月考试卷 A 答案

一、令 $z=\frac{y}{x}$，则有 $y=zx$，$y'=z+z'x$

从而原方程可等价转化为：

$$z+z'x-z+\sqrt{1+z^2}=0$$

分离变量，得

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz=-\frac{1}{x}dx$$

两边同时积分得

$$\ln(z+\sqrt{z^2+1})=-\ln x/c$$

从而 $z+\sqrt{z^2+1}=\frac{c}{x}$，则有

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=c$$

由 $x=1$ 时 $y=0$，可得 $C=1$，因此

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=1 \text{ 或 } x^2+2y-1=0.$$

二、旋转曲面方程为：$z=x^2+y^2$，与所给平面的交线为：

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

此曲线在 xoy 面的投影柱面方程为：

$$x+y+x^2+y^2=1.$$

故投影曲线方程为：$\begin{cases} x+y+x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

三、(1) 由于 $|f(x,y)|=\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^4}\cdot y\right|\le|y|$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续

(2) 由 $\frac{df(x,0)}{dx}=\frac{df(0,y)}{dy}=0$ 知：

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点偏导数存在且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$$

(3) 由(2)知：$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，故

$$\Delta f-\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\Delta y\right)=f(\Delta x,\Delta y)$$

由 $\lim\limits_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=(\Delta y)^2}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=(\Delta y)^2}}\frac{\frac{2(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4+(\Delta y)^4}}{\Delta y\sqrt{1+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+(\Delta y)^2}}\ne 0$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微

四、在方程组中对 y 求导，有

$$\begin{cases} \left(1-\frac{dx}{dy}\right)F_1'+\left(1-\frac{dz}{dy}\right)F_2'=0 \\ \left(x+y\frac{dx}{dy}\right)G_1'+\left(-\frac{z}{y}+\frac{1}{y}\frac{dz}{dy}\right)G_2'=0 \end{cases}$$

解此方程组，得到

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy}=\frac{yF_1'G_2'+xy^2F_2'G_1'+(y-z)F_2'G_2'}{y(F_1'G_2'-y^2F_2'G_1')} \\ \frac{dz}{dy}=\frac{zF_1'G_2'-y^3F_1'G_1'-y^2(x+y)F_1'G_1'}{y(F_1'G_2'-y^2F_2'G_1')} \end{cases}$$

五、马鞍面的法向量为 $(y,x,-1)$ 与 $(1,3,1)$ 平行，

所以 $\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}$，即 $y=-1$，$x=-3$，

$z=xy=3$，故该点为 $(-3,1,3)$，在该点处的法线方程为：

$$x+3=\frac{1}{3}(y+1)=z-3.$$

六、令 $L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

求偏导，得

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0, \\ L_y=-2+2\lambda y=0, \\ L_z=2+2\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

由前三式得到 $y=-z=-2x$，代入 $x^2+y^2+z^2=1$，

解得 $(x,y,z)=\pm\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$。

由题意，必有最大值和最小值，由于目标函数的驻点为 $\pm\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，对应的目标函数值为 ±3，所以

$$f_{max}=f\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=3,$$

$$f_{min}=f\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=-3.$$