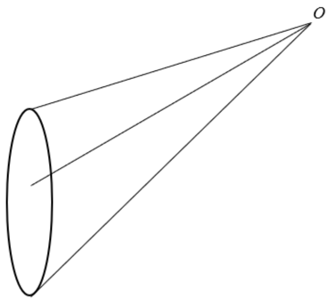
电磁学小班水平测试

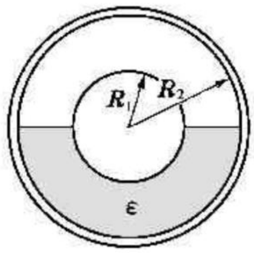
1.（5 分）写出真空中的麦克斯韦方程组与电流的连续性方程（均写为微分形式）。

2.（10 分）如图所示，有一个均匀带电椭圆面，面电荷密度为σ，已知该椭圆面是由某平面截圆锥面形成，且立体角为Ω，求该圆锥面顶点 O 的电场强度，已知介电常数为ε_0。

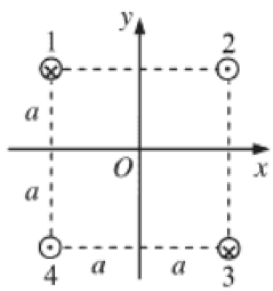


3.（15 分）试讨论在远场近似下，电偶极子的电势与电场强度（保留至一阶项）。

4. （20 分）某无限长圆柱形电容器由半径为R_1的导体圆柱和与它同轴的半径R_2的导体圆柱构成($R_2 > R_1$),其间一半充满介电常量 为的均匀电介质,已知内圆柱单位长度的电荷线密度为λ_1,外圆柱单位长度的电荷线密度为λ_2,均带正电荷。 求空间内的电场强度。



5.（30 分）Ioffe-Pritchard 磁阱可用来束缚原子的运动,其主要部分如图所示。四根均通有恒定电流的长直导线 1、2、3、4 都垂直 于 *x-y* 平面,它们与 *x-y* 平面的交点是边长为 2*a*、中心在原点 O 的正 方形的顶点,导线 1、2 所在平面与 *x* 轴平行,各导线中电流方向已在图中标出。整个装置置于匀强磁场 $\mathbf{B}_0=B_0\mathbf{k}$（**k** 为 z 轴正方向单位矢量）中。已知真空磁导率为μ_0

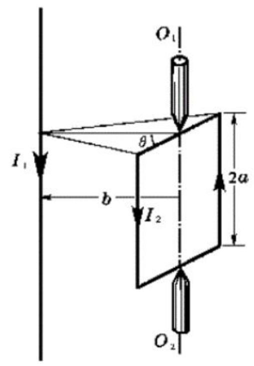


（1）电流在原点附近产生的总磁场的近似表达式,保留至线性项;

提示：$x \ll 1, y \ll 1$时，$\dfrac{1}{(1-x)^2+(1-y)^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-x-y}=\dfrac{1}{2}\left[1+(x+y)\right]$

（2）将某原子放入磁阱中,该原子在磁阱中所受磁作用的束缚势能正比于其所在位置的总磁感应强度 $\mathbf{B}_{tot}$ 的大小,即磁作用束缚势能$V=\mu\left|B_{tot}\right|$, μ 为正的常量。求该原子在原点 O 附近所受磁场的作用力.

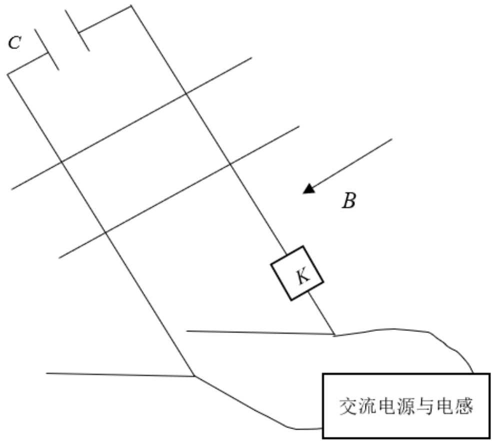
6.（20 分）如图，一固定的竖直长导线载有恒定电流 I_1，其旁边有一载有电流 I_2 的正方形导线框，导线框可围绕过对边中心的竖直轴 O_1O_2 转动，转轴到长直导线的距离为 b 。已知导线框的边长为 $2a$ （ $a<b$ ）求：



（1）导线框所受的外力矩 M;

（2）导线框从平衡位置转到 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时安培力所做的功

7.（50 分）两条电阻可忽略的金属导轨平行地与地面呈 θ 角放置，其顶端连有电容为 C 的电容器（用导线连接），中间垂直导轨放置两根平行金属棒，并与金属导轨良好接触，质量均为 m ,与导轨连接部分长度为 l ,由上到下电阻分别为 r_1 , r_2 , 开始时被锁定不动。导轨下端连有开关 K，交流电源与电感 L，整个系统处于垂直于金属导轨平面的静磁场 B 中.



（1）闭合 K，已知交流电圆频率为 ω，求该系统的复阻抗及系统谐振时 ω 的取值;

（2）断开 K，并解除对两金属棒的锁定，施加外力 F（非恒量）使上端金属棒以速度 v_1 匀速下滑，下端金属棒由静止下滑，已知总电流 i 呈周期变化，且 t=0 时总电流有最大值 i_0,求总电流 i 随时间 t 变化的关系式 $i(t)$ ；

（3）求 F 随时间 t 变化的关系式 $F(t)$;

（4）在下端金属棒下面再放置 n 根与其相同的金属棒，在（2）的条件下求总电流 $\ddot{i}$ 随时间 t 变化的变化关系式 $\ddot{i}(t)$.

已知：微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2n\dfrac{dy}{dx}+\omega_0^2y=0$ 的通解为 $y=Ae^{-nx}\sin(\sqrt{\omega_0^2-n^2}x+\varphi)$ （ω_0^2-n^2＞0)，其中 A 与 φ 为任意常数。

不定积分 $\int e^{ax}\cos bxdx=\dfrac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+\dfrac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx+C$

参考答案

1.真空中的麦克斯韦方程组

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

电流连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0$$

2.在同一立体角内，可以任意改变形状，则可先两倍后构造出一个球，故电场强度等价于该球提供的电场强度，则

$$E=\frac{1}{2}\frac{\sigma\cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

化简后得

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta$$

根据立体角关系

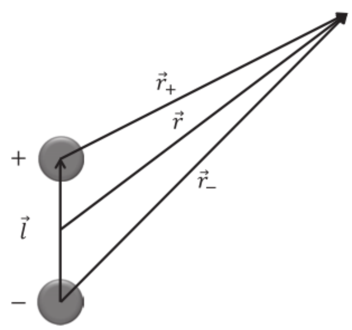
$$\cos\theta=1-\frac{\Omega}{2\pi}$$

则有

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{1-\left(1-\frac{\Omega}{2\pi}\right)^2}$$

3.根据电势的定义，并利用近似得

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r})&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)\\&\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_--r_+}{r^2}\\&\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}\\&=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\\&=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{aligned}$$



则可计算电场

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla\varphi \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3}+\vec{p}\cdot\vec{r}\nabla\frac{1}{r^3}\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]\end{aligned}$$

4. 设不处于介质处的电荷线密度为λ_{11}，处于介质处的电荷线密度为λ_{12}，根据电荷守恒

$$\lambda_{11}+\lambda_{12}=2\lambda_1$$

作圆柱形高斯面，得到：

$$D_{11}=\frac{\lambda_{11}}{2\pi r}$$
$$D_{12}=\frac{\lambda_{12}}{2\pi r}$$

根据线性介质及题设的对称性，圆柱内距离轴心为 r 时的场强相等，则有

$$D_{11}=\varepsilon_0 E_1$$
$$D_{12}=\varepsilon_0\varepsilon E_1$$

联立解得：

$$\lambda_{11}=\frac{2}{\varepsilon+1}\lambda_1$$
$$\lambda_{12}=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\lambda_1$$

则可得：

$$E_1=\frac{\lambda_1}{\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)r}$$

对于圆柱外，可知外表面的电荷线密度为$\lambda_1+\lambda_2$，则

$$E_2=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

故有

$$E=\begin{cases}0, r<R_1 \\ \dfrac{\lambda_1}{\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)r}, R_1<r<R_2 \\ \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}, r>R_2\end{cases}$$

5.

（2）对于原点 O 附近的任一点 (x,y)，有

$$|x| << a, |y| << a$$

保留至 $\frac{x}{a}$、$\frac{y}{a}$ 的一次项，$\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{B}_3$、$\boldsymbol{B}_4$ 可近似为

$$\boldsymbol{B}_1 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[-(a-x)\boldsymbol{i}-(a+y)\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{B}_2 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[(a+x)\boldsymbol{i}-(a+y)\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{B}_3 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[(a+x)\boldsymbol{i}+(a-y)\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{B}_4 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[-(a-x)\boldsymbol{i}+(a-y)\boldsymbol{j}]$$

电流在原点附近任一点 (x,y) 产生的总磁场可近似为

$$\boldsymbol{B} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}(x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}) \qquad ⑩$$

（3）在原点附近的总磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_{\text{tot}} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}(x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j})+B_0\boldsymbol{k} \qquad ⑪$$

在原点 O 附近总磁感应强度的大小为

$$|\boldsymbol{B}_{\text{tot}}|=\sqrt{B_0^2+\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2(x^2+y^2)} \approx B_0+\frac{1}{2B_0}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2(x^2+y^2) \qquad ⑫$$

原子在原点 O 附近所受的磁作用的束缚势能为

$$V=\mu|\boldsymbol{B}_{\text{tot}}| \approx \mu B_0+\frac{1}{2}\frac{\mu}{B_0}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2(x^2+y^2) \qquad ⑬$$

除开常数项外，这是二维（x-y 平面）简谐振子势能，因此该原子在原点 O 附近所受磁场的作用力应是 x-y 平面上沿径向指向原点 O 的力

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\mu}{B_0}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}) \qquad ⑭$$

（4）原子在磁阱中所受的磁作用的束缚势能为

$$V=\mu|\boldsymbol{B}_{\text{tot}}|=\mu\sqrt{B_0^2+|\boldsymbol{B}|^2} \qquad ⑮$$

式中 $\boldsymbol{B}$ 如⑤式所示。

6. （1）由几何关系有

$$r_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$
$$r_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta$$

两处的电磁感应强度：

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_1}$$
$$B_2=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_2}$$

则力矩为

$$M=2B_1 I_2 ab\sin\alpha_1+2B_2 I_2 ab\sin\alpha_2$$

由正弦定理

$$\sin\alpha_1=\frac{a\sin\theta}{r_1}$$
$$\sin\alpha_2=\frac{a\sin\theta}{r_2}$$

联立解得：

$$M=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a^2 b\sin\theta}{\pi}(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2})=\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2 b(a^2+b^2)\sin\theta}{\pi[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\theta]}$$

（2）

由功能关系

$$dW=Md\theta$$

则积分得：

$$W=\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2 b(a^2+b^2)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\theta]}d\theta$$

$$W=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}[\ln\frac{a^2+b^2+2ab\cos\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

7. （1）电路图可简化为右图形式，则并联区域的复导纳为

$$\tilde{Y}=\omega Cj+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} \quad ①$$

则总复阻抗为

$$\tilde{Z}=\frac{1}{\tilde{Y}}+\omega Lj \quad ②$$

化简得

$$\tilde{Z}=\frac{r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1^2r_2^2\omega^2C^2+(r_1+r_2)^2}+[\omega L-\frac{r_1r_2\omega C}{r_1^2r_2^2\omega^2C^2+(r_1+r_2)^2}]j \quad ③$$

谐振电路应满足条件

$$\omega L-\frac{r_1r_2\omega C}{r_1^2r_2^2\omega^2C^2+(r_1+r_2)^2}=0 \quad ④$$

即

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{r_1+r_2}{r_1r_2C})^2} \quad ⑤$$

（2）对全电路分析，根据戴维南法则知等效电路中电动势与总电阻为

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_1r_2+\varepsilon_2r_1}{r_1+r_2} \quad ⑥$$

$$r=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2} \quad ⑦$$

根据基尔霍夫定律有

$$\varepsilon-i\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}-\frac{q}{C}=0 \quad ⑧$$

$$\varepsilon_1 - i_1 r_1 = \varepsilon_2 - i_2 r_2 \qquad ⑨$$

$$i = i_1 + i_2 \qquad ⑩$$

联立⑨⑩并代入$\varepsilon_1 = Blv_1$，$\varepsilon_2 = Blv_2$得

$$i_1 = \frac{-Bl(v_2 - v_1) + ir_2}{r_1 + r_2} \qquad ⑪$$

$$i_2 = \frac{Bl(v_2 - v_1) + ir_1}{r_1 + r_2} \qquad ⑫$$

对⑧式两边同时对t求导，

$$\frac{Bla_2 r_1}{r_1 + r_2} - \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\frac{di}{dt} - \frac{i}{C} = 0 \qquad ⑬$$

对下端金属棒运用牛顿定律得

$$mg\sin\theta - Bi_2 l = ma_2 \qquad ⑭$$

联立⑫⑭式得

$$a_2 = g\sin\theta - \frac{B^2 l^2 (v_2 - v_1) + Blir_1}{m(r_1 + r_2)} \qquad ⑮$$

代入⑬式并两边同时对时间t求导，由$a_2 = \dfrac{dv_2}{dt}$整理得

$$a_2 = -\frac{m(r_1 + r_2)^2}{B^3 l^3 r_1}\left\{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\frac{B^2 l^2 r_1^2}{m(r_1 + r_2)^2} + \frac{1}{C}\right]\frac{di}{dt}\right\} \qquad ⑯$$

再代入⑬式得

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{B^2 l^2}{mr_1 r_2}\left[\frac{r_1^2 + r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{m(r_1 + r_2)}{CB^2 l^2}\right]\frac{di}{dt} + \frac{B^2 l^2}{Cmr_1 r_2} i = 0 \qquad ⑰$$

因为总电流呈周期变化，则根据已知条件可得

$$i = i_0 e^{-nt}\cos\sqrt{\omega_0^2 - n^2}\, t \qquad ⑱$$

其中$n = \dfrac{B^2 l^2}{2mr_1 r_2}\left[\dfrac{r_1^2 + r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \dfrac{m(r_1 + r_2)}{CB^2 l^2}\right]$，$\omega_0 = Bl\sqrt{\dfrac{1}{Cmr_1 r_2}}$

（3）方法一：

初始时刻电容器电荷满足$Blv_1 - i_1 r_1 = -i_2 r_2 = \dfrac{q_0}{C}$，则有

$$q_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\left(\frac{Blv_1}{r_1} - i_0\right)$$

堆积在电容器的总电荷量为

$$q = q_0 + \int_0^t i(t)dt$$

$$= \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}(\frac{Blv_1}{r_1} - i_0) + \frac{i_0 n}{\omega_0^2}(1 - e^{-nt}\cos\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t) + \frac{i_0\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}{\omega_0^2}e^{-nt}\sin\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t$$

根据电容器性质及电势差关系得

$$U = \frac{q}{C}$$

$$U = \varepsilon_1 - i_1 r_1$$

联立

$$i_1 = \frac{Blv_1}{r_1} - \frac{q}{Cr_1} \qquad ㉑$$

故根据牛顿定律有

$$F = mg\sin\theta - Bi_1 l$$

联立 得

$$F_{(t)} = mg\sin\theta - \frac{B^2 l^2 v_1}{r_1} + \frac{Bl}{Cr_1}[\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}(\frac{Blv_1}{r_1} - i_0) + \frac{i_0 n}{\omega_0^2}(1 - e^{-nt}\cos\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t) + \frac{i_0\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}{\omega_0^2}e^{-nt}\sin\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t] \qquad ㉒$$

方法二：根据牛顿定律有

$$mg\sin\theta - Bi_1 l - F = 0 \qquad ⑲$$

联立 将两式相加得

$$F = 2mg\sin\theta - Bil - ma_2 \qquad ⑳$$

联立 式，根据（2）中已知$i = i_0(e^{\alpha t} + e^{\beta t})$计算一阶导数代入得

$$a_2 = \frac{r_1 + r_2}{Blr_1}(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\frac{di}{dt} + \frac{i}{C})$$

$$= \frac{i_0(r_1 + r_2)}{Blr_1}[(\frac{1}{C} - \frac{r_1 r_2 n}{r_1 + r_2})e^{-nt}\cos\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t - \frac{r_1 r_2\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}{r_1 + r_2}e^{-nt}\sin\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t] \qquad ㉑$$

$$F_{(t)} = 2mg\sin\theta - \frac{i_0(r_1 + r_2)}{Blr_1}[(\frac{1}{C} + \frac{B^2 l^2 r_1}{r_1 + r_2} - \frac{r_1 r_2 n}{r_1 + r_2})e^{-nt}\cos\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t - \frac{r_1 r_2\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}{r_1 + r_2}e^{-nt}\sin\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t] \qquad ㉒$$

或

$$F_{(t)} = mg\sin\theta - \frac{B^2 l^2 v_1}{r_1} + \frac{Bl}{Cr_1}[\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}(\frac{Blv_1}{r_1} - i_0) + \frac{i_0 n}{\omega_0^2}(1 - e^{-nt}\cos\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t) + \frac{i_0\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}{\omega_0^2}e^{-nt}\sin\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t]$$

（注：两式形式不同是由于n，ω_0并未按原始形式表示，两者并无本质差别，

证明如下：

方法一：$F = mg\sin\theta - \frac{Bl}{r_1}(Blv_1 - \frac{q}{C})$ 方法二：$F = 2mg\sin\theta - Bil - ma_2$

则只需证明：$Bil + ma_2 = mg\sin\theta + \frac{Bl}{r_1}(Blv_1 - \frac{q}{C})$

根据前面 $a_2 = g\sin\theta - \frac{B^2l^2(v_2 - v_1) + Blir_1}{m(r_1 + r_2)}$

则只需证：$\frac{1}{r_1}(Blv_1 - \frac{q}{C}) + \frac{Bl(v_2 - v_1) - ir_2}{(r_1 + r_2)} = 0$

两边同时对时间求导即证明：$\frac{Bla_2r_1}{r_1 + r_2} - \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}\frac{di}{dt} - \frac{i}{C} = 0$

此即原⑬式显然成立，证毕。）

（4）初始时，n+1 个金属棒的速度都是 0，则可看成电阻相等的 n+1 条电路，即初始电流均相等，则瞬时加速度也相等，经过一小段时间△t 后，则

$$v_{\Delta t} = v_0 + a_0\Delta t$$

$$v_{\Delta t(2)} = v_0 + a_{0(2)}\Delta t$$

•••

$$v_{\Delta t(n)} = v_0 + a_{0(n)}\Delta t$$

由于这些棒的初始加速度均相同，则

$$v_{\Delta t(1)} = v_{\Delta t(2)} = \cdots = v_{\Delta t(n)}$$

即加速度也相等

$$a_{\Delta t(1)} = a_{\Delta t(2)} = \cdots = a_{\Delta t(n)}$$

以此类推可知：在之后的运动中，这 n+1 条电路的所有状态均相同，则（2）中结论只需将 r_2 修正为

$$r_2' = \frac{r_2}{n+1}$$

则

$$i' = i_0e^{-nt}\cos\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t$$

其中 $n = \frac{(n+1)B^2l^2}{2mr_1r_2}[\frac{(n+1)r_1^2 + r_1r_2}{(n+1)r_1 + r_2} + \frac{m(n+1)r_1 + mr_2}{(n+1)CB^2l^2}]$，$\omega_0 = Bl\sqrt{\frac{n+1}{Cmr_1r_2}}$