第四章 恒定磁场

磁学发展历史

- 公元前5世纪，希腊人发现磁石（磁铁矿）
- 战国时代，中国人开始利用磁石制成司南
- 公元13世纪，人们认识到磁极的存在（磁偶极）
- 公元16世纪，Gilbert发现地磁场
- 1820年，奥斯特发现磁针会受到电流的影响
- 1820年，安培、毕奥、萨伐尔关于载流导线之间作用的研究
- 1821年，安培提出分子环流假设
- 1831年，法拉第发现电磁感应现象
- 。。。。。。
- 1865年，麦克斯韦方程组的建立

§ 4.1-4.3

一、毕奥-萨伐尔定律

1.毕奥-萨伐尔定律的表述

2.毕奥-萨伐尔定律的应用

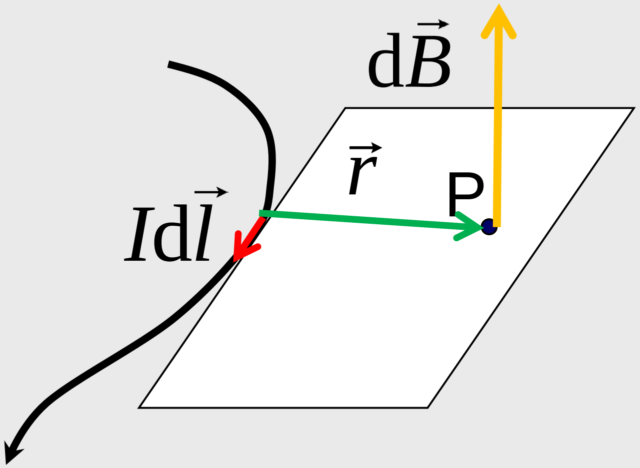
二、磁场的高斯定理

磁场是无源场

一、毕奥–萨伐尔定律

电流元产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I_1\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \hat{\vec{r}})}{r^2}$$



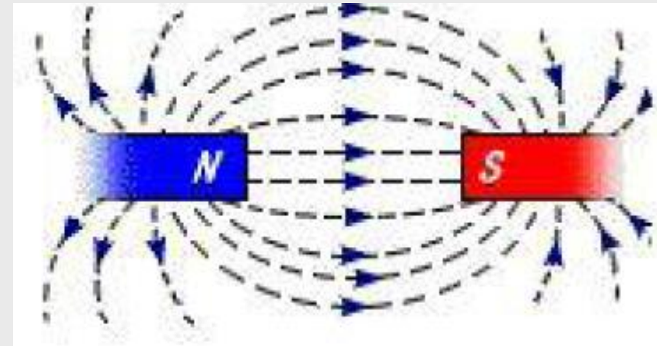
磁场遵从**矢量叠加原理**

载流回路产生的磁场： $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L \frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \hat{\vec{r}}}{r^2}$$

B单位：特斯拉（T）

磁场的描述为什么不用“磁场强度”？

电荷 → 磁荷



$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} \rightarrow F=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2}$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q} \rightarrow \vec{H}=\frac{\vec{F}}{q_m}$$

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{J}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{\vec{r}})}{r^2}$$

$$\vec{F}=\mathrm{q}\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\\ \vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\end{gathered}}$$

两电流元之间的安培定律：

$$d\overrightarrow{F_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{\vec{r}}_{12})}{r^2{}_{12}}$$

$$= I_2 d\vec{l}_2 \times \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{\vec{r}}_{12})}{r_{12}^2}}$$

$$= I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1$$

电流元$I_1 d\vec{l}_1$产生的磁场

回路L_1对试探电流元$I_2 dl_2$的作用

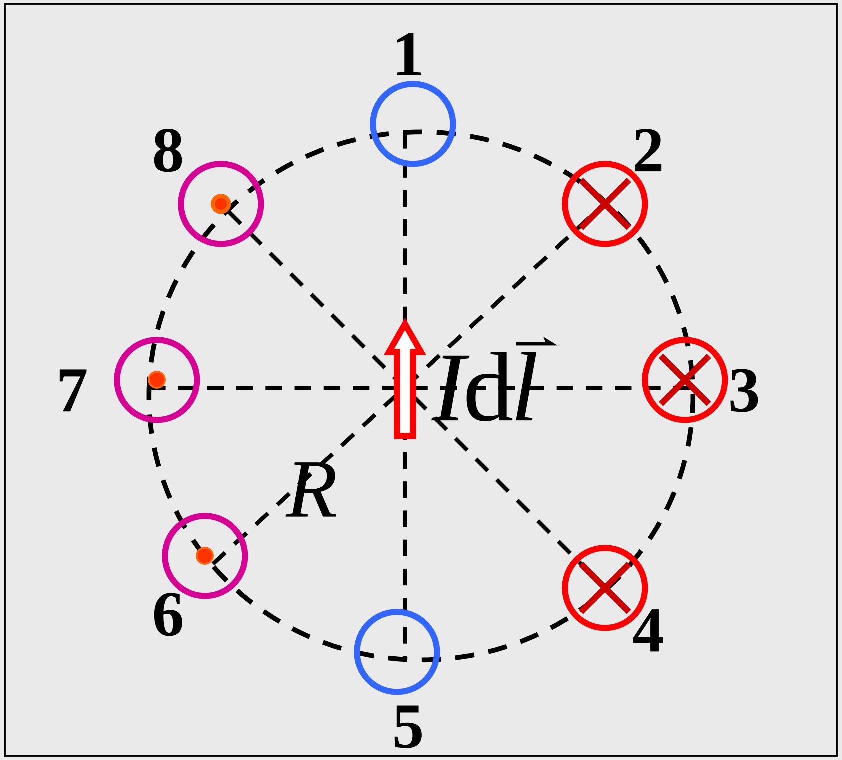
$$dF_2 = I_2 dl_2 \times \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{\vec{r}}_{12}}{r_{12}^2}} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

2. 毕奥-萨伐尔定律的应用

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \hat{\vec{r}}}{r^2}$$

2.1 载流元

例1. 判断下列各点磁感强度的方向和大小.



1、5 点：$\mathrm{d}B = 0$

3、7点：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}$

2、4、6、8 点：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}\sin 45^0$$

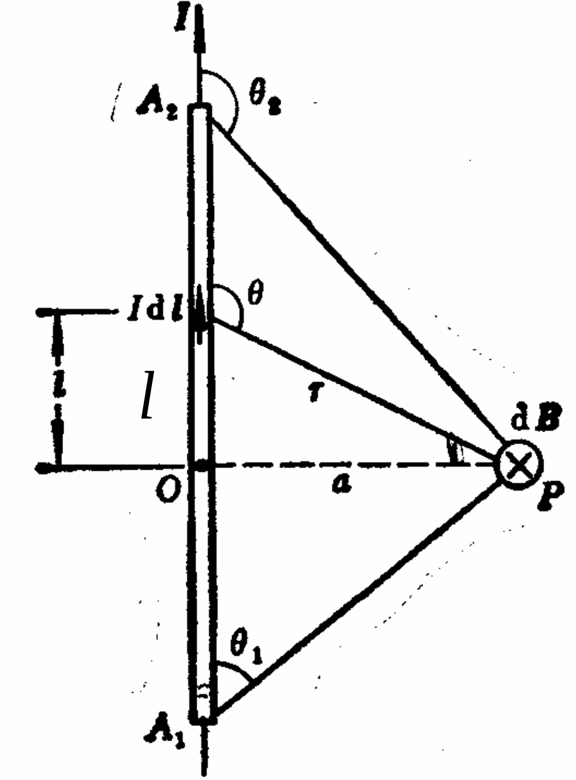
2.2 载流系统的磁场

- 载流直导线的磁场
- 载流圆线圈轴线上的磁场
- 亥姆霍兹线圈
- 载流螺线管中的磁场

例2.载流直导线的磁场

- 分割，取微元*Idl*，微元在 P 点的磁感应强度

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\vec{l}\times\hat{r})}{r^2}\left\langle \begin{array}{l} 大小: \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\theta}{r^2} \\ 方向: \otimes \end{array}\right.$$



$$l = -actg\theta;$$

$$dl = \frac{a}{\sin^2\theta}d\theta$$

- 叠加

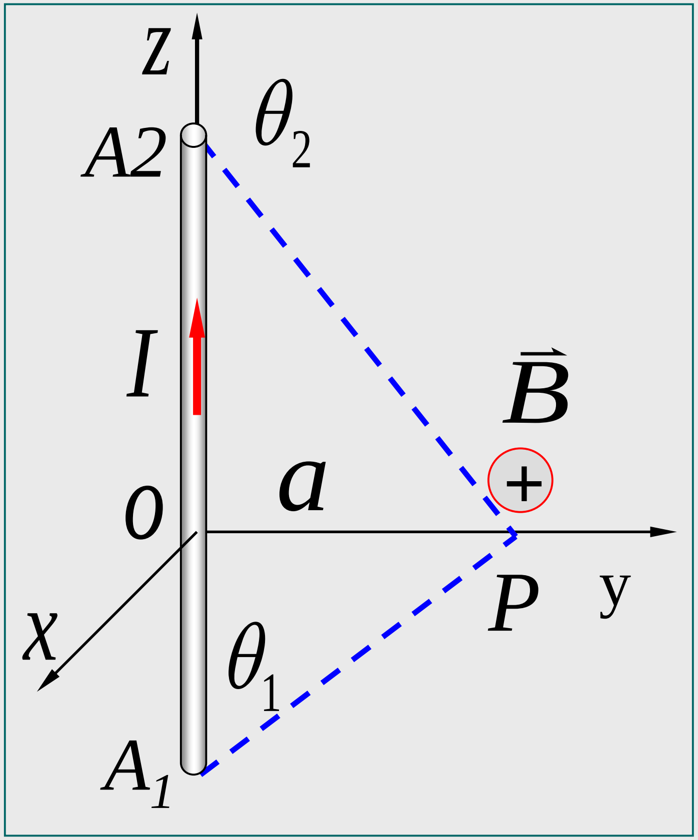
$$B = \int_{A_1}^{A_2} dB = \int_{A_1}^{A_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

$$r = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta \mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$\vec{B}$ 的方向沿 x 轴的负方向.

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}$$



无限长载流长直导线的磁场.

$\theta_1 \to 0$

$\theta_2 \to \pi$

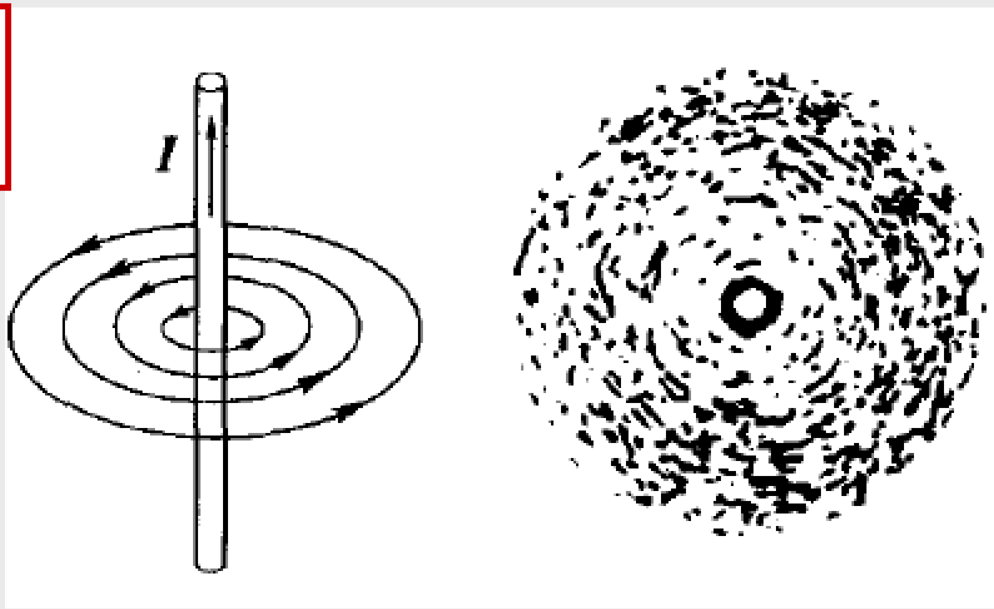
$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

半无限长 $\theta_1=0, \theta_2=\frac{\pi}{2}$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

载流直导线的磁场分布

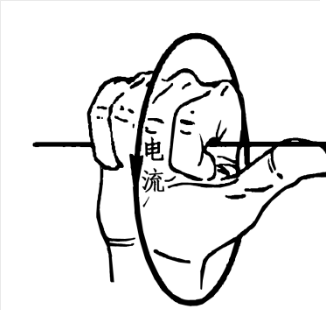
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

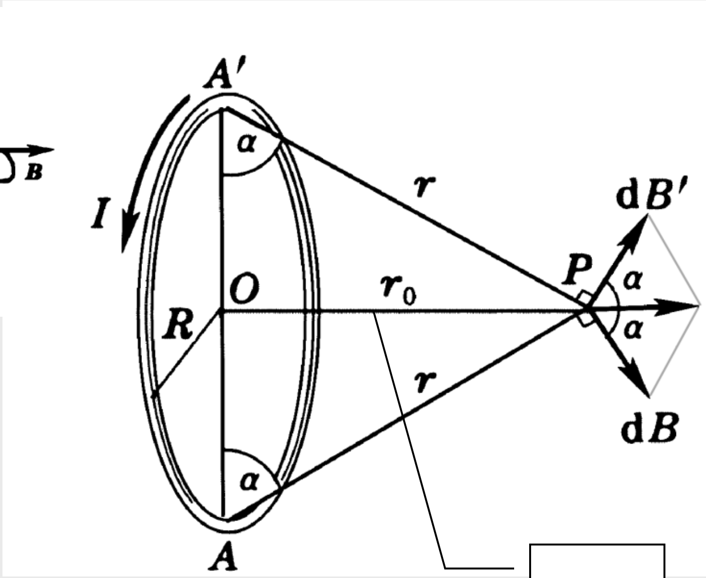


电流传感器

脑磁图：监测脑内神经电流

例3.载流圆线圈轴线上的磁场





x

解：

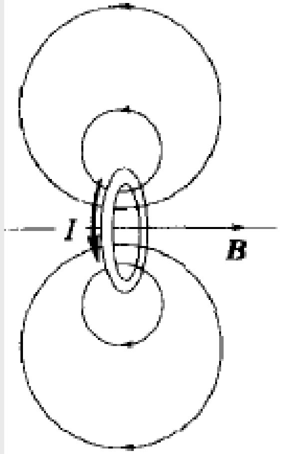
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

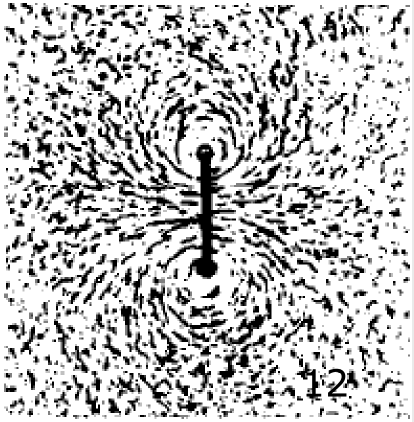
- 由对称性,只有*x*分量不为零,即 $B_x = \oint dB_x = \oint dB\cos\alpha$

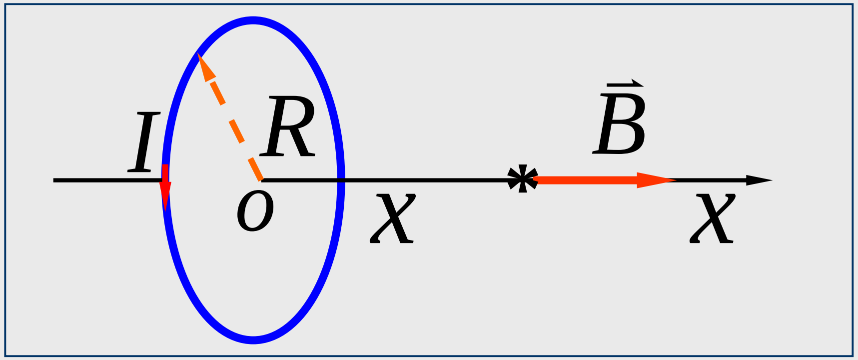
$$B_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\cos\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r_0^2}\sin^2\alpha\cos\alpha\oint dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2}\cdot\frac{r_0^2}{R^2+r_0^2}\cdot\frac{R}{(R^2+r_0^2)^{1/2}}2\pi R$$

$$= \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+r_0^2)^{3/2}}$$







$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

讨论

1）若线圈有N匝

$$B=\frac{\boxed{N}\ \mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

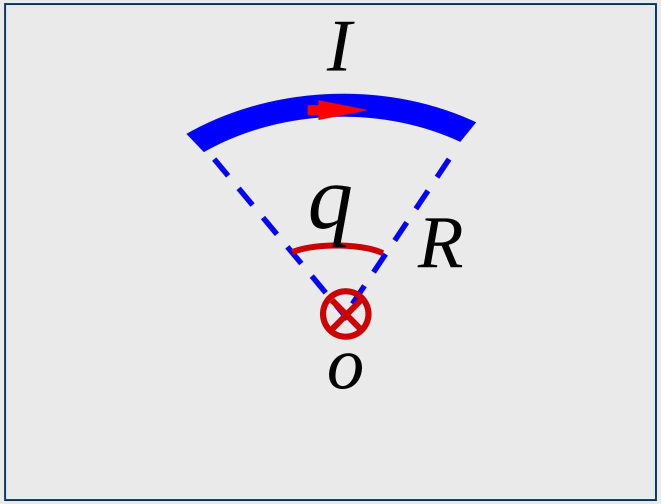
2）$x<0$ $\vec{B}$的方向不变(I和$\vec{B}$成**右螺旋**关系）

3） $x=0$	$B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$	圆环形电流中心的磁场

4）$x>>R$ $B=\dfrac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$,

圆弧形电流在圆心处的磁场是什么？

$$\boxed{B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\theta}{2\pi}}$$

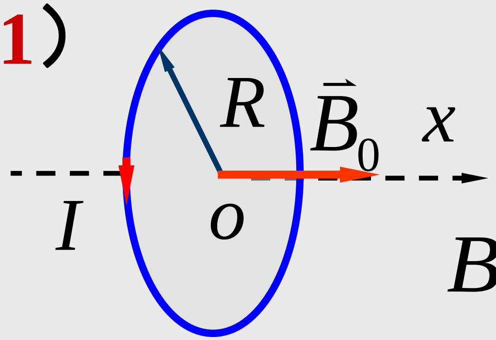


方向：$\otimes$

注：仍可由右手定则判定方向！

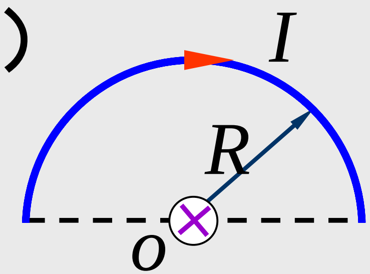
几种典型电流体系的磁场

（1）



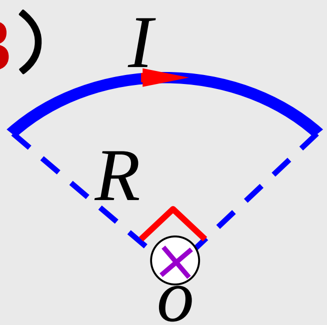
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

（2）



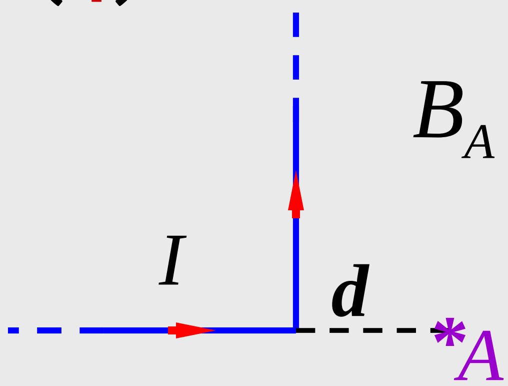
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R}$$

（3）



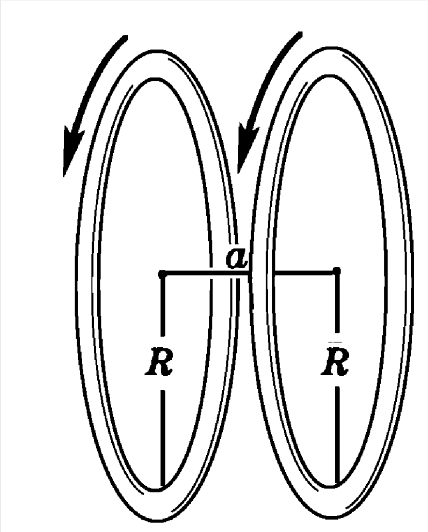
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

（4）



$$B_A=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

例4. 一对相同的圆形线圈，彼此平行且共轴。两线圈电流环绕方向一致，大小都是I，线圈半径为R，间距为a。

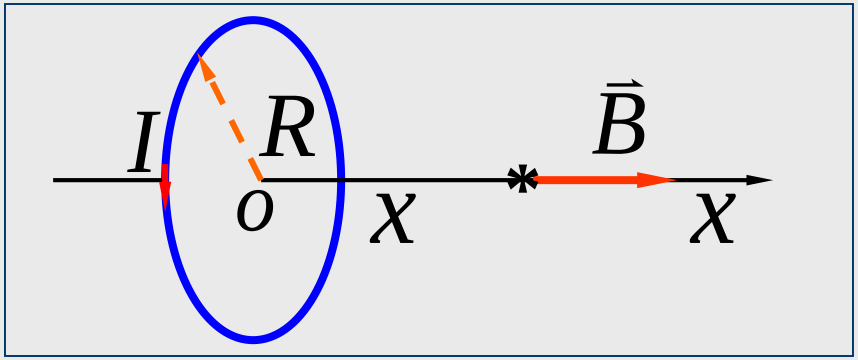


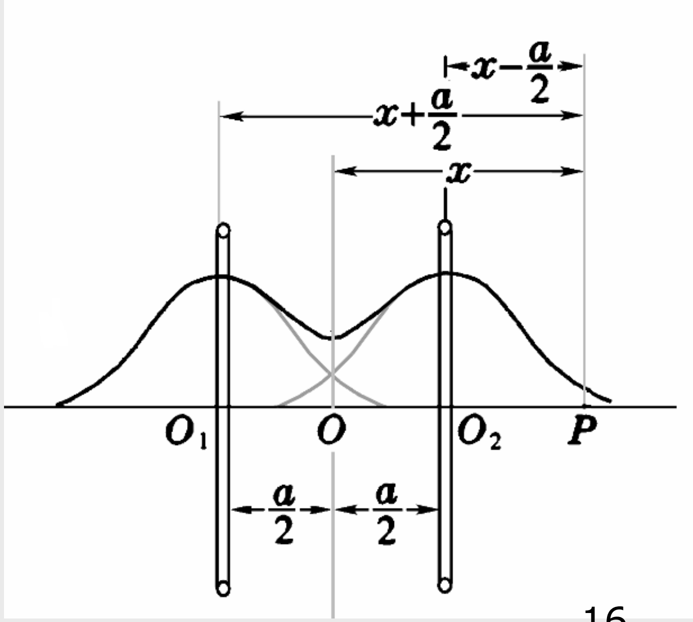
求：

(1)求轴线上的磁场分布；

(2)a多大时，中心点O处场强最均匀。

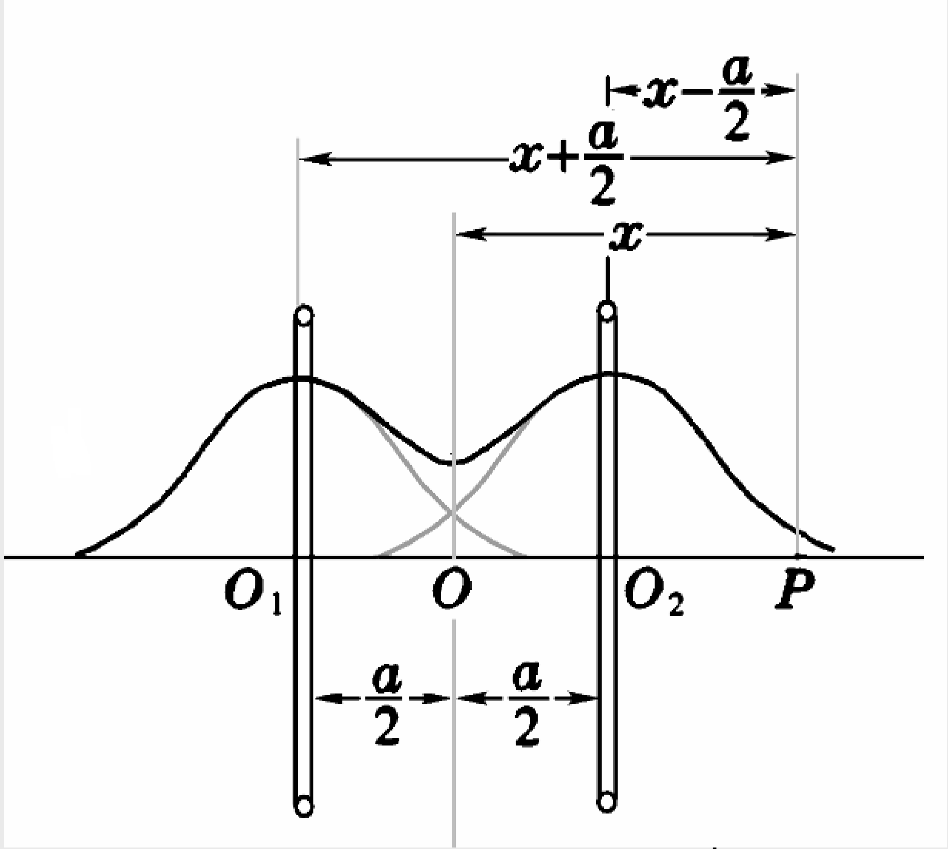
解：





单个圆形线圈：$B=\dfrac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{\left[R^2 + (x+\frac{a}{2})^2\right]^{3/2}}$$



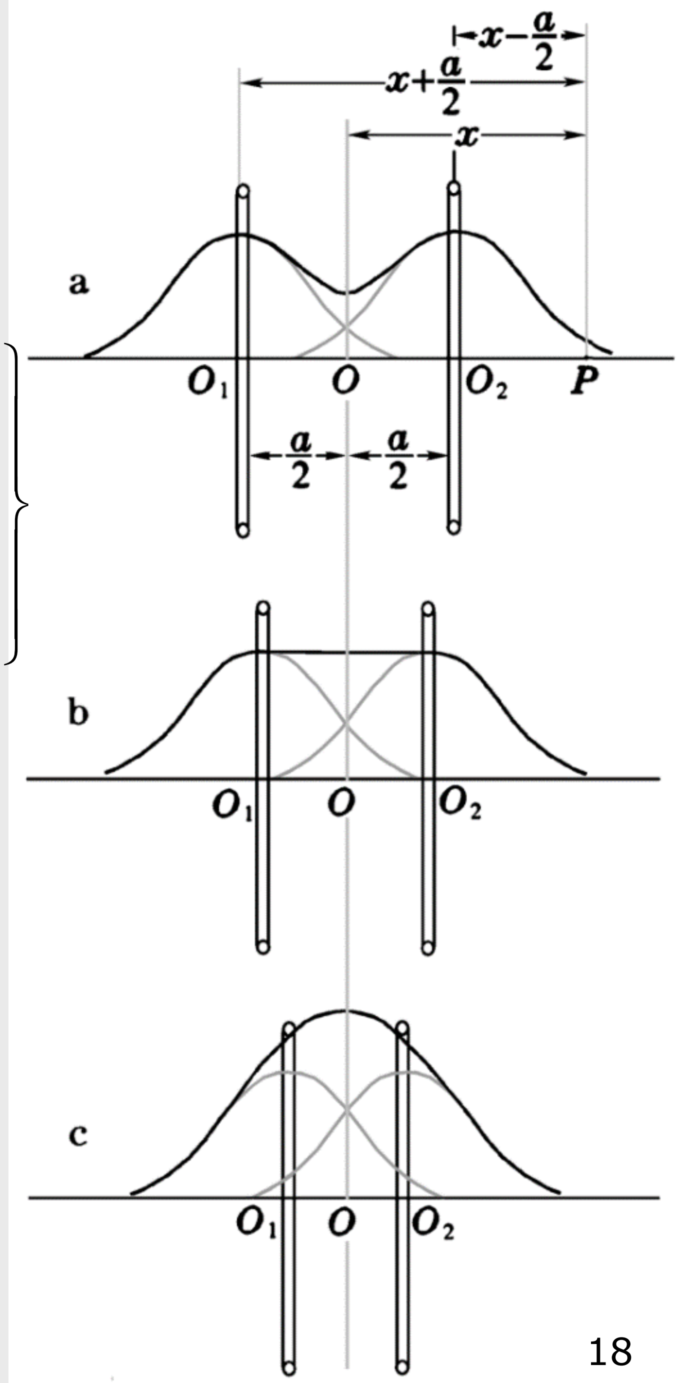
$$B_2 = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{\left[R^2 + (x-\frac{a}{2})^2\right]^{3/2}}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2} R^2 I \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + (x+\frac{a}{2})^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + (x-\frac{a}{2})^2\right]^{3/2}} \right\}$$

(2) a多大时，中心点0处场强最均匀。

- **求一阶导数**

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{\mu_0}{2} 3R^2 I \left\{ \frac{x+\frac{a}{2}}{\left[R^2+(x+\frac{a}{2})^2\right]^{5/2}} + \frac{x-\frac{a}{2}}{\left[R^2+(x-\frac{a}{2})^2\right]^{5/2}} \right\}$$



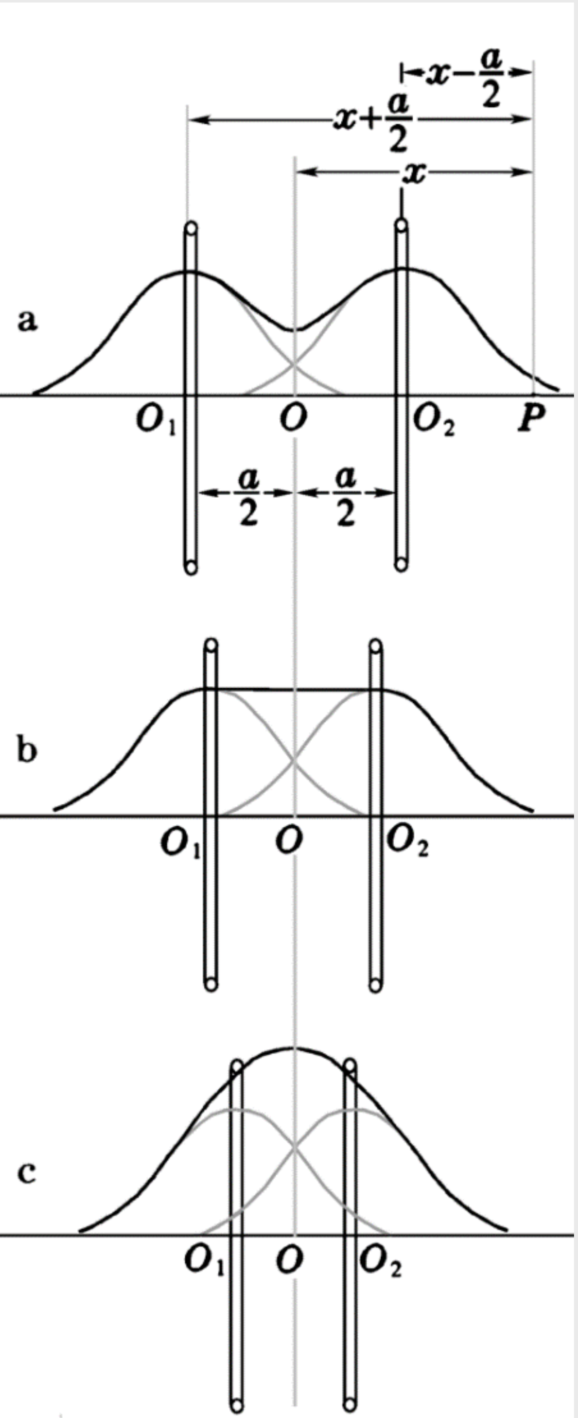
- **求二阶导数**

$$\frac{d^2B}{dx^2}=\frac{\mu_0}{2}3R^2I\left\{\frac{4\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-R^2}{\left[R^2+(x+\frac{a}{2})^2\right]^{7/2}}+\frac{4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-R^2}{\left[R^2+(x-\frac{a}{2})^2\right]^{7/2}}\right\}$$

令$x=0$处的$\frac{d^2B}{dx^2}=0\Rightarrow$ **在O点附近磁场最均匀的条件**

$$\left.\frac{d^2B}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{\mu_0}{2}3R^2I\,\frac{2a^2-2R^2}{2\left[R^2+\frac{a^2}{4}\right]^{7/2}}=0\Rightarrow a^2=R^2$$

$$a=R$$

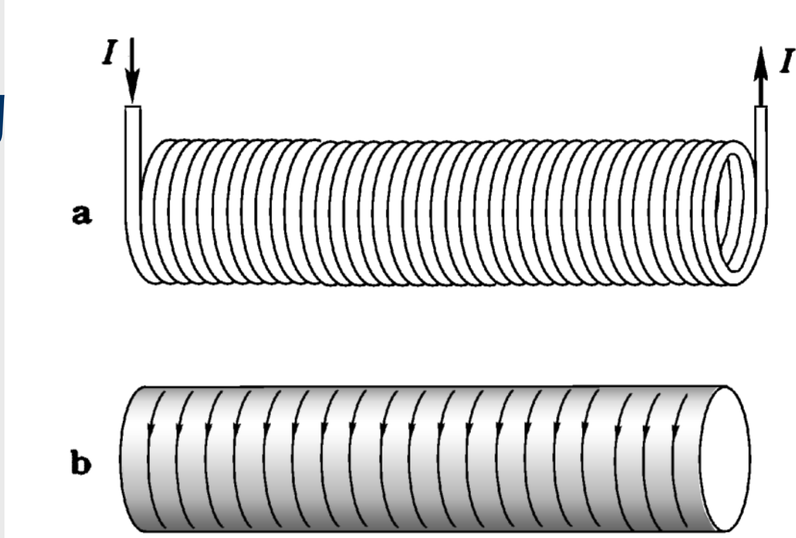


亥姆霍兹线圈

结构：一对间距等于半径的同轴载流圆线圈。

用处：在实验室中，当所需磁场不太强时，常用来产生均匀磁场。

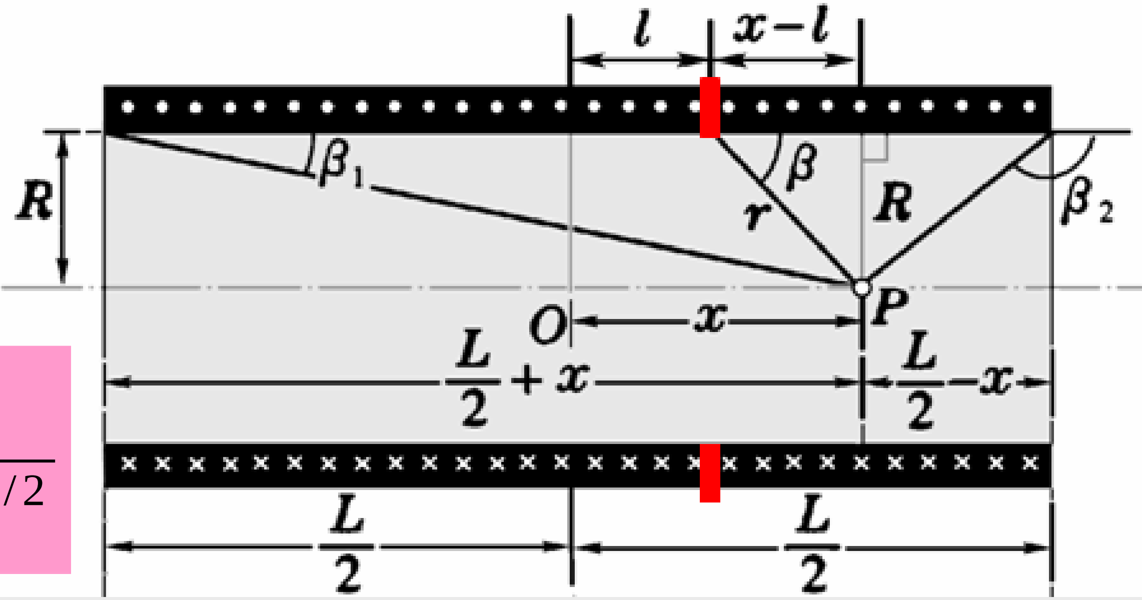
例5. 载流密绕螺线管中的磁场



解：

- **长为L，单位长度匝数为n的密绕螺线管，可忽略螺距，半径为R,通电流为I。求轴线上的磁场。（近似成导体圆筒，电流连续地沿环向分布。）**

$$\text{单线圈：} \mathrm{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + r_0^2)^{3/2}}$$



单线圈：$B=\dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+r_0^2)^{3/2}}$

dl内的电流：$Indl$

n: 单位长度内的匝数

$$dB=\frac{\mu_0 I R^2 n dl}{2(R^2+(x-l)^2)^{3/2}}$$

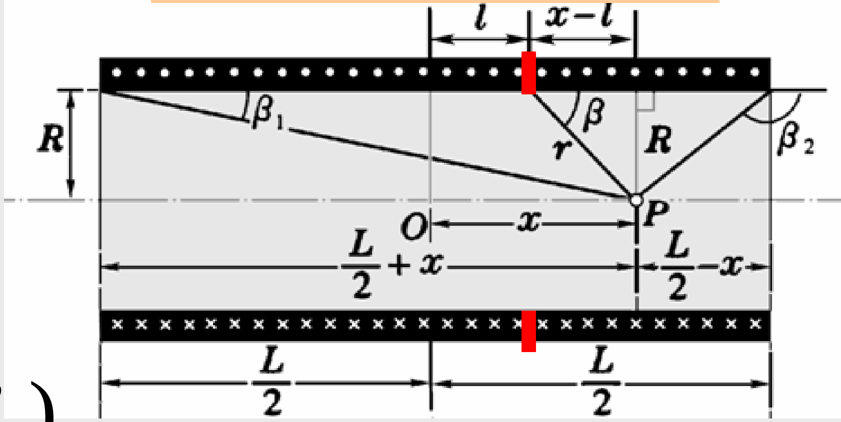
$$x-l=R\,ctg\beta,\quad dl=\frac{R}{\sin^2\beta}d\beta$$

$$\sqrt{R^2+(x-l)^2}=r=\frac{R}{\sin\beta}$$

$$B=\int dB=\int \frac{\mu_0 n I R^2 \mathrm{d}l}{2(R^2+(x-l)^2)^{3/2}}$$

$$x-l=R\,ctg\beta,\ \mathrm{d}l=\frac{R}{\sin^2\beta}\mathrm{d}\beta$$

$$\sqrt{R^2+(x-l)^2}=r=\frac{R}{\sin\beta}$$



$$=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\mu_0 n I}{2}\sin\beta d\beta$$

$$=\frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\beta_1-\cos\beta_2)$$

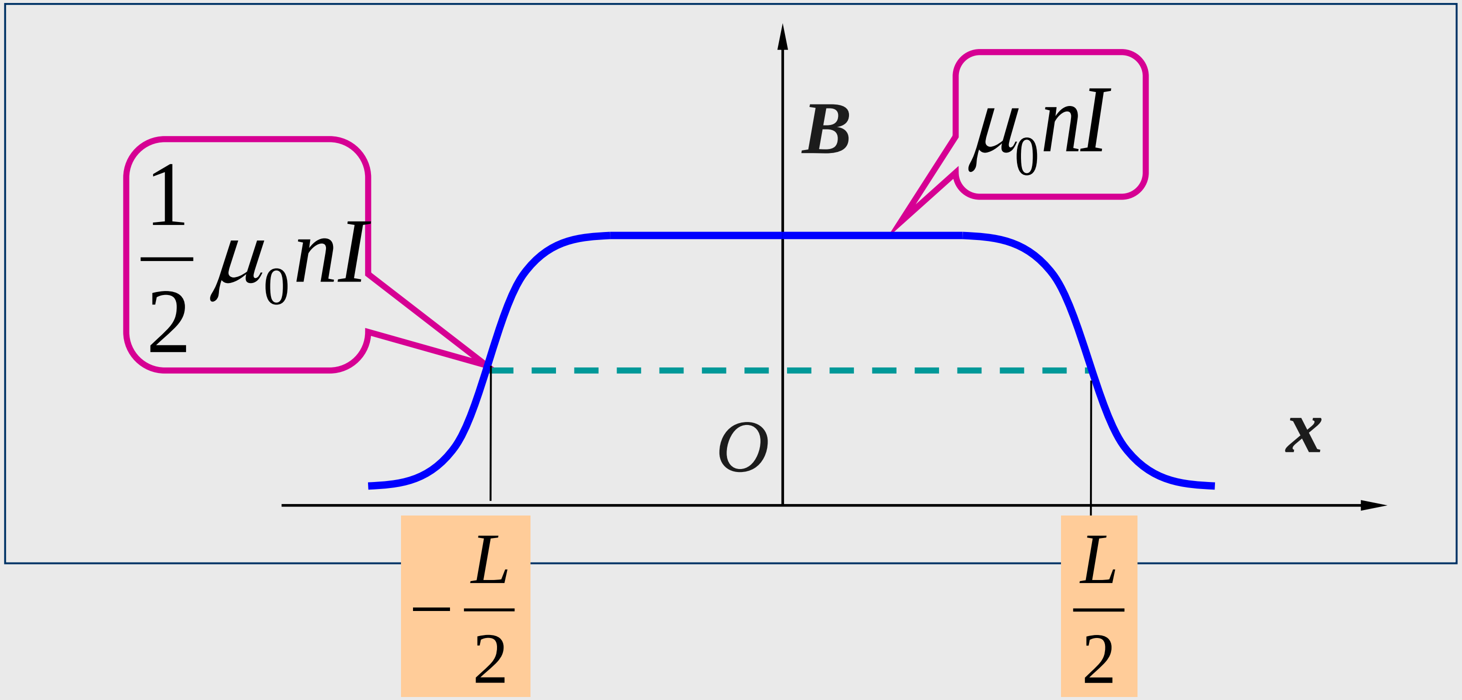
说明轴线上的B处处相同，
可以证明，管内B也均匀

$$L\longrightarrow\infty,\beta_1=0,\beta_2=\pi \qquad B=\mu_0 n I$$

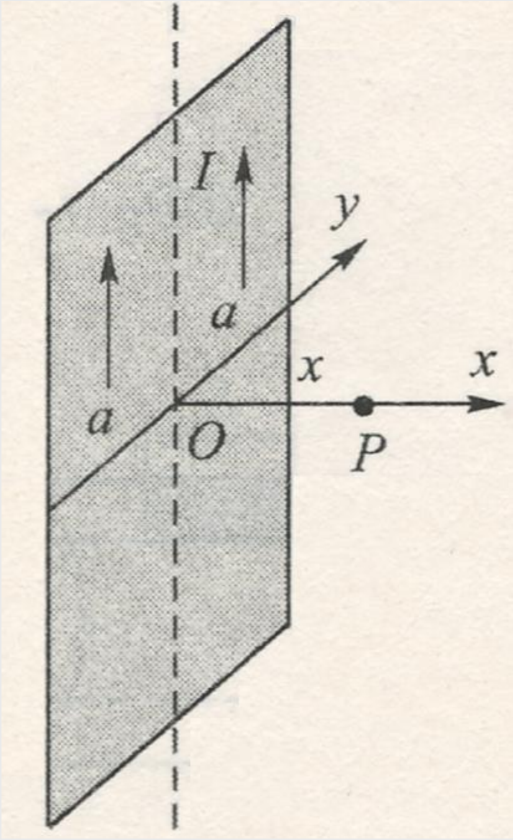
半无限长 $\beta_1=0,\beta_2=\frac{\pi}{2}$ **或**$\beta_1=\frac{\pi}{2},\beta_2=\pi$ $\qquad B=\frac{\mu_0 n I}{2}$

I **和**$\vec{B}$ **成右螺旋关系**

载流螺线管轴线上的磁场分布



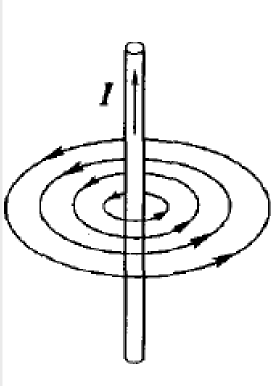
例6 电流均匀的流过宽度为a的无限长平面导体薄板，电流大小为I，通过板的中线并与板面垂直的平面上有一点P, P到板的垂直距离为x，设板厚忽略不计，求：

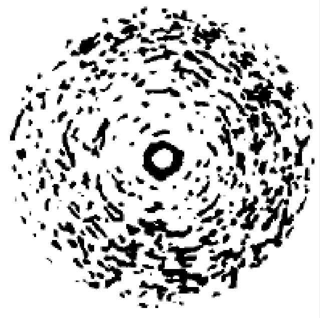


（1）P点的磁感应强度；

（2）当$a \to \infty$, 但$i = \dfrac{I}{2a}$为一常量时P点的磁感应强度。

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$





解：

把薄板分成宽度为dy的无限长细条

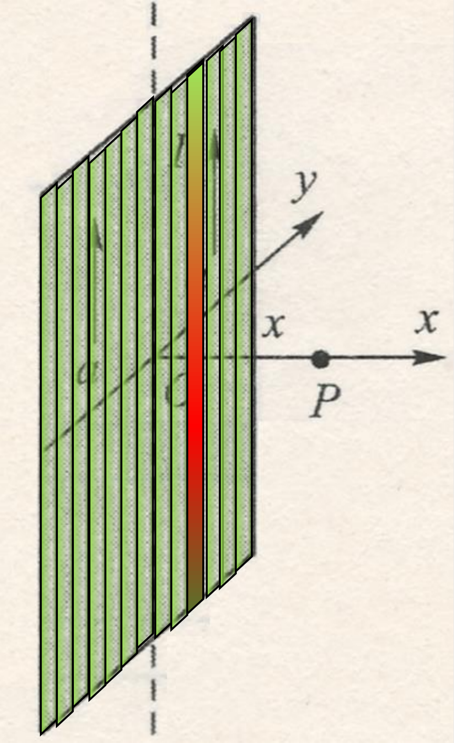
每根细条载流$di = \dfrac{Idy}{2a}$。

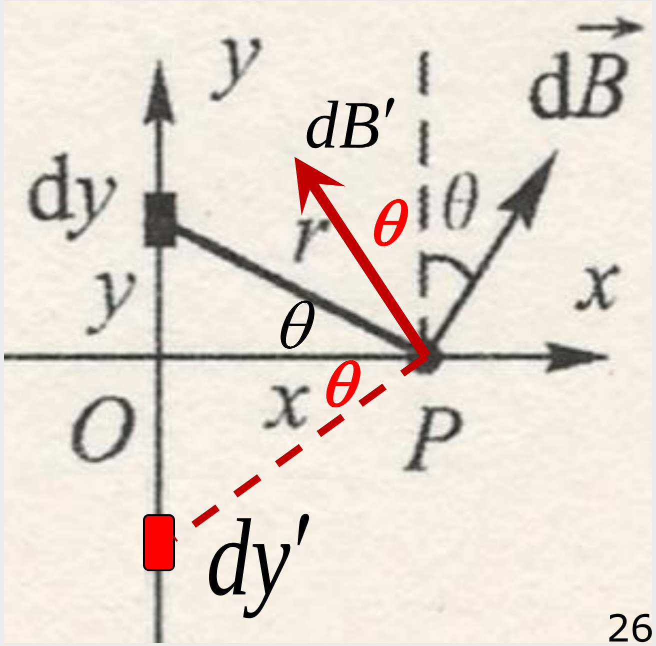
di在**P**点产生的磁感应强度大小：

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{r} = \frac{\mu_0 Idy}{4\pi ar} = \frac{\mu_0 Idy\cos\theta}{4\pi ax}$$

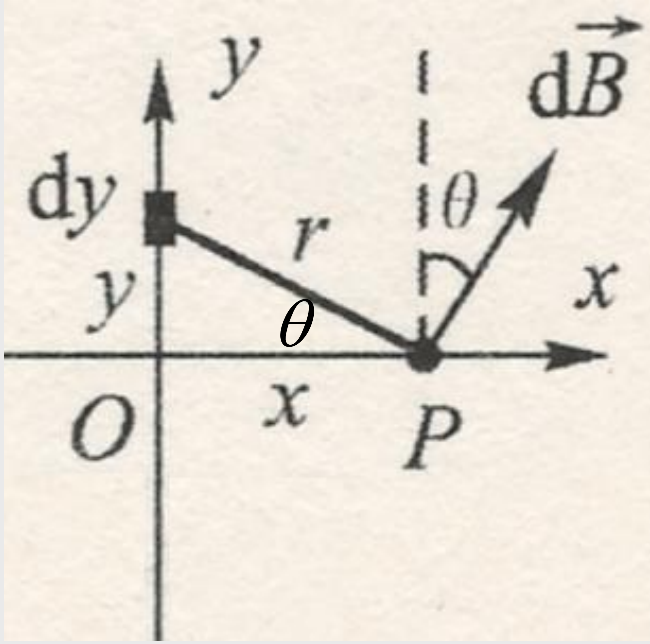
只有y分量$dB\cos\theta$有贡献

$$B = \int dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi ax}\int \cos^2\theta dy$$





$$B=\int dB\cos\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi ax}\int\cos^2\theta dy$$



$$\because y=x\tan\theta;\quad \therefore dy=x\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi ax}\int_{-\arctan\frac{a}{x}}^{\arctan\frac{a}{x}}xd\theta=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\arctan\frac{a}{x},$$ 方向沿y轴正向。

当$a\to\infty$,

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta=\frac{\mu_0}{2}i,$$ 方向沿y轴正方向。

小结：

- 原则上，B-S定理加上叠加原理可以求任何载流导线在空间某点的B

- 实际上，只在电流分布具有一定对称性，能够判断其磁场方向，并可简化为标量积分时，才易于求解；

- 为完成积分，需要利用几何关系，统一积分变量；

- 一些重要的结果 可直接利用；

重要结论

载流长直导线的磁场 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$

无限长载流长直导线的磁场 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

载流圆线圈轴线上的磁场 $\dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+r_0^2)^{3/2}}$

圆环形电流中心的磁场 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

载流螺线管中的磁场 $=\dfrac{\mu_0 n I}{2}(\cos\beta_1-\cos\beta_2)$

无限长载流螺线管中的磁场 $B=\mu_0 n I$

二、磁场的高斯定理：

- 磁感应线的特点：
  - 环绕电流的无头无尾的闭合线或伸向无穷远

→ 磁场高斯定理 无源场

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

↓

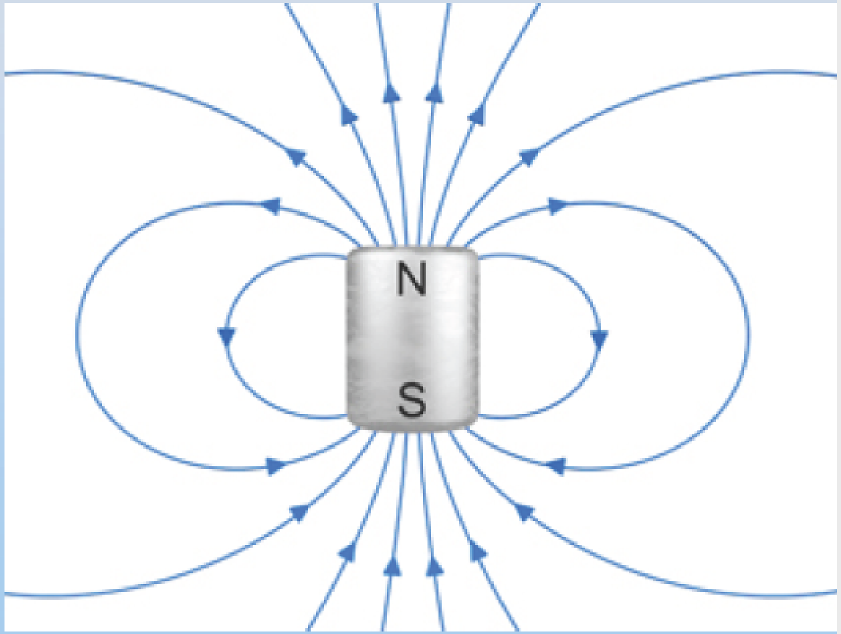
$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- 说明恒磁场的散度为零——无源场

永磁体产生的稳恒磁场

Concept Question: Magnetic Field Lines

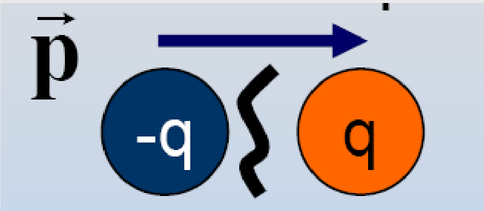
The picture shows the field lines outside a permanent magnet The field lines inside the magnet point:



1. √ Up
2. Down
3. Left to right
4. Right to left
5. The field inside is zero
6. I don’t know

磁单极不存在

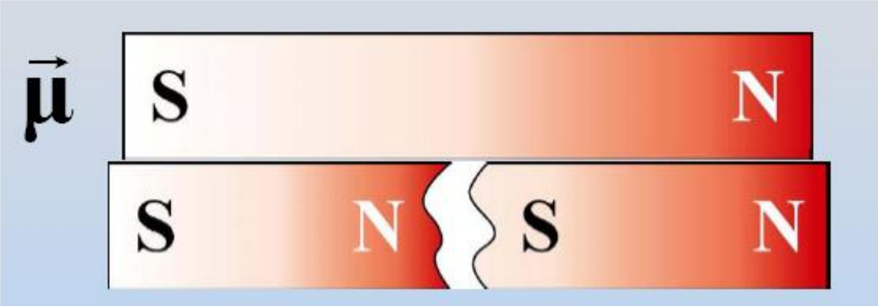
电偶极子



切开

电单极

磁偶极子



切开

磁偶极子

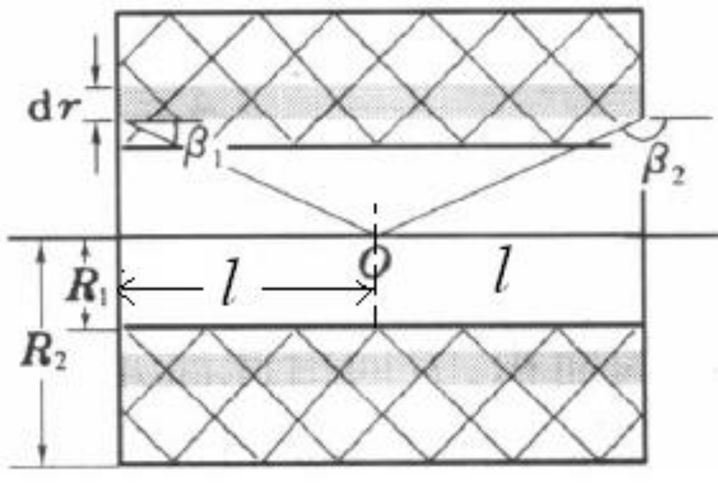
$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{in} / \varepsilon_0$$

高斯定理

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

磁高斯定理

例题.多层密绕螺线管中心点的场强，总匝数为N,长度2l。



$$单层:\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_1-\cos\beta_2)$$

$$\because \beta_2=\pi-\beta_1; \quad \therefore \cos\beta_1-\cos\beta_2=2\cos\beta_1$$

$$\boxed{单层:\frac{\mu_0 nI}{2}2\cos\beta_1}$$

$$j=\frac{NI}{2l(R_2-R_1)}=\frac{dI}{2ldr}$$,表示电流密度。

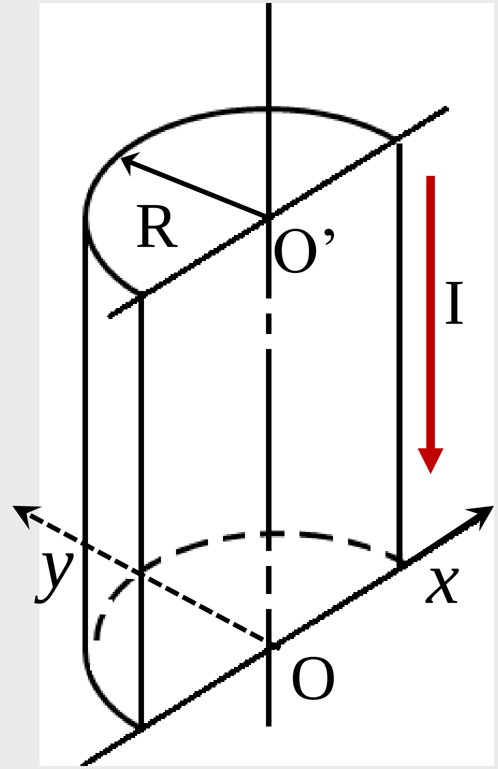
$dI/2l$即为厚度dr层上单位长度上的电流nI。 $\therefore nI=jdr$

dr层在O点产生的磁感应强度

$$dB=\frac{\mu_0}{2}jdr2\cos\beta_1, \qquad \cos\beta_1=\frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}}$$

$$B=\mu_0 jl\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{\sqrt{l^2+r^2}}=\mu_0 jl\ln\frac{R_2+\sqrt{R_2^2+l^2}}{R_1+\sqrt{R_1^2+l^2}}$$

例题7. 如图所示，一个半径为R的无限长半圆柱面导体，沿长度方向的电流I在柱面上均匀分布。求半圆柱面轴线上的磁感强度。

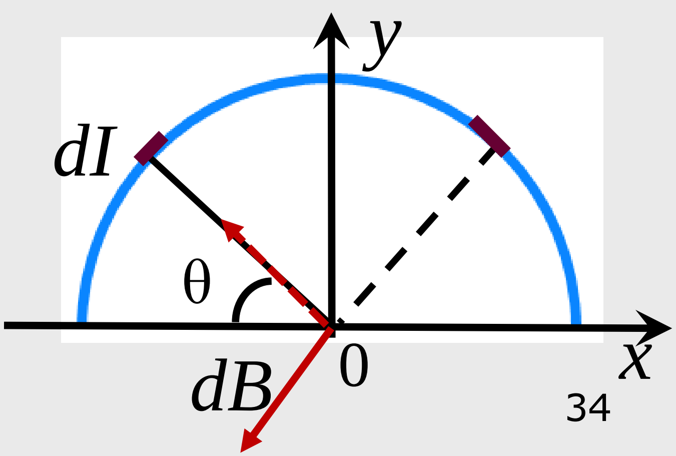


解：由于长直细线中的电流，$dI = Idl/\pi R$

它在轴线上一点激发的磁感强度的大小为：

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi R} dI = \frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{Idl}{\pi R} = \frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{Id\theta}{\pi}$$

其方向在oxy平面内，且与由dl引向点O的半径垂直，如下图所示.



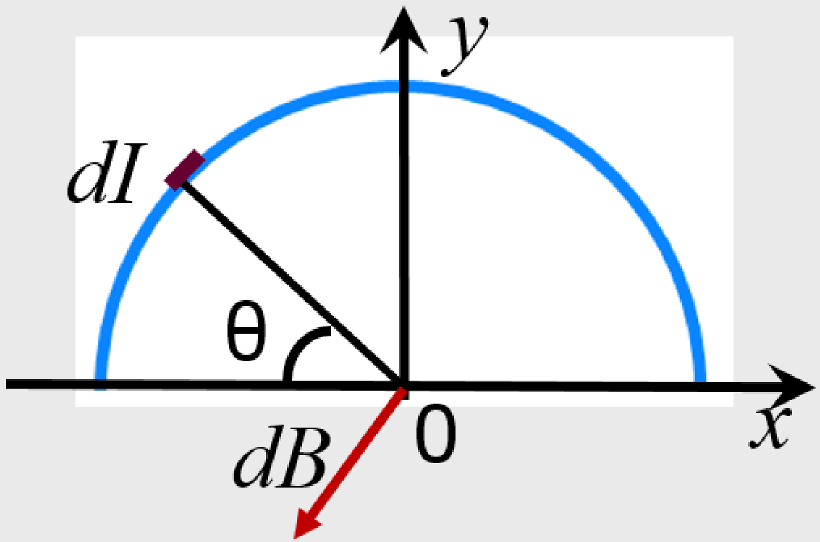
由对称性可知，半圆柱面上细电流在轴线OO'上产生的磁感强度叠加后，得：

$$B_y = \int dB\cos\theta = 0$$

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{I}{\pi}d\theta$$

$$B_x = \int_0^{\pi} dB\sin\theta = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{I}{\pi}d\theta\cdot\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

则轴线上总的磁感强度大小为：



$$B = B_x = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$\vec{B}$ **的方向指向ox轴负向。**

思考1.

（a）对于一静止的电荷，磁场能使其运动吗？

（b）一个恒磁场可以改变一带电粒子的速度吗？

（c）一个带电粒子在一区域直线运动，这一区域的磁场必然为0吗？

（d）想一想电力和磁力有哪些异同？