§ 5.1-5.2

一、法拉第电磁感应定律

1. 法拉第电磁感应定律

2. 楞次定律

3. 电磁感应定律的实例

（涡电流，电磁阻尼，趋肤效应）

二、动生电动势

三、感生电动势

一、法拉第电磁感应定律

1. 法拉第电磁感应定律

当穿过回路的磁通量发生变化时，回路中就产生感应电动势，回路中感应电动势的大小与穿过回路磁通量随时间的变化率成正比。

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

2. 楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使得感应电流所激发的磁场阻碍引起感应电流的磁通量的变化。

单选题 1分

设置

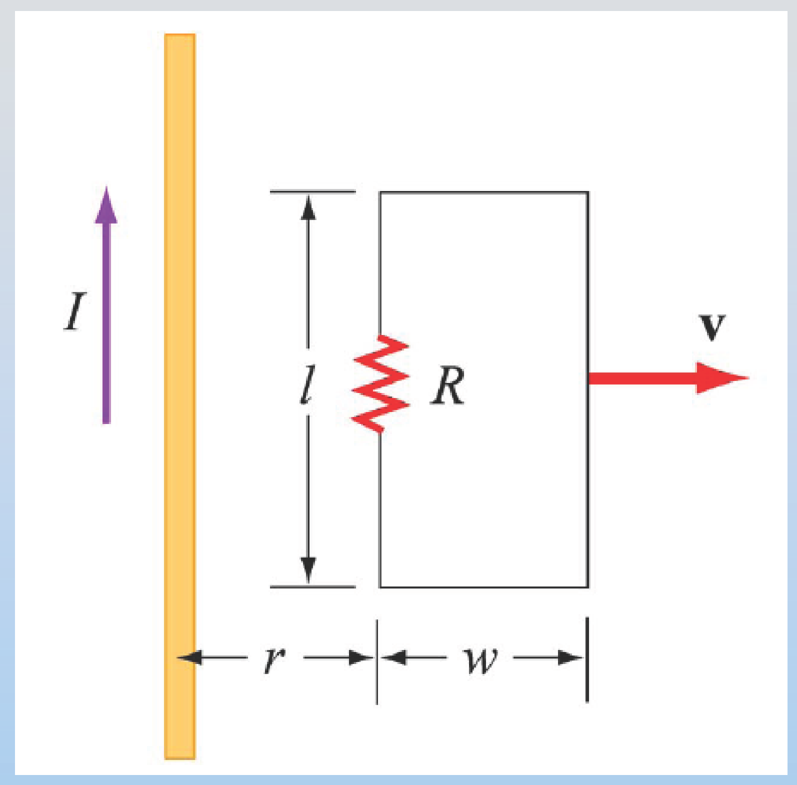
在通有恒定电流I的导线旁边有一个正方形回路向右运动，此时回路中感应电流的方向为

A 顺时针

B 逆时针

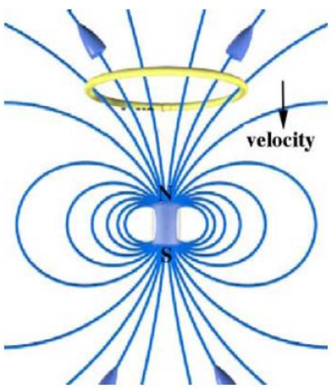
C 无电流

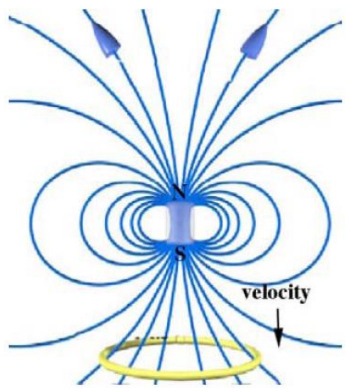
D 不确定

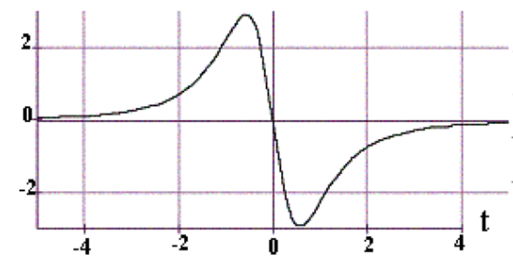


提交

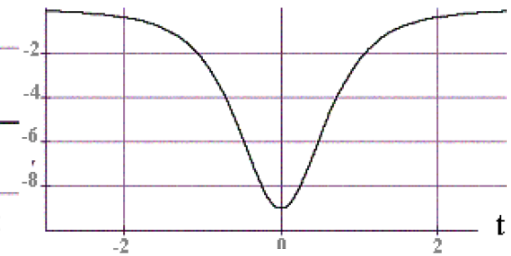
如图所示，一磁铁竖直放置，北极朝上，假设让一线圈匀速从磁铁上方运动到下方，下图中能描述磁通随时间的变化的是 [填空1]，能描述线圈中电流随时间变化的是 [填空2] 。（规定线圈法向：朝上，从南极指向北极）



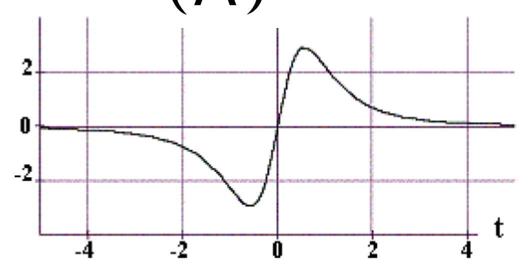




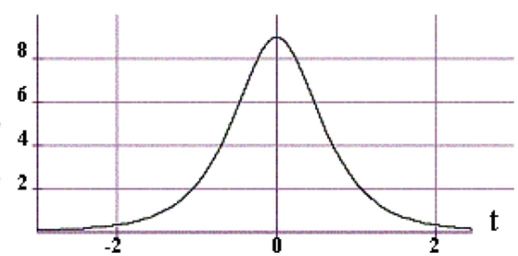
(A)



(B)



(C)



(D)

作答

多选题 10分

设置

将一条形磁铁插入一闭合导体线圈中，一次迅速插入，另一次缓慢插入，两次插入的前后位置相同，则下列说法中正确的是（　　）

A 两次插入过程中线圈中产生感应电流相同

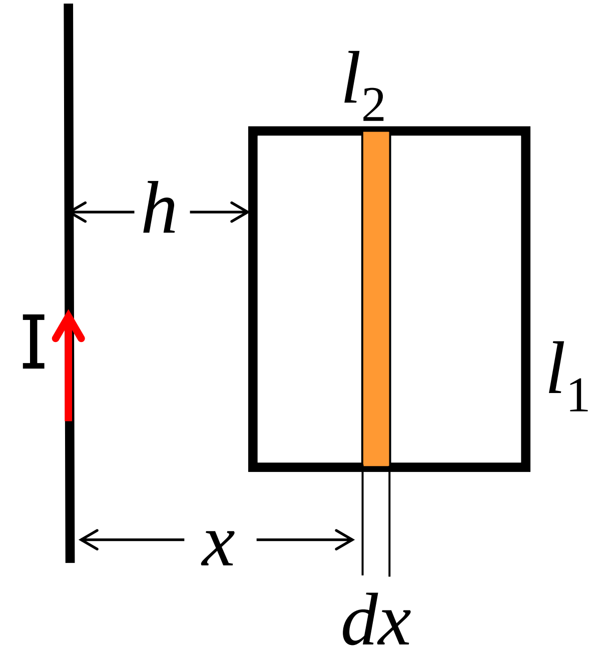
B 两次插入过程中线圈中的电荷总流量相同

C 两次插入过程中外力所做的功相同

D 两次插入过程中线圈中产生的热量不同

提交

例1：在通有电流为I=$I_0\sin\omega t$的长直导线附近有一矩形线圈（长宽分别为l_1，l_2，距离导线为h），求线圈中感应电动势的大小。



解：取面元，求磁通

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{dS} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l_1 dx$$

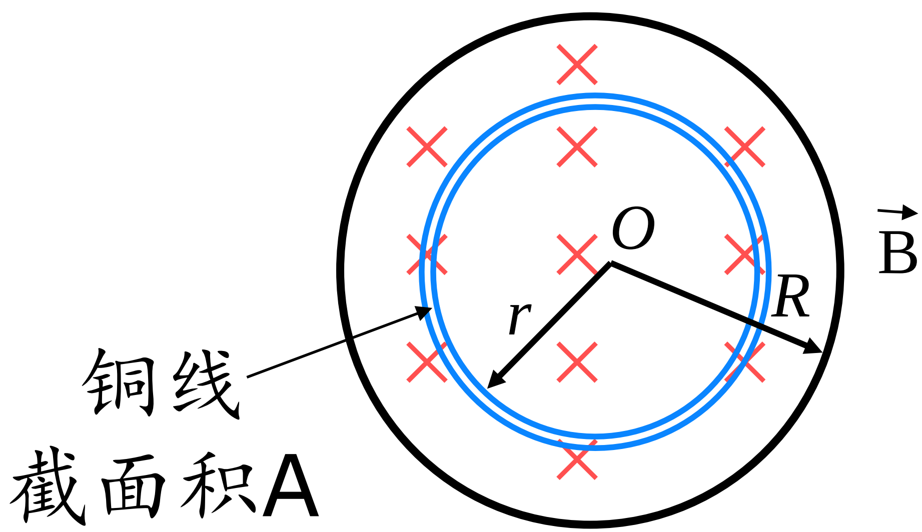
$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_h^{h+l_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l_1 dx = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \ln \frac{h+l_2}{h}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I_0 l_1 \omega}{2\pi} \ln \frac{h+l_2}{h} \cos\omega t$$

例2、长直螺线管内磁场均匀分布方向如图，螺线管圆截面半径为R，如磁场是变化的且$dB/dt=k$，k为常数且$k>0$。有一块质量为m的铜，用它拉成粗细均匀的导线，做成一半径为r 的圆形回路，放置于磁场中，如图所示。已知铜的质量密度为δ，电阻率为ρ。

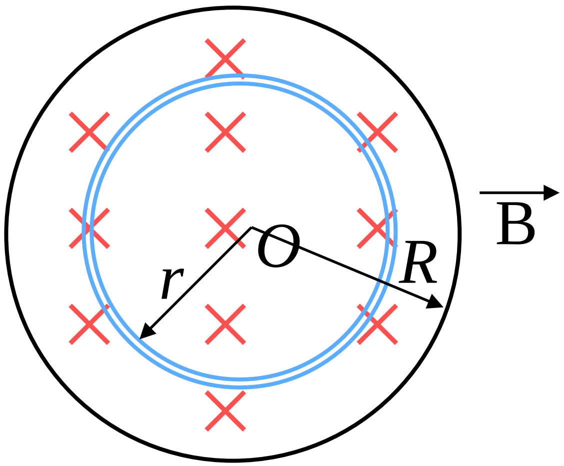
求：回路中感应电流 I 。

$I \rightarrow \varepsilon/R$



解：由法拉第电磁感应定律可知

感应电动势的方向为逆时针，



$$\varepsilon_i = \frac{d(BS)}{dt} = k\pi r^2$$

$$\because m = \delta \cdot 2\pi r \cdot A \quad \therefore A = \frac{m}{\delta \cdot 2\pi r}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{\rho \cdot 4\pi^2 r^2 \delta}{m}$$

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{km}{4\pi\delta \cdot \rho}$$

$$\varepsilon_D = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

二、 动生电动势

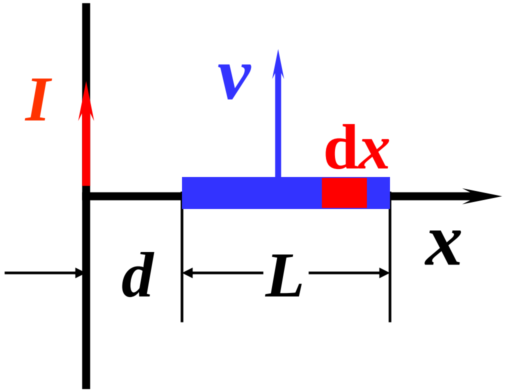
- 分析各种产生感应电动势的现象

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\vec{\mathrm{B}} \cdot \vec{\mathrm{S}})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(BS\cos\theta)}{\mathrm{d}t}$$

- 感应电动势可分为以下两类

Φ变
- B不变（均匀磁场）
  - θ不变S变
  - S不变θ变
  - ---动生
- B变
  - θ、S不变 ----感生
  - θ不变S变
  - S不变θ变
  - θ、S均变
  - --动生+感生

例3：金属杆以速度v平行于长直导线移动，求杆中的感应电动势多大，哪端电势高？



解:建立坐标系如图，取积分元dx，

由安培环路定理知在dx处磁感应强度为：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

因为：$\vec{v}\perp\vec{B}$ ； $\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)//-\vec{i}$

dx处动生电动势为

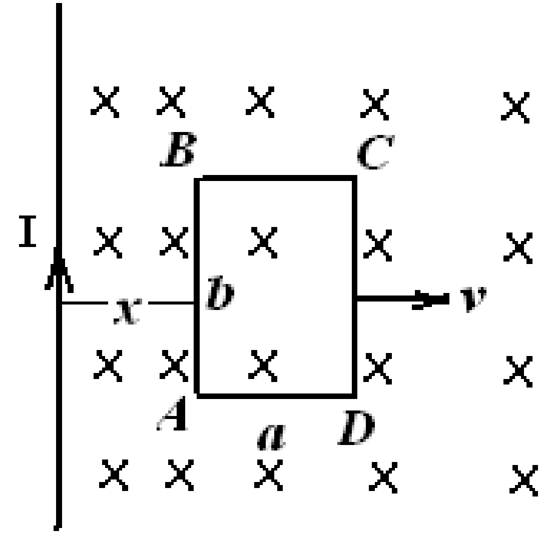
$$\mathrm{d}\varepsilon=\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi x}\mathrm{d}x$$

金属杆电动势

$$\varepsilon_{\mathrm{L}}=\int_d^{d+L}-\frac{\mu_0 I v}{2\pi x}\mathrm{d}x=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$$

式中负号表明左端电势高。

- **例4：一长直导线载有电流I，旁边有一与它共面的矩形线圈，线圈的长边与直导线平行，矩形线圈的边长分别为*a*、*b*，线圈共有*N*匝，若线圈以速度*v*匀速离开直导线，求当矩形线圈与长直导线近的一边相距为*x*时，线圈中的感应电动势的大小和方向。**



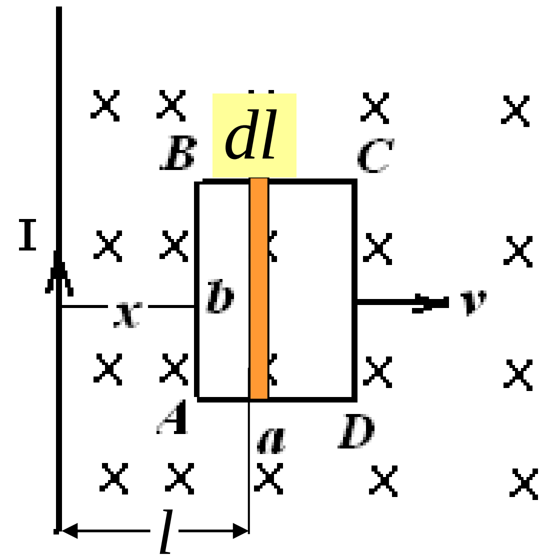
解：用动生电动势定义式求

$$\varepsilon_{AB}=\int_A^B(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}})\cdot \mathrm{d}\vec{l}\ =vB_{(x)}b\ =\frac{\mu_0 I}{2\pi x}bv$$

$$\varepsilon_{CD}=\int_C^D(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}\ =-vB_{(x+a)}b=-\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)}bv$$

$$\varepsilon=N(\varepsilon_{AB}+\varepsilon_{CD})=\frac{\mu_0 NIbav}{2\pi x(x+a)}$$

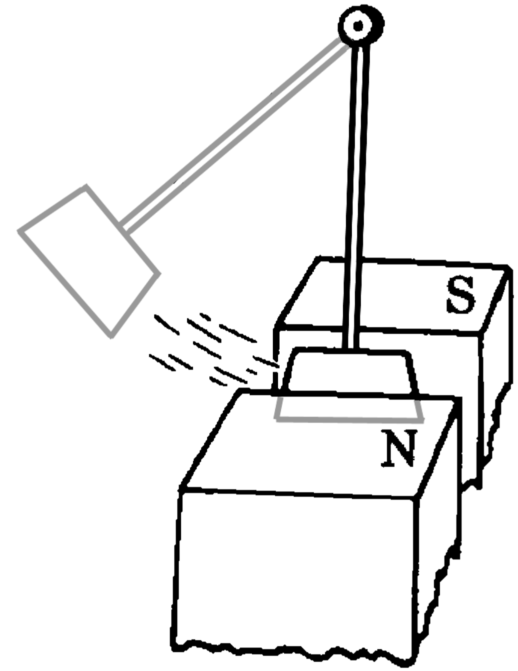
用法拉第电磁感应定律求解



$$\Phi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi l} b dl = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

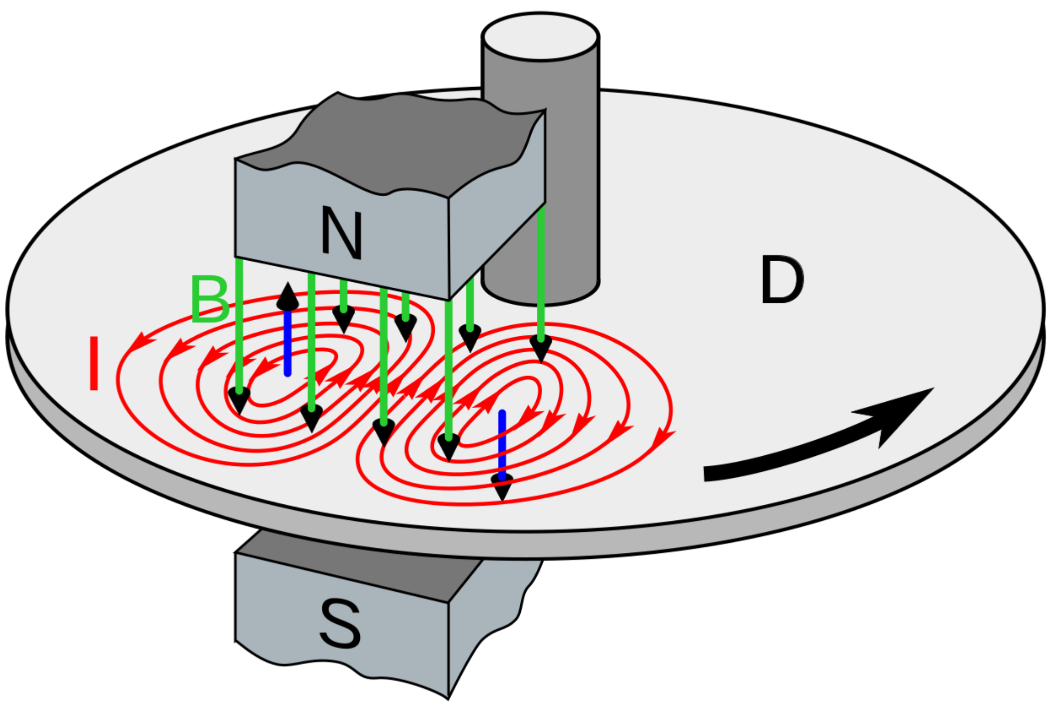
$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \frac{d}{dt}\left(\ln \frac{x+a}{x}\right) = \frac{\mu_0 N I b a}{2\pi x(x+a)} v$$

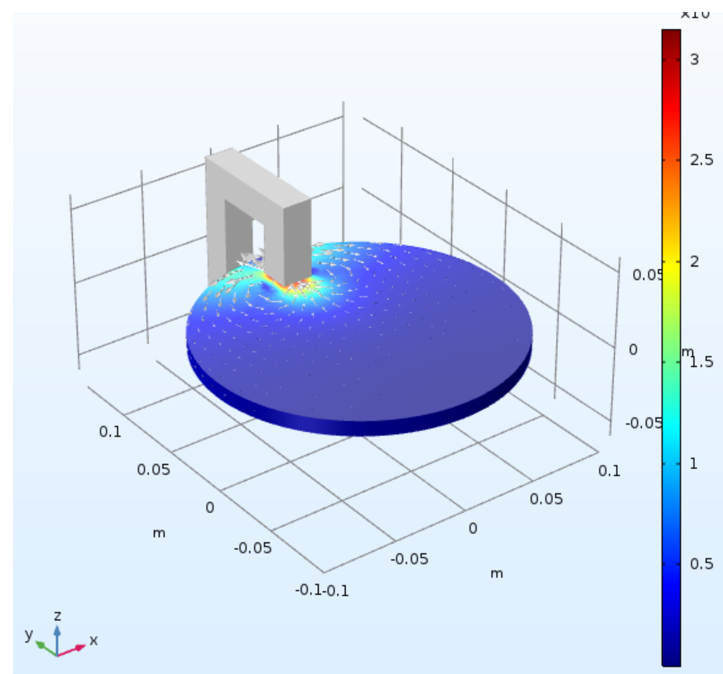
电磁阻尼



涡电流在磁场中所受到安培力

——电磁阻尼





电磁阻尼的阻尼力和下列哪些因素有关?

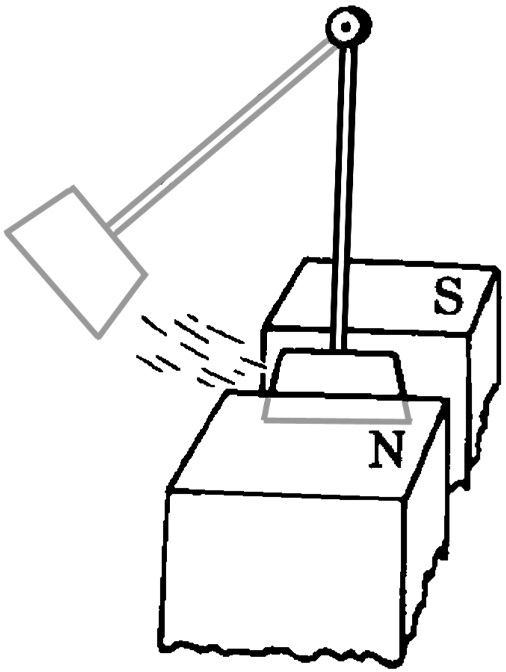
A 金属片的电阻率

B 金属盘片的面积

C 金属盘片的厚度

D 外磁场的大小

E 盘片摆动速度

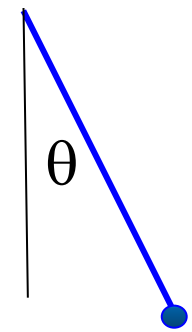


提交

电磁阻尼建模

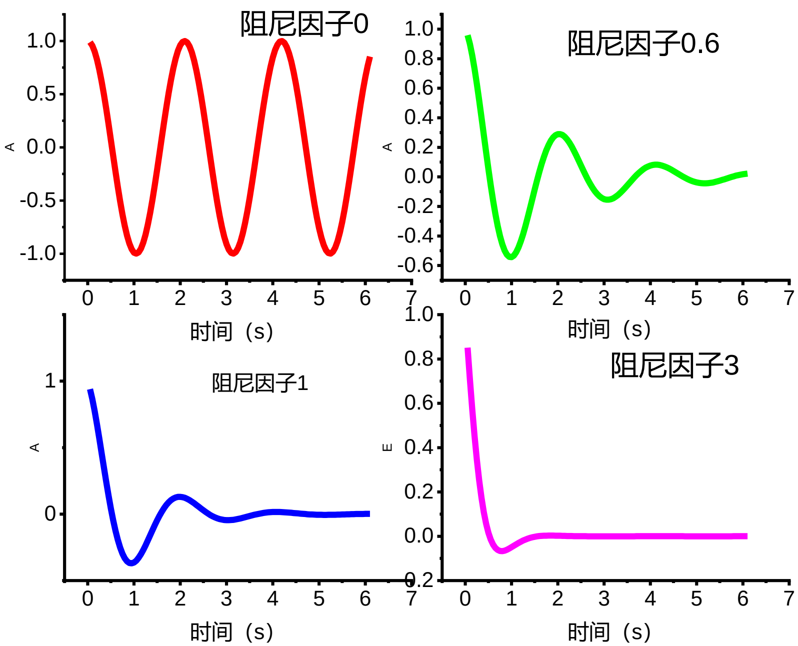
- **单摆的阻尼方程：**

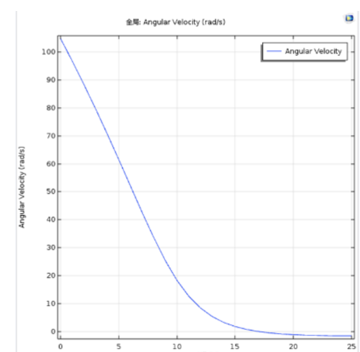
$$-mg\sin\theta-\varepsilon v=ma_t=mL\frac{d^2\theta}{dt^2}\qquad\left(f_{阻尼}=-\varepsilon v\right)$$



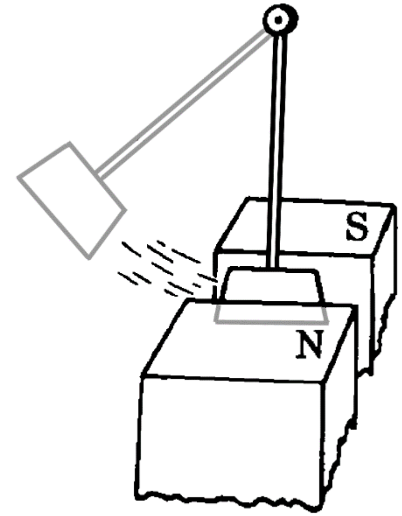
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\beta\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{L}\theta=0\qquad\beta=\frac{\varepsilon}{m},$$

方程解为： $\theta=\theta_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\phi)$





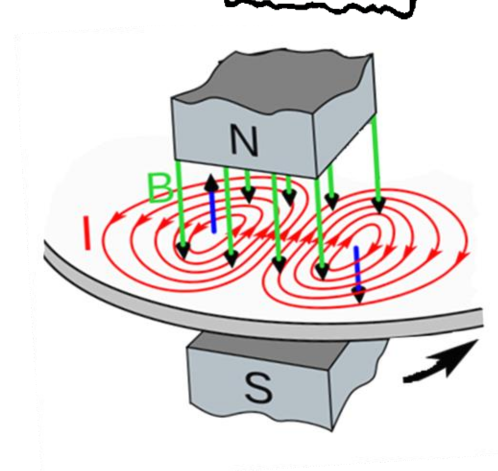
□ 阻尼系数的建模过程：



金属切割磁力线：动生电场

$$\vec{\mathrm{E}} = \vec{v} \times \vec{B}$$

涡流密度：$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \sigma\left(\vec{v} \times \vec{B}\right);$



电磁阻尼力微元：

$$\mathrm{d}\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} = JSd\vec{l} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B}\mathrm{d}V;$$

阻尼力：$F = \int_V \sigma B^2 v\mathrm{d}V = \sigma B^2 vV;$

$$\left(f_{\text{阻尼}} = -\varepsilon v\right)$$

阻尼系数：$\beta = \dfrac{\varepsilon}{m} = \dfrac{F}{v}\dfrac{1}{m} = \dfrac{\sigma B^2 V}{m};$

典型值的代入估算

- 铝：密度 2.7 g/cm^3

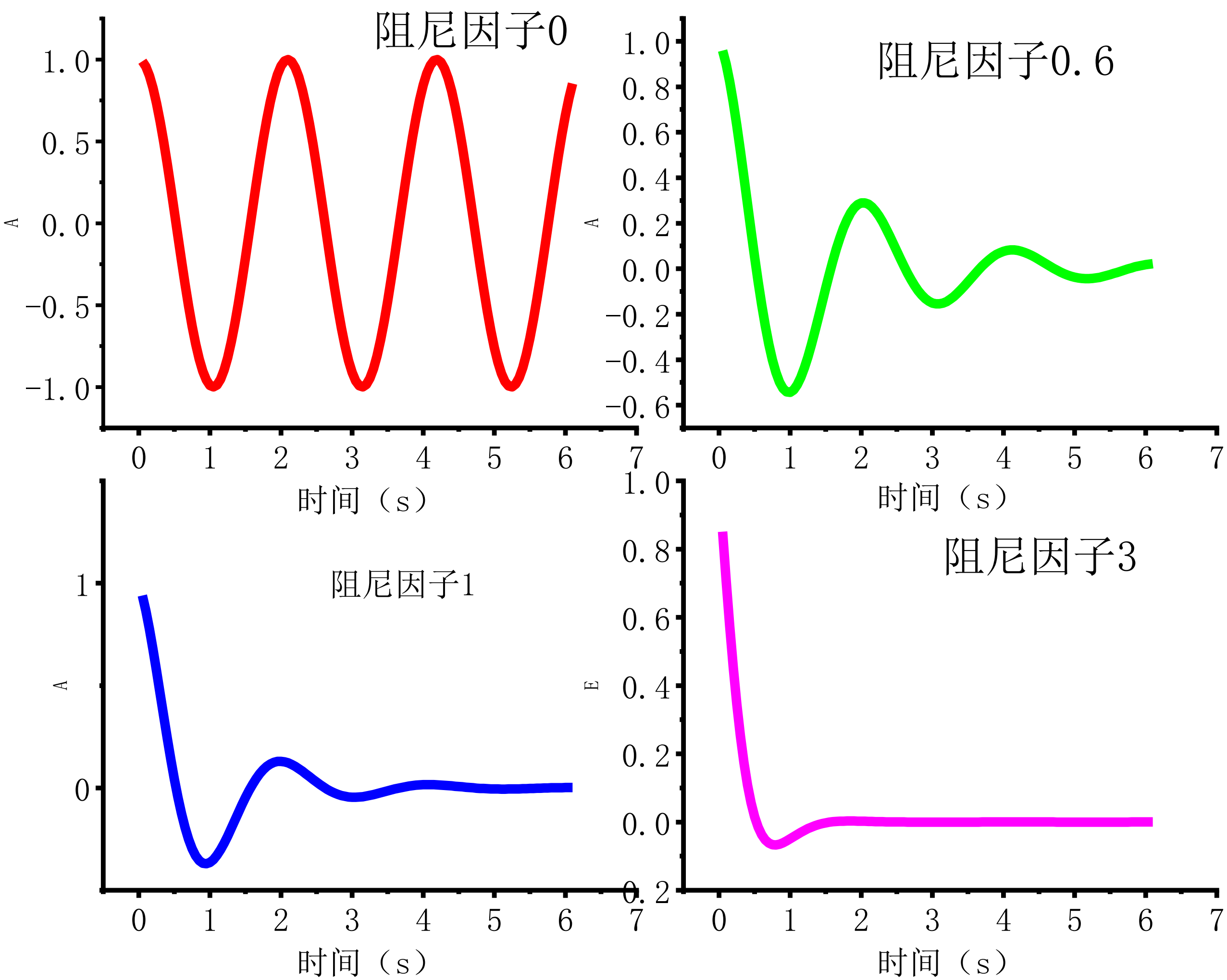
  电导率：3.45*10^7 西门子/米

  磁场强度： B=0.05 T

  厚度 0.5 厘米；直径 7.0厘米

阻尼系数：$\beta = \dfrac{\sigma B^2 V}{m} = 1.66;$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\beta\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{L}\theta=0,\qquad \theta=\theta_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\phi)$$



三.感生电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{\mathrm{S}})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(BS\cos\theta)}{\mathrm{d}t}$$

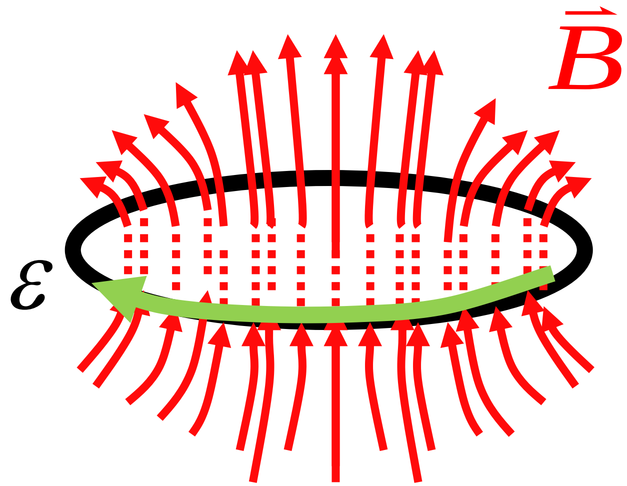
$$\Phi\text{变}\begin{cases} \text{B不变（均匀磁场）}\left\langle\begin{array}{l} \theta\text{不变}S\text{变} \\ S\text{不变}\theta\text{变} \end{array}\right\rangle \quad \text{---动生} \\ \text{B变}\begin{cases} \theta\text{、}S\text{不变} \quad \text{----感生} \\ \left.\begin{array}{l} \theta\text{不变}S\text{变} \\ S\text{不变}\theta\text{变} \\ \theta\text{、}S\text{均变} \end{array}\right\} \text{--动生+感生} \end{cases} \end{cases}$$

- **线圈没有相对于磁场运动，非静电力显然不是洛仑兹力，推动电荷运动的非静电力又是什么呢？**

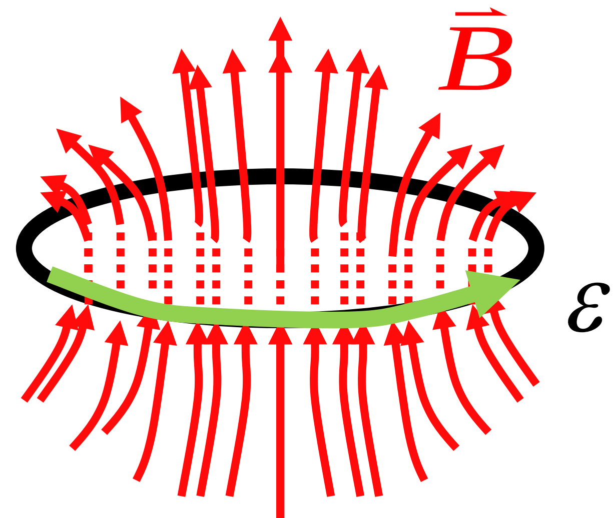
1、感生电场（涡旋电场）的提出

1861年，麦克斯韦提出了感生电场（涡旋电场）的概念.

变化的磁场在其周围空间激发出一种新的涡旋状电场，不管其周围空间有无导体或介质；这种电场被称为感生电场（涡旋电场）。



图中 $\dfrac{\partial B}{\partial t} > 0$



图中 $\dfrac{\partial B}{\partial t} < 0$

感应电流的方向：**顺时针**　　感应电流的方向：**逆时针**

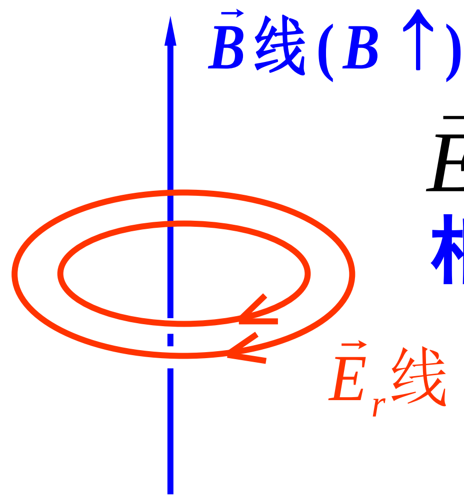
2、涡旋电场的性质

（1）只要有变化的磁场，就有涡旋电场。涡旋电场不是由电荷激发的。

（2）涡旋电场的电力线是环绕磁感应线的闭合曲线。

因此涡旋电场的环流不为零,即 $\oint_l \vec{E}_r \cdot d\vec{l} \neq 0$

（3）E_r的通量 $\oiint_S \vec{E}_r \cdot d\vec{S} = 0$ 与B类似，涡旋电场是无源场。



$\vec{E}_r$线与$\vec{B}$线相互套联

3、E_r的环流与感生电动势

$$\therefore \varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

因为回路不动，所以

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \oint_l \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

可见，只要 $\partial B/\partial t \neq 0$，涡旋电场的环流就不为零。

微分形式 $\nabla \times \vec{E}_r = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 涡旋电场为非保守场，是有旋场。

思考：只有变化磁场所在的空间才会有涡旋电场吗？

4、涡旋电场与静电场的比较：

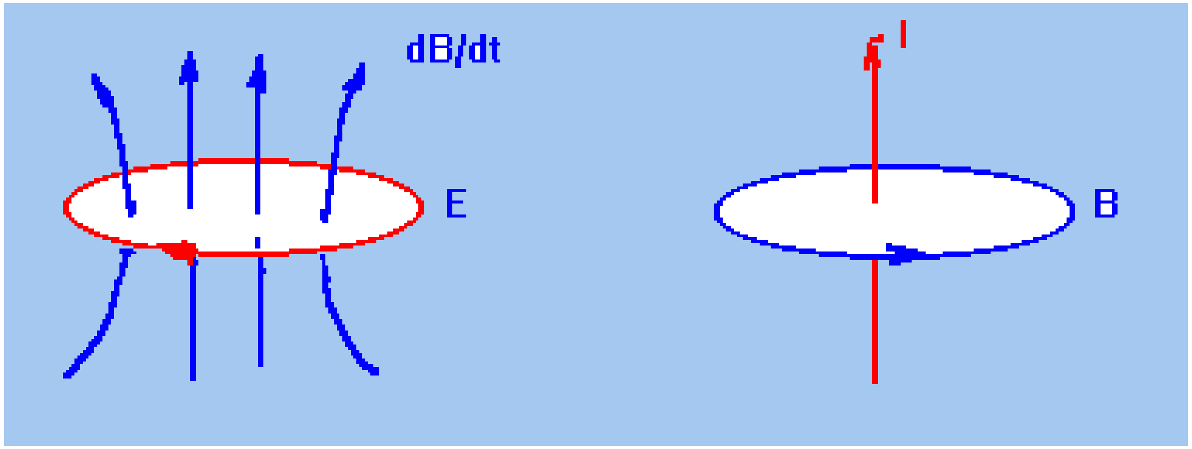
	$\vec{E}_{静}$(静电场)	$\vec{E}_{旋}$(涡旋电场)
产生原因	静电荷激发	变化的磁场激发
电场线	不闭合	闭合
电场力	对电荷有作用力，在导体中能形成电流。	对电荷有作用力，在导体中能形成电流。
性质	$\oint_L \vec{E}_{势} \cdot d\vec{l} = 0$ 保守场 有源、无旋场、静电场中两点间的电势与积分路径无关	$\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} \neq 0$ 非保守场 无源、有旋场、感生电场中两点间的电势与积分路径密切相关

5、方向判断

$$\therefore \oint_l \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- 负号:说明$E_{旋}$的方向与$\partial B/\partial t$成左手螺旋系统

- 涡旋电场是左旋场，恒磁场是右旋场



$$\nabla \times \vec{E}_r = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 J$$

单选题 1分

设置

在匀速变化的磁场中存在如图所示一回路，假设某一时刻回路中总的感应电动势为10V, 此时用一电压表测量AB两端的电压，则电压的绝对值应为：

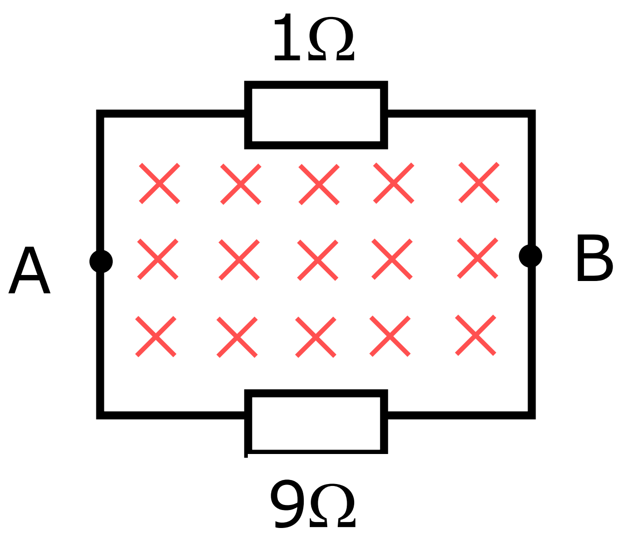
A 1V

B 9V

C 10V

D 0V

E 无法确定



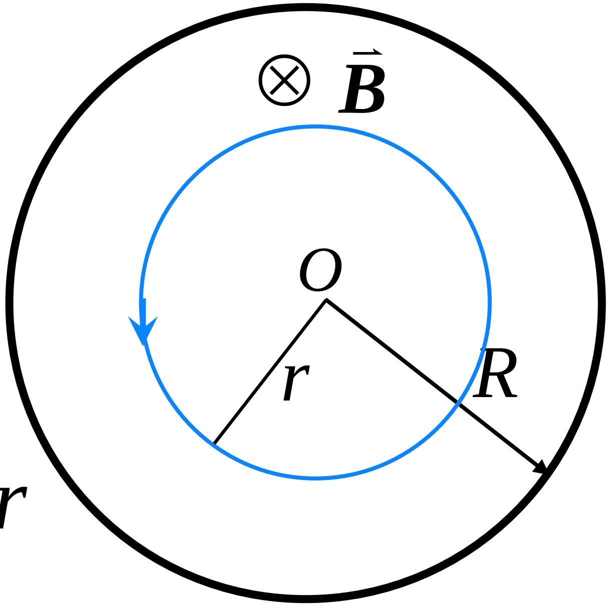
提交

6. 感生电动势、涡旋电场的求解示例

例5、在半径为*R*的空间范围内存在一个轴对称的随时间均匀增加的磁场，其磁感应强度*B(r,t)=Kt/r*（*K*为正的常数），*B*方向垂直纸面向里，求：涡旋电场的分布。

解：涡旋电场的方向为逆时针。对半径为r的同心圆形回路：

(1) r<R，涡旋电场的环路积分：



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cdot 2\pi r$$

$$\varepsilon = \iint_s \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^r \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi K r$$

$$\because \frac{dB}{dt} = \frac{K}{r} \qquad \therefore E\cdot 2\pi r = 2\pi k r$$

即 $E=K$

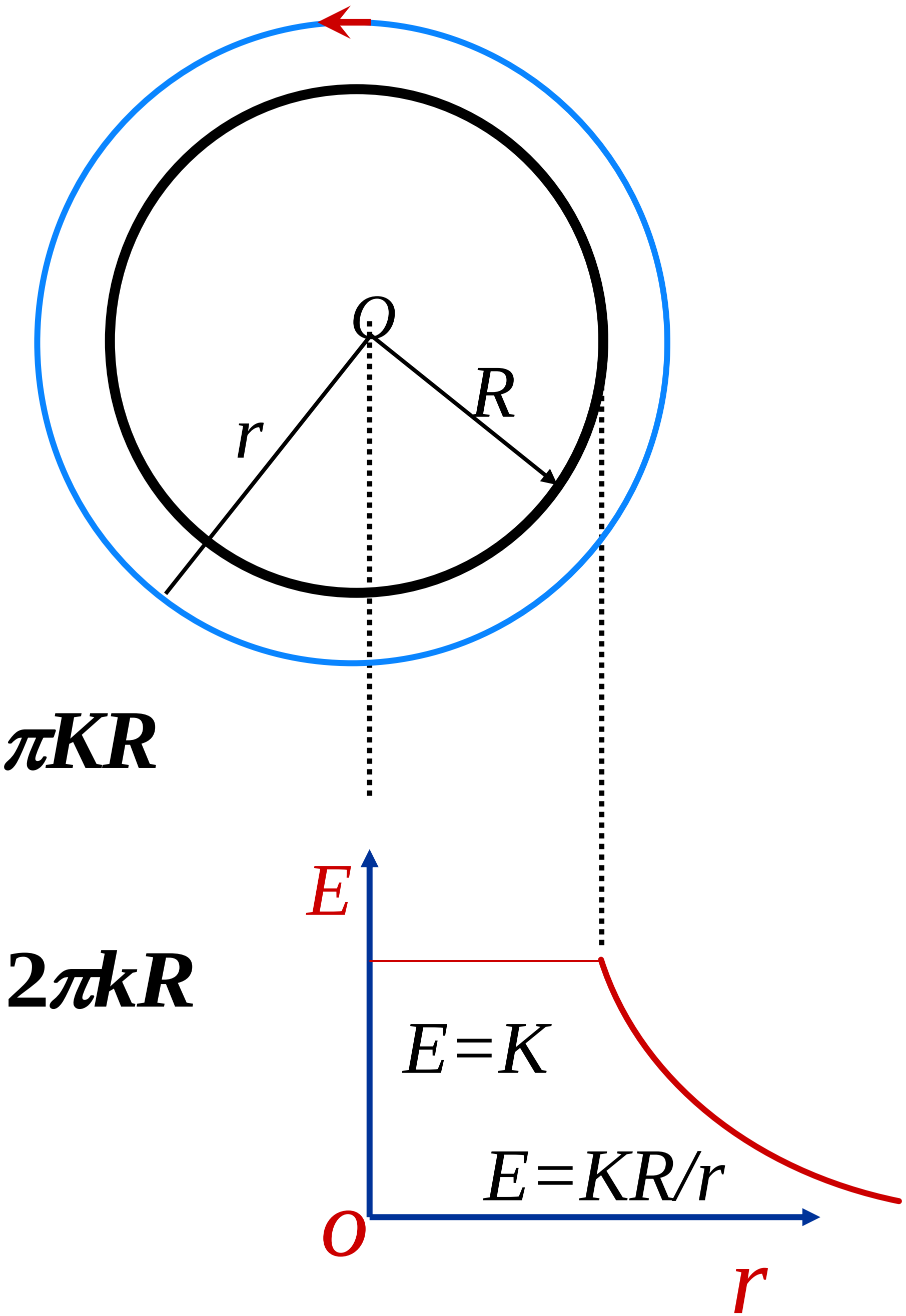
(2) r > R，涡旋电场的环路积分：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cdot 2\pi r$$

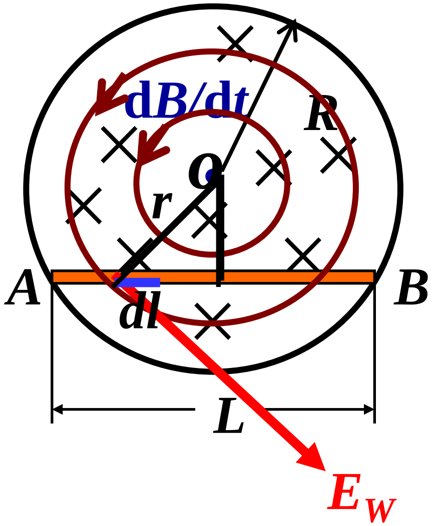
$$\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^R \frac{dB}{dt}2\pi r dr = 2\pi KR$$

$$\because \frac{dB}{dt} = \frac{K}{r} \qquad \therefore E\cdot 2\pi r = 2\pi kR$$

即 $E=KR/r$



例6： 在半径为*R* 的圆柱形空间存在均匀磁场 *B*, 其随时间的变化率$\lambda=\mathrm{d}B/\mathrm{d}t>0$,且为常数， 求磁场中静止金属棒（长度为L）上的感应电动势。



解：由电动势的定义式求解 $\varepsilon_{\mathrm{W}}=\int_A^B \vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

$$\oint \vec{E}_{\mathrm{w}}\cdot d\vec{l}=E_{\mathrm{w}}\cdot 2\pi r$$

$$\|$$

$$\varepsilon=\iint_s \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_0^r \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}2\pi r\mathrm{d}r=\pi\lambda r^2$$

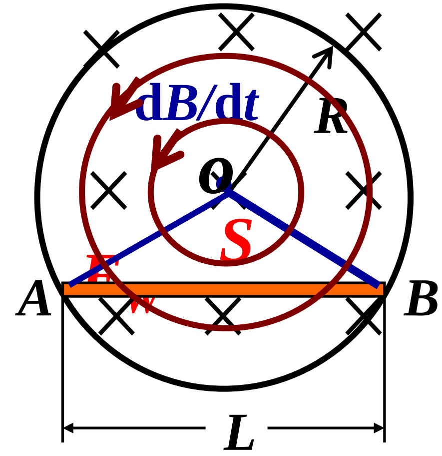
得 $E_W=\dfrac{r}{2}\lambda$

在AB上距O为*r*处取小线元*dl*，则

$$\mathrm{d}\varepsilon=\vec{E}_W\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{r}{2}\lambda\mathrm{d}l\cos\theta=\frac{\lambda}{2}h\mathrm{d}l$$

$$\varepsilon_{AB}=\int_A^B\mathrm{d}\varepsilon=\int_0^L\frac{1}{2}\lambda h\mathrm{d}l=\frac{\lambda hL}{2}=\frac{L\lambda}{2}\sqrt{R^2-(L/2)^2}$$

解法二：自圆心作辅助线，与金属棒构成三角形，其面积为 *S*：



$$S=\frac{L}{2}\sqrt{R^2-(L/2)^2}$$

过S的磁通量为 $\Phi_{\mathrm{m}}=-\frac{BL}{2}\sqrt{R^2-(L/2)^2}$

该回路感应电动势 $\varepsilon=\oint_l \vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\lambda L}{2}\sqrt{R^2-(L/2)^2}$

由于 $\oint_l \vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_o^A \vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_A^B \vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_B^o \vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

而辅助线OA和OB上的积分： $\int_o^A \vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_B^o \vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$

所以以上结果就是金属棒的感应电动势。

如果取OAB的扇形，行不行？为什么？

电磁感应小结

非静电力

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=\varepsilon_{动}+\varepsilon_{感}=\oint_L(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{\mathrm{B}})\cdot d\vec{l}+\oint_{(L)}\vec{\mathrm{E}}_{旋}\cdot d\vec{l}$$

全电场： $\vec{E}=\vec{E}_C+\vec{E}_r$

$$\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L(\vec{E}_{\mathrm{C}}+\vec{E}_{\mathrm{r}})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L\vec{E}_{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Rightarrow\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

电磁感应定律的微分形式：$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$