讨论习题课三

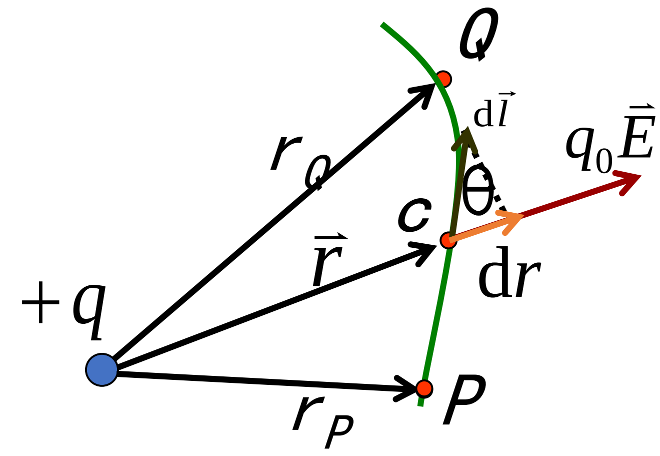
电势、电势与电场的关系

- ◆基本概念复习
- ◆重点概念讨论
- ◆例题与习题

1、静电场的环路定理

$$A=\int_P^Q \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{r_P}^{r_Q}\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_P}-\frac{q}{r_Q}\right)$$



静电场力所做的功只与始点和末点的位置有关

闭合路径，静电力做功 $\oint_L q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

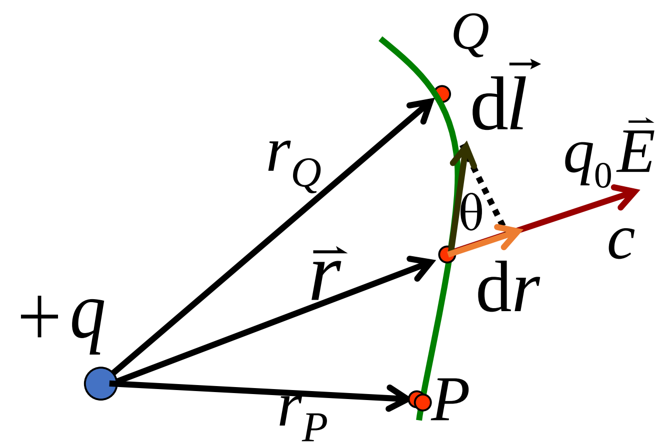
在静电场中，场强沿任意闭合路径的环路积分等于零。

——静电场的环路定理。

2、电势能，电势差，电势

电势能

$$W_{PQ} = A_{PQ} = q_0 \int_{PQ} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



电势差

$$U_{PQ} = \frac{W_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

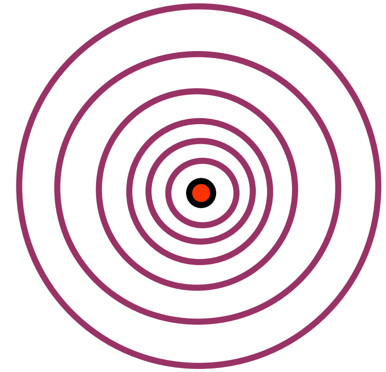
选无穷远为势能零点

$$U(P) = U_{P\infty} = \int_P^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \longrightarrow$$ 电势计算的基本公式

3、 等势面

1. 定义

将电场中电势相等的点连接起来所形成的一系列曲面叫做等势面。等势面上的任一曲线叫做等势线。



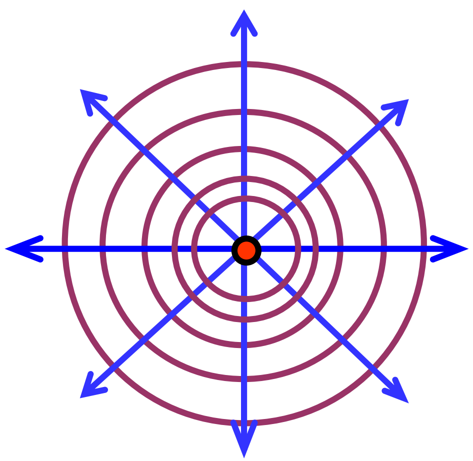
正电荷的等势面

2. 性质：

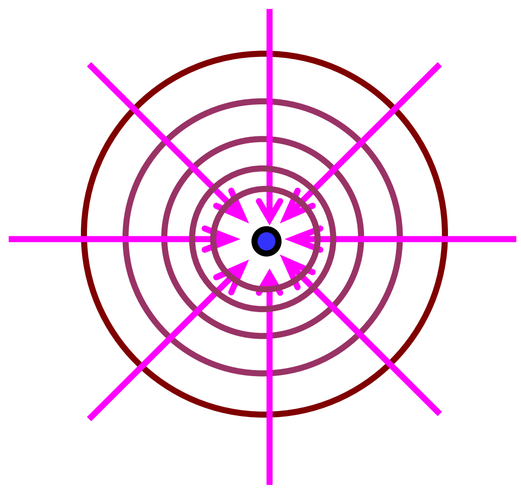
1）电荷沿等势面移动，电场力不作功。

2）等势面处处与电场线正交。

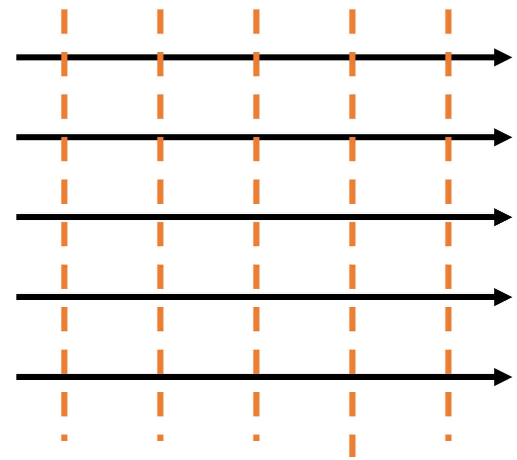
3）规定两个相邻等势面的电势差相等，所以等势面较密集的地方，场强较大。等势面较稀疏的地方，场强较小。



正电荷的场



负电荷的场



均匀电场

4. 电场与电势的关系

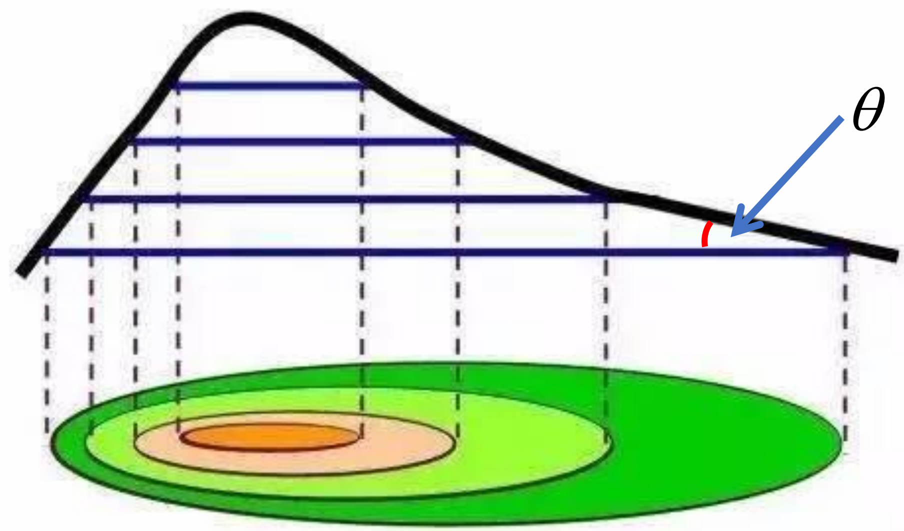
$$U(P)=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad （U_{\infty}=0）$$

$$\vec{E}=-\nabla U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial x}\vec{k}\right)$$

电场 $\longrightarrow$ 坡度 $\tan\theta$

电势 $\longrightarrow$ 高度

等高线原理



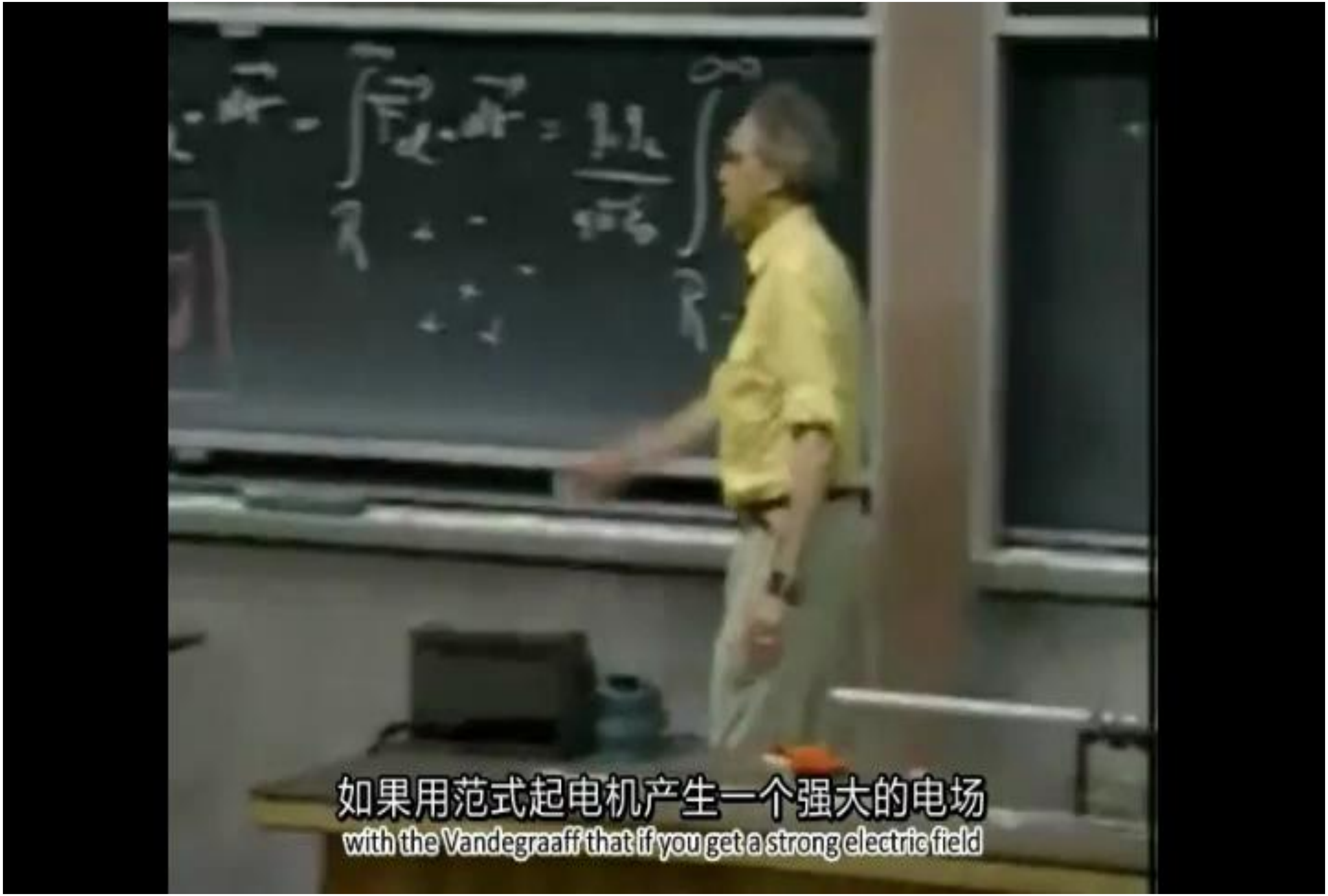
5.　带电体的静电能

离散带电体的互能

$$W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i}q_iU_i=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{n}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

连续带电体的总静电能

$$W_e=\frac{1}{2}\int_q U\,\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\iiint\rho_e U dV$$


如果用范式起电机产生一个强大的电场
with the Vandegraaff that if you get a strong electric field

二、重点概念讨论

讨论题1

下列说法是否正确，为什么？

（1）已知P点的电场**E**，可以确定该点的电势U。

（2）已知P点的电势U，可以确定该点的电场E。

（3）**E**=常矢量，则U=常量。

（4）电场值相等的曲面上，电势值一定相等。

（5）电势值相等的曲面上，电场值一定相等。

All wrong

讨论题2

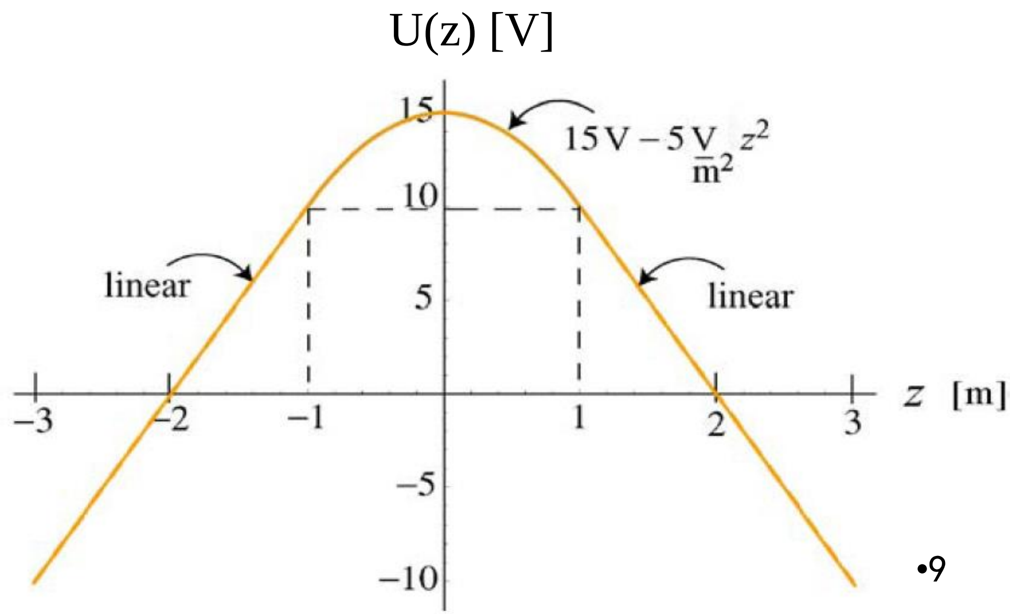
电势U随坐标z的变化关系U(z)如下图所示，下列说法正确的是：

（a）$-3m<z<0$时， $E_z<0$; $0<z<3m$时，$E_z<0$.

（b）$-3m<z<0$时， $E_z<0$; $0<z<3m$时，$E_z>0$.

（c）$-3m<z<0$时， $E_z>0$; $0<z<3m$时，$E_z<0$.

（d）$-3m<z<0$时， $E_z>0$; $0<z<3m$时，$E_z>0$.



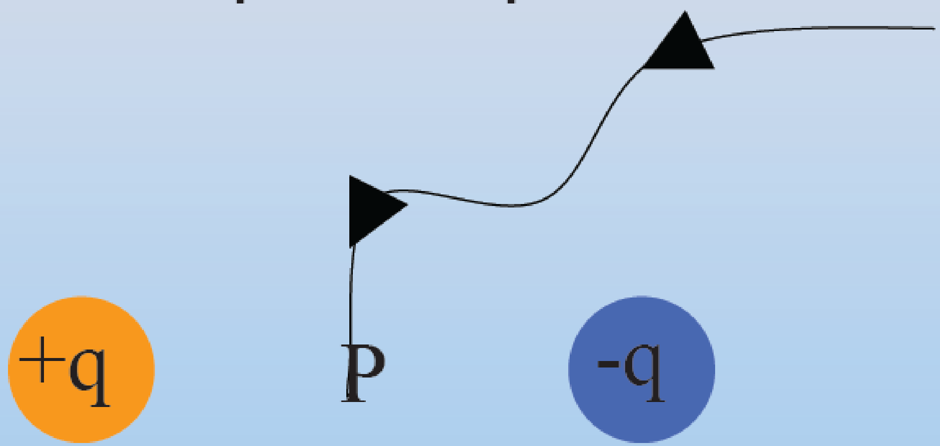
Concept Question: Positive Charge

Place a positive charge in an electric field. It will accelerate from

1. higher to lower *electric potential*; lower to higher *potential energy*
2. √ higher to lower *electric potential*; higher to lower *potential energy*
3. lower to higher *electric potential*; lower to higher *potential energy*
4. lower to higher *electric potential*; higher to lower *potential energy*

Concept Question: Two Point Charges

The work done in moving a positive test charge from infinity to the point P midway between two charges of magnitude +q and –q:



1. is positive.
2. is negative.
3. √ is zero.
4. can not be determined – not enough info is given
5. I don’t know

三、电势的计算

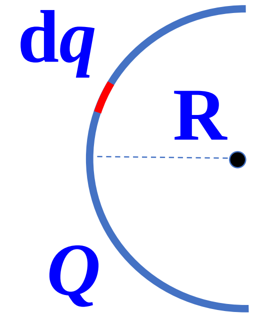
1. 点电荷电势叠加

$$U=\sum_{\mathrm{i}}U_{\mathrm{i}}=\sum_{\mathrm{i}}\frac{q_{\mathrm{i}}}{4\pi\varepsilon_0 r_{\mathrm{i}}}\qquad U=\int \mathrm{d}U=\int_{\mathrm{a}}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2. 场强积分法

$$U(P)=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\qquad (U_{\infty}=0)$$

例 1 计算总带电量为*Q*， 半径为R的半圆弧在其圆心处的电势。



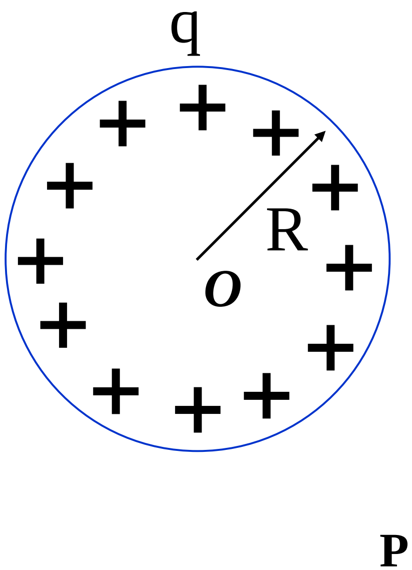
解：在圆弧上取一小段，带电量为dq，它在圆心处产生的电势为

$$\mathrm{d}U = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

总电势为：
$$U = \int \mathrm{d}U = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

例 2 计算半径为R，总电荷量为q的均匀带电球面电场中的电势分布。



解：

先求场强 $E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$

选无穷远为电势零点，则距原点r远处的P点的电势：

$$U_P = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} E dr$$

当r>R时 $U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_r^{\infty} \dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

当r<R时，由于球内外场强的函数关系不同，积分必须分段进行:

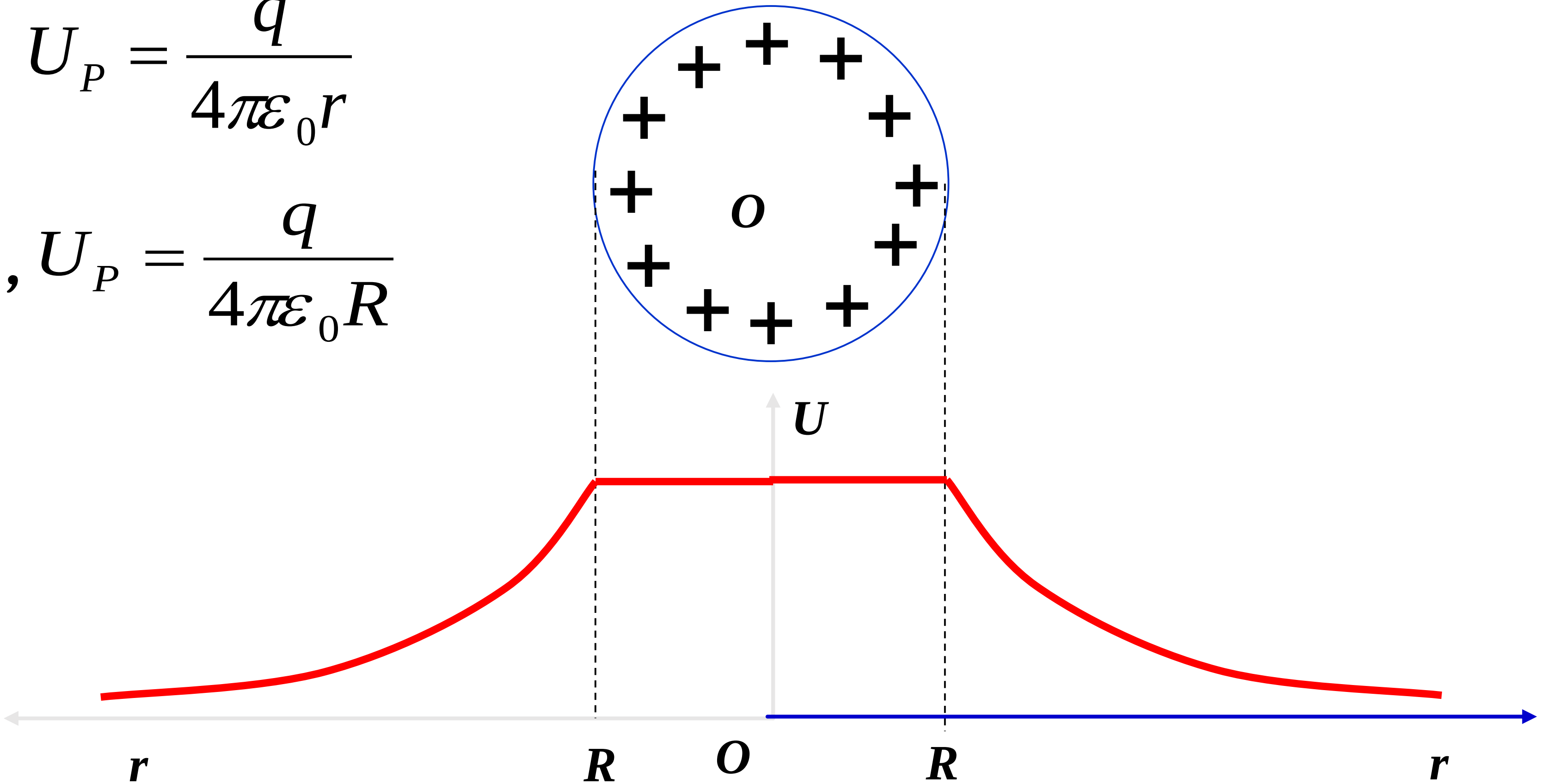
$$U_P = \int_r^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{R} 0 \cdot dr + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

电势随距离r的变化关系如图所示。

当r>R时 $U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

当r<R时，$U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$



球面外：等同于把全部电荷看作集中于球心

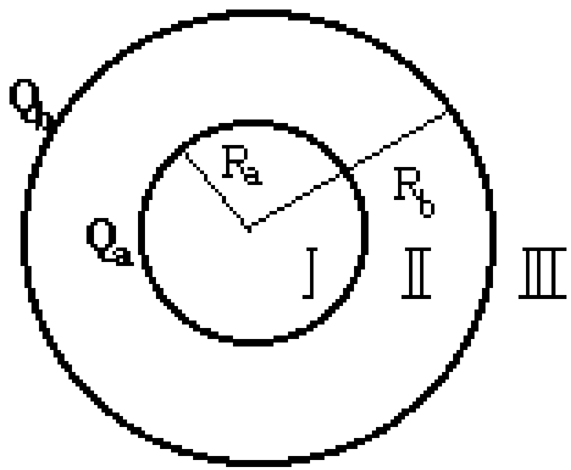
球面内：任意一点电势相等。

均匀带电球面及其内部是一个等电势空间。

例3 两个均匀带电的同心球壳，半径分别为R_a和R_b，带电总量分别为Q_a和Q_b,求图中I、II、III区内的电势分布

方法一：已知场强求电势

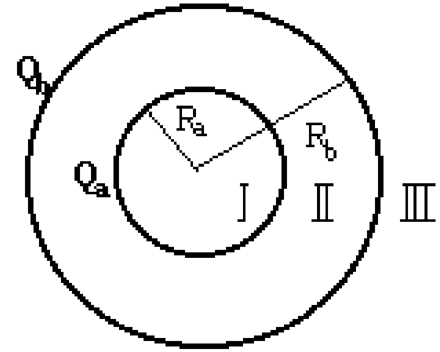
$$E_1 = 0 \qquad 0 < r < R_a$$



$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_a}{r^2} \qquad R_a < r < R_b$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_a + Q_b}{r^2} \qquad r > R_b$$

$$III \qquad U_3 = \int_r^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_a + Q_b}{r}$$



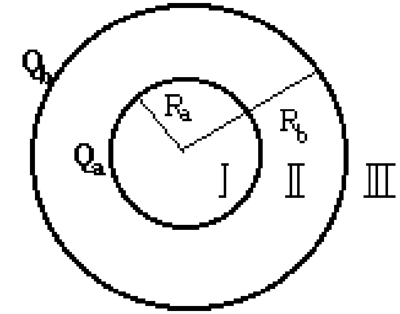
$$II \qquad U_2 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^{R_b} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{R_b}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b}\right) + \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_a}{r} + \frac{Q_b}{R_b}\right)$$

$$I \qquad U_1 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^{R_a} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{R_a}^{R_b} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{R_b}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= 0 + \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right) + \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_a}{R_a} + \frac{Q_b}{R_b}\right)$$

方法二：电势叠加



内壳单独存在

$$\begin{cases} r < R_a & U_{内} = \dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 R_a} \\ r > R_a & U_{外} = \dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

外壳单独存在

$$\begin{cases} r < R_b & U_{内} = \dfrac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 R_b} \\ r > R_b & U_{外} = \dfrac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

I： $U_{1内} + U_{2内} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_a}{R_a} + \dfrac{Q_b}{R_b}\right)$

II： $U_{1外} + U_{2内} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_a}{r} + \dfrac{Q_b}{R_b}\right)$

III： $U_{1外} + U_{2外} = \dfrac{Q_a + Q_b}{4\pi\varepsilon_0 r}$

思考：能否从电势表达式算出电场强度的表达式？

$$\vec{E} = -\nabla U \qquad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

例4：求无限长均匀带电直线的电势分布（带电线密度为λ）。

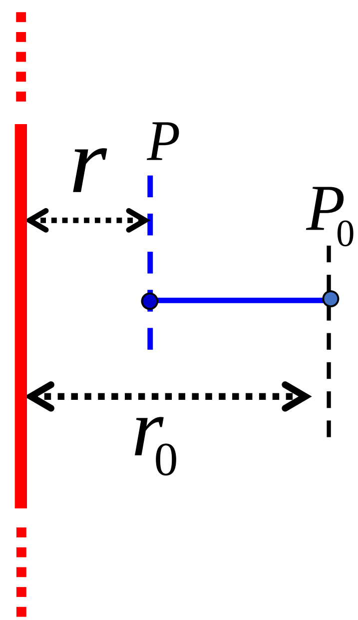
解：由高斯定理知场强为： $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 电荷线密度

方向垂直于带电直线。

选取某一距带电直导线为r_0的p_0点为电势零点，则距带电直线为r的p点的电势：

$$U_P=\int_{r_P}^{r_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_P}^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_0-\ln r_P)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_P}$$



r_P越小，电势越高。

由此例看出，当电荷分布扩展到无穷远时，电势零点不能再选在无穷远处。

扩展：试估算高压线路所能承受的最高电压（空气击穿场强$E_{\max}$约为3×10^{6}V/m）。

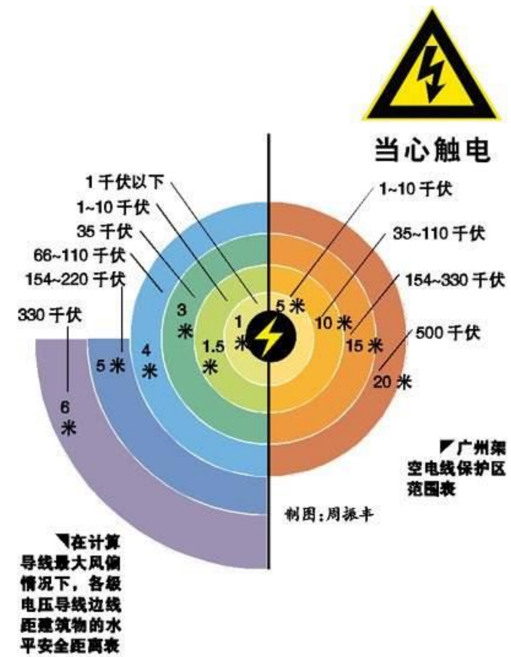
解：由高斯定理知距离导线半径r处场强大小为：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

电势为：

$$U(\mathrm{r})=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)$$

$$U(r)=E(r)r\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)$$



选地面为势能零点（R_0=10m），导线半径r =1cm，导线表面场强达到$E_{\max}$ 时的电压

$$U_{\max}=E_{\max}r\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)=(3\times10^{6}\,\mathrm{V/m})(1\mathrm{cm})\ln\left(\frac{10\mathrm{m}}{1\mathrm{cm}}\right)$$

$$\approx 200\ \mathrm{kV}$$

提高承受最高电压的方法：

（1）增加R_0，　（1）增加导线半径（450 kV　r ~2.5cm）

估计高压线电压的三个途径：

1. 高压线塔的高度

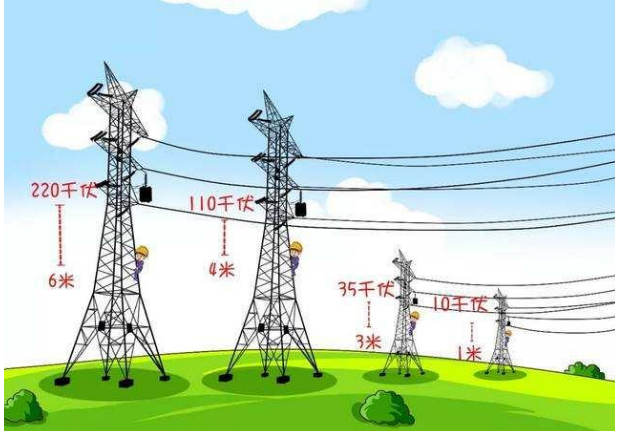
2. 导线分裂数（八股线，六股线）

   a. 防止电晕放电

   b. 降低交流电趋肤效应

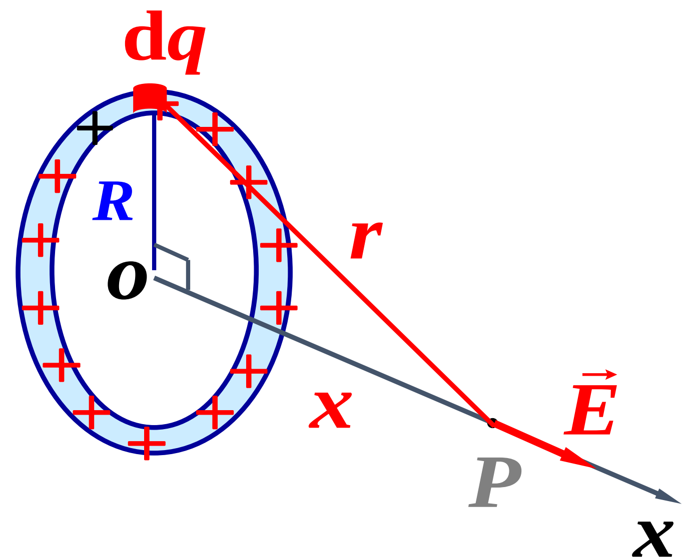
3. 绝缘子数目

每个绝缘子承受电压大小为1-1.5万伏特。



例5. 均匀带电细圆环轴线上的电场强度和电势（ 已知 q，R ）。

解：先用叠加原理求电势，再用微分关系求 电场强度。



$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\,\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$$

$$U = \int \mathrm{d}U = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\,\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}\int \mathrm{d}q = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E} = -\nabla U \qquad E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q\,x}{4\pi\,\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}, \qquad E_y = 0, \quad E_z = 0$$

$$\therefore \qquad \vec{E} = \frac{q\,x}{4\pi\,\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\,\vec{i}$$

例6：求电偶极子相当远的地方一点的电势。

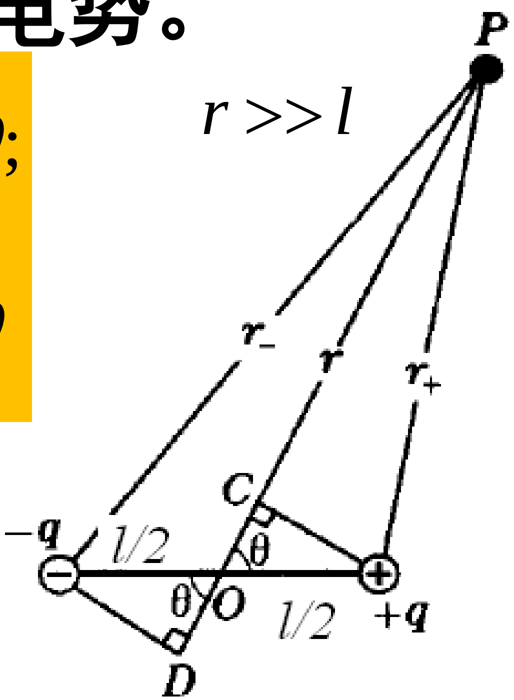
两电荷单独存在时：

$$U_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+};\ \ U_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-}$$

$$r_+ \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta;$$

$$r_- \approx r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

$r >> l$



叠加: $U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$

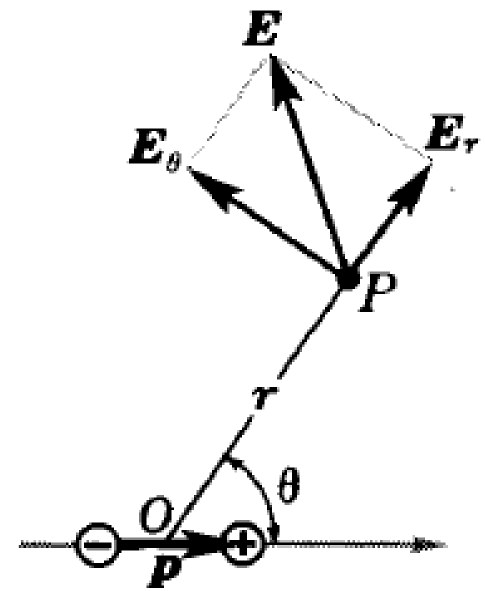
$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r - \frac{l}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2}\cos\theta}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2 - (\frac{l}{2}\cos\theta)^2}$$

$$U \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{\vec{r}}}{r^2}$$

例7：求电偶极子的场强分布，已知 $U=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{P\cos\theta}{r^2}$

球坐标系：

$$\vec{E}=-\nabla U \qquad \begin{cases} E_r=-\dfrac{\partial U}{\partial r}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial\theta}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\sin\theta}{r^3} \\ E_\varphi=-\dfrac{1}{r\cos\theta}\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}=0 \end{cases}$$



在偶极子延长线上，$\mathrm{E}=\mathrm{E}_r=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p}{r^3}$

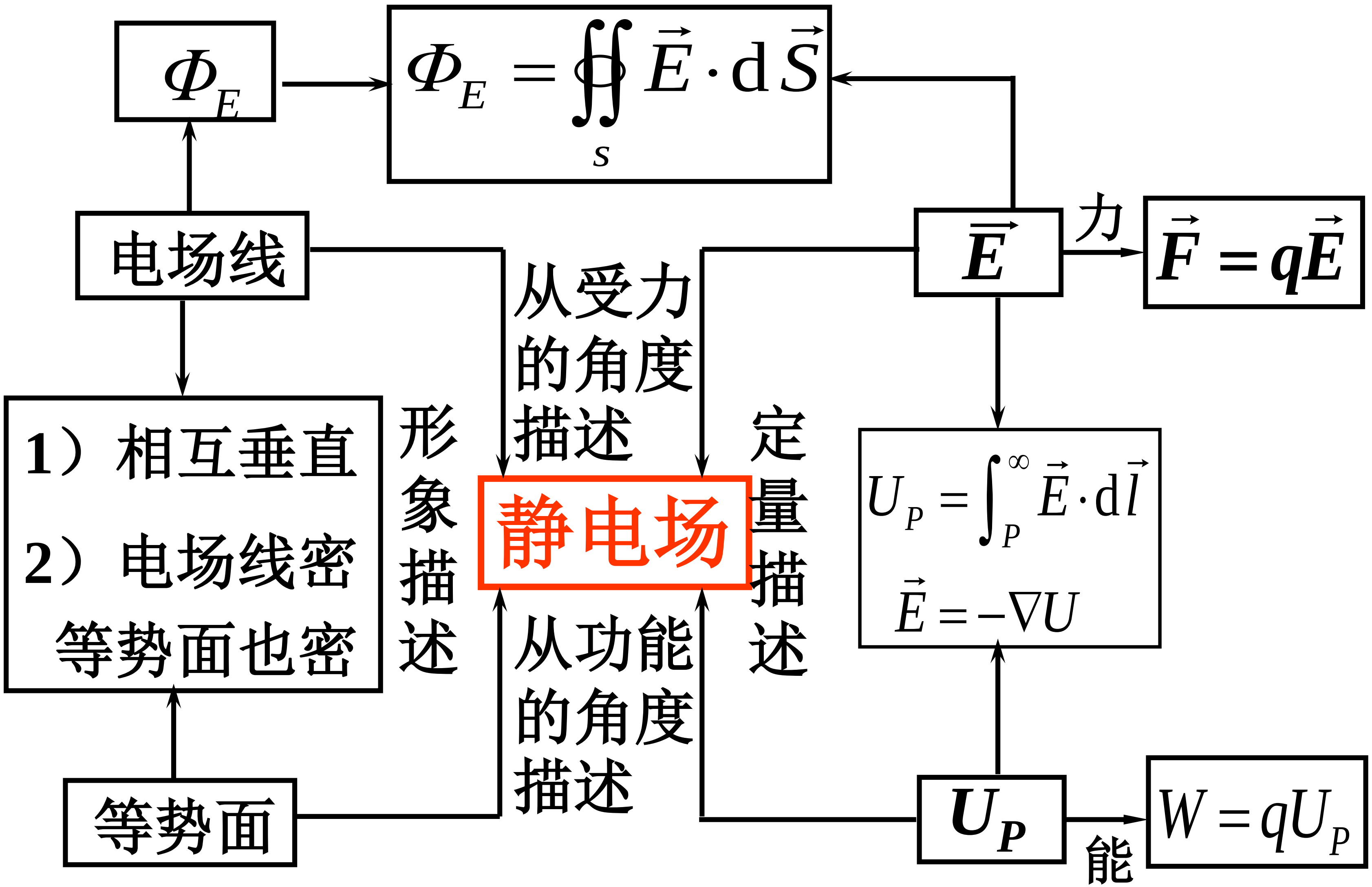
在中垂面上，$E=E_\theta=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^3}$

本章小结

一. 基本定律、定理:

$$\left.\begin{array}{l} \text{库仑定律} \\ \vec{E} = \vec{F}/q_0 \\ \vec{E} = \sum \vec{E}_i \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \vec{E} = \sum\limits_i \dfrac{q_i \hat{\vec{r}}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \\ \rightarrow \vec{E} = \iiint d\vec{E} \end{array} \left[\begin{array}{l} \rightarrow \oiint\limits_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{s\text{内}} q_i \\ \oint\limits_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \end{array}\right.$$

二. 基本物理量之间的关系：



三. 求场的方法:

1. 求$\vec{E}$

- 叠加法（补偿法）：$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$，

$$E=\int_q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dq;$$

- 高斯定理法: $\oiint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

- 微分法: $\vec{E}=-\nabla U$，$E_l=-\frac{\partial U}{\partial l}$。

2.求U

$$\begin{cases} \text{场强积分法：} U_p = \int_{(P)}^{(\infty)} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \\ \qquad\qquad (\vec{E}\text{分段，积分也要分段}); \\ \text{叠加法（补偿法）：} U = \sum_i U_i \text{（零点要同）} \\ \qquad U = \int_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad (U_\infty = 0)\text{。} \end{cases}$$

四.几种典型电荷分布的场强和电势：

点电荷；均匀带电薄球壳；均匀带电大平板；

均匀带电长直线；均匀带电长圆筒。