磁介质 II

一、分子电流观点复习与例题

二、磁荷观点

三、两种观点的等效性

磁介质：分子电流观点

$$I_0 \xrightarrow{\text{产生}} \vec{B}_0 \xrightarrow{\text{介质磁化}} \vec{M}$$

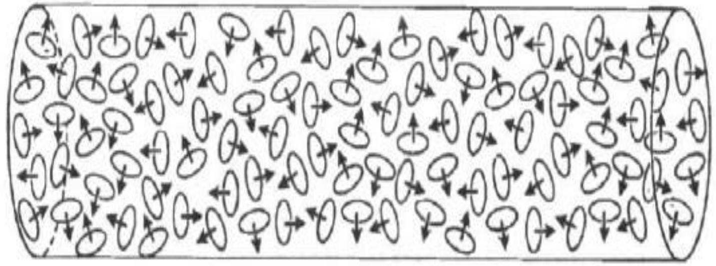
$$+ \qquad\qquad \downarrow$$

$$\vec{B}' \xleftarrow[\text{附加场}]{} I'$$

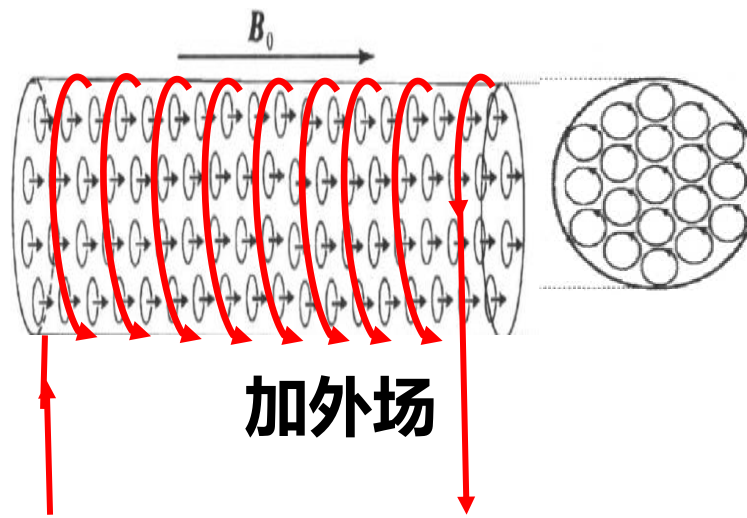
$$\downarrow$$

$$\vec{B}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\oiint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0 \\ \displaystyle\oint_L \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_0 + \mu_0 \sum_{L内} I' \end{cases}$$



未加外场



加外场

有磁介质时的安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I \Rightarrow \mu_0\left(\sum I_0 + \sum I'\right)$$

$$\sum I' = \oint \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_0 + \mu_0 \oint \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_0$$

$$\Rightarrow \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

H和M的关系

◈ 对于各向同性线性磁介质，H、M的关系为

$M = \chi_m H$ (铁磁性材料一般不成立)

磁化率

相对磁导率

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

■磁介质分类

$\chi_m > 0, \mu_r > 1,$ $|\chi_m|$很小　M和B同向，顺磁质

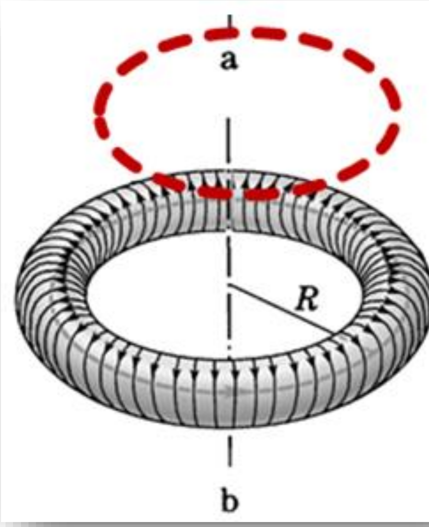
$\chi_m < 0, \mu_r < 1,$ $|\chi_m|$很小　M和B反向，抗磁质

$\chi_m > 0, \mu_r > 1,$ $|\chi_m|$很大　M和B同向，铁磁质

真空中，M=0 $\chi_m = 0, \mu_r = 1,$ $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 无磁化现象

一般情况下χ_m是变量，如铁磁质 M与H不成正比关系

例题：用安培环路定理计算充满磁介质的螺绕环内的磁感应强度B，已知磁化场的磁感应强度为B_0,介质的磁化强度为M,螺绕环的电流为I_0



根据安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi RH = NI_0$$

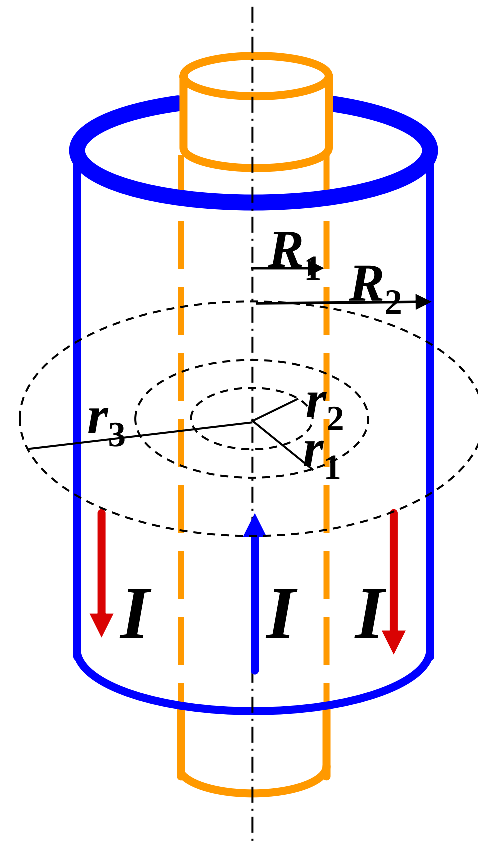
$$H = \frac{N}{2\pi R} I_0 = nI_0$$

总磁感应强度$B = \mu_0(\mathrm{H}+\mathrm{M}) = \mu_0 nI_0 + \mu_0 M$

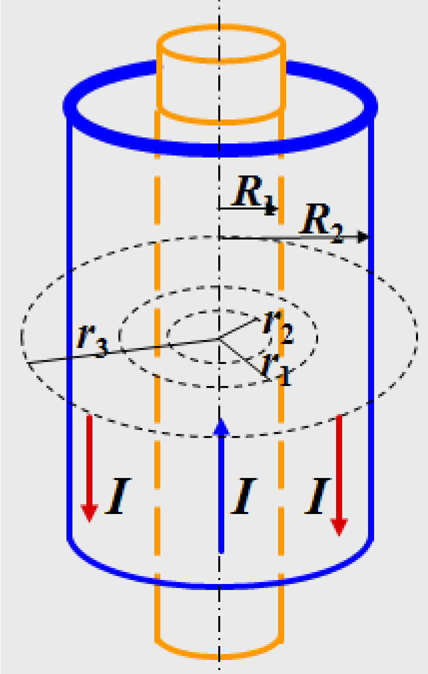
$\because$空心螺绕环内的磁感应强度$\mathrm{B}_0 = \mu_0 \mathrm{nI}_0$

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_0 + \mu_0\mathrm{M} \qquad \therefore B_0 = \mu_0 H$$

例　如图所示，一半径为R_1的无限长圆柱体（导体$\mu_r \approx 1$）中均匀地通有电流I，在它外面有半径为R_2的无限长同轴圆柱面，在圆柱面上通有相反方向的电流I，两者之间充满着磁导率为μ_r的均匀磁介质。试求（1）圆柱体外圆柱面内一点的磁感应强度；（2）圆柱体内一点磁感应强度；（3）圆柱面外一点的磁感应强度。



解　（1）当两个无限长的同轴圆柱体和圆柱面中有电流通过时，它们所激发的磁场是轴对称分布的，而磁介质亦呈轴对称分布，因而不会改变场的这种对称分布。设圆柱体外圆柱面内一点到轴的垂直距离是r_1，以r_1为半径作一圆，取此圆为积分回路，根据安培环路定理有:



$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = H\int_0^{2\pi r_1}\mathrm{d}l = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} \qquad B = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r_1}$$

（2）设在圆柱体内一点到轴的垂直距离是r_2，则以r_2为半径作一圆形回路，根据安培环路定理有

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = H\int_0^{2\pi r_2}\mathrm{d}l = H\,2\pi r_2 = I\,\frac{\pi r_2^2}{\pi R_1^2} = I\,\frac{r_2^2}{R_1^2}$$

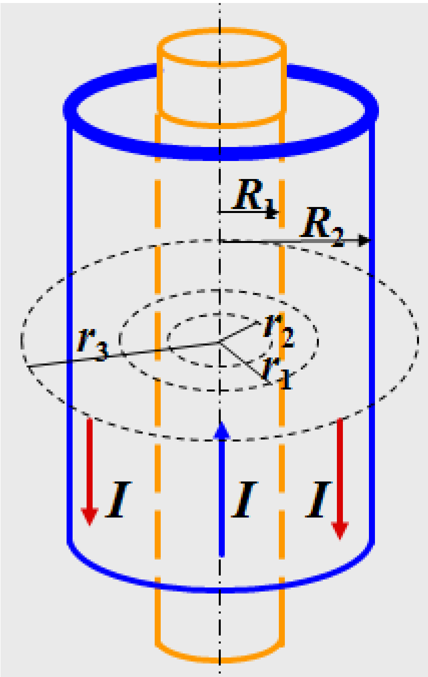
$$H = \frac{I r_2}{2\pi R_1^2}$$ **由$B = \mu_0\mu_r H$，得** $$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I r_2}{R_1^2}$$

（3）在圆柱面外取一点，它到轴的垂直距离是r_3，以r_3为半径作一圆，根据安培环路定理,考虑到环路中所包围的电流的代数和为零，所以得

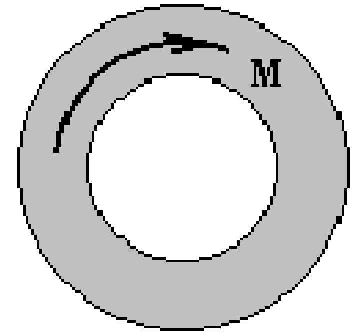
$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H\int_0^{2\pi r_3} \mathrm{d}l = 0$$

即 $H = 0$

或 $B = 0$



- 例3 有一磁介质细铁环，在外磁场撤消后，仍处于磁化状态，磁化强度矢量M 的大小处处相同，M的方向如图所示。求环内的磁场强度H和磁感应强度B



因为铁环属于铁磁质公式 $B=\mu_0\mu_r H$不适用

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum I_0=0$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{M}$$

- 可以用B= μ_0 (H+M)来讨论
- 方法一：用H的安培环路定理

  求H—M—B
- 方法二：M——I’——B——H

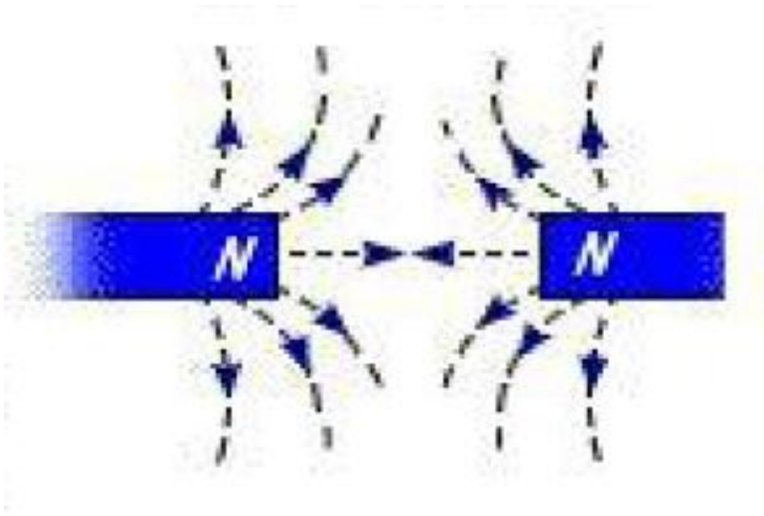
$$i'=\mathrm{M}\times\mathrm{n}\qquad i'=nI$$

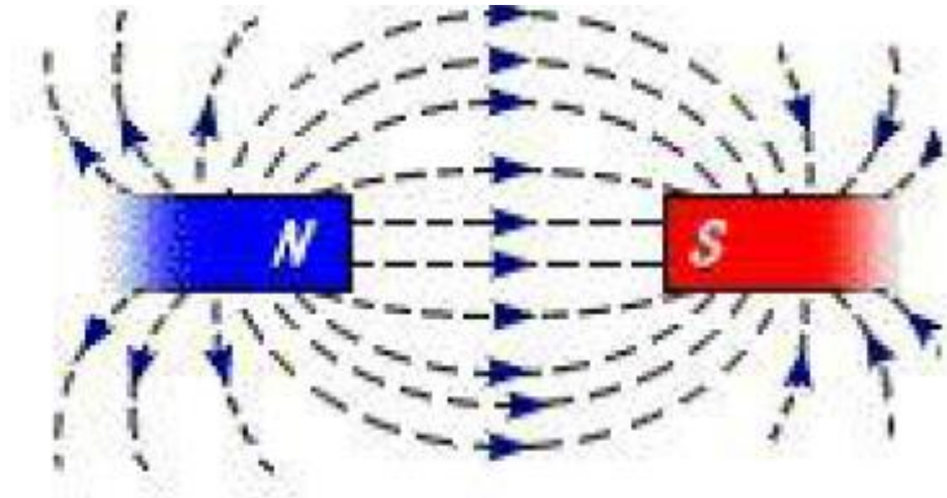
与螺绕环类比

$$\mathrm{B}=\mu_0 i'=\mu_0\mathrm{M}$$

$$H=B/\mu_0-M=0$$

§6-2 磁介质（二）——磁荷观点



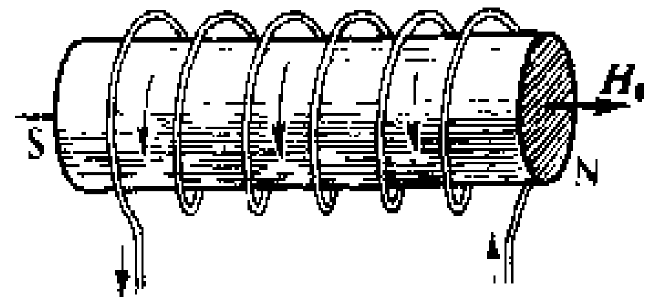


“磁荷”模型要点

- 磁荷有正、负，同号相斥，异号相吸；
- 磁荷遵循磁的库仑定律（类似于电库仑定律）；
- 定义磁场强度 H为单位点磁荷所受的磁场力；
- 把磁介质分子看作磁偶极子,具有磁偶极矩P；
- 认为磁化是大量分子磁偶极子规则取向使正、负磁荷聚集两端的过程，磁体间的作用源于其中的磁荷间的作用；
- 目前还没有证明单独的磁荷（即磁单极子）存在。

1. 磁介质的磁化 磁极化强度矢量J

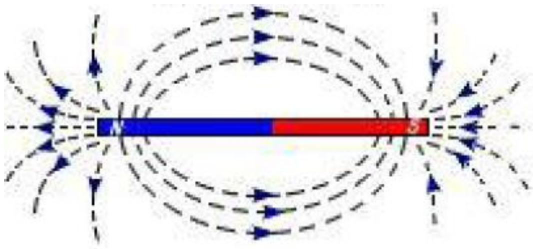
铁芯的磁化：将一个没有磁化的铁芯插在线圈中，当线圈里通入直流电时，铁芯将显出磁性，在其两端出现了N、S极。



用磁荷观点解释磁化的微观机制

$$\vec{p}_e = q\vec{l}$$

电偶极矩

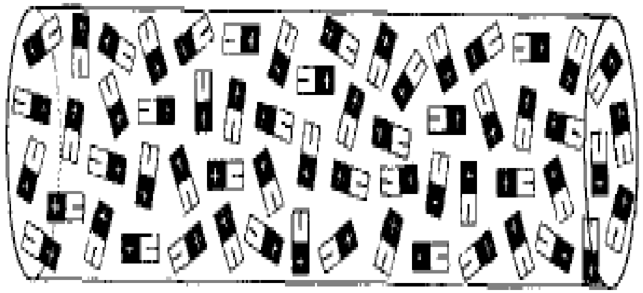


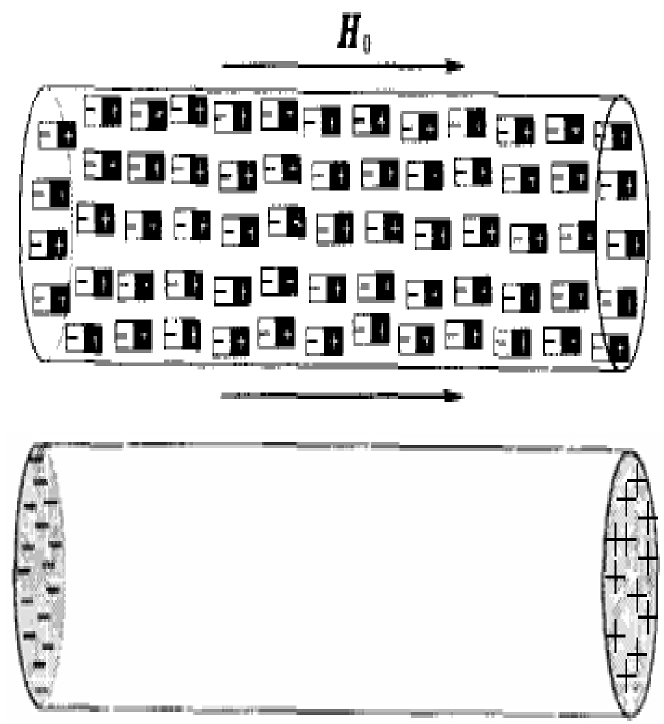
$$\vec{p}_m = q_m\vec{l}$$

磁偶极矩

- 末磁化时 $\vec{p}_{m分子} \neq 0$

  $\sum \vec{p}_{m分子} = 0$





- 磁化后在整个磁棒的两个端面上分别出现N、S极或者说＋、－磁荷 。

磁极化强度矢量*J*

定义： 单位体积内分子磁偶极矩的矢量和。

$$\vec{J}=\frac{\sum\vec{p}_{m分子}}{\Delta V}$$

未磁化时 $\sum\vec{p}_{m分子}=0 \quad \vec{J}=0$

有磁化场时 $\sum\vec{p}_{m分子}\neq 0$ $\vec{J}$ 是一个沿 $\vec{H}_0$ 方向的矢量

分子磁偶极矩$p_{分子}$定向排列的程度愈高，它们的矢量和的数值愈大，从而磁极化强度矢量*J*的数值就愈大。

2. 磁荷分布与磁极化强度矢量*J*的关系

与电介质中的极化强度矢量***P***比较，磁极化强度矢量***J*** 的通量为：

$$\oiint_{(S)} \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\sum_{(S内)} q_m \qquad \sigma_m = \frac{dq_m}{dS} = J\cos\theta = \vec{J}\cdot\vec{n} = J_n$$

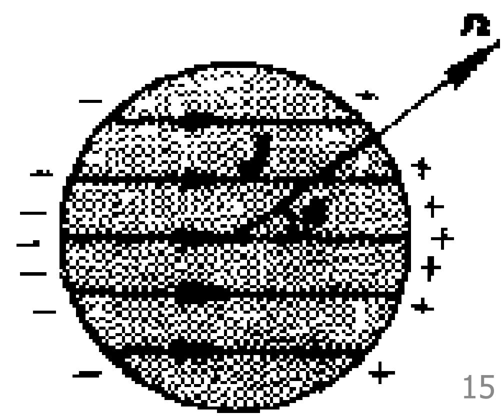
说明

- $\sum_{(S内)} q_m$ 包含在S内磁荷的代数和；
- σ_m 为磁介质表面上磁荷的面密度；
- $\vec{n}$ 是磁介质表面的单位外法向矢量；

举例：

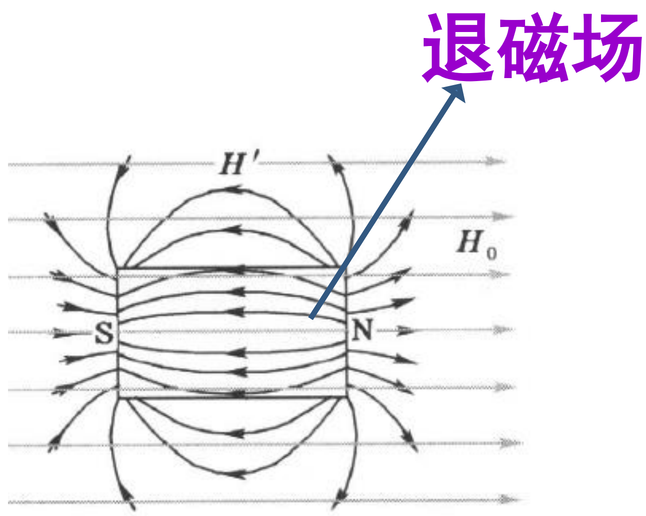
均匀磁化介质球上的磁荷的分布

$$\sigma_m = J\cos\theta$$



3. 退磁场

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \boxed{\vec{H}'}$$

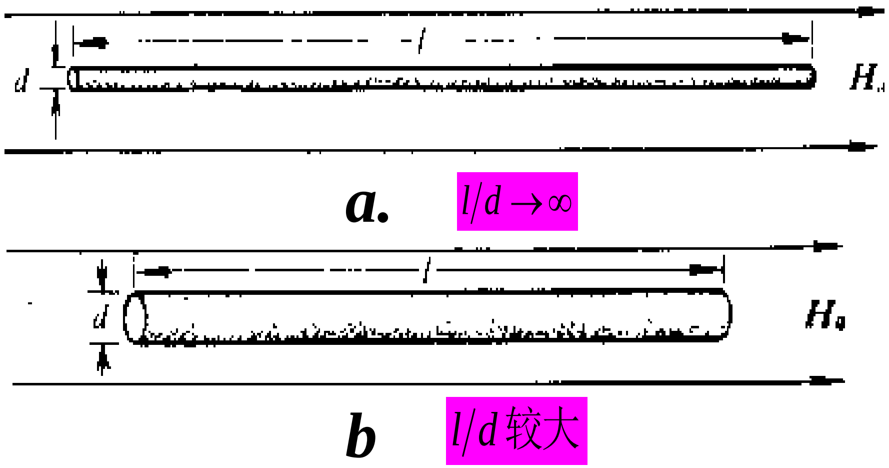


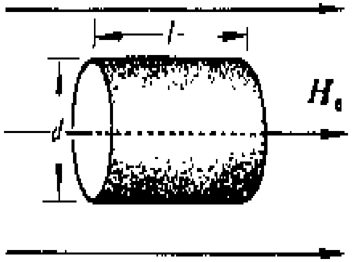
- 附加磁场 $\vec{H}'$ 的方向和大小各处不同；
- 退磁场的方向与磁化场的方向相反；
- 介质的磁化状态J取决于介质内总的磁场强度H；
- 退磁场越大，介质越不容易磁化，退磁场总是不利于介质磁化的。

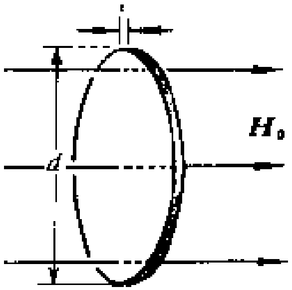
退磁场的大小

$\sigma_m = \vec{J} \cdot \vec{n}$

- 将右侧几根磁棒磁化到同样大小的 $\vec{J}$，从而端面上有同样的磁荷密度 $\pm\sigma_m$ 。
- 考虑棒中点附近的退磁场
- 细而长的磁棒，端面积小，总磁荷 $\pm q_m = \pm\sigma_m S$ 小，磁荷离中点远，中点附近的退磁场 $\vec{H}'$ 较弱
- 短而粗的磁棒则反之。







4. 退磁因子

$$\boxed{\sigma_m = J}$$

➢退磁场 $H' \propto \sigma_m \longrightarrow H' \propto J$

➢当*J*给定时，H'与棒的几何因素有关

$$H' = N_D J / \mu_0$$

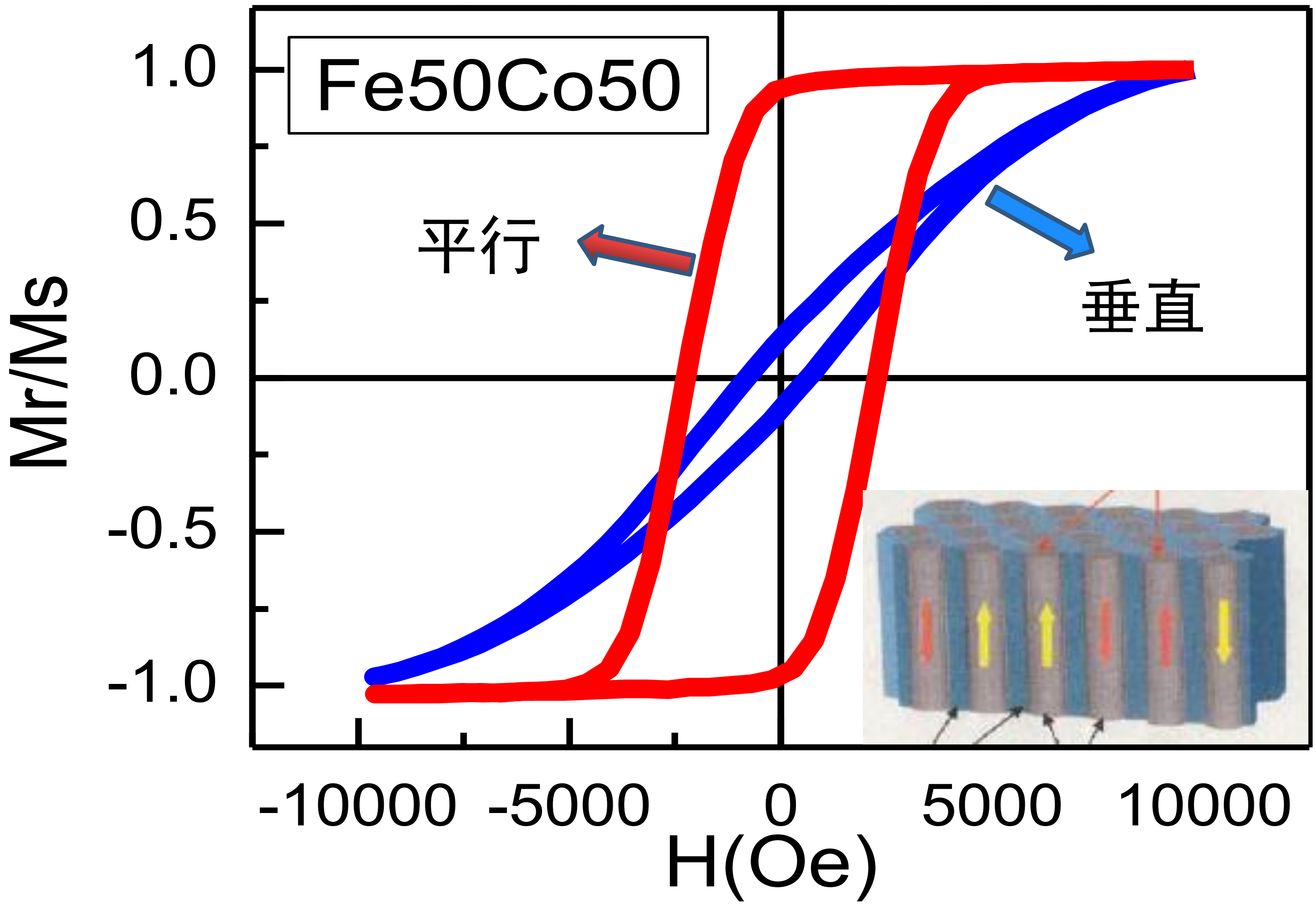
★N_D：退磁因子，是一个纯数，其大小由棒的几何因素*l*/*d* 决定。

★根据磁的库仑定律和叠加原理计算可得：

$$N_D = 1 - (l/d)\left[1 + (l/d)^2\right]^{-1/2}$$

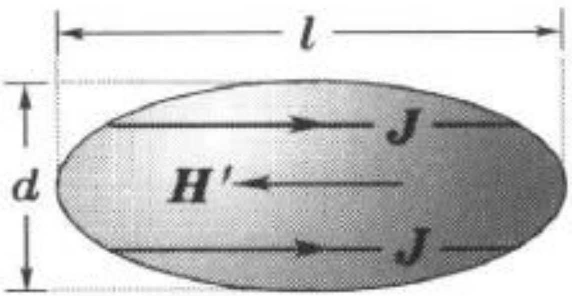
★N_D随*l*/*d*的增大而减小

平行和垂直纳米线阵列方向的磁滞回线



旋转椭球体退磁因子的计算

- 只有在均匀磁化的情形下退磁因子才有意义。
- 理论上证明，只有椭球形的磁介质才能在均匀外磁场中**均匀**磁化。



l/d	N_D	l/d	N_D
0.0	1.000000	5.0	0.055821
0.2	0.750484	20.0	0.006749
0.6	0.475826	100.0	0.000430
1.0	0.333333	1000.0	0.000007
2.0	0.173564	∞	0.000000

5. 磁荷观点下的安培环路定理 高斯定理

按磁荷观点，总磁场 $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'$

H_0是电流产生的，应由毕奥-萨伐尔公式决定

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{4\pi}\oint_{(L)} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{\vec{r}}_{12}}{r_{12}^2}$$

H_0满足的安培环路定理和高斯定理分别为

$$\oint_{(L)} \vec{H}_0 \cdot d\vec{l} = \sum_{(L内)} I_0 \qquad \oiint_{(S)} \vec{H}_0 \cdot d\vec{S} = 0$$

传导电流

$\vec{H}'$ 是磁荷产生的，服从库仑定律

$\vec{H}'$ 满足的安培环路定理和高斯定理分别为

$$\oint_{(L)} \vec{H}' \cdot d\vec{l} = 0 \qquad \oiint_{(S)} \vec{H}' \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{(S内)} q_m$$

$\vec{H}$ 满足的安培环路定理为

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \left(\vec{H}_0 + \vec{H}'\right) \cdot d\vec{l} = \sum_{(L内)} I_0 + 0 = \sum_{(L内)} I_0$$

$$\boxed{\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{(L内)} I_0}$$

6 磁感应强度矢量 $\vec{B}$

$$\oiint_{(S)} \vec{H}\cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} \left(\vec{H}_0 + \vec{H}'\right)\cdot d\vec{S} = 0 + \frac{1}{\mu_0}\sum_{(S内)} q_m = \frac{1}{\mu_0}\sum_{(S内)} q_m$$

由
$$\left.\begin{aligned} &\oiint_{(S)} \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\sum_{(S内)} q_m \\ &\oiint_{(S)} \vec{H}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\sum_{(S内)} q_m \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \oiint_{(S)} (\mu_0\vec{H} + \vec{J})\cdot d\vec{S} = 0$$

磁场的高斯定理

引入一个辅助物理量 $\vec{B}$ ⟹ **磁感应强度矢量**

定义 $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{J}$ ⟹ $\boxed{\oiint_{(S)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0}$

- 在真空中 $\vec{J} = 0$ $\quad \vec{B} = \mu_0\vec{H}$

7 磁化率和磁导率

电介质中极化强度***P***与电场强度***E*** 的关系

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$$

磁介质中引入磁极化强度***J*** 与磁场强度***H*** 的关系

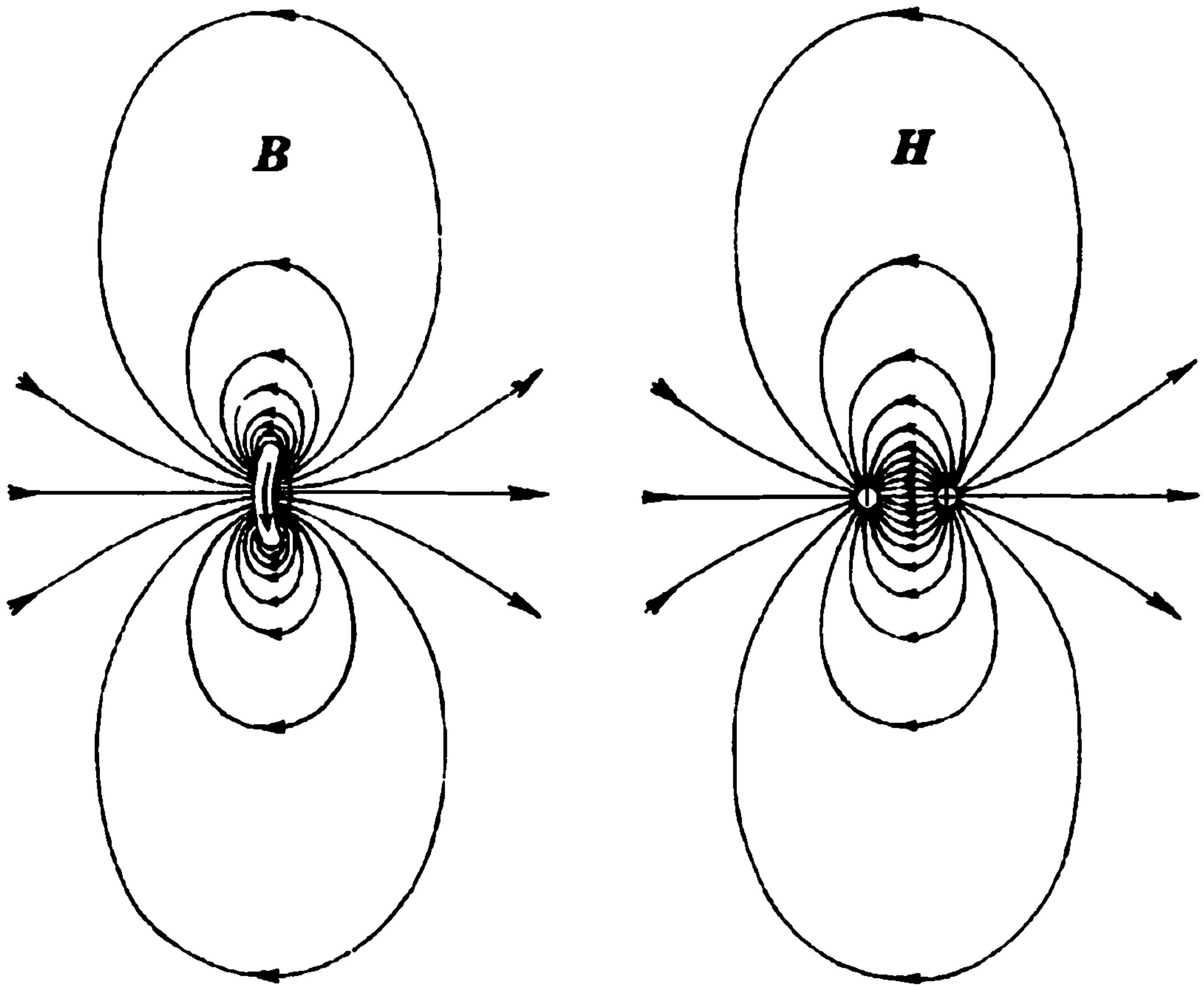
$$\vec{J}=\chi_m\mu_0\vec{H}$$

磁化率

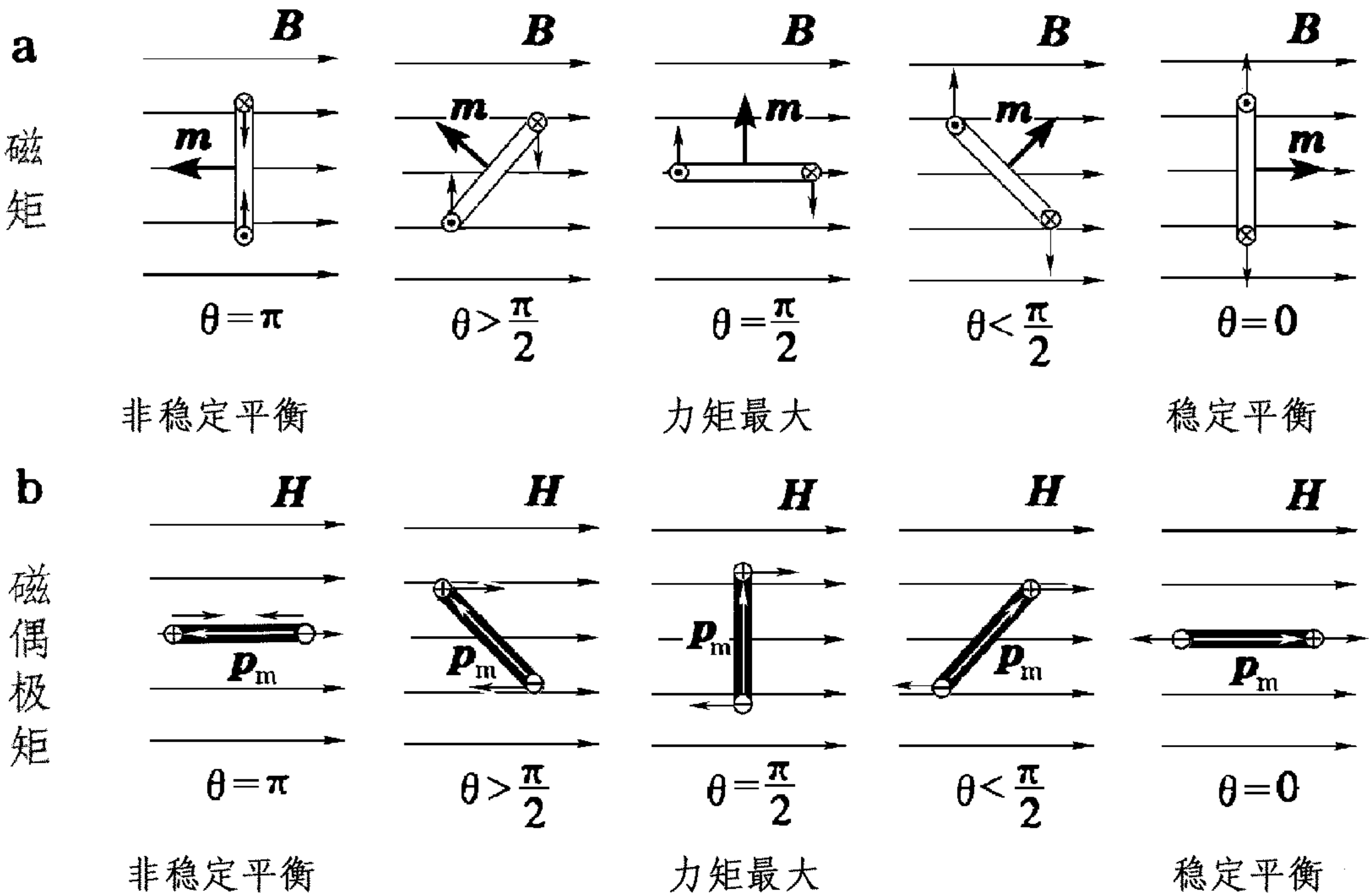
$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{J}=(1+\chi_m)\mu_0\vec{H}=\mu_r\mu_0\vec{H}$$

磁导率

电流环与磁偶极子的等效性



受力的等效性



a
磁矩
B
m
θ=π
θ>π/2
θ=π/2
θ<π/2
θ=0
非稳定平衡
力矩最大
稳定平衡
b
磁偶极矩
H
p_m
θ=π
θ>π/2
θ=π/2
θ<π/2
θ=0
非稳定平衡
力矩最大
稳定平衡

两种观点的等效性

- **有介质时的两种观点的场方程一样**

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 \qquad \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

磁荷观点中B的定义

只要在$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{J}$**中，**

承认$\vec{J} = \mu_0\vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$

分子电流观点中B的定义

$$\vec{J} = \mu_0\vec{M} = \mu_0\chi_m\vec{H} \Rightarrow \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}$$

磁荷观点中磁极化强度的定义

分子电流观点中磁化强度与磁场强度的关系

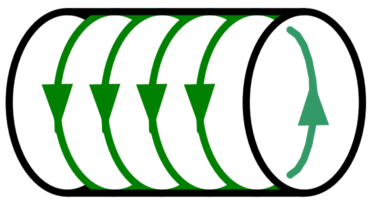
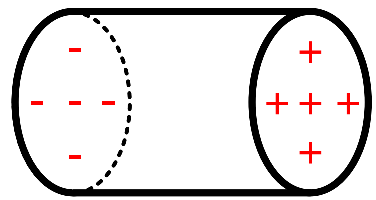
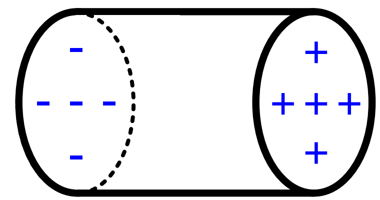
静电场和恒磁场类比（磁荷观点）

	静电场	磁荷观点
场强	$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$	$\vec{H}=\dfrac{\vec{F}}{q_{m0}}$
环路积分	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=0$
梯度	$\vec{E}=-\nabla U$	$\vec{H}=-\nabla U_m$
极化强度	$\vec{P}=\lim\limits_{\Delta V\longrightarrow 0}\dfrac{\sum \vec{p}_{分子}}{\Delta V}$	$\vec{J}=\lim\limits_{\Delta V\longrightarrow 0}\dfrac{\sum \vec{p}_{m分子}}{\Delta V}$
	$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$	$\vec{J}=\mu_0\chi_m\vec{H}$

$$\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}=-\sum_{S内} q' \qquad \sigma'=P_n$$

$$\oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=-\sum_{S内} q_m \qquad \sigma_m=J_n$$

基本规律的等效性

微观模型	分子环流	磁偶极子	电偶极子
磁化状态	磁化强度矢量 $\vec{M}$ $\vec{M}=\dfrac{\sum \vec{m}}{\Delta V}$	磁极化强度矢量 $\vec{J}$ $\vec{J}=\dfrac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}$	电极化强度矢量 $\vec{P}$ $\vec{P}=\dfrac{\sum \vec{p}_e}{\Delta V}$
宏观效果	 磁化电流	 磁荷	 极化电流
基本矢量	磁感应强度 $\vec{B}$ $Id\vec{l}$ 受力定义 $\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$	磁场强度 $\vec{H}$ q_m 受力定义 $\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}'$	电场强度 $\vec{E}$ q_e 受力定义 $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$
辅助矢量	磁场强度 $\vec{H}$ 定义$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$	磁感应强度 $\vec{B}$ 定义$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{J}$	电位移矢量$\vec{D}$ 定义$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$
高斯定理	$\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$		$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_0$
环路定理	$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_0$		$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$