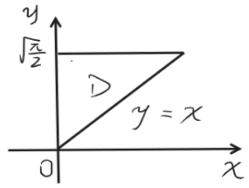
6月份月考-A卷-答案

1、计算$\iint\limits_D \sin y^2 dxdy$，D为$x=0$，$y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$和$y=x$所围成的闭区域.

解：画出积分区域D，如图所示.



将其表示为Y-型区域：

$$\begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

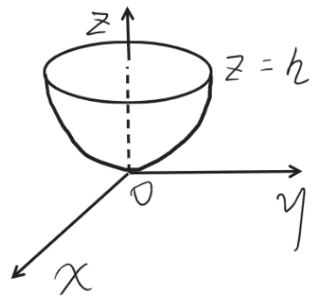
所以

$$\iint\limits_D \sin y^2 dxdy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dy \int_0^y \sin y^2 dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y \sin y^2 dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin y^2 \, d y^2 = -\frac{1}{2}\cos y^2 \Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}$$

2、计算$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2) dxdydz$，其中$\Omega$为抛物面$z=x^2+y^2$与平面$z=h\,(h>0)$所围的闭区域.

解：如图所示，利用柱坐标，可将Ω表示为：



$$\begin{cases} r^2 \le z \le h \\ 0 \le \rho \le \sqrt{h} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

因此

$$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{h}} \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^h dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} \rho^3 (h-\rho^2) d\rho = \frac{\pi}{6} h^3.$$

3、计算曲面积分$\iint\limits_\Sigma \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right) ds$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$.

解：由轮换对称性，有

$$\iint\limits_\Sigma x^2 ds = \iint\limits_\Sigma y^2 ds = \iint\limits_\Sigma z^2 ds,$$

又由于$\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2) ds = \iint\limits_\Sigma a^2 ds = 4\pi a^4$，所以

$$\iint\limits_\Sigma \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right) ds = \frac{13}{12}\iint\limits_\Sigma x^2 ds = \frac{13}{9}\pi a^4.$$

4. 教材 P293 例4.8.

5. 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} 2(1-x^2)dydz + 8xydzdx - 4zxdxdy,$$

其中Σ是由平面曲线$x=e^y$ $(0\le y\le a)$绕x轴旋转而成的曲面，其法向量与x轴正向夹角为钝角.

解：易知Σ的方程为：$x=e^{\sqrt{y^2+z^2}}$ $(y^2+z^2\le a^2)$，

方向取后侧，补充Σ'：$x=e^a$ $(y^2+z^2\le a^2)$，

方向取前侧，设Ω是$\Sigma+\Sigma'$所围成的空间区域，

由Gauss公式：

$$\iint_{\Sigma+\Sigma'} 2(1-x^2)dydz + 8xydzdx - 4zxdxdy$$

$$=\iiint_{\Omega} 0\, dxdydz = 0.$$

因此，

$$\iint_{\Sigma} 2(1-x^2)dydz + 8xydzdx - 4zxdxdy$$

$$= -\iint_{\Sigma'} 2(1-e^{2a})dydz = 2\pi a^2(e^{2a}-1).$$