教学参考

常微分方程的通解*

钱明忠 陈友朋 （盐城师范学院数学科学学院 江苏盐城 224002）

摘 要 给出常微分方程通解的定义，研究常微分方程的通解和所有解之间的关系，给出通解包含所有解的若干充分性条件.

关键词 通解；常数独立；所有解 **中图分类号** O175.1

常微分方程的通解和所有解是两个不同的概念，但不少教材未将这两个概念说清楚，甚至于将两者混淆起来，例如文献[1][2]等，给学生理解和求解常微分方程带来了困难. 事实上，有些方程的通解就不包含所有解. 例如方程$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$的通解为$\arcsin y=\arcsin x+C$，其中$C$为任意常数，而$y=1$也是该方程的解，它不包含在通解之中；又如$y=0$是方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2$的一个解，它不包含在该方程的通解$y=\frac{x}{\ln|x|+C}$（$C$为任意常数）之中.

本文将给出常微分方程通解的定义，同时研究常微分方程的通解和所有解之间的关系，然后给出通解包含所有解的若干充分性条件，证明过程突出通解定义中的“常数独立”条件的验证这一关键，为进一步区分通解和所有解带来了方便.

考虑如下一般的n阶常微分方程

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})=0. \tag{1}$$

定义 若函数$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$是方程(1)的解，且其中的任意常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$独立，即，$\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}$关于$c_1,c_2,\cdots,c_n$的雅可比(Jacobi)行列式

$$\frac{D(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{D(c_1,c_2,\cdots,c_n))}\neq 0,$$

其中$\varphi^{(k)}(k=1,2,\cdots,n-1)$表示$\varphi$对$x$的$k$阶导数. 则称$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$为常微分方程(1)的通解. 如果关系式$\Phi(x,y,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$所确定的隐函数$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$为方程(1)的通解，则称关系式$\Phi(x,y,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$为方程(1)的隐式通解，也简称为方程(1)的通解.

对于一般的常微分方程，其通解不一定包含所有解而仅仅是所有解的一部分. 但在一些特殊情形下，方程的通解包含它的所有解. 例如，n阶线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x), \tag{2}$$

其中$a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$及$f(x)$为区间$[a,b]$上的已知连续函数，则有如下结论：

定理 1 设$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$为方程(2)所对应的齐次线性方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0$$

* 收稿日期：2006－02－08；修改稿：2007－05－25.

的基本解组，$\bar{y}(x)$ 为方程(2) 的一个特解，则方程(2) 的通解为

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + \bar{y}(x), \tag{3}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数，且通解(3) 包含了方程(2) 的所有解.

证明　由线性方程解的叠加原理知，(3) 式是方程(2) 的解，又雅可比行列式

$$\frac{D(y, y', \cdots, y^{(n-1)})}{D(c_1, c_2, \cdots, c_n)} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1{}'(x) & y_2{}'(x) & \cdots & y_n{}'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1{}^{(n-1)}(x) & y_2{}^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n{}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)] \neq 0, \quad x \in [a, b].$$

所以(3) 式中的任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 相互独立，从而(3) 式为方程(2) 的通解.

关于(3) 式包含方程(2) 的所有解的结论，可以利用线性微分方程初值问题解的存在唯一性定理进行证明，可参见文献[3]，这里从略.

如果微分方程为一阶方程，且可以写成如下对称形式

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{4}$$

其中 $M(x, y), N(x, y)$ 在(4) 无奇点的单连通区域 D 内连续可微. 所谓无奇点是指在 D 中

$$M^2(x, y)\mathrm{d}x + N^2(x, y)\mathrm{d}y \neq 0.$$

定理 2　如果方程(4) 为全微分方程，即存在二元连续可微函数 $u(x, y)$ 使

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}u(x, y),$$

则此时方程(4) 的通解为 $u(x, y) = C$，其中 C 为任意常数，且通解包含了方程(4) 的所有解.

证明　不妨设 $N(x, y) \neq 0$ 即 $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$，根据隐函数存在定理，关系式 $u(x, y) = C$ 可唯一确定一个隐函数 $y = \varphi(x, C)$，则有 $u[x, \varphi(x, C)] \equiv 0$，两边关于 x 求微分得 $\mathrm{d}u[x, \varphi(x, C)] \equiv 0$. 即

$$M[x, \varphi(x, c)]\mathrm{d}x + N[x, \varphi(x, c)]\mathrm{d}\varphi(x, c) \equiv 0.$$

这表明 $y = \varphi(x, C)$ 为全微分方程(4) 的解，又由隐函数的可微性定理.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{1}{N(x, y)} \neq 0,$$

所以 $y = \varphi(x, C)$ 中的任意常数 C 是独立的，从而 $y = \varphi(x, C)$ 为方程(4) 的通解，即 $u(x, y) = C$ 为方程(4) 的通解. 设 $y = \psi(x)$ 为方程(4) 的任一解，则有

$$M[x, \psi(x)]\mathrm{d}x + N[x, \psi(x)]\mathrm{d}\psi(x) \equiv 0.$$

上式两边关于 x 积分得 $u[x, \psi(x)] \equiv u[x_0, \psi(x_0)] = C_0$，即 $y = \psi(x)$ 包含在通解 $u(x, y) = C$ 中，再由 $y = \psi(x)$ 的任意性知，通解 $u(x, y) = C$ 包含了方程(4) 的所有解.

文[4] 在 $M(x, y), N(x, y)$ 连续可微的条件下，证明了方程(4) 在其无奇点的单连通闭区域 $\bar{D}$ 的内部存在连续可微的积分因子，因而对称形式的一阶微分方程(4) 可以通过乘上积分因子 $\mu(x, y)$ 而化成全微分方程，即存在 $u(x, y)$ 使 $\mu(x, y)[M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y] \equiv \mathrm{d}u(x, y)$. 但必须指出，在方程(4) 的两端乘上积分因子 $\mu(x, y)$ 之后，可能在新的系数 $\mu(x, y)M(x, y)$ 和 $\mu(x, y)N(x, y)$ 中引进了新的不连续性，减少了原方程的解，也可能引进多余的解，这种解并不是原方程(4) 的解，而只是代表 $\mu(x, y) = 0$ 的曲线. 因此必须检查积分因子对于微分方程解的影响，研究是否丢失或增加解.

推论　若一阶常微分方程(4) 的积分因子 $\mu(x, y)$、$\frac{1}{\mu(x, y)}$ 在 D 中处处不等于零，设

$$\mu(x, y)[M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y] = \mathrm{d}u(x, y),$$

则方程(4) 的通解为 $u(x,y)=C$. 这里 C 为任意常数，且通解包含了方程(4) 的所有解.

如果方程不显含未知函数及其直到 $k-1$ 阶导数 $y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}x^{k-1}}$，即方程呈形状

$$F(x,\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n})=0,\quad (1\leqslant k\leqslant n.) \tag{5}$$

则通过作变量变换

$$z=\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}, \tag{6}$$

可将方程(5) 降低 k 阶而成为关于 x,z 的 $n-k$ 阶方程

$$F(x,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-k}y}{\mathrm{d}x^{n-k}})=0,\quad (1\leqslant k\leqslant n.) \tag{7}$$

定理 3 设方程为 $y^{(n)}=f(x)$，积分 n 次得

$$y=\underbrace{\int\cdots\int}_{n\text{重}} f(x)\underbrace{\mathrm{d}x\cdots\mathrm{d}x}_{n\text{重}}+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_{n-1}x+C_n\overset{\Delta}{=\!=}\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n),$$

则 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的通解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数，且通解包含了方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的所有解.

证明 由通解的定义容易验证 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的通解，且通解包含了方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的所有解. 证明从略.

定理 4 假设 $z=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$ 是方程(7) 的通解，而 $y=\psi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是方程 $y^{(k)}=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$ 经 k 次积分而得到的函数，$C_{n-k+1},\cdots,C_n$ 为积分常数，则 $y=\psi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是方程(5) 的通解，且若 $z=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$ 包含了方程(7) 的所有解，则 $y=\psi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 也包含了方程(5) 的所有解.

证明 由定理 3 知，$y=\psi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是方程 $y^{(k)}=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$ 的解，又 $z=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$ 为方程(7) 的解，则 $y=\psi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是方程(5) 的解，而由定理 3 还知，$y=\psi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为方程 $y^{(k)}=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$ 的通解，则

$$\psi^{(k)}(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k}),$$

且

$$\frac{D(\psi,\psi',\cdots,\psi^{(k-1)})}{D(C_{n-k+1},C_{n-k+2},\cdots,C_n)}\neq 0,$$

又 $z=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$ 为方程(7) 的通解，则雅可比行列式 $\frac{D(\psi,\psi',\cdots,\psi^{(k-1)})}{D(C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})}\neq 0$，于是

$$\frac{D(\psi,\psi',\cdots,\psi^{(k-1)})}{D(C_1,C_2,\cdots,C_n)}=(-1)^{(n-k)k}\frac{D(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-k-1)})}{D(C_1,C_2,\cdots,C_{(n-k)})}\cdot\frac{D(\psi,\psi',\cdots,\psi^{(k-1)})}{D(C_{(n-k+1)},C_{(n-k+2)},\cdots,C_n)}\neq 0.$$

则 $y=\psi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 中的任意常数 $x,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 独立，从而 $y=\psi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为方程(5) 的通解，又由定理 3 及方程(5) 与方程(7) 在变量变换(6) 之下的等价性容易证明定理的后一个结论. 证毕.

参考文献

[1] 刘志汉. 常微分方程(第 2 版). 西安：陕西师大出版社，1987.

[2] 东北师大数学系. 常微分方程. 北京：高等教育出版社，1982.

[3] 王高雄等. 常微分方程(第 3 版). 北京：高等教育出版社，2006.

[4] 黄吉祥. 方程 $f(x,y)\mathrm{d}x+g(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的首次积分的存在性. 华东师范大学学报(自)，1996(4).