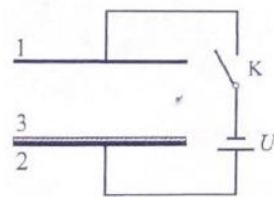


5.7 电磁学小班习题课

1. 平行板电容器极板 1 和 2 的面积均为 S , 水平固定放置, 它们之间的距离为 d , 接入如图所示的电路中, 电源的电动势记为 U 。不带电的导体薄板 3 (厚度忽略不计) 的质量为 m 、尺寸与电容器极板相同。平板 3 平放在极板 2 的正上方, 且与极板 2 有良好的电接触。整个系统置于真空室内, 真空的介电常量为 ϵ_0 。合电键 K 后, 平板 3 与极板 1 和 2 相继碰撞, 上下往复运动。假设导体板间的电场均可视为匀强电场; 导线电阻和电源内阻足够小, 充放电时间可忽略不计; 平板 3 与极板 1 或 2 碰撞后立即在极短时间内达到静电平衡; 所有碰撞都是完全非弹性的; 重力加速度大小为 g 。



- (1) 电源电动势 U 至少为多大?
- (2) 求平板 3 运动的周期 (用 U 和题给条件表示)

已知积分公式:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx} \right) + C, \text{ 其中 } a > 0, C \text{ 为积分常数。}$$

2. 一个长为 l 、内外半径分别为 a 和 b 的半圆柱体由两种不同的耗损电介质构成, 它们的相对介电常数和电率分别为: ϵ_{r1} 和 σ_1 ($0 \leq \varphi < \theta_0$ 区域), ϵ_{r2} 和 σ_2 ($\theta_0 < \varphi \leq \pi$ 区域), 其横截面如图 a 所示; 在半圆柱两侧底部镀有金属膜, 两金属膜间加有直流电压 V_0 , 并达到稳定。已知真空介电常量为 ϵ_0 , 两种介质的相对介电常数大、电导率小。忽略边缘效应。

- (1) 求介质内电场强度和电势的分布;
- (2) 求 $\varphi = \theta_0$ 界面处的总电荷;
- (3) 分别计算 $0 \leq \varphi < \theta_0$ 和 $\theta_0 < \varphi \leq \pi$ 两介质区域的电阻和电容;
- (4) 在 $t=0$ 时刻断开电源, 求随后的两金属膜间电压随时间的变化 (该过程可视为似稳过程), 并画出相应的等效电路图。

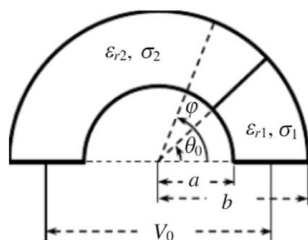
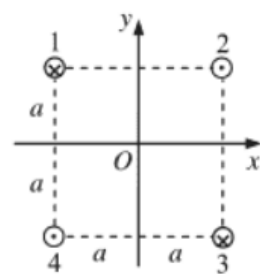


图 a

3. Ioffe-Pritchard 磁阱可用束縛原子的运动, 其主要部分如图所示。四根均通有恒定电流 I 的长直导线 1、2、3、4 都垂直于 x - y 平面, 它们与 x - y 平面的交点是边长为 $2a$ 、中心在原点 O 的正方形的顶点, 导线 1、2 所在平面与 x 轴平行, 各导线中电流方向已在图中标出。整个装置置于匀强磁场 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k}$ (\mathbf{k} 为 z 轴正方向单位矢量) 中。已知真空磁导率为 μ_0 。



- (1) 求电流在通电导线外产生的总磁场的空间分布;
- (2) 电流在原点附近产生的总磁场的近似表达式, 保留至线性项;
- (3) 将某原子放入磁阱中, 该原子在磁阱中所受磁作用的束縛势能正比于其所在位置的总磁感应强度 \mathbf{B}_{tot} 的大小, 即磁作用束縛势能 $V = \mu |\mathbf{B}_{\text{tot}}|$, μ 为正的常量。求该原子在原点 O 附近所受磁场的作用力;

4. 某电磁轨道炮的简化模型如图 a 所示,两圆柱形固定导轨相互平行,其对称轴所在平面与水平面的夹角为 θ ,两导轨的长均为 L 、半径均为 b 、每单位长度的电阻均为 λ ,两导轨之间的最近距离为 d (d 很小). 一质量为 m (m 较小) 的金属弹丸(可视为薄片)置于两导轨之间,弹丸直径为 d 、电阻为 R ,与导轨保持良好接触.两导轨下端横截面共面,下端(通过两根与相应导轨同轴的、较长的硬导线)与一电流为 I 的理想恒流源(恒流源内部的能量损耗可不计)相连不考虑空气阻力和摩擦阻力,重力加速度大小为 g ,真空磁导率为 μ_0 .考虑一弹丸自导轨下端从静止开始被磁场加速直至射出的过程。

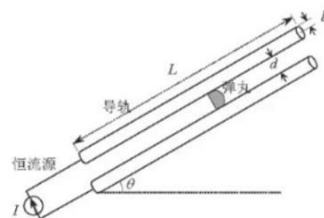


图 a. 某电磁轨道炮的简化模型

- (1) 求弹丸在加速过程中所受到的磁场作用力;
- (2) 求弹丸的出射速度;
- (3) 求在弹丸加速过程中任意时刻、以及弹丸出射时刻理想恒流源两端的电压;
- (4) 求在弹丸的整个加速过程中理想恒流源所做的功;
- (5) 在 $\theta=0^\circ$ 的条件下,若导轨和弹丸的电阻均可忽略,求弹丸出射时的动能与理想恒流源所做的功之比。

5. 如图 6a,在真空中两个同轴放置的无限长均匀带电的薄壁圆筒,圆筒的半径分别为 r_1 和 r_2 ;在平行于筒轴方向上,单位长度内、外圆筒的质量均为 m ,单位长度内、外圆筒分别带有 q ($q>0$)、 $-q$ 的电荷。两个圆筒均可以各自绕其中心轴自由旋转。已知真空的介电常量(电容率)和磁导率分别为 ϵ_0 和 μ_0

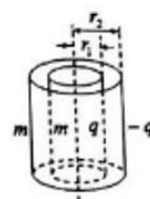


图 6a

- (1) 计算在距离轴 r 处的电场强度;
- (2) 当内外圆筒以相同的角速度 ω 同向旋转时,求空间中的磁感强度分布。
- (3) 若在内圆筒处($r=r_1$),从静止释放一个质量为 μ ,电荷量为 Q (Q 与 q 同号)的点电荷,试分析当 ω 满足什么条件时,此点电荷能够在电磁场的作用下到达外圆筒处($r=r_2$)。
- (4) 若初始时内、外圆筒均静止,现对外圆筒施加一力矩使其开始旋转,当外圆筒的角速度 Ω 达到时,试计算
 - (i) 内圆筒转动的角速度 ω ;
 - (ii) 在从初始时直至外圆筒的角速度达到 Ω 的整个过程中,沿轴向单位长度的外圆筒所受到的外力矩(不包括两圆筒感应电磁场作用力的力矩) M 的总冲量矩 J ;
 - (iii) 沿轴向单位长度的内、外圆筒的总的机械角动量 L 。

答案

1.

(1) 在平板3离开极板2之前, 平板3的带电量为

$$Q = C_0 U = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U$$

设平板3离开极板2之后, 各板电荷面密度如图a所示。由电荷守恒有

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma \equiv \frac{Q}{S} = \frac{\varepsilon_0}{d} U \quad (1)$$

设上、下两电容器各自两极板间电场的场强分别为 E_1 、 E_2 (见图a), 有

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

将上式代入①式得

$$\varepsilon_0 E_1 - \varepsilon_0 E_2 = \frac{\varepsilon_0}{d} U$$

即

$$E_1 - E_2 = \frac{U}{d} \quad (2)$$

另外, 两个串联电容器的总电势差为 U , 故

$$E_2 x + E_1 (d - x) = U \quad (3)$$

联立②③式得

$$E_1 = \frac{U}{d} \frac{d + x}{d} \quad (4)$$

$$E_2 = \frac{U}{d} \frac{x}{d} \quad (5)$$

由④⑤式得, 极板1、2上电荷面密度分别为

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1, \quad \sigma_2 = \varepsilon_0 E_2$$

平板3受到的电场力(向上为正方向, 下同)为

$$\begin{aligned} F_e &= -\sigma_2 S \cdot \frac{E_2}{2} + \sigma_1 S \cdot \frac{E_1}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2} (E_1^2 - E_2^2) = \varepsilon_0 S (E_1 - E_2) \left(\frac{E_1 + E_2}{2} \right) \\ &= \varepsilon_0 S \frac{U}{d} \cdot (E_1 + E_2) / 2 = \varepsilon_0 S \frac{U}{d} \cdot \frac{U}{d} \left(\frac{2x + d}{2d} \right) = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^3} (2x + d) \end{aligned} \quad (6)$$

平板3受到的竖直方向的合力为

$$F_{\text{total}} = F_e - mg = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^3} (2x + d) - mg = \left(\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2} - mg \right) + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{d^3} x$$

由此得, 平板3在图a所示位置的加速度为

$$a = \frac{F_{\text{total}}}{m} = \left(\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2md^2} - g \right) + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{md^3} x \quad (7)$$

为使平板3向上运动, 应有条件

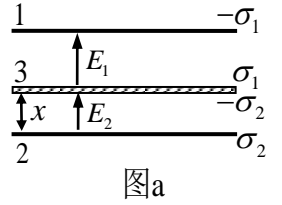
$$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2md^2} \geq g$$

且开始运动之后加速度始终为正, 因此最终将撞到极板2上。上述条件意味着电源电动势 U 至少应为

$$U_{\min} = \sqrt{\frac{2md^2 g}{\varepsilon_0 S}} \quad (8)$$

(2) 由⑦式可知

$$a = a_0 + Bx$$



其中

$$a_0 = \frac{1}{2}Bd - g, \quad B = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{md^3}$$

于是

$$a = \frac{v dv}{dx} = a_0 + Bx$$

即

$$v dv = (a_0 + Bx) dx$$

对上式两边作积分

$$\int_0^v v' dv' = \int_0^x (a_0 + Bx') dx'$$

完成积分得

$$\frac{1}{2}v^2 = a_0 x + \frac{1}{2}Bx^2$$

或

$$v = \sqrt{2a_0 x + Bx^2}$$

其中 v 为平板3与极板2相距 x 时速度的大小。上式即

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2a_0 x + Bx^2}} \quad (9)$$

两边积分，可得平板3从极板2运动到极板1（位移为 d ）的时间间隔为

$$t_1 = \int_0^{t_1} dt = \int_0^d \frac{dx}{\sqrt{2a_0 x + Bx^2}}$$

完成上述积分得

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{B}} \ln \left[\frac{(3Bd - 2g) + \sqrt{8Bd(Bd - g)}}{Bd - 2g} \right]$$

将 $B = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{md^3}$ 代入上式得

$$t_1 = \frac{d}{U} \sqrt{\frac{md}{\varepsilon_0 S}} \ln \left[\frac{(3\varepsilon_0 S U^2 - 2mgd^2) + 2U \sqrt{2\varepsilon_0 S (\varepsilon_0 S U^2 - mgd^2)}}{\varepsilon_0 S U^2 - 2mgd^2} \right] \quad (10)$$

平板3到达极板1时，其上表面所带的正电荷与极板1所带负电荷交换后相互抵消；下表面所带电荷为

$$-Q_2 = -\varepsilon_0 E_2 S = -Q = -\frac{\varepsilon_0 S}{d} U$$

极板2带电为

$$Q_2 = \varepsilon_0 E_2 S = Q = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U$$

平板3与极板1碰撞后，速度为零，在重力和电场力的作用下又向下运动，并与极板2发生完全非弹性碰撞。

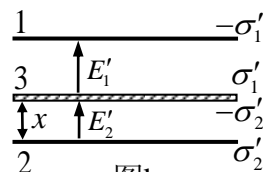
在平板3向下运动过程中，其总带电量为

$$-Q = -\frac{\varepsilon_0 S}{d} U$$

设平板3离开极板1后，各板电荷面密度如图b所示。由电荷守恒有

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = -\frac{\varepsilon_0}{d} U \quad (11)$$

上、下两个电容器各自两极板间的场强 E'_1 和 E'_2 （见图b）分别为



图b

$$E'_1 = \frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0}, \quad E'_2 = \frac{\sigma'_2}{\varepsilon_0}$$

将上式代入⑪式得

$$E'_1 - E'_2 = -\frac{U}{d} \quad (12)$$

另外，两个串联电容器的总电势差为 U ，故

$$E'_2 x + E'_1 (d - x) = U \quad (13)$$

联立⑫⑬式得

$$E'_1 = \frac{U}{d} \frac{(d - x)}{d} \quad (14)$$

$$E'_2 = \frac{U}{d} \frac{2d - x}{d} \quad (15)$$

由此可得电荷面密度

$$\sigma'_1 = \varepsilon_0 E'_1, \quad \sigma'_2 = \varepsilon_0 E'_2$$

以及平板3受到的电场力

$$\begin{aligned} F'_e &= -\sigma'_2 S \frac{E'_2}{2} + \sigma'_1 S \frac{E'_1}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2} (E'^2_2 - E'^2_1) = \varepsilon_0 S (E'_1 - E'_2) \frac{E'_1 + E'_2}{2} \\ &= \varepsilon_0 S \left(-\frac{U}{d}\right) \cdot \frac{E'_1 + E'_2}{2} = \varepsilon_0 S \left(-\frac{U}{d}\right) \frac{U}{d} \left(\frac{3d - 2x}{2d}\right) = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^3} (3d - 2x) \end{aligned} \quad (16)$$

平板3受到竖直方向的合力为

$$F'_{\text{total}} = F'_e - mg = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^3} (3d - 2x) - mg = -\left(\frac{3\varepsilon_0 S U^2}{2d^2} + mg\right) + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{d^3} x$$

由此得，平板3在图b所示位置的加速度

$$a' = \frac{F'_{\text{total}}}{m} = -\left(\frac{3\varepsilon_0 S U^2}{2md^2} + g\right) + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{md^3} x \quad (17)$$

因为 $\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2md^2} + g \geq 0$ ，则 $a' < 0$ ，平板3能一直向下加速运动。令

$$a' = -a'_0 - B'(d - x)$$

其中

$$a'_0 = \frac{1}{2} B' d + g, \quad B' = B = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{md^3}$$

重复前述关于平板3上升过程的类似处理，可得

$$\frac{1}{2} v^2 = [a'_0 (d - x) + \frac{1}{2} B (d - x)^2]$$

其中 v 为平板3离开极板1后坐标为 x （原点在极板2）时的速度。上式即

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{2a'_0 (d - x) + B(d - x)^2}} \quad (18)$$

两边积分得，平板3从极板1运动到极板2（位移为 $-d$ ）的时间 t_2 为

$$t_2 = \int_0^{t_2} dt = -\int_d^0 \frac{dx}{\sqrt{2a'_0 (d - x) + B(d - x)^2}}$$

完成上述积分得

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{B}} \ln \left[\frac{(3Bd + 2g) + \sqrt{8Bd(Bd + g)}}{Bd + 2g} \right]$$

将 $B = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{m d^3}$ 代入上式得

$$t_2 = \frac{d}{U} \sqrt{\frac{m d}{\varepsilon_0 S}} \ln \left[\frac{(3\varepsilon_0 S U^2 + 2mgd^2) + 2U \sqrt{\varepsilon_0 S (2\varepsilon_0 S U^2 + mgd^2)}}{\varepsilon_0 S U^2 + 2mgd^2} \right] \quad (19)$$

平板 3 从极板 1 运动到极板 2 后，与极板 2 发生完全非弹性碰撞，速度变为零。其下表面所带的负电荷与极板 2 所带正电荷交换后相互抵消，上表面所带电荷为

$$Q'_1 = \varepsilon_0 E'_1 S = Q = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U$$

极板 1 所带电荷为

$$-Q'_1 = -\varepsilon_0 E'_1 S = -Q = -\frac{\varepsilon_0 S}{d} U$$

这时系统状态与初始状态完全相同，平板 3 完成一个完整的周期运动，此后平板 3 重复以上的上下往复运动过程。导体平板 3 的运动周期为

$$\begin{aligned} T &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{d}{U} \sqrt{\frac{m d}{\varepsilon_0 S}} \left\{ \ln \left[\frac{(3\varepsilon_0 S U^2 - 2mgd^2) + 2U \sqrt{2\varepsilon_0 S (\varepsilon_0 S U^2 - mgd^2)}}{\varepsilon_0 S U^2 - 2mgd^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[\frac{(3\varepsilon_0 S U^2 + 2mgd^2) + 2U \sqrt{\varepsilon_0 S (2\varepsilon_0 S U^2 + mgd^2)}}{\varepsilon_0 S U^2 + 2mgd^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

已利用⑩式和⑬式。

2.

1) 考虑某一半径为 r 的半圆周, 如解题图 a 所示. 设 $0 \leq \varphi < \theta_0$ 区域、 $\theta_0 < \varphi \leq \pi$ 区域的电场强度与电位移矢量大小分别为 E_1 和 D_1 、 E_2 和 D_2 , 方向均沿角向. 由电流的连续性和欧姆定律有

$$J_1 = J_2, \quad \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \quad (1)$$

两介质上的电压之和为

$$E_1 r \theta_0 + E_2 r (\pi - \theta_0) = V_0 \quad (2)$$

由(1)(2)式得

$$E_1 = \frac{V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)]r} \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)]r} \quad (4)$$

假设负极板电势为零, 由电势和电场强度之间的关系得:

对于 $0 \leq \varphi < \theta_0$ 区域,

$$V_\varphi = V_0 - E_1 r \varphi = [1 - \frac{\varphi}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)}] V_0 = \frac{(\theta_0 - \varphi) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)} V_0 \quad (5)$$

对于 $\theta_0 < \varphi \leq \pi$ 区域,

$$\begin{aligned} V_\varphi &= V_0 - E_1 r \theta_0 - E_2 r (\varphi - \theta_0) \\ &= [1 - \frac{\theta_0}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)} - \frac{\varphi - \theta_0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)}] V_0 = \frac{\pi - \varphi}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)} V_0 \end{aligned} \quad (6)$$

2) 在 $\varphi = \theta_0$ 的界面上的总电荷密度为

$$\sigma_e = \varepsilon_0 (E_2 - E_1) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)]r} - \frac{\varepsilon_0 V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)]r} = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)} \varepsilon_0 V_0 \quad (7)$$

在 $\varphi = \theta_0$ 的界面上的总电荷为

$$Q = \int_a^b \sigma_e l dr = \frac{\varepsilon_0 (\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1) l \ln \frac{b}{a}}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)} V_0 \quad (8)$$

3) 计算介质区域 $\varphi = 0 \sim \theta_0$ 的电容 C_1 . 设半圆柱体的右极板上 r 处的自由电荷密度为 σ_{e01} , 有

$$\sigma_{e01} = D_1 = \varepsilon_{r1} \varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0 V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)]r} \quad (9)$$

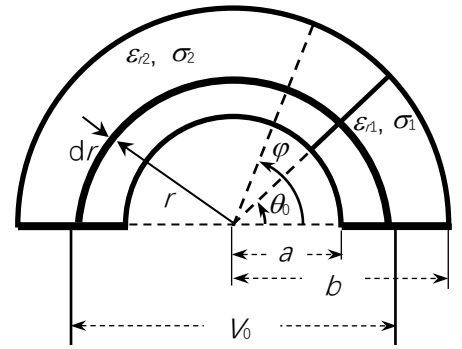
右极板上总的自由电荷

$$Q_{01} = \int_a^b \sigma_{e01} l dr = \int_a^b \frac{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0 V_0 l}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)]r} dr = \frac{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0 V_0 l}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)} \ln \frac{b}{a} \quad (10)$$

$\varphi = 0$ 与 $\varphi = \theta_0$ 之间电势差

$$V_{10} = E_1 \theta_0 r = \frac{\theta_0 V_0}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)} \quad (11)$$

介质区域 $\varphi = 0 \sim \theta_0$ 的电容 C_1 为



解题图 a

$$C_1 = \frac{Q_{01}}{V_{10}} = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 l}{\theta_0} \ln \frac{b}{a} \quad (12)$$

计算介质区域 $\varphi = \theta_0 \sim \pi$ 的电容 C_2 . 设半圆柱体左极板上 r 处的自由电荷密度为 σ_{e02} , 有

$$\sigma_{e02} = D_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 E_2 = \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)]r} \quad (13)$$

左极板上的自由电荷为

$$Q_{02} = \int_a^b \sigma_{e02} l dr = \int_a^b \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 V_0 l}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)]r} dr = \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 V_0 l}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)} \ln \frac{b}{a} \quad (14)$$

$\varphi = \theta_0$ 与 $\varphi = \pi$ 之间电势差为

$$V_{20} = E_2(\pi - \theta_0)r = \frac{(\pi - \theta_0)V_0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)} \quad (15)$$

介质区域 $\varphi = \theta_0 \sim \pi$ 区域的电容 C_2 为

$$C_2 = \frac{Q_{02}}{V_{20}} = \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 l}{\pi - \theta_0} \ln \frac{b}{a} \quad (16)$$

计算介质区域 $\varphi = 0 \sim \theta_0$ 的电阻 R_1 : 考虑 r 处厚度为 dr 的半圆柱壳 (见解题图 a). 该半圆柱壳在介质区域 $\varphi = 0 \sim \theta_0$ 中的部分的电导为

$$dG_1 = \sigma_1 \frac{l dr}{\theta_0 r}$$

介质区域 $\varphi = 0 \sim \theta_0$ 的电导为

$$G_1 = \int_a^b \sigma_1 \frac{l dr}{\theta_0 r} = \frac{\sigma_1 l}{\theta_0} \ln \frac{b}{a}$$

相应的电阻为

$$R_1 = \frac{1}{G_1} = \frac{\theta_0}{\sigma_1 l \ln \frac{b}{a}} \quad (17)$$

计算介质区域 $\varphi = \theta_0 \sim \pi$ 的电阻 R_2 . 所考虑的半圆柱壳在介质区域 $\varphi = \theta_0 \sim \pi$ 中的部分的电导为

$$dG_2 = \sigma_2 \frac{l dr}{(\pi - \theta_0)r}$$

介质区域 $\varphi = \theta_0 \sim \pi$ 的电导为

$$G_2 = \int_a^b \sigma_2 \frac{l dr}{(\pi - \theta_0)r} = \frac{\sigma_2 l}{\pi - \theta_0} \ln \frac{b}{a}$$

相应的电阻为

$$R_2 = \frac{1}{G_2} = \frac{\pi - \theta_0}{\sigma_2 l \ln \frac{b}{a}} \quad (18)$$

4) 当断开电源后, 形成两个相互独立的 RC 回路, 其等效电路如解题图 b 所示, 其电势差从 V_{10} 和 V_{20} 分别衰减到零.

$$iR_i + \frac{q_i}{C_i} = 0$$

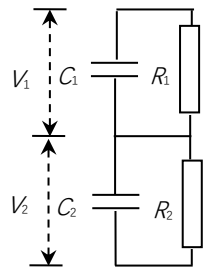
式中下标 $i=1,2$ 分别对应于第一、二个 RC 回路, 而 q_i 是断开电源后 t 时刻电容 C_i 正极板上所到的电量. 上式即

$$\frac{dq_i}{q_i} = -\frac{1}{R_i C_i}$$

解为

$$q_i = q_0 e^{-\frac{1}{R_i C_i} t}$$

式中 q_0 是断开电源时电容 C_i 正极板上所到的电量, 或



解题图 b

$$V_i = \frac{q_i}{C_i} = \frac{q_0}{C_i} e^{-\frac{1}{R_i C_i} t} = V_{i0} e^{-\frac{1}{R_i C_i} t} \quad (19)$$

式中

$$R_1 C_1 = \frac{\theta_0}{\sigma_1 l \ln \frac{b}{a}} \times \frac{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0 l}{\theta_0} \ln \frac{b}{a} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\sigma_1}, \quad \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0} \quad (20)$$

$$R_2 C_2 = \frac{\pi - \theta_0}{\sigma_2 l \ln \frac{b}{a}} \times \frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0 l}{\pi - \theta_0} \ln \frac{b}{a} = \frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0}{\sigma_2}, \quad \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0} \quad (21)$$

于是

$$V_1(t) = \frac{\theta_0 V_0}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)} e^{-\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} t} \quad (22)$$

$$V_2(t) = \frac{(\pi - \theta_0) V_0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \theta_0 + \pi - \theta_0} e^{-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0} t} \quad (23)$$

两金属膜之间的电压为

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \frac{\theta_0 V_0}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)} e^{-\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} t} + \frac{(\pi - \theta_0) V_0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \theta_0 + \pi - \theta_0} e^{-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0} t} \quad (24)$$

3.

(1) 四根通有直流电流 I 的导线在 x - y 平面内的空间坐标依次是

$$(-a, a), (a, a), (a, -a), (-a, -a)$$

取 x 轴和 y 轴方向单位矢量为 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} ，考虑通电导线外任一点 (x, y) 。导线 1、2、3、4 上的电流在点 (x, y) 产生的磁场 \mathbf{B}_1 、 \mathbf{B}_2 、 \mathbf{B}_3 、 \mathbf{B}_4 为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0(-I)}{2\pi} \frac{-(y-a)\mathbf{i} + (x+a)\mathbf{j}}{(x+a)^2 + (y-a)^2} \quad (1)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-(y-a)\mathbf{i} + (x-a)\mathbf{j}}{(x-a)^2 + (y-a)^2} \quad (2)$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0(-I)}{2\pi} \frac{-(y+a)\mathbf{i} + (x-a)\mathbf{j}}{(x-a)^2 + (y+a)^2} \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-(y+a)\mathbf{i} + (x+a)\mathbf{j}}{(x+a)^2 + (y+a)^2} \quad (4)$$

导线电流在通电导线外产生的总磁场的空间分布为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \left[\frac{y-a}{(x+a)^2 + (y-a)^2} - \frac{y-a}{(x-a)^2 + (y-a)^2} + \frac{y+a}{(x-a)^2 + (y+a)^2} - \frac{y+a}{(x+a)^2 + (y+a)^2} \right] \mathbf{i} + \left[-\frac{x+a}{(x+a)^2 + (y-a)^2} + \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y+a)^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2 + (y+a)^2} \right] \mathbf{j} \right\} \quad (5)$$

(2) 对于原点 O 附近的任一点 (x, y) ，有

$$|x| \ll a, |y| \ll a$$

保留至 $\frac{x}{a}$ 、 $\frac{y}{a}$ 的一次项， \mathbf{B}_1 、 \mathbf{B}_2 、 \mathbf{B}_3 、 \mathbf{B}_4 可近似为

$$\mathbf{B}_1 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} [-(a-x)\mathbf{i} - (a+y)\mathbf{j}] \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_2 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} [(a+x)\mathbf{i} - (a+y)\mathbf{j}] \quad (7)$$

$$\mathbf{B}_3 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} [(a+x)\mathbf{i} + (a-y)\mathbf{j}] \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_4 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} [-(a-x)\mathbf{i} + (a-y)\mathbf{j}] \quad (9)$$

电流在原点附近任一点 (x, y) 产生的总磁场可近似为

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} (x\mathbf{i} - y\mathbf{j}) \quad (10)$$

(3) 在原点附近的总磁感应强度为

$$\mathbf{B}_{\text{tot}} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} (x\mathbf{i} - y\mathbf{j}) + B_0 \mathbf{k} \quad (11)$$

在原点 O 附近总磁感应强度的大小为

$$|\mathbf{B}_{\text{tot}}| = \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \right)^2 (x^2 + y^2)} \approx B_0 + \frac{1}{2B_0} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \right)^2 (x^2 + y^2) \quad (12)$$

原子在原点 O 附近所受的磁作用的束缚势能为

$$V = \mu |\mathbf{B}_{\text{tot}}| \approx \mu B_0 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{B_0} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \right)^2 (x^2 + y^2) \quad (13)$$

除开常数项外，这是二维 (x - y 平面) 简谐振子势能，因此该原子在原点 O 附近所受磁场的作用力应是 x - y 平面上沿径向指向原点 O 的力

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu}{B_0} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \right)^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

4.

1) 由于弹丸直径 d 很小, 每根载流导轨均可视为半无限长载流直导线, 弹丸上离某导轨轴线距离为 r' 处的磁场的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r'} + \frac{\mu_0 I}{4\pi(d+2b-r')} \quad (1)$$

方向垂直于两导轨对称轴所在平面斜向下。弹丸长为 $d\mathbf{r}'$ 的一段所受到的磁场作用力 (安培力) 为

$$dF = IBd\mathbf{r}' \quad (2)$$

方向平行于导轨轴线斜向上。弹丸所受到的安培力大小为

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_b^{b+d} \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi r'} + \frac{\mu_0 I}{4\pi(d+2b-r')} \right] I d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b+d}{b} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{(d+2b-b)}{(d+2b-b-d)} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{b+d}{b} \end{aligned} \quad (3)$$

方向平行于导轨轴线斜向上。

2) 设弹丸的加速度大小为 a 。由牛顿第二定律有

$$F - mg \sin \theta = ma \quad (4)$$

由(3)(4)式得, 弹丸的加速度大小为

$$a = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \quad (5)$$

方向平行于导轨轴线斜向上。

弹丸作匀加速直线运动, 弹丸的出射速度 v_{\max} 满足

$$v_{\max}^2 - v_0^2 = 2aL \quad (6)$$

由(5)(6)式得

$$v_{\max} = \sqrt{2L \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right)} \quad (7)$$

方向平行于导轨轴线斜向上。

3) 两导轨之间离某导轨轴线距离为 r 处 (不一定是弹丸上一点) 的磁场为

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+2b-r)} \quad (8)$$

通过两导轨各自从下端开始长为 l 的一段以及弹丸长为 $d\mathbf{r}$ 的一段组成平面回路的磁通量为

$$d\Phi = B_r l d\mathbf{r} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+2b-r)} \right) l d\mathbf{r} \quad (9)$$

通过两导轨各自从下端开始长为 l 的一段以及弹丸组成平面回路的磁通量为

$$\Phi = \int_b^{b+d} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+2b-r)} \right) l d\mathbf{r} = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{b+d}{b} \quad (10)$$

根据法拉第电磁感应定律, 回路中的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{\pi} \ln \frac{d+b}{b} \quad (11)$$

式中 $v = \frac{dl}{dt}$ 是弹丸沿导轨的运动速度。由全电路欧姆定律得

$$U + \varepsilon = 2\lambda I + IR \quad (12)$$

式中 U 为恒流源两端的电压。弹丸做匀加速直线运动, 在通电后任意时刻 t 有

$$v = at \quad (13)$$

$$l = \frac{1}{2} at^2 \quad (14)$$

由(11)(12)(13)(14)式得, 在时刻 t 恒流源两端的电压为

$$U = 2\lambda I \frac{1}{2} at^2 + IR + \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d+b}{b} at$$

即

$$U = \lambda I \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right) t^2 + IR + \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d+b}{b} \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right) t$$

(15)

由(7)(13)式得, 弹丸的加速时间为

$$T = \frac{v_{\max}}{a} = \sqrt{2L} \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right)^{-1/2} \quad (16)$$

由(15)(16)式得, 弹丸出射时电源两端的电压

$$U_T = 2\lambda IL + IR + \frac{\sqrt{2L}\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d+b}{b} \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right)^{1/2} \quad (17)$$

4) 在弹丸的整个加速过程中, 恒流源所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T UI dt \\ &= \int_0^T \lambda I^2 \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right) t^2 dt + \int_0^T I^2 R dt \\ &\quad + \int_0^T \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln \frac{d+b}{b} \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right) t dt \end{aligned} \quad (18)$$

下面依次计算(18)式右端的第一项 W_1 、第二项 W_2 和第三项 W_3 :

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^T \lambda I^2 \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right) t^2 dt \\ &= \frac{\lambda I^2}{3} \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right) T^3 \\ &= \frac{2\sqrt{2}\lambda I^2}{3} L^{3/2} \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$W_2 = I^2 RT = I^2 R \sqrt{2L} \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right)^{-1/2}$$

$$W_3 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d+b}{b} \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right) T^2 = \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi} \ln \frac{d+b}{b}$$

于是

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= \sqrt{2L} I^2 \left(\frac{2\lambda L}{3} + R \right) \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right)^{-1/2} + \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi} \ln \frac{d+b}{b} \end{aligned} \quad (19)$$

5) 弹丸出射时的动能为:

$$E_{k\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = mL \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g \sin \theta \right) = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi} \ln \frac{d+b}{b} - mgL \sin \theta \quad (20)$$

在 $\theta=0^\circ$ 的条件下, 弹丸出射时的动能为

$$E_{k\max} = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi} \ln \frac{d+b}{b} \quad (21)$$

若导轨和弹丸的电阻可忽略, 恒流源所做的功为

$$W = \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi} \ln \frac{d+b}{b} \quad (22)$$

弹丸出射时的动能与恒流源所做的功之比

$$\eta = \frac{E_{k\max}}{W} = 50\% \quad (23)$$

5.

(1) 由对称性及高斯定理可知静电场方向沿径向, 且大小仅与 r 有关, 故

$$\begin{cases} 2\pi\epsilon_0 r E = q, & r_1 < r < r_2 \\ E = 0, & \text{其它} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}, & r_1 < r < r_2 \\ E = 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

(2) 由对称性及磁场的环路定理可知, 磁场的方向沿轴向, 且大小仅与 r 有关。内圆筒在旋转时等效的电流密度(轴单位长度的电流)为

$$I = \frac{q\omega}{2\pi} \quad (2)$$

内、外圆筒的电流大小相同, 方向相反。应用安培环路定理有

$$B = \begin{cases} -\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi}, & r_1 < r < r_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

(3) 点电荷在运动过程中受到由①③式所得电场和磁场共同作用, 设其在运动过程中径向运动速度为 $v = \dot{r}$ 。点电荷运动的角动量随时间的变化满足

$$\frac{dl}{dt} = QvBr = QBr\dot{r} \quad (4)$$

其中 l 为点电荷绕筒轴运动的角动量, $B = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$ 为 Q 所受磁感应强度大小。由④式积分

$$l = \frac{1}{2}QBr^2 + C$$

式中 C 为积分常数, 利用初始条件: 点电荷从 $r = r_1$ 释放时静止, 即

$$l(r = r_1) = 0$$

可得

$$l = \frac{1}{2}QB(r^2 - r_1^2) \quad (5)$$

由动能定理并利用①式得,

$$dE_k = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (6)$$

积分得, 当粒子位于半径 r 处时动能为

$$E_k = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_1} \quad (7)$$

注意, 粒子动能也可表为

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\mu v^2 + \frac{l^2}{\mu r^2} \right) \quad (8)$$

若粒子能到达 $r = r_2$ 处, 则当 $r = r_2$ 时应有

$$\frac{1}{2} \mu v^2 \geq 0$$

由⑦⑧式, 此条件即

$$\frac{l^2}{2\mu r_2^2} \leq \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

将③⑥式代入上式得

$$\omega^2 \leq \frac{16\pi\mu r_2^2}{\epsilon_0 \mu_0^2 qQ(r_2^2 - r_1^2)^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (9)$$

(4) (i) 利用 (2) 中结论, 内筒在以角速度 ω 旋转时, 在其内部产生的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi} \quad (10)$$

外筒在以角速度 Ω 旋转时, 在其内部产生的磁感应强度为

$$B_2 = -\frac{\mu_0 q \Omega}{2\pi} \quad (11)$$

由法拉第电磁感应定律得, B_1 和 B_2 变化时在 $r = r_1$ 处产生的沿切向的感应电场为

$$E_1 = -\frac{\pi r_1^2}{2\pi r_1} \frac{d}{dt} (B_1 + B_2) = -\frac{\mu_0 q r_1}{4\pi} \frac{d}{dt} (\omega - \Omega) \quad (12)$$

对内筒的转动有

$$m r_1^2 \frac{d\omega}{dt} = q E_1 r_1 \quad (13)$$

将(12)式代入(13)式得

$$d\omega = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2} d\Omega$$

对上式两边积分, 并利用初态时内、外筒均静止的条件, 得

$$\omega = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2} \Omega \quad (14)$$

(ii) 由法拉第电磁感应定律得, B_1 和 B_2 变化时在 $r = r_2$ 处产生的沿切向的感应电场为

$$E_2 = -\frac{1}{2\pi r_2} \left(\pi r_1^2 \frac{dB_1}{dt} + \pi r_2^2 \frac{dB_2}{dt} \right) \quad (15)$$

单位长度的外筒受到的感应电场的力矩为

$$M_2 = (-q) E_2 r_2 = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi} \left(r_1^2 \frac{d\omega}{dt} - r_2^2 \frac{d\Omega}{dt} \right) \quad (16)$$

这里应用了(10)(11)式。将(16)式两边对 t 积分并利用由 ω 与 Ω 的关系(14)可得, 感应电场的力矩

$$J_{\text{电场}} = \int_0^t M_2 dt' = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi} \left(\frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2} r_1^2 - r_2^2 \right) \Omega \quad (17)$$

沿轴向单位长度的外圆筒的角动量为

$$L_2 = m r_2^2 \Omega \quad (18)$$

设外力 (不包括两圆筒感应电磁场的作用力) 对外圆筒的冲量矩为 J , 由角动量定理有

$$J + J_{\text{电场}} = L_2$$

故

$$J = L_2 - J_{\text{电场}} = \left[m r_2^2 - \frac{\mu_0 q^2}{4\pi} \left(\frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2} r_1^2 - r_2^2 \right) \right] \Omega \quad (19)$$

(iii) 沿轴向单位长度的内、外圆筒总的角动量为

$$L = L_1 + L_2 = m (r_1^2 \omega + r_2^2 \Omega) = m \Omega \left(\frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2} r_1^2 + r_2^2 \right) \quad (20)$$