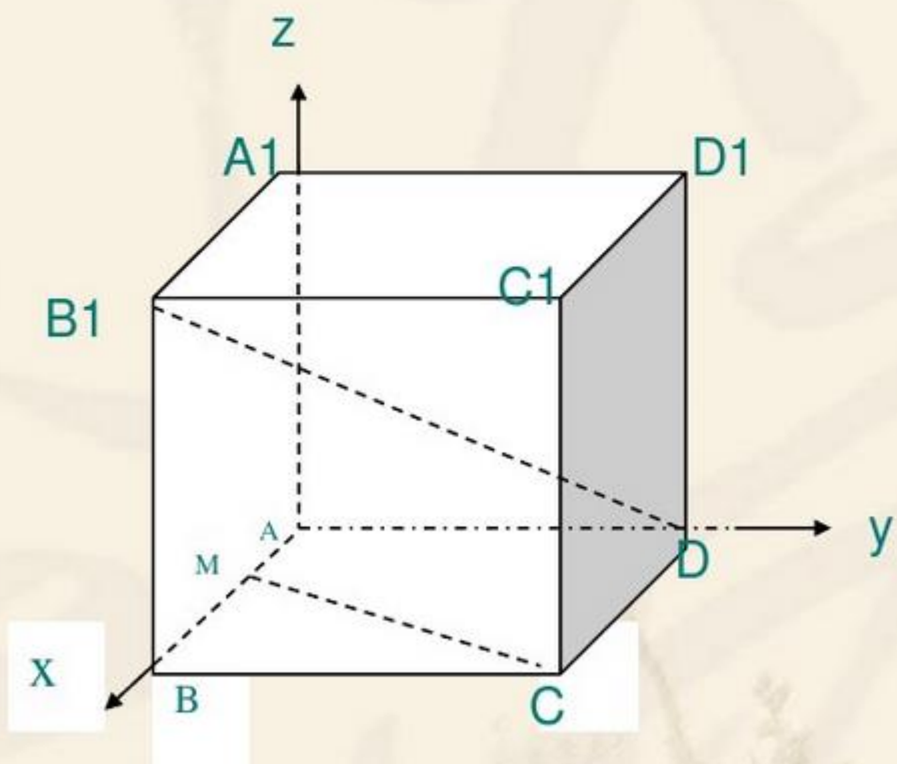
$$= \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$= r^2 - r^2 = 0$$

即 $\angle ACB = 90°$

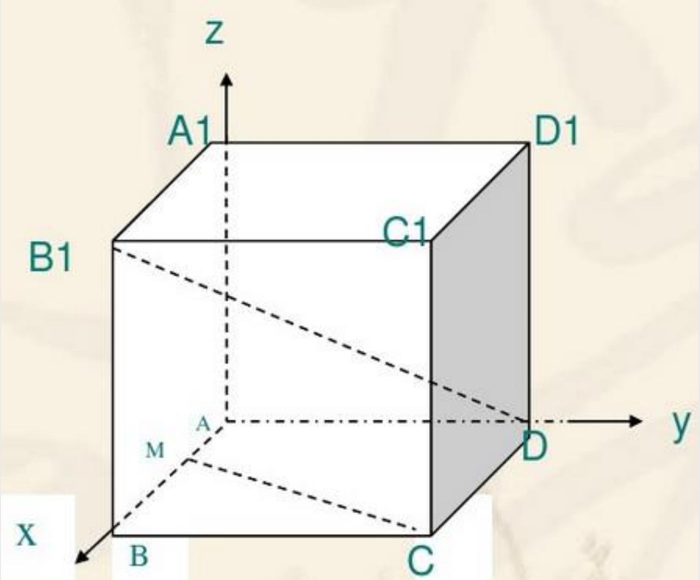
例题2.矢量法在立体几何中的应用

- 如图在正方体ABCD-A1B1C1D1中,M是AB的中点,则对角线DB1与CM所成角的余弦值为_______.



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|A||B|\cos\theta$$

解：以A为原点建立如图所示的直角坐标系A-xyz，设正方体棱长为2，则：



$$M(1,0,0),C(2,2,0),$$

$$B1(2,0,2),D(0,2,0)$$

$$于是,\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=(-1,-2,0)$$

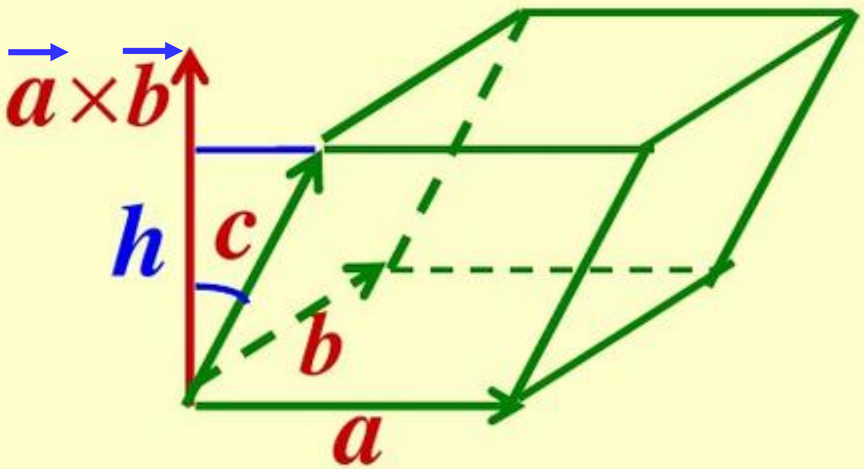
$$\overrightarrow{DB1}=(2,-2,2)$$

$$\therefore\cos<\overrightarrow{CM},\overrightarrow{DB1}>=\frac{-2+4+0}{\sqrt{1+4+0}\sqrt{4+4+4}}=\frac{\sqrt{15}}{30}$$

例题3. 几何应用

$$[abc]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle$$

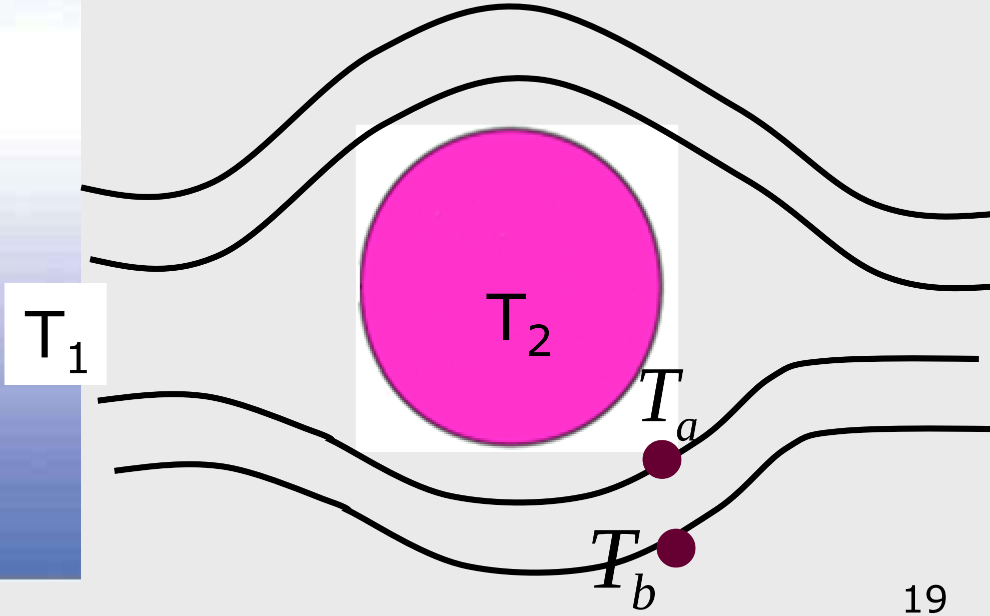
(1)求体积: $V=\left|[abc]\right|$ 为以a, b, c为棱的平行六面体**体积.**



掌握矢量法为高中的平面几何和立体几何解答增加了一条终南捷径！

2. 标量场及梯度

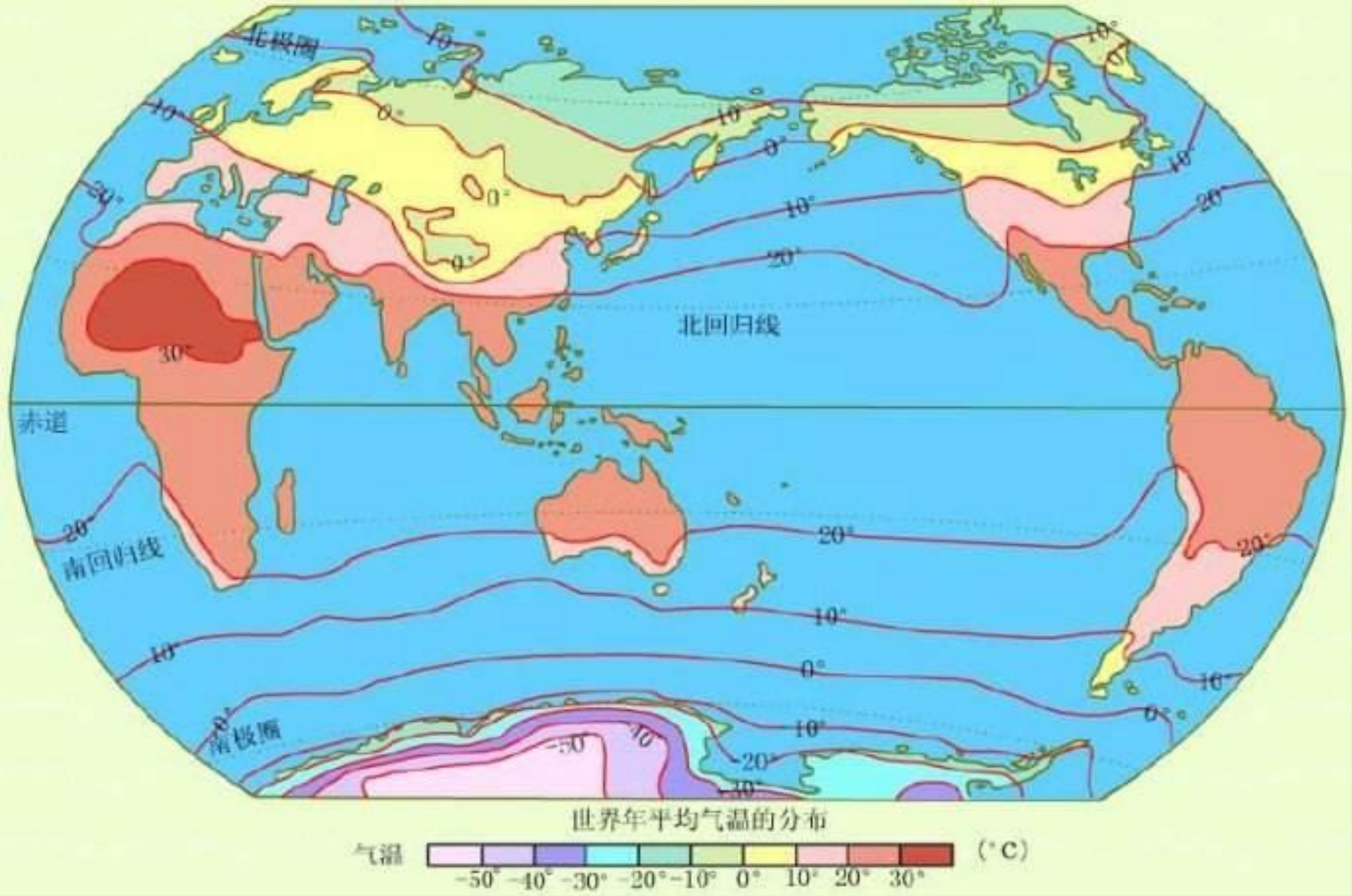
流体冷却装置:



（1）标量场的描述：

- 标量场一般用等温线、等高线或者等势面来表示

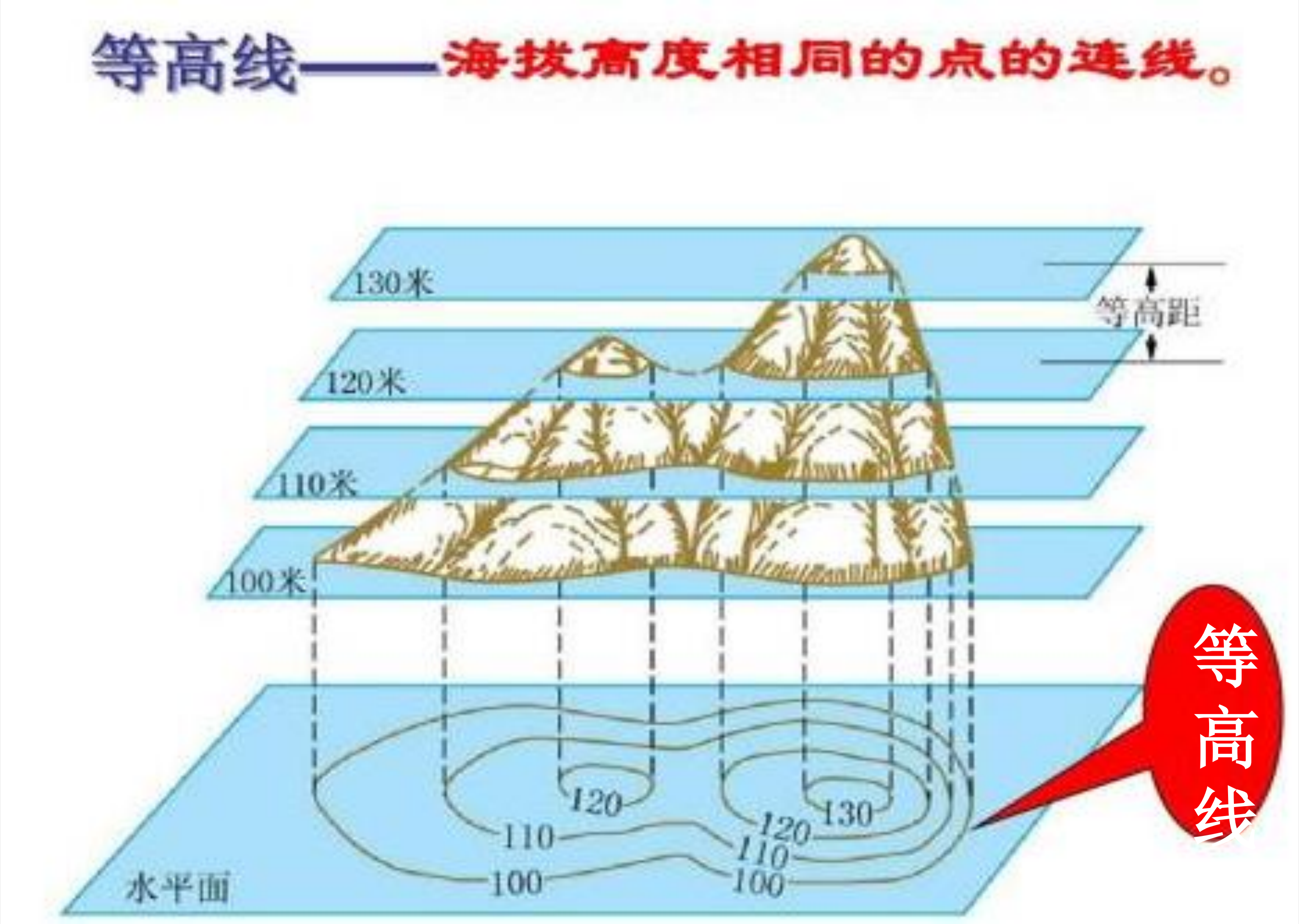
标量场范例：等温线。



（1）标量场的描述：

- 标量场一般用等温线、等高线或者等势面来表示

标量场范例：等高线。



（2）标量场的梯度

标量场U中某一点上的梯度指向标量场增长最快的方向，梯度的大小是这个最大的变化率。

数学表达：∇U

标量场U的梯度∇U充分描述了标量场在空间变化的特征。

梯度的具体表达式：

定义**微分运算符号∇：**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)U$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

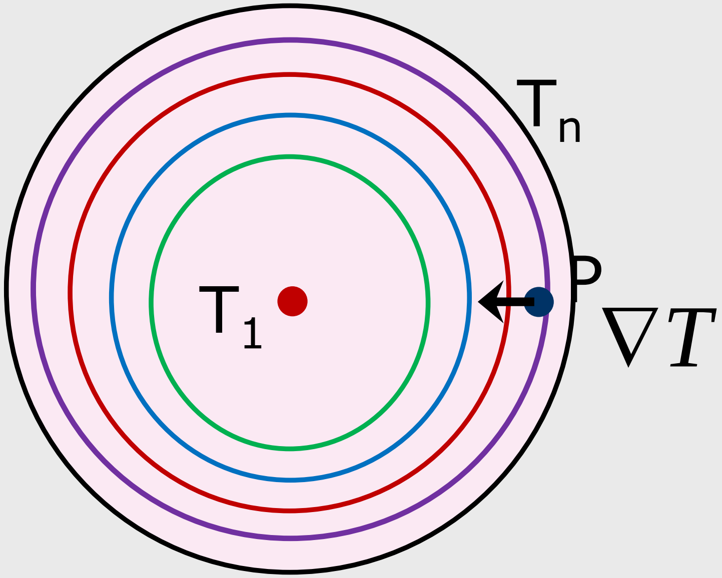
∇U的表达式叫做标量场U的梯度

梯度充分描述标量场空间变化特征

- 经过梯度运算，可由一个标量场得到一个矢量场；

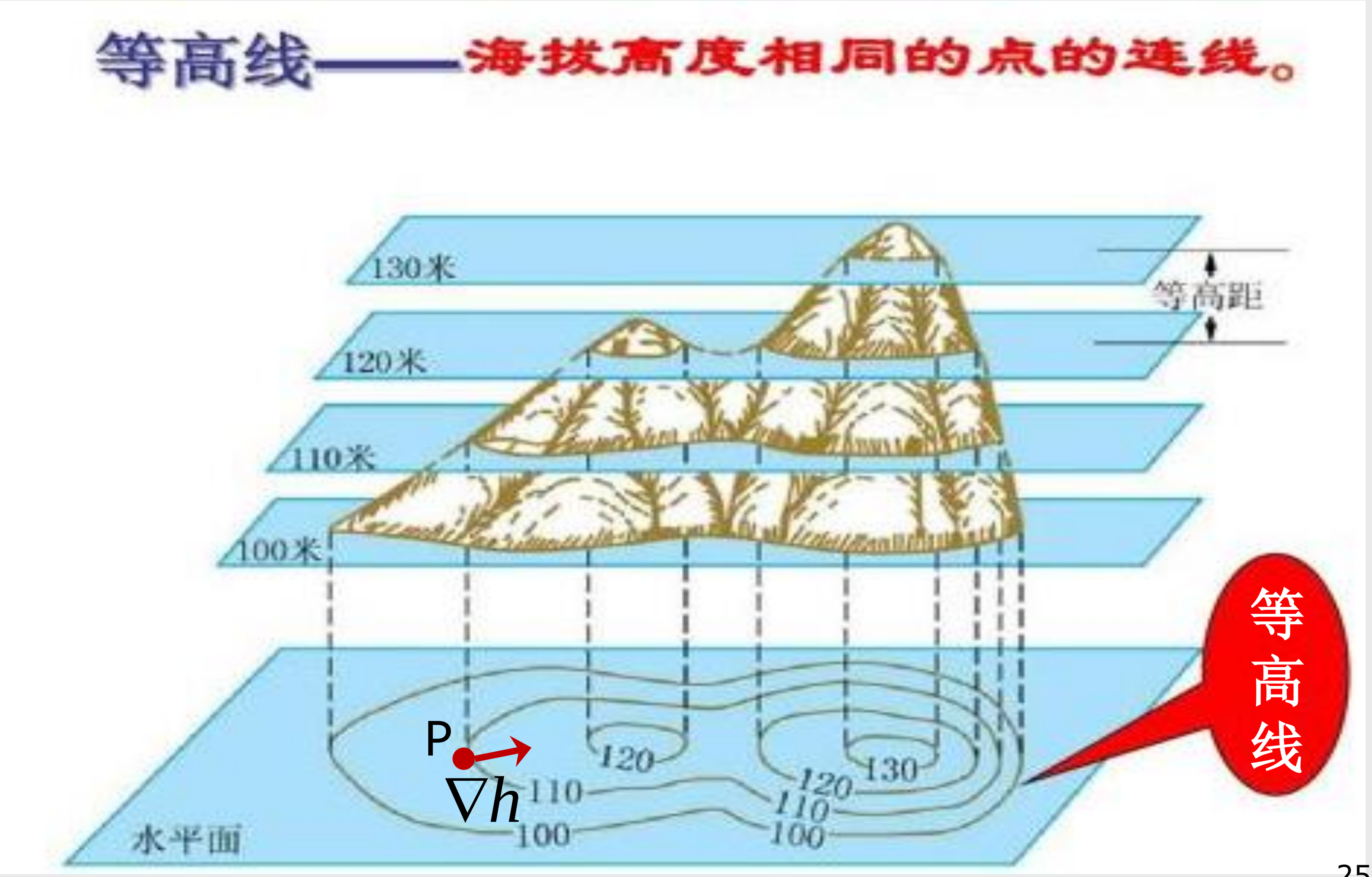
- 标量场中某一点上的梯度指向标量场增长最快的方向，梯度的大小是这个最大的变化率。

从中心到边缘温度均匀降低的圆盘



某位置等温线的梯度，指出温度变化最大的方向。

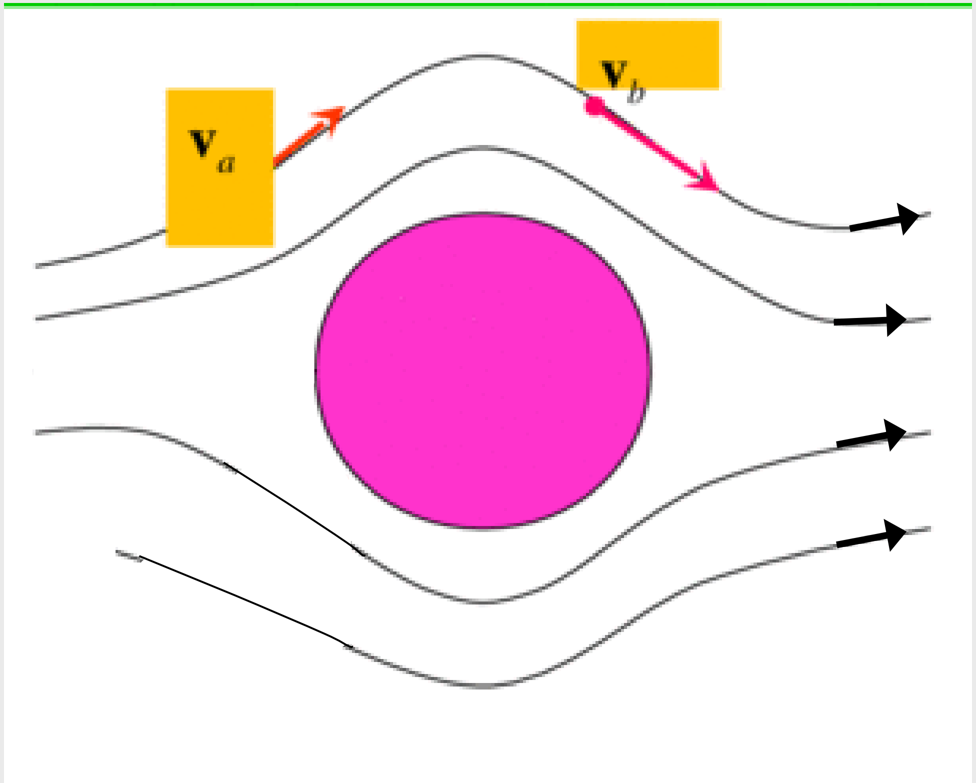
某位置等高线的梯度，指出登山的最近距离。



3. 矢量场的通量与散度

（1）矢量场的描述

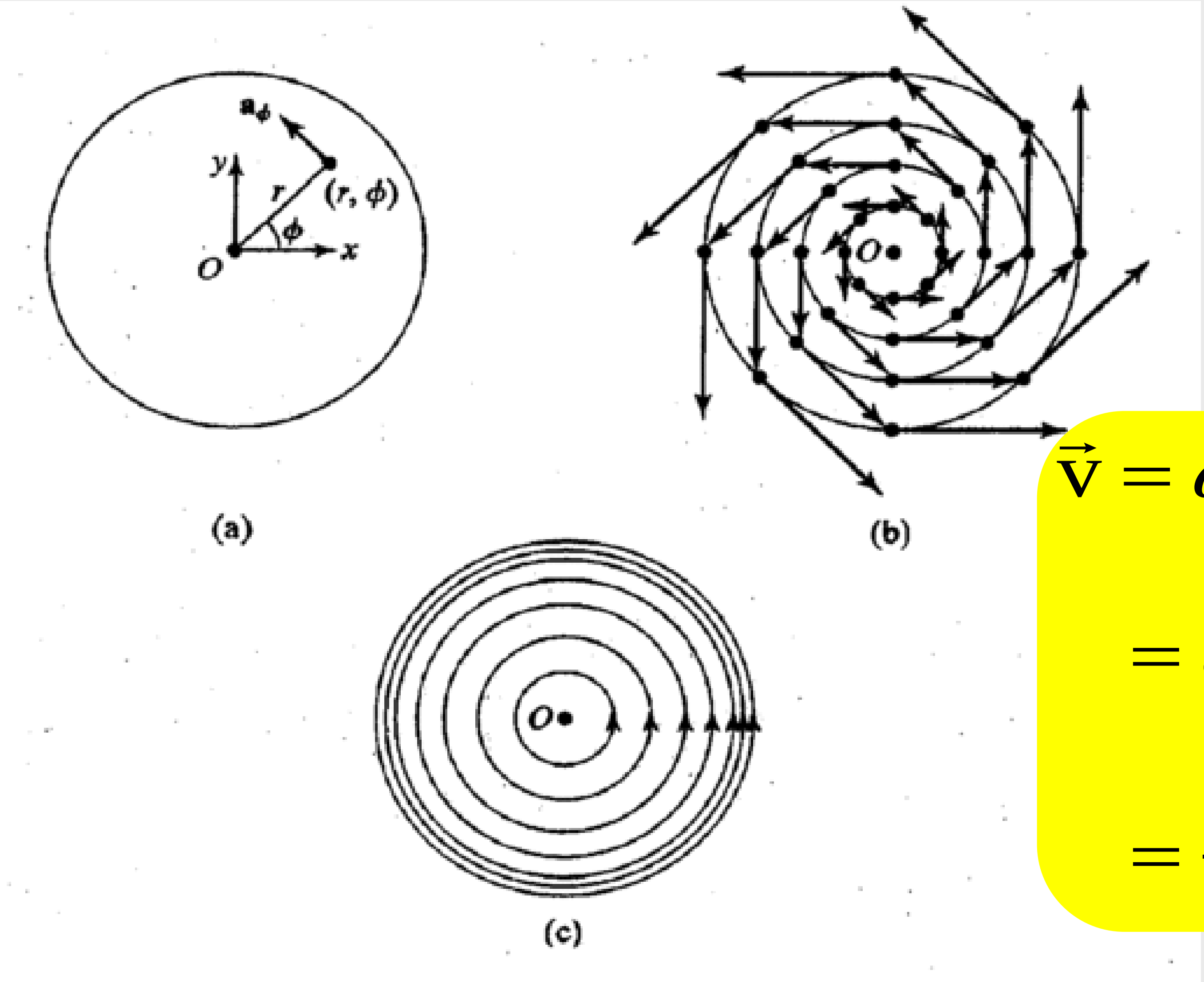
矢量场范例1：流速场



流线上每点既有大小，又有方向。

矢量场范例2：

旋转圆盘上的速度矢量场分布



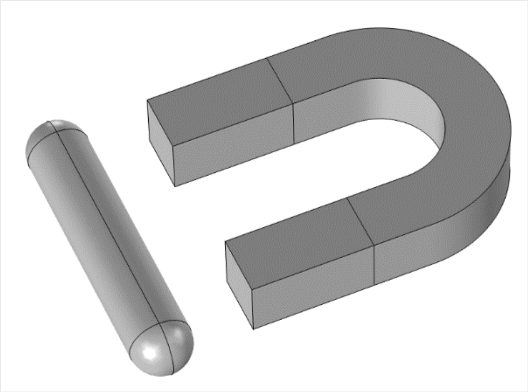
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

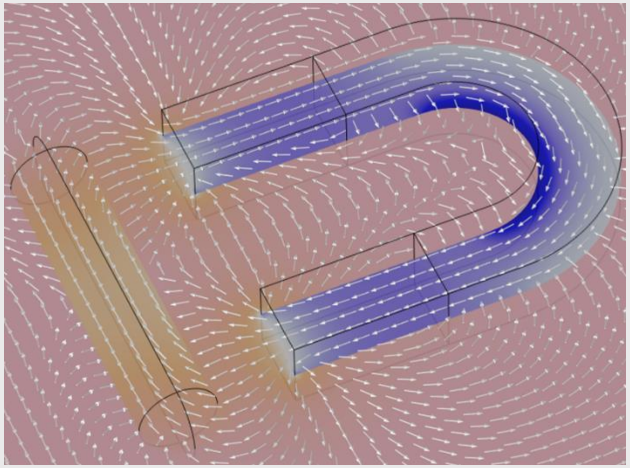
$$= \omega\hat{k} \times \left(x\hat{i} + y\hat{j}\right)$$

$$= -y\omega\hat{i} + x\omega\hat{j}$$

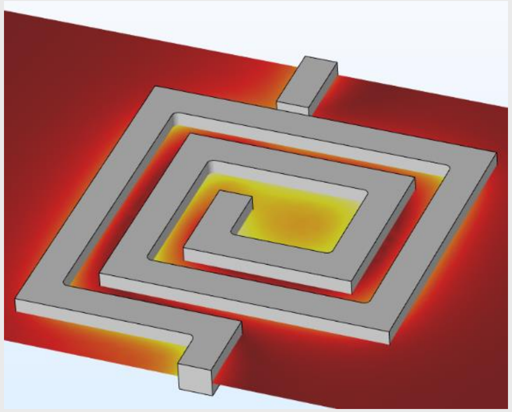
矢量场范例3：

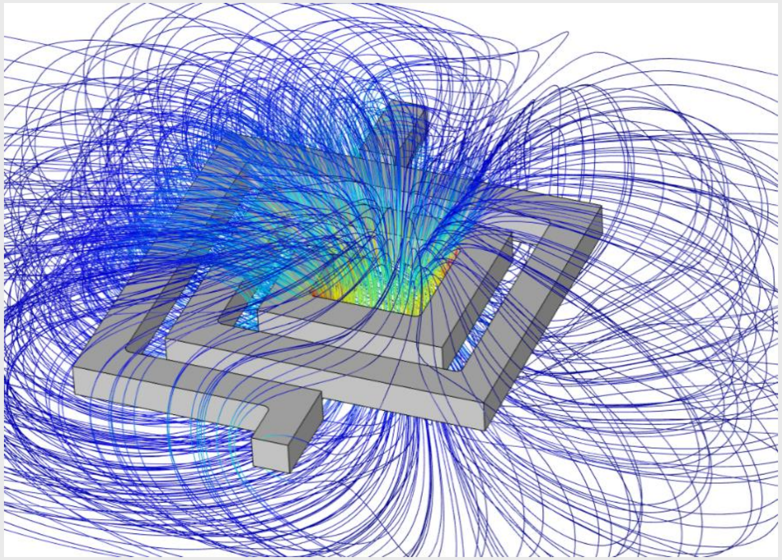
马蹄形永磁体和铁棒周围的磁场分布





载有恒定电流的螺旋电感



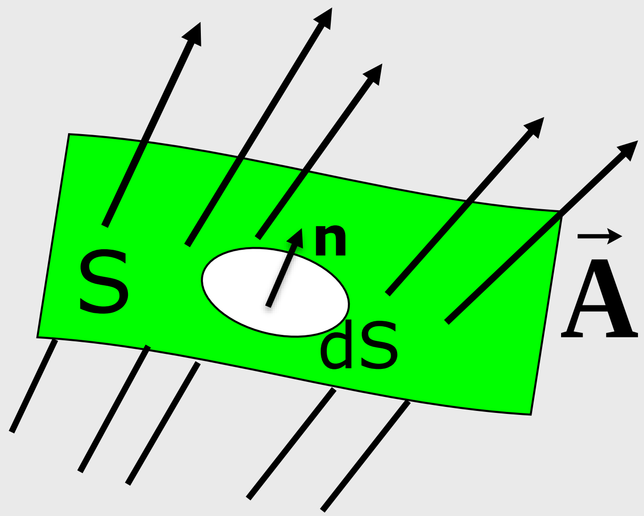


显示了周围空气中与磁通密度　对应的磁通线。其中，磁通线用颜色表明不同的通量大小，蓝色和红色分别表示磁通大小的谷值和峰值。

（2）矢量场的通量

矢量场通量的定义：$\Phi_A = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$

矢量场沿有向曲面标积的面积分叫做矢量场A穿过曲面S的通量。



面积元是个矢量

$$d\vec{S} = dS_x \hat{i} + dS_y \hat{j} + dS_z \hat{k} = dS\hat{n}$$

所以通量Φ亦可写成

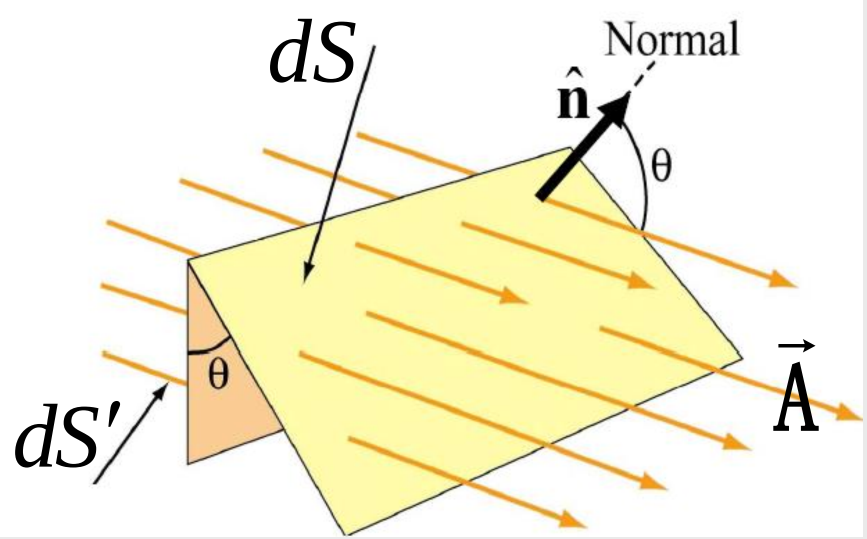
$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}\right) \cdot \left(dS_x \hat{i} + dS_y \hat{j} + dS_z \hat{k}\right)$$

$$= \iint_S A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z$$

矢量场A通量的**物理意义**：

如定义ΔS′为矢量ΔS在垂直A方向投影：

$$\vec{A}\cdot d\vec{S}=AdS'$$



把A理解为流体的流速，AdS′表示穿过dS的流量。

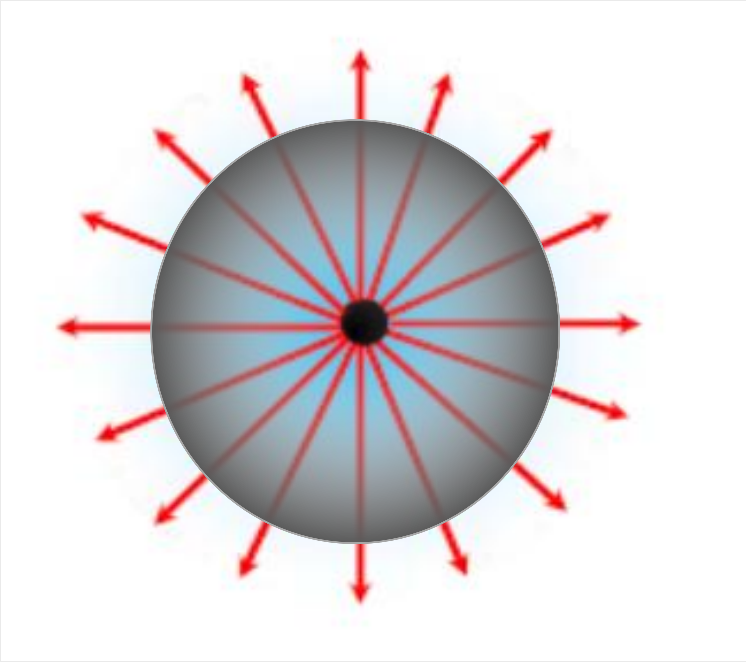
如果S是一个闭曲面，并取其外侧为曲面法向，则

$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

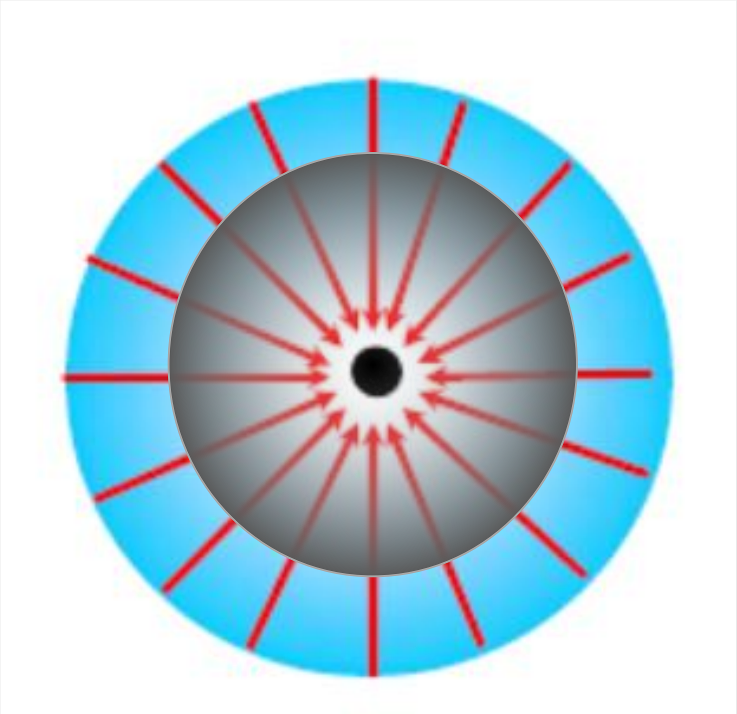
表示A从闭曲面流出的通量。

约定：
闭曲面的外法线方向位正

- 当通量为正时，表示有净流量流出，说明存在着流体的**源**。

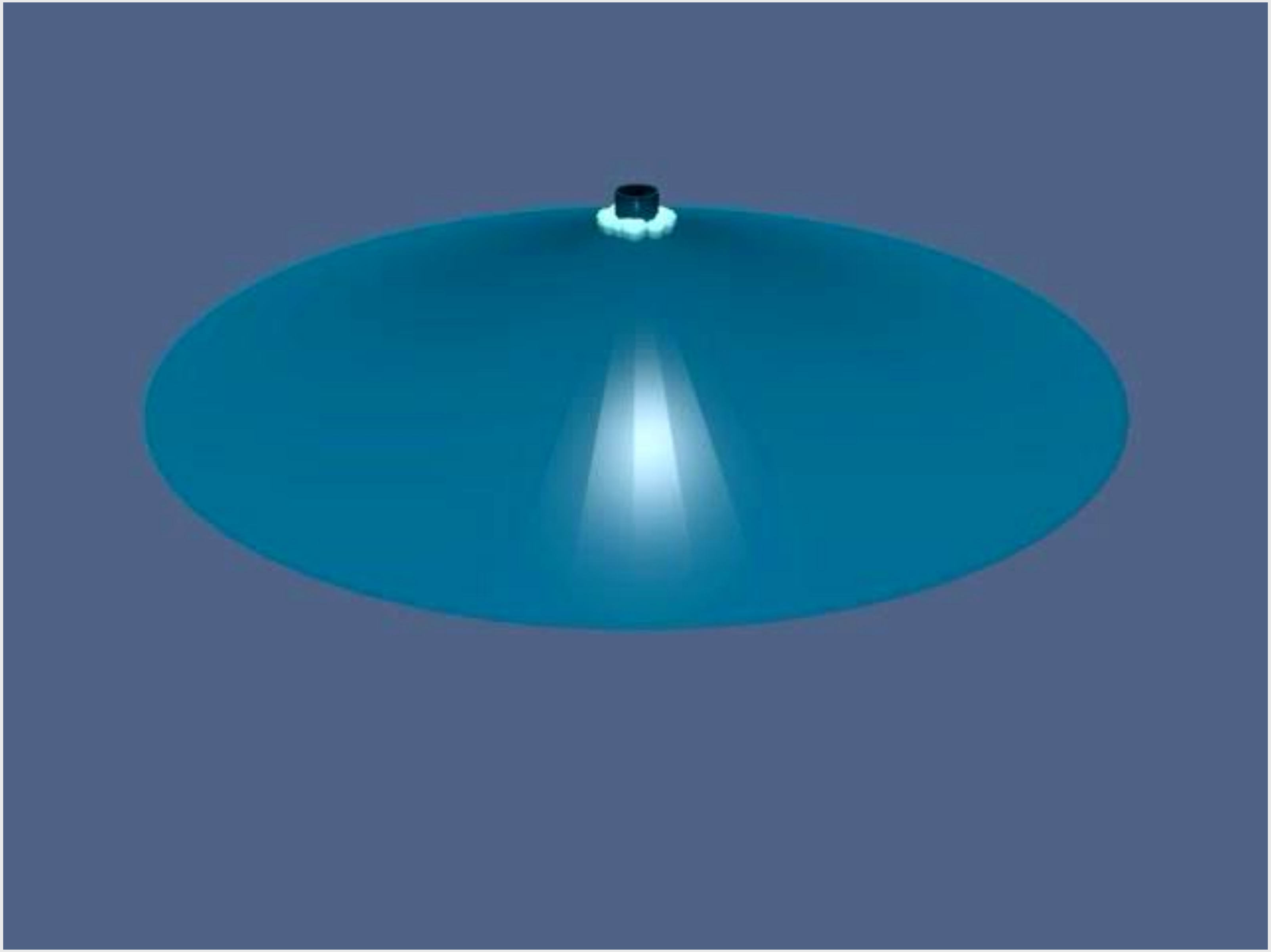


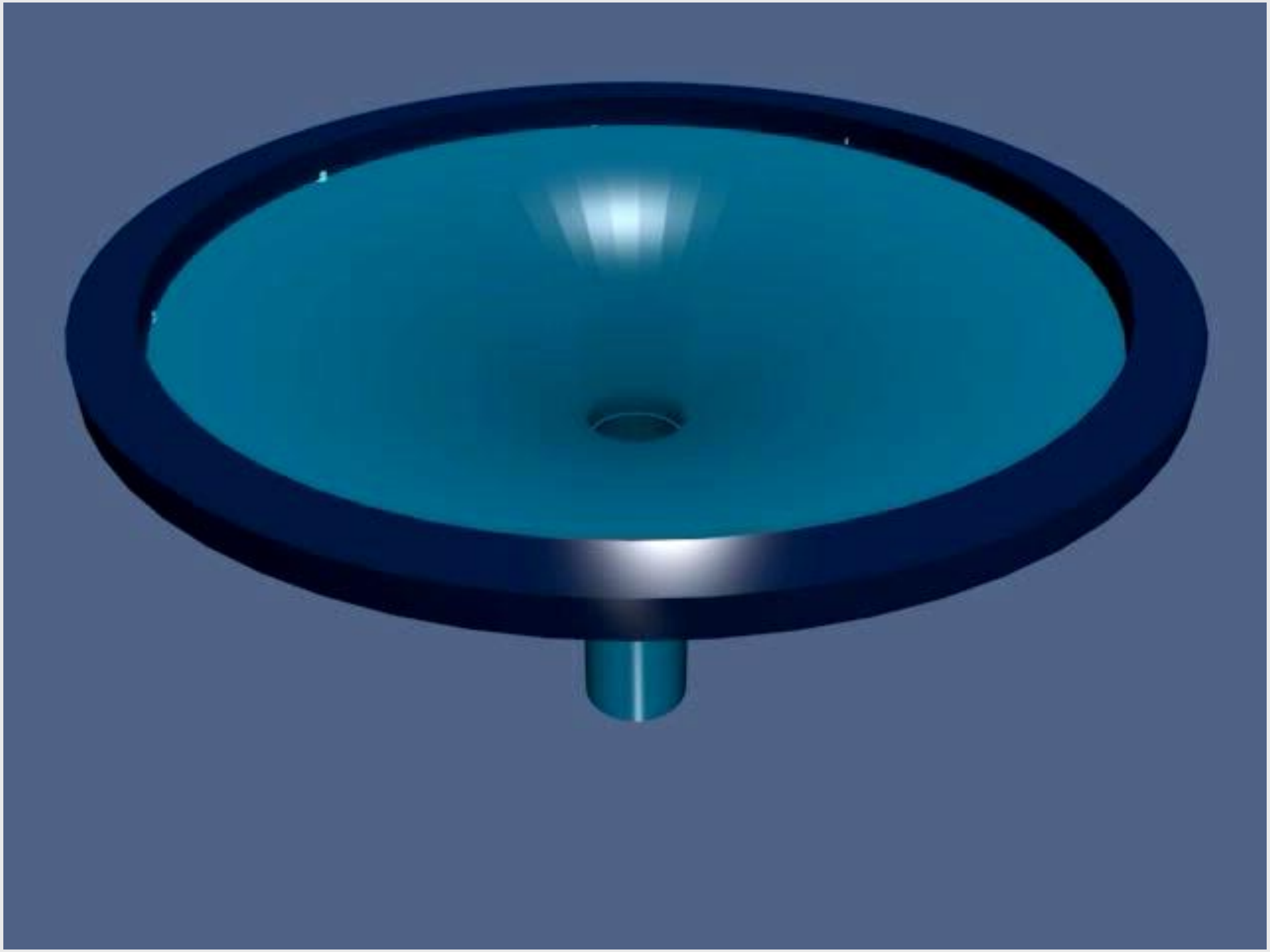
- 当通量为负时，表示有净的流量流入，说明存在着流体的**汇**。



- 当通量为零时，表示流入与流出的相等说明体积内正负源的总和为零。

太阳、黑洞...





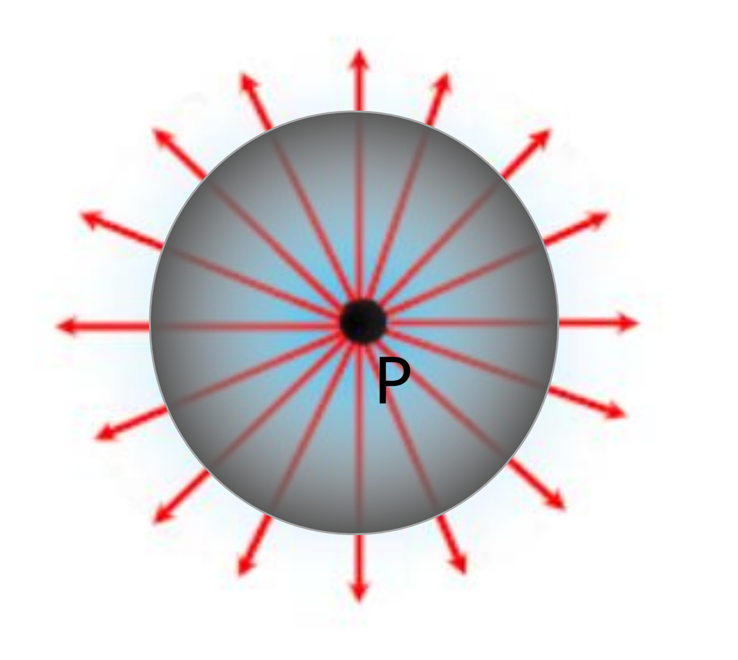
（3）矢量场A的散度：

矢量场A的通量：

$$\Phi_A = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

令S为一闭合面，则：

$$\Phi_A = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



设想闭合面逐渐缩小到空间某点P，此时$\Delta V \to 0$，Φ_A 与体积之比有一极限，这个极限值为矢量场A 在P 点的散度。

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi_A}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

散度即通量的体密度

散度的计算

把∇当作一个矢量，与另外一个矢量$\vec{A}$做点乘运算：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot\left(A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}}\right)$$

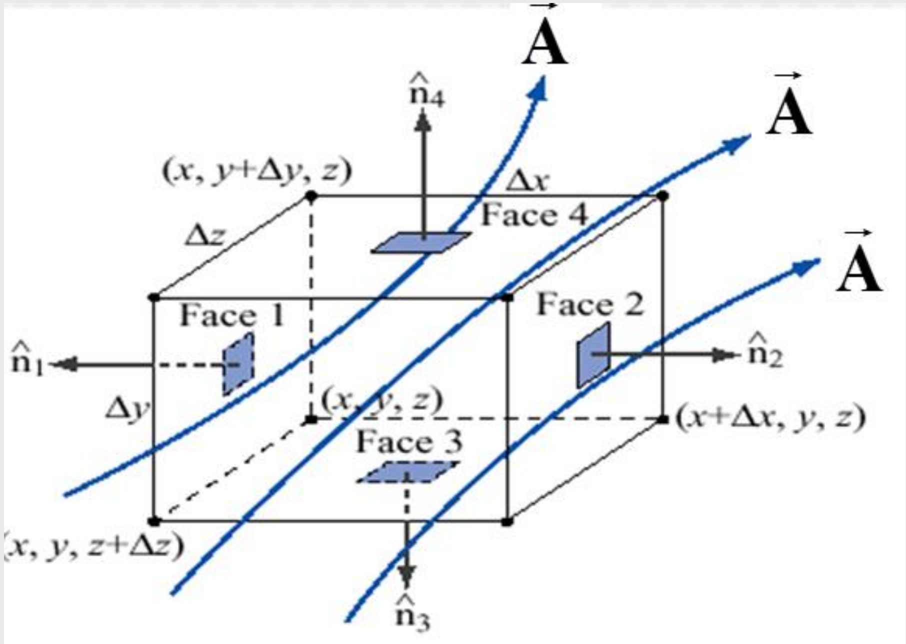
$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

显然，矢量点乘得到的量为标量！这里$\mathrm{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}$我们称为散度，在电磁学中很有用！(divergence)

如何理解：$\nabla\cdot\vec{A}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi_A}{\Delta V}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\mathrm{d}V=dxdydz$

的六面体



$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_s \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$=\lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{\Delta A_x dydz+\Delta A_y dzdx+\Delta A_z dxdy}{dxdydz}\right)$$

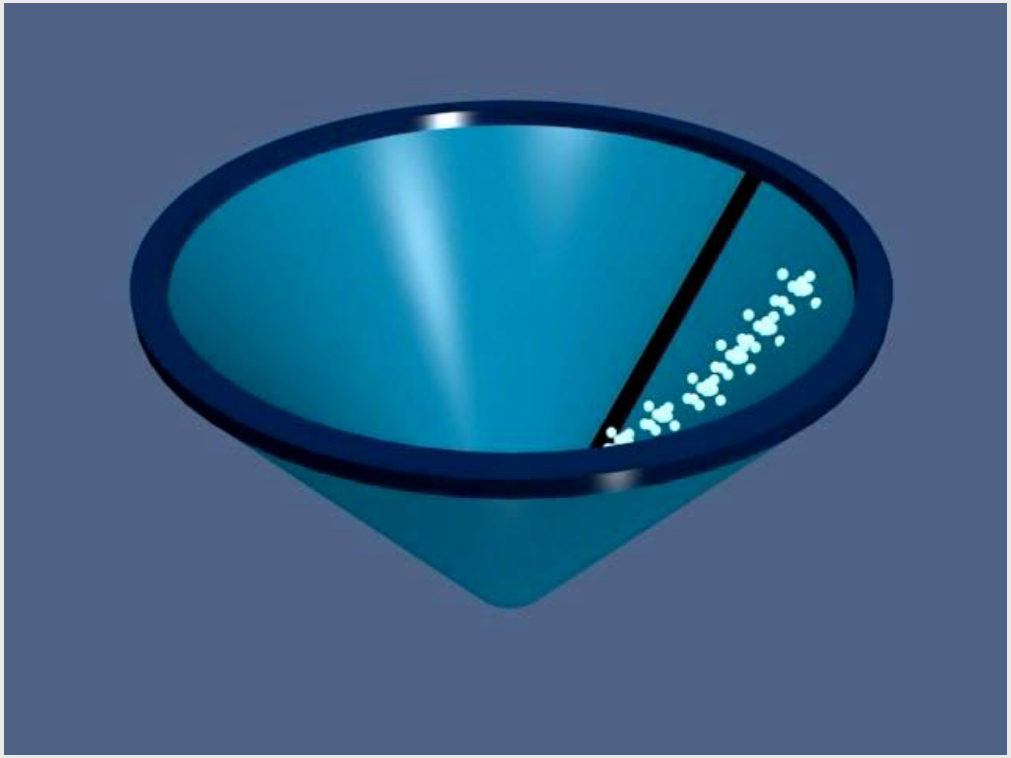
为什么要引入散度？

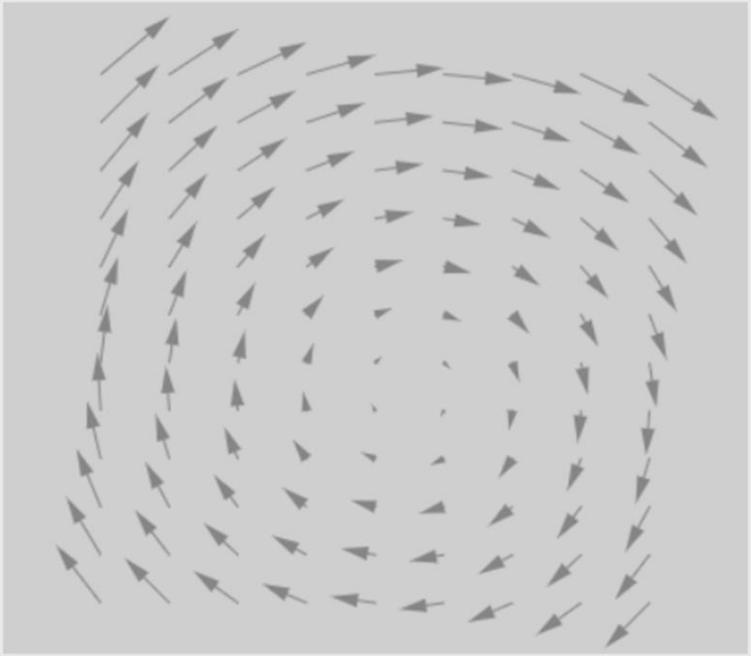
1. 矢量的通量可以反映一定空间范围内场的性质。
2. 散度是空间某点上矢量的性质
3. 电磁学中，散度的意义是场的有源性。当$div\ F > 0$，表示该点有散发通量的正源（发散源）；当$div\ F < 0$ 表示该点有吸收通量的负源（洞或汇）；当$div\ F = 0$，表示该点无源。

问真空中一带电体在远离它的真空中一点的电场的散度是否为零？

有源场空间某点的散度可以为零

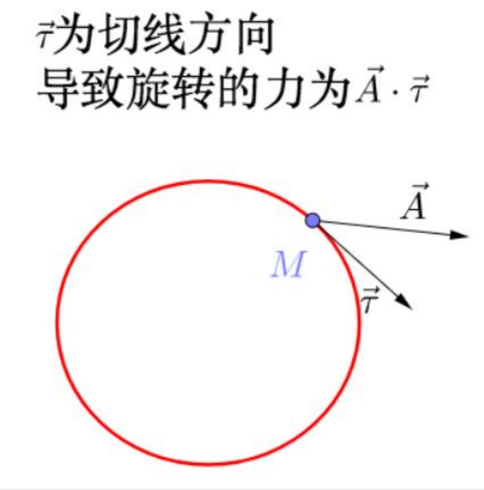
4. 矢量场的环量与旋度





漩涡

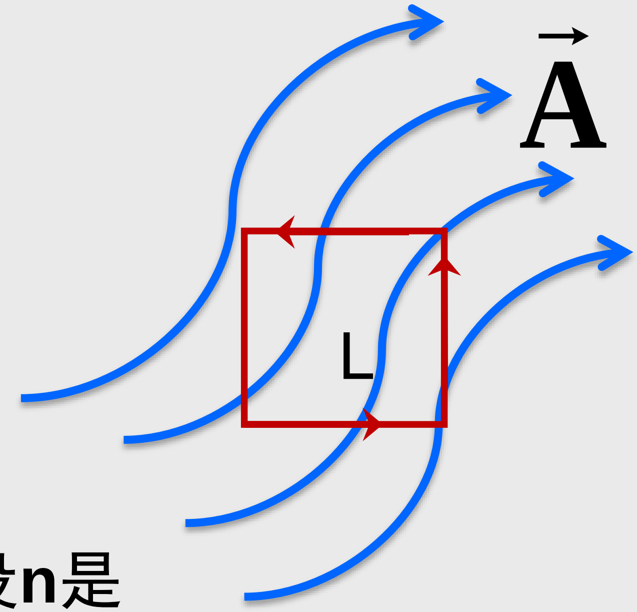
物体在漩涡中受到切向力的作用会发生旋转。



➢ 矢量场的环量：

矢量场$\vec{A}$沿着闭合回路L 的线积分

称为其环量：$\Gamma = \oint_{\mathrm{L}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$



➢ 矢量场的旋度：

令ΔS为闭合回路*L所包围面元的*面积。设**n**是面元的法线单位矢量， **n**的方向与L的环绕方向满足右手定则。设回路L逐渐缩小，最后缩到空间某点P, 此时环量与面积ΔS比值的极限称为矢量场A的旋度在**n**上的投影：

$$(\nabla \times \vec{A})_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S}$$

说明：
环路的环绕方向可以自由选择

也称为矢量场A在P处沿方向n的环量面密度

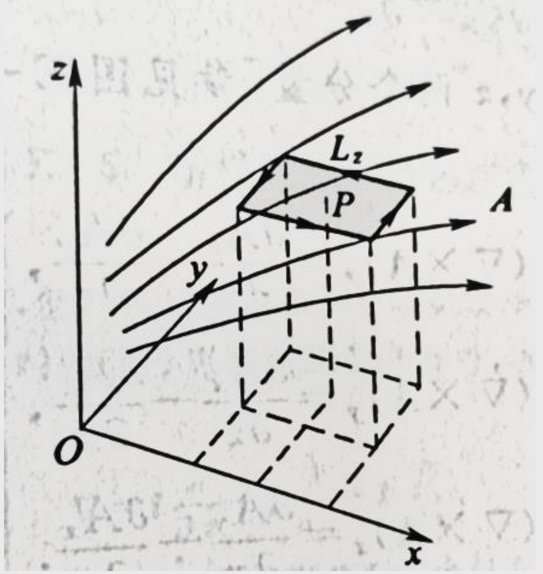
旋度的数学运算

$$\nabla \times \vec{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \times \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

环量面密度投影



环量面密度在Z方向的投影

$$\lim_{\Delta S_z \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \vec{A}_{xy} \cdot d\vec{l}_{xy}}{\Delta S_z} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

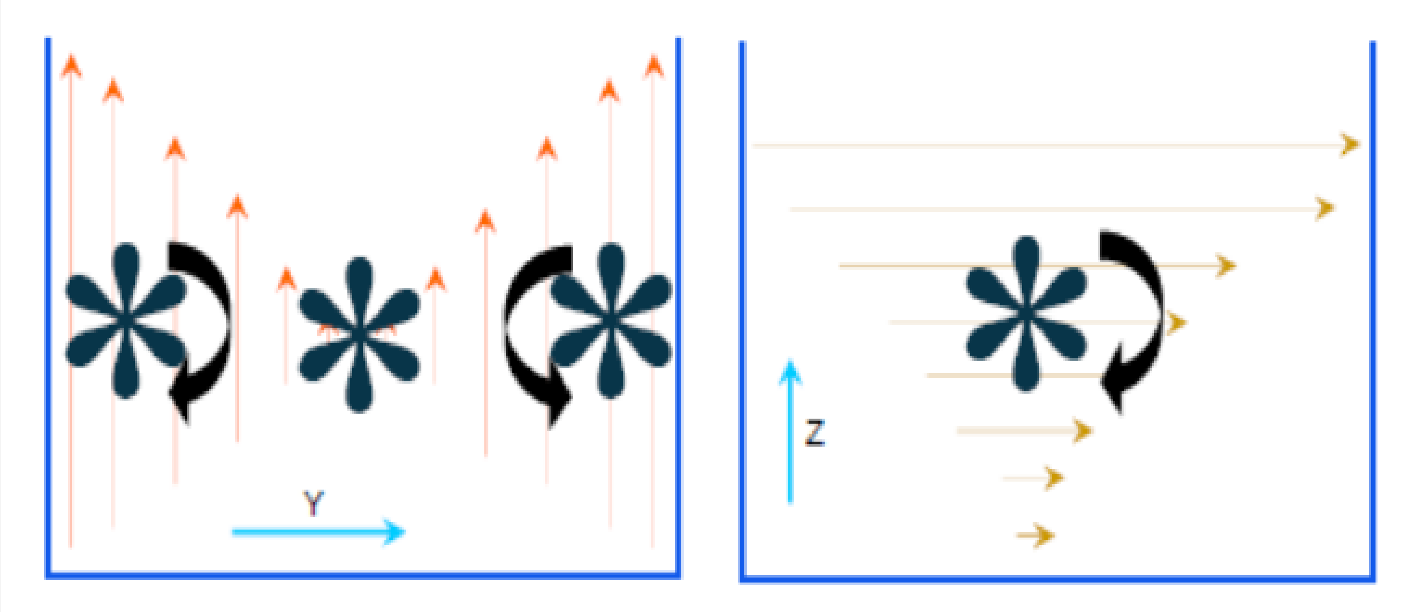
相似的方式可以得到其他方向的投影，于是可以得到：

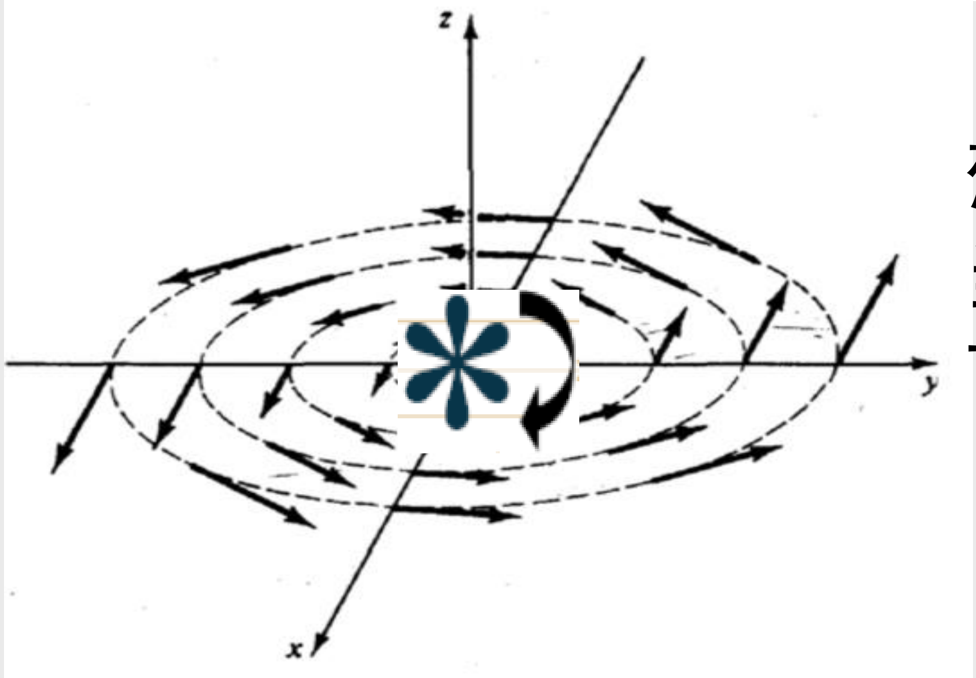
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\Delta s} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A} = Curl\vec{A}$$

某个区域中的环量不等于零，说明这个区域中的向量场表现出环绕某一点或某一区域旋转的特性。

- 旋度是矢量分析中的一个矢量算子，可以表示三维矢量场对某一点附近的微元造成的旋转程度。旋度矢量提供了矢量场在这一点的旋转性质。
- 旋度矢量的方向表示矢量场在这一点附近旋转度最大的环量的旋转轴，它和矢量旋转的方向满足右手定则。
- 旋度矢量的大小是绕着这个旋转轴旋转的环量与旋转路径围成的面元的面积之比–环量的面密度。

旋度的物理含义



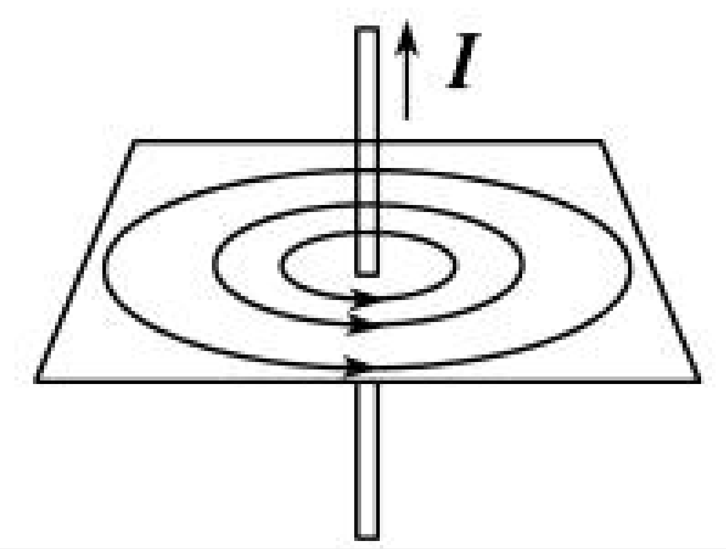


想象矢量场中有“叶轮”
当矢量场旋度不为零，
可以推动“叶轮”转动。

旋度在电磁学中的应用

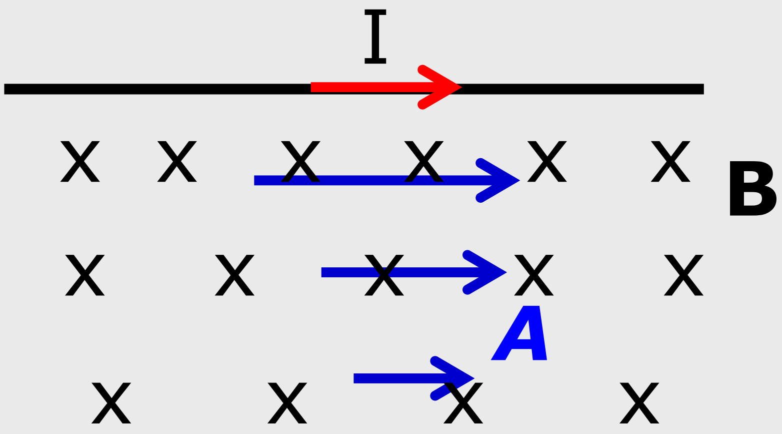
1. 通电导线的磁感应强度B的旋度是电流密度：

$$\vec{\mathbf{J}} = \nabla \times \vec{\mathbf{B}}$$



2. 通电导线的磁矢势A的旋度是磁感应强度B：

$$\vec{\mathrm{B}} = \nabla \times \vec{\mathrm{A}}$$

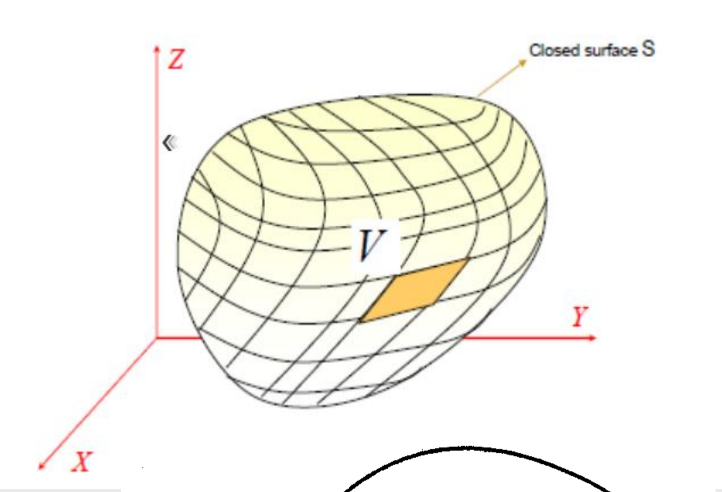


5. 高斯定理、斯托克定理

（1）高斯定理

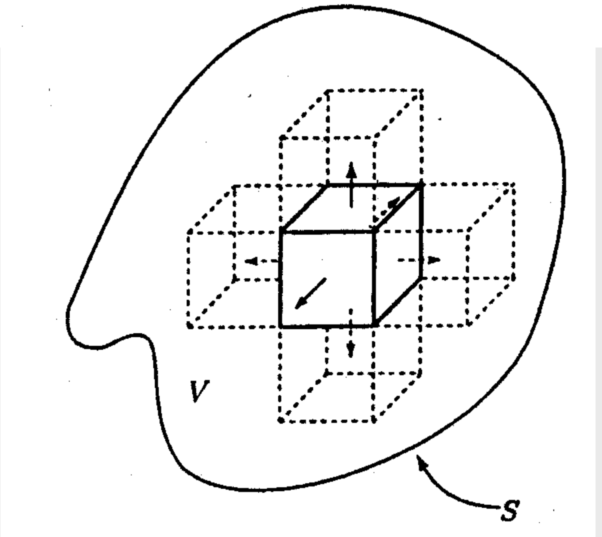
对于由 N 个体积元 ΔV 构成的体积 V，根据散度定义

$$\sum_N \left(\oiint_{\Delta S} \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d}\vec{S} \right) = \sum_N \left(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} \right) \Delta V$$



除了包围体积V的闭曲面S外，所有相邻体积元交界面上

$$\iint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S} \text{相互抵消}$$



这样就得到：

$$\oiint_S \vec{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}} \right) dV$$

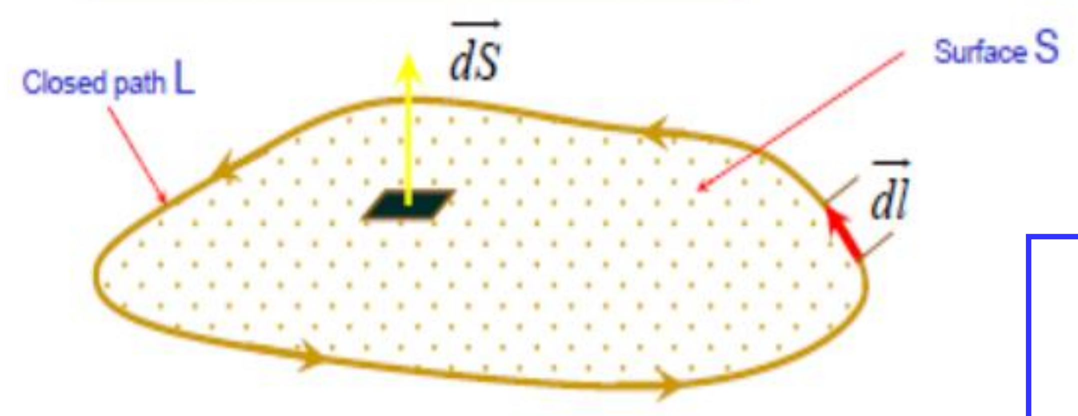
即：散度定理

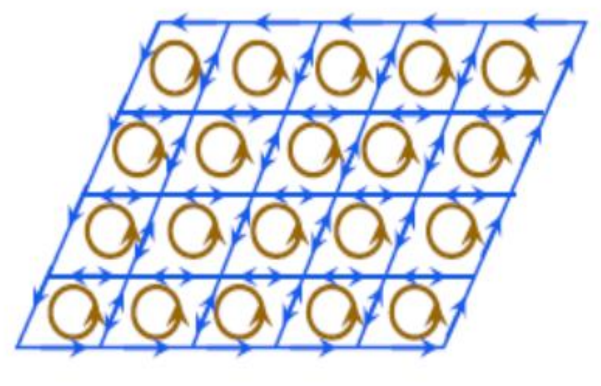
数学上的高斯定理，非静电场的高斯定理。
体积分和面积分的互换。

（2）斯托克定理

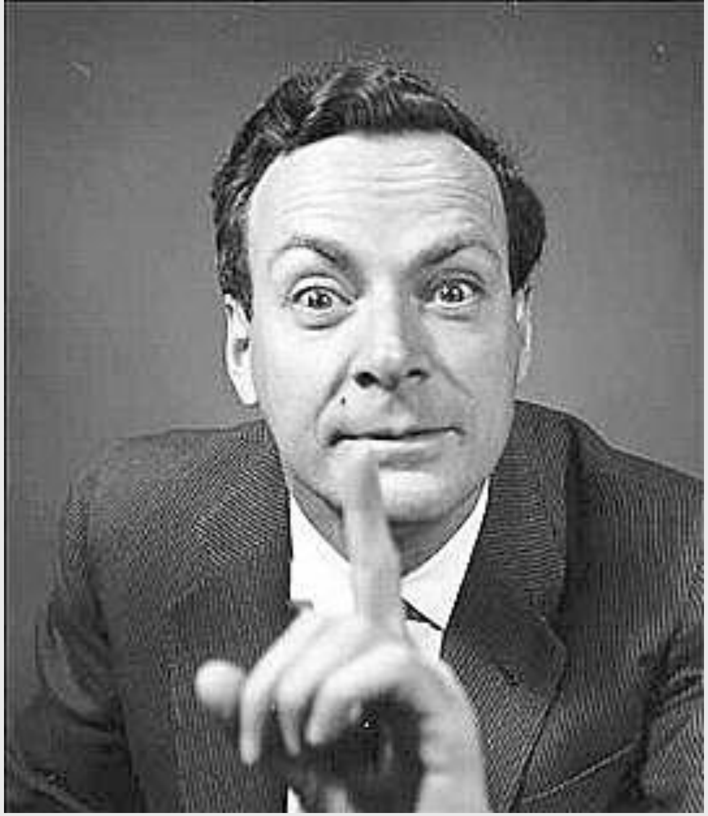
当封闭周线内有涡束时，则矢量沿封闭周线的环量等于该封闭周线内所有涡束的环量之和，这就是斯托克斯定理。斯托克斯定理表明，矢量沿封闭曲线L的环量等于穿过以该曲线为周界的任意曲面的涡通量。

$$\oint_L \vec{\mathbf{A}}\cdot \mathbf{d}\vec{l} = \oint\!\!\oint_S \left(\nabla\times\vec{\mathbf{A}}\right)\cdot \mathbf{d}\vec{S}$$





线积分和面积分的互换。



- 这是我的作风：除非 我脑袋里能出现一个具体的例子，然后根据这个特例来演算下去，否则我无法理解他们说的东西。

梯度：标量单位长度的变量。

通量：矢量通过的某个曲面的量，矢量的面积分。

散度：单位体积的通量。

环量：矢量环绕某个闭合曲线的量，矢量的线积分。

旋度：单位面积的环量。

已知Laplace算子

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}}$$

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

请证明 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\bullet\mathbf{A})$

$$\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right)\times\left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right)$$

$$= \hat{i}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \hat{j}\left(A_zB_x - A_xB_z\right) + \hat{k}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla\times\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z\right]$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\hat{e}_x+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}\right)\hat{e}_y+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right)\hat{e}_z$$

$$=\left(-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\hat{e}_x+\left(-\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}\right)\hat{e}_y+\left(-\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\right)\hat{e}_z$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\hat{e}_x+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}\right)\hat{e}_y+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right)\hat{e}_z$$

$$=-\nabla^2 A_x\hat{e}_x-\nabla^2 A_y\hat{e}_y-\nabla^2 A_z\hat{e}_z$$

$$+\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)+\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)$$

$$=-\nabla^2 A+\nabla(\nabla\cdot A)$$