月考试卷 B 答案

一. 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，从而

$$p'+\frac{1}{x}p=x^2.$$

由一阶线性微分方程的通解公式知:

$$p=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{1}{x}dx}x^2dx+C_1\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int x^3dx+C_1\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{4}x^4+C_1\right]=\frac{1}{4}x^3+\frac{C_1}{x},$$

从而 $y=\int p\,dx$

$$=\int\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{C_1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{16}x^4+C_1\ln x+C_2,$$

二、设过已知直线的平面束方程为:

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

整理得: $(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$

由 $(2+3\lambda)\cdot4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot1=0$，得

$\lambda=-\frac{13}{11}$，代入平面束方程，得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此，所求投影直线方程为:

$$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z=1.\end{cases}$$

三.(1)由于 $\lim\limits_{\substack{y\to0\\x=ky^2}}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\frac{2ky^4}{k^2y^4+y^4}=\frac{2k}{k^2+1}$

与 k 有关，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续，

故不可微.

(2) 函数 $f(x,y)$ 沿 $\vec{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 方向有:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha\cdot t^3}{(\cos^2\alpha+\sin^4\alpha\, t^2)\cdot t^3}=\begin{cases}\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, & \cos\alpha\neq0\\0, & \cos\alpha=0\end{cases}$$

所以 $f(x,y)$ 沿各个方向的方向导数存在

四.(1)在方程组中对 x 求偏导得

$$\begin{cases}1=e^u\cos v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-e^u\cdot\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\0=e^u\sin v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+e^u\cdot\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

解得: $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2(u\cos v-v\sin v)}{e^u}$$

(2) 在方程组中对 y 求偏导，得

$$\begin{cases}0=e^u\cos v\frac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}\\1=e^u\sin v\frac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\sin v$，$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-u}\cos v$，故

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2(v\cos u+u\sin v)}{e^u}$$

五 由于椭球面的法向量 $(2x,4y,6z)$ 与 $(1,3,5)$ 平行，所以 $\frac{x}{1}=\frac{2y}{3}=\frac{3z}{5}$，解出 $y=\frac{3}{2}x$，$z=\frac{5}{3}x$，

代入椭球方程，可得: $x=\pm6$，即切点为

$\pm(6,9,10)$，故切平面方程为:

$$(x-6)+3(y-9)+5(z-10)=0$$

与 $(x+6)+3(y+9)+5(z+10)=0$

即 $x+3y+5z\pm83=0$

六、设 (x,y)，$x\geq0$ 为三角形底边上的顶点，

则三角形面积为: $S=x(2-y)$，令

$$L(x,y,\lambda)=x(2-y)-\lambda(x^2+3y^2-12).$$

求偏导，得:

$$\begin{cases}L_x=2-y-2\lambda x=0\\L_y=-x-6\lambda y=0\\L_\lambda=x^2+3y^2-12=0\end{cases}$$

由前两个方程，消去 λ，得 $6y-3y^2+x^2=0$

再与第三个方程联立，得满足 $x\geq0$ 的驻点:

$(0,2)$ 和 $(3,1)$.

当 $(x,y)=(0,2)$ 时，$S=0$.

当 $(x,y)=(3,-1)$ 时，$S=9$.

由题意三角形面积一定存在最大值，于是，

得: $S_{max}=9$.