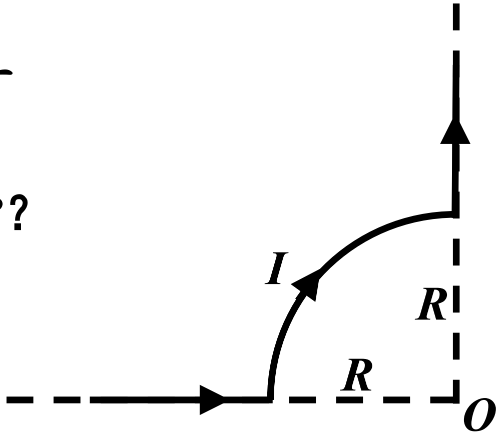
1．一条载有电流I的无穷长直导线，在一处弯折成半径为R的1/4圆弧，如图所示。试求这个1/4圆弧中心O点的磁感应强度B？



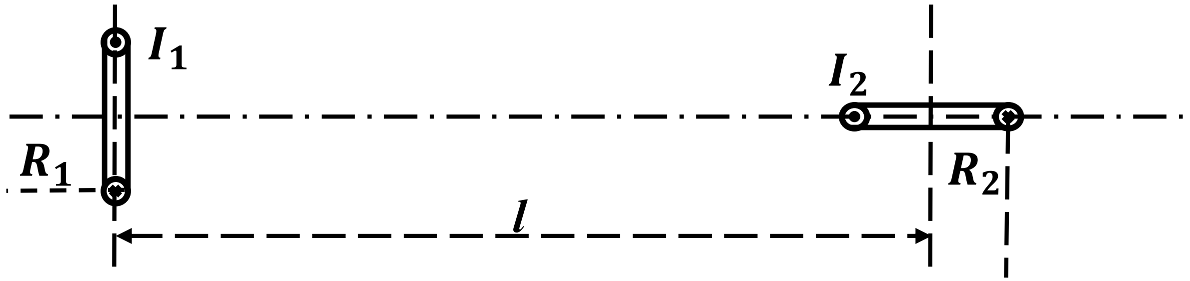
解：1）根据Biot-Savart定律，两直线部分的电流在O点产生的磁感应强度均为零；

2）1/4圆弧部分电流在O点产生的磁感应强度B的方向垂直纸面向里；

3）其大小为整个圆线圈产生的磁感应强度大小的1/4

$$B=\frac{1}{4}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

2. 两个圆线圈的半径分别为R_1和R_2，所载电流分别为I_1和I_2，圆心相距为l，线圈2的直径在线圈1的轴线上，如图所示。当l比R_1和R_2都大很多时，试求I_1作用在线圈2上的力矩？



解：圆电流I_1在轴线上距离圆心为l处产生的磁感应强度为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2(l^2+R_1^2)^{3/2}}\vec{e}_1$$

$\vec{e}_1$表示电流I_1右手旋进方向上的单位矢量。令$l \gg R_1$可得近似公式

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2l^3}\vec{e}_1$$

又由于$l \gg R_2$，在线圈2处可以认为$\vec{B}$是匀强磁场，于是作用在线圈2上的力矩为

$$\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}=I_2\cdot\pi R_2^2\cdot\vec{e}_2\times\frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2l^3}\vec{e}_1=\frac{\pi\mu_0 I_1 I_2 R_2^2 R_1^2}{2l^3}\vec{e}_2\times\vec{e}_1$$

其中$\vec{e}_2$表示电流I_2右手旋进方向上的单位矢量。

3. 两个均匀带电的金属同心球壳，内球壳半径为R_1, 带电量q_1，外球壳半径为R_2带电量为q_2，试求两球壳之间任意一点$P(R_1 < r < R_2)$的场强与电势？

解：(1) 由高斯定理$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$, 选择半径为$r$的球面为高斯面，则对点$P(R_1 < r < R_2)$有

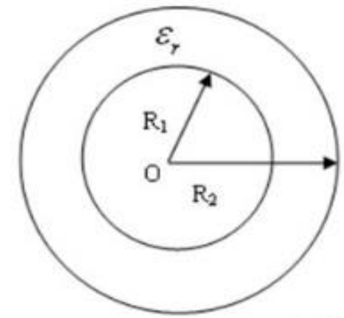
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

(2) 电势叠加法$U_P = U_1 + U_2$

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad U_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2}\right)$$

4. 在半径为R_1的金属球之外有一层半径为R_2的均匀介质层，设介质的相对介电常数为ε_r，金属球带电量为$+Q$，试求（1）介质层外的D，E，P；（2）介质层内外表面极化电荷面密度？



解:应用高斯定理，选半径为r的同心球面为高斯面，

1）当$r < R_1$时，因为是导体内部，有$\vec{D} = 0$，$\vec{E} = 0$，$\vec{P} = 0$.

当$R_1 < r < R_2$时，$4\pi r^2 D = Q$, 故

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}, \qquad \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

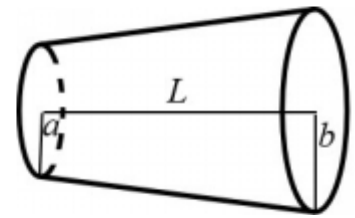
当$r > R_2$时，$4\pi r^2 D = Q$，$\varepsilon_r = 1$故

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, \qquad \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = 0$$

2) 由$\sigma' = \left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \cdot \hat{n}_{21}$

$$\sigma'_{in} = -P(R_1) = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r \mathrm{R}_1{}^2}, \qquad \sigma'_{out} = P(R_2) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r \mathrm{R}_2{}^2}$$

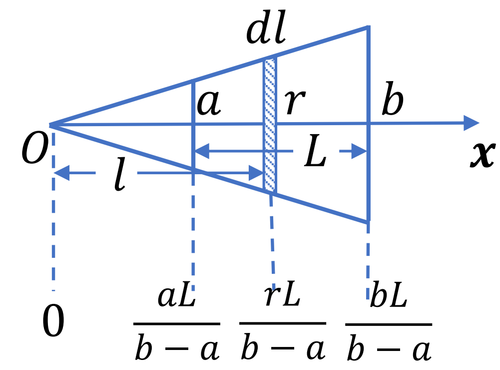
5. 如图所示，用电阻率为ρ的金属制成一根长度为L，底面半径分别为a和b的锥台形导体，计算其沿长度方向通电流时的电阻大小？



解：用电阻串联公式：

$$\boldsymbol{R=\int dR=\int \rho\frac{dl}{S}}$$

建立如图所示坐标系，可以确定上述积分的积分限

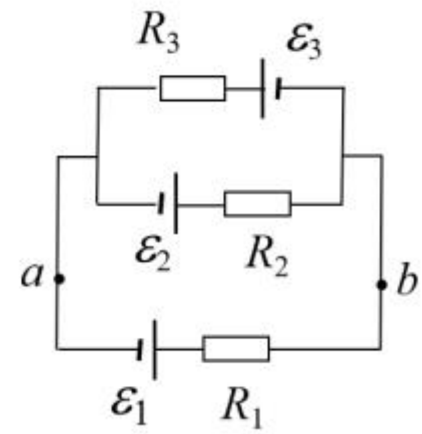


$$l=\frac{rL}{b-a}\rightarrow r=\frac{(b-a)}{L}l$$

$$\boldsymbol{R=\int dR=\int \rho\frac{dl}{S}=\rho\int_{\frac{aL}{b-a}}^{\frac{bL}{b-a}}\frac{1}{\pi r^2}dl=\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{L^2}{(b-a)^2}\int_{\frac{aL}{b-a}}^{\frac{bL}{b-a}}\frac{1}{l^2}dl}$$

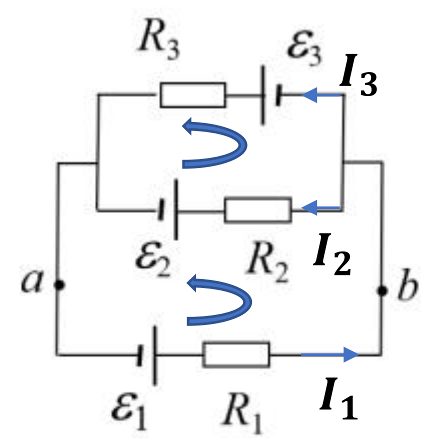
$$\boldsymbol{=\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{L^2}{(b-a)^2}\cdot\left(-\frac{1}{l}\right)\Bigg|_{\frac{aL}{b-a}}^{\frac{bL}{b-a}}=\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{L}{ab}}$$

6. 一电路如图所示，已知$\varepsilon_1 = 3\,V, \varepsilon_2 = 1.4\,V,$ $\varepsilon_3 = 2.2\,V, R_1 = 1.5\,\Omega, R_2 = 2.0\,\Omega, R_3 = 1.4\,\Omega$, 电源的内阻都已分别计算在$R_1, R_2$和$R_3$内，请计算各支路电流，并求出图中$a$，$b$两点的电势差$U_a - U_b$?



解：列基尔霍夫方程组：1)假设电流方向，2）回路绕行方向；

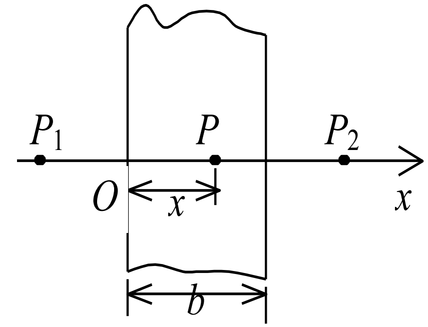
$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$I_1R_1 + I_2R_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0$$
$$-I_2R_2 - \varepsilon_3 + I_3R_3 - \varepsilon_2 = 0$$



代入数值解得：$I_1 = 1.6\,A,\ I_2 = -0.4\,A,\ I_2 = 2\,A$

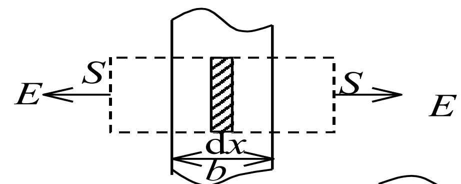
$$U_a - U_b = -\varepsilon_1 + I_1R_1 = -\varepsilon_2 - I_2R_2$$
$$= -3\,V + 2.4\,V = -1.4\,V + 0.8\,V = -0.6\,V$$

7. 如图所示，一厚为b的“无限大”带电平板，其电荷体密度分布为：$\rho = kx, (0 \le x \le b)$，式中$k$为一正的常量。求：(1) 平板外两侧任一点$P_1$和$P_2$处的电场强度大小；(2) 平板内任一点$P$处的电场强度；(3) 场强为零的点在何处？



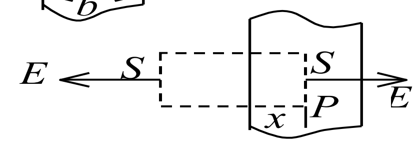
解：(1) 由对称性分析知，平板两侧场强大小处处相等、方向垂直于平面且指向背离平面的方向，可以设电场强度为$\vec{E}$；

考虑位置x处，厚度为dx的微元平板，做底面大小为S的高斯面，如图所示，



由高斯定理知微平板两侧P_1和P_2处的电场强度大小为

$$2SdE = \frac{kx \cdot S \cdot dx}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$



(2) 过P点做如图所示的高斯面，则由高斯定理

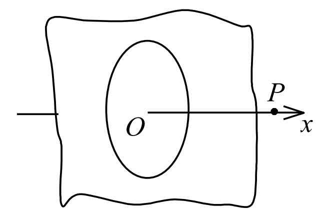
有

$$ES + E_P S = \frac{kS}{\varepsilon_0}\int_0^x x\,dx = \frac{kSx^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E_P = \frac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2 - \frac{b^2}{2}\right), (0 \le x \le b)$$

带入具体的x的值，如果为正表示方向向右，为负表示方向向左。

(3) $E_P = \frac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2 - \frac{b^2}{2}\right) = 0$，可以解得$x = b/\sqrt{2}$

8. 如图所示，一‘无限大’平面，中部有一半径为R的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为σ。试求通过小孔中心并与平面垂直的直线上某个点P的场强和电势（选O点的电势为零）？



解：将题中的电荷分布看作是面密度为σ的无限大平面和面密度为$-\sigma$半径为R厚度与平面相等的圆盘叠加的结果。

以O点为原点，建立如图所示x轴垂直于平面的坐标轴，则无限大平面在x处产生的电场为$\vec{E}_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$

圆盘在x处产生的电场为$\vec{E}_2=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right)\hat{x}$

故所求电场为$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\hat{x}$

所求电势为

$$U=\int_x^0\vec{E}\,dx=\int_x^0\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}dx\Rightarrow U=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R-\left(R^2+x^2\right)^{1/2}\right)$$