§ 5 曲面的交线，曲面所围成的区域

5.1 画空间图形常用的三种方法

在纸上画空间图形时，常用的有三种方法。

(1) 斜二测法(即斜二等轴测投影法)．让 z 轴铅直向上，y

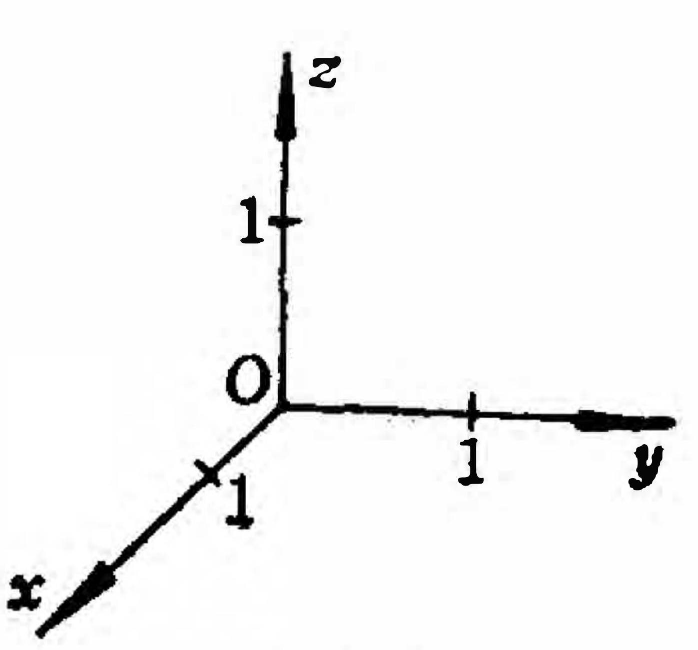

图 3.22

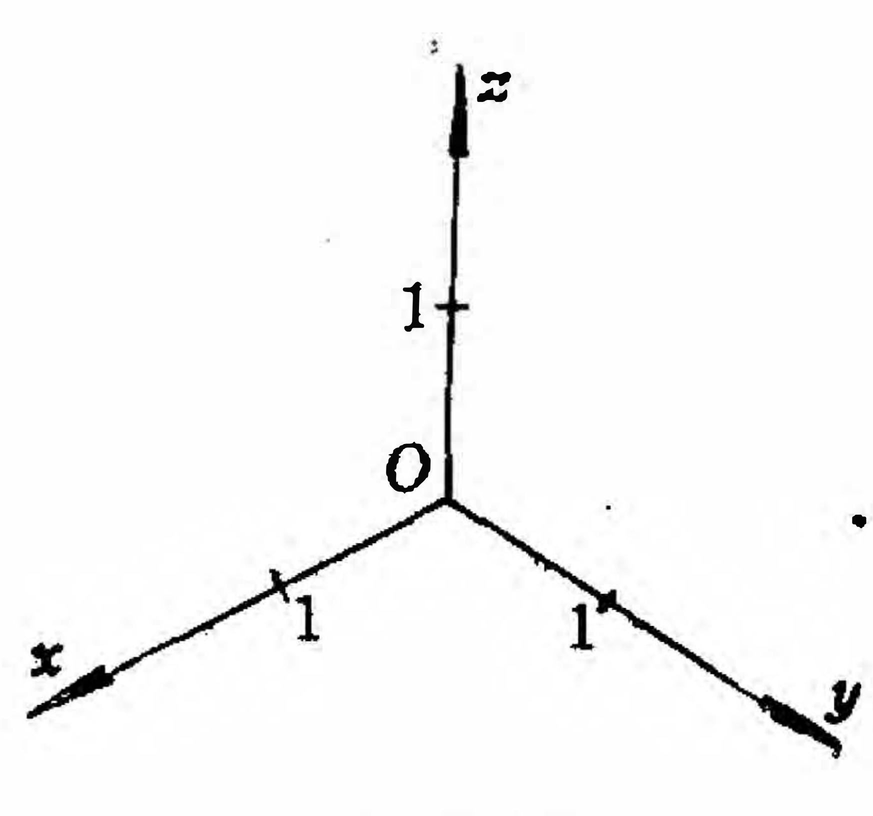

图 3.23

轴水平向右，x 轴与 y 轴、z 轴分别成135°角．规定 y 轴与 z 轴的单位长度相等；而 x 轴的单位长度为 y 轴单位长度的一半(图3.22)。

(2) 正等测法(即正等轴测投影法)．让 z 轴铅直向上，x 轴、y 轴、z 轴两两成120°角；规定三根轴的单位长度相等．(如图3.23)。

(3) 正二测法(即正二等轴测投影法)．让 z 轴铅直向上，x 轴与 z 轴的夹角为 $90°+\alpha$，其中 α 是锐角，且 $\operatorname{tg}\alpha\approx\frac{5}{8}$；$y$ 轴与 z 轴的夹角为 $90°+\beta$，其中 β 是锐角，且 $\operatorname{tg}\beta\approx\frac{1}{8}$．规定 z 轴和 y 轴的单位长度相等，x 轴的单位长度约为 y 轴单位长度的一半．有时，也让 x 轴与 z 轴夹角为 $90°+\beta$，其中 $\operatorname{tg}\beta\approx\frac{1}{8}$；让 y 轴的负向与 z 轴的夹角为 $90°+\alpha$，其中 $\operatorname{tg}\alpha\approx\frac{5}{8}$；此时 x 轴与 z 轴的单位长度相等，y 轴的单位长度约为 z 轴单位长度的一半。

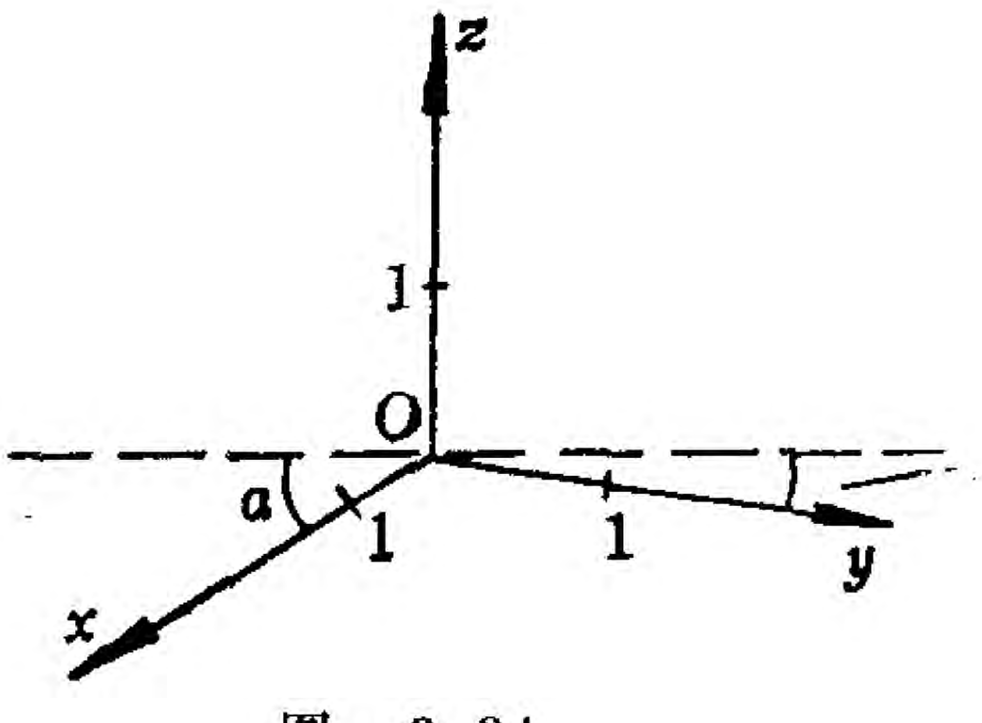

图 3.24

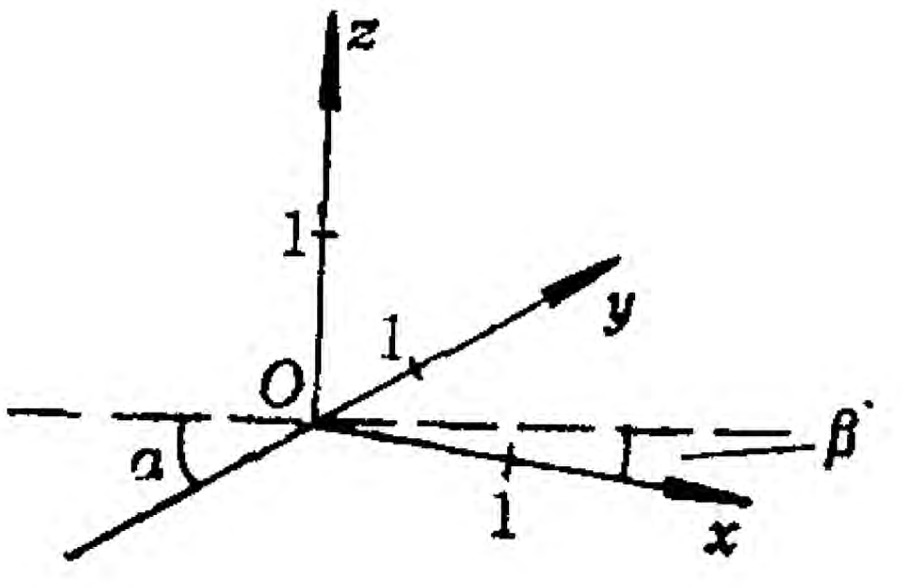

图 3.25

一般来说，采用正二测法画出的图形较逼真．我们现在用正二测法画空间中的一个圆，它的方程是：

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=2. \end{cases}$$

先过点 $M(0,2,0)$ 分别作 z 轴、x 轴的平行线，并截取 $ME=ME'$

$=1$（z轴单位长），截取 $MF=MF'=1$（x轴单位长）。过E,E'，F,F'分别作x轴、z轴的平行线，相交成一个平行四边形$ABCD$，再作它的内切椭圆，使切点为E,E',F,F'。则所画的这个内切椭圆就是我们所要画的空间中的圆（注：在画出直线EE'、FF'后，也可用描点法画出我们所要画的图）。

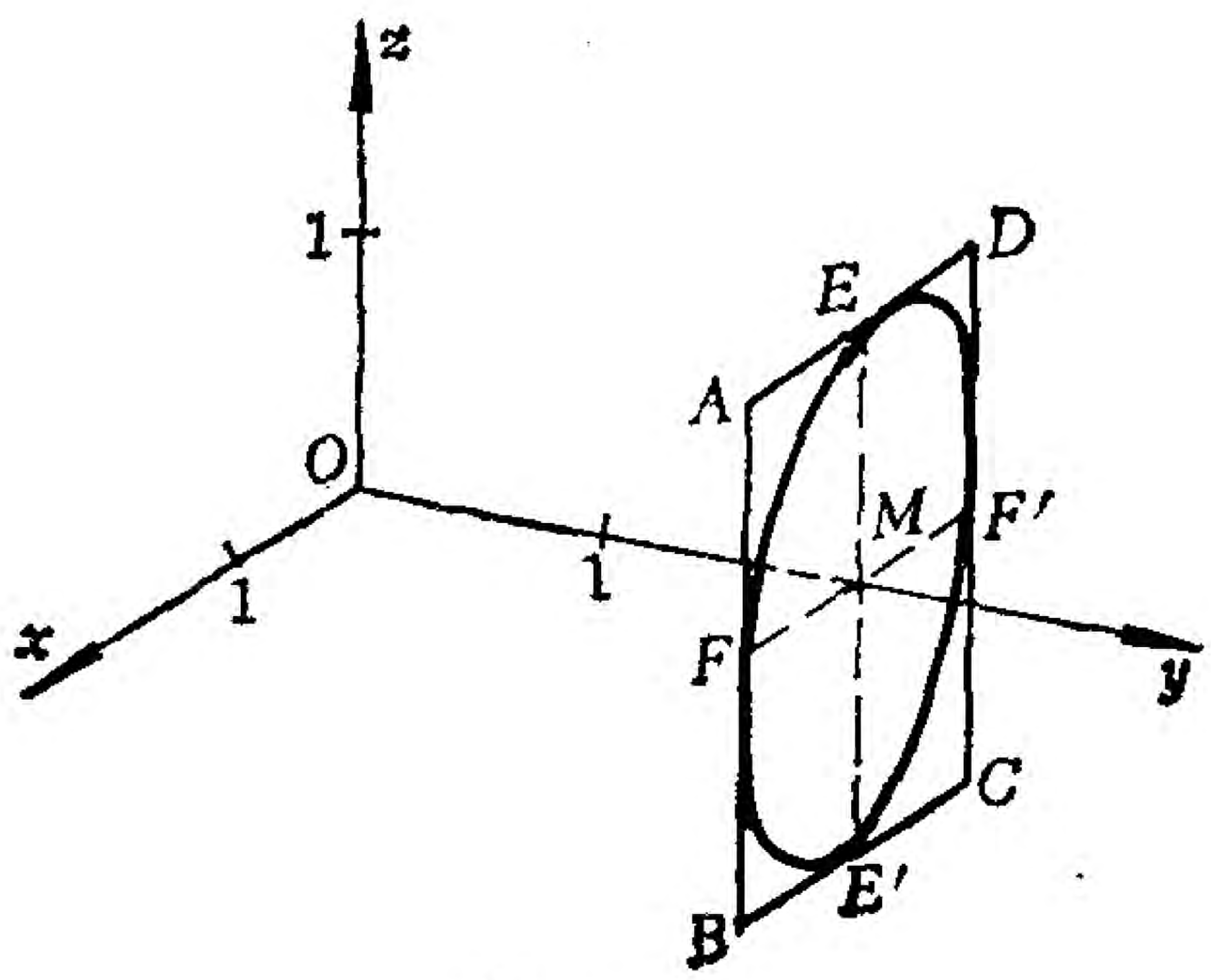

图 3.26

画空间中的椭圆的方法与上述类似。画空间中的双曲线或抛物线时，先画出它们所在的平面（若它平行于坐标面，则类似于上述画直线EE'和FF'），然后在这个平面内用描点法画出双曲线或抛物线。我们已经会画空间中的椭圆、双曲线、抛物线，从而也就容易画出§3中用标准方程给出的二次曲面了。例如，画单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

只要先画出用$z=\pm c$截曲面所得的截口椭圆以及腰椭圆，再画出曲面与xOz面，yOz面相交所得的双曲线，最后画出必要的轮廓线就可以了（如图3.16）。

5.2 曲线在坐标面上的投影，曲面的交线的画法

空间中任一点M以及它在三个坐标面上的投影点M_1,M_2,M_3

这四个点中，只要知道了其中两个点，就可以画出另外两个点。譬如，若知道了 M_2, M_3 两个点，则只要分别过 M_2, M_3 画出投影线（平行于相应坐标轴的直线），它们的交点就是 M 点，再过 M 画投影线（平行于 z 轴），它与 xOy 面的交点就是 M_1。

根据上述道理，为了画出两个曲面的交线 Γ，就只要先画出 Γ 上每个点在某两个坐标面上的投影。

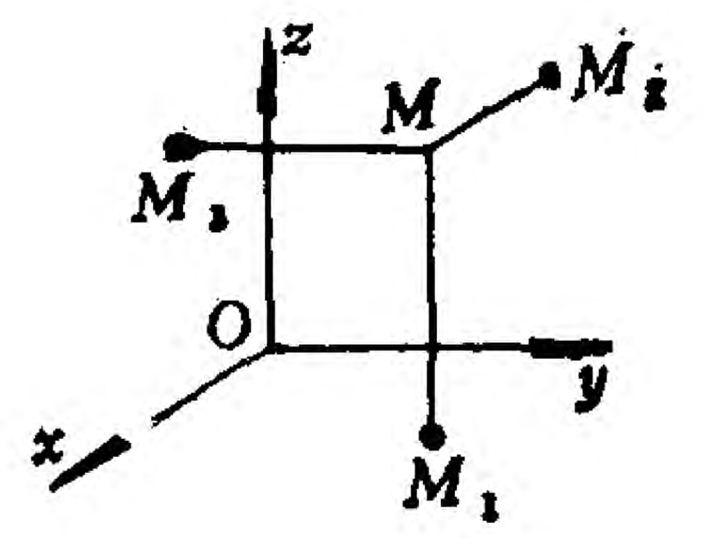

图 3.27

曲线 Γ 上的所有点在 xOy 面上的投影组成的曲线称为 Γ 在 xOy 面上的投影。显然曲线 Γ 在 xOy 面上的投影就是以 Γ 为准线、母线平行于 z 轴的柱面与 xOy 面的交线，这个柱面称为 Γ 沿 z 轴的投影柱面。类似地可考虑 Γ 在 xOz 面、yOz 面上的投影。

例3.6 求曲线 Γ：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, & (3.36) \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 & (3.37) \end{cases}$$

在各坐标面上的投影的方程，并且画出曲线 Γ 及其在各坐标面上的投影（这条曲线 Γ 称为维维安尼曲线）。

解 Γ 沿 z 轴的投影柱面的方程应当不含 z，且 Γ 上的点应适合这个方程，显然方程(3.37)就符合要求。但是要注意，一般说来，投影柱面可能只是柱面(3.37)的一部分，这要根据曲线 Γ 上的点的坐标有哪些限制来决定。对于本题来说，由方程(3.36)知，Γ 上的点应满足

$$|x| \leqslant 2, \quad |y| \leqslant 2, \quad |z| \leqslant 2;$$

显然满足方程(3.37)的点均满足这些要求，因此整个柱面(3.37)都是 Γ 沿 z 轴的投影柱面，从而 Γ 在 xOy 面上的投影的方程是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ z = 0. \end{cases} \qquad (3.38)$$

为了求Γ沿y轴的投影柱面，应当从Γ的方程中设法得到一个不含y的方程，用(3.36)减去(3.37)即得

$$z^2+2x=4. \tag{3.39}$$

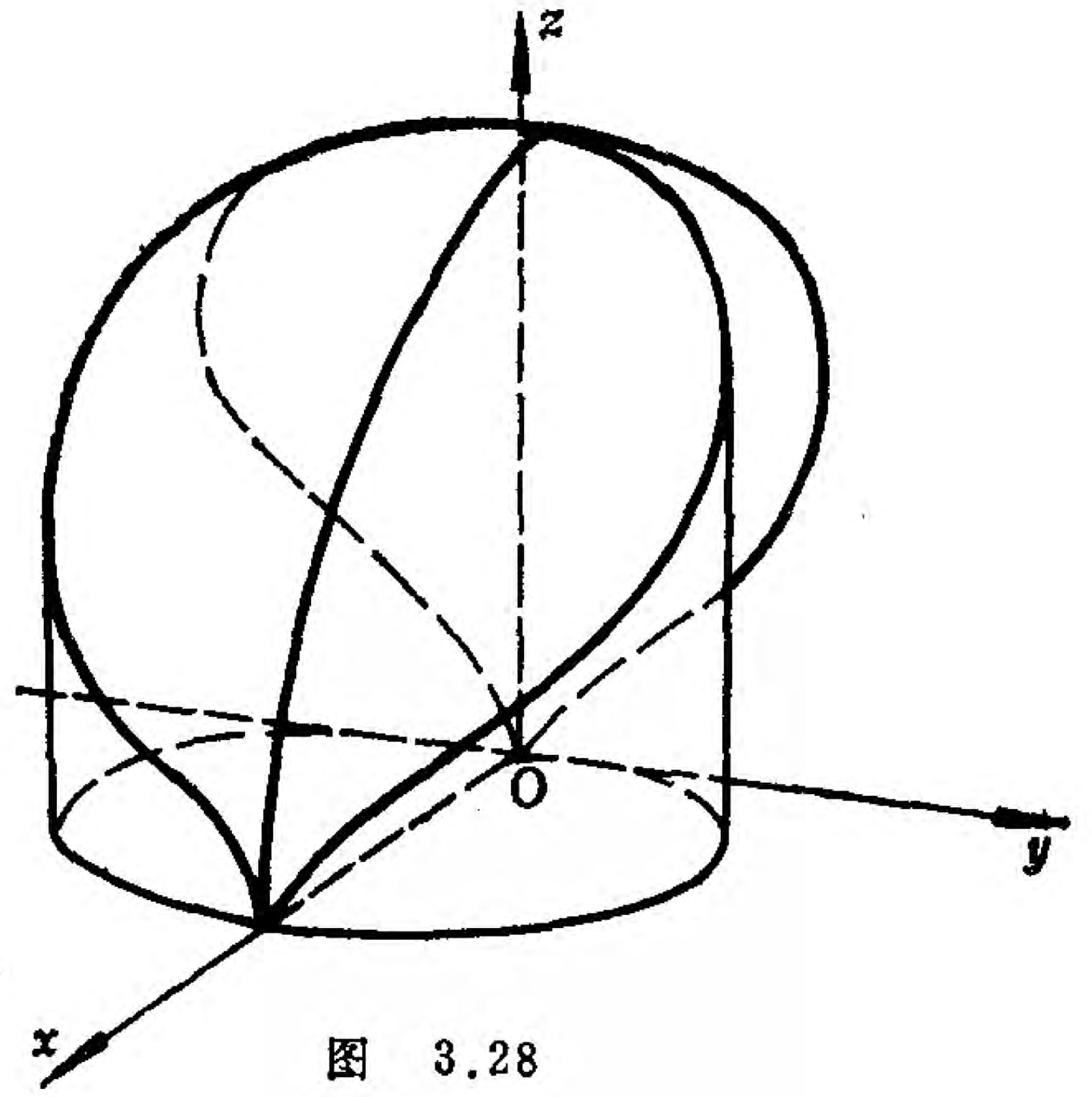

图 3.28

由于Γ上的点应满足$|z|\leqslant 2$，所以Γ沿y轴的投影柱面只是柱面(3.39)中满足$|z|\leqslant 2$的那一部分，于是Γ在xOz面上的投影的方程是

$$\begin{cases} z^2+2x=4, \\ y=0, \end{cases} \tag{3.40}$$

其中$|z|\leqslant 2$。

类似地可求得Γ在yOz面上的投影的方程为：

$$\begin{cases} 4y^2+(z^2-2)^2=4, \\ x=0. \end{cases} \tag{3.41}$$

Γ在xOy面上的投影是一个圆，在xOz面上的投影是抛物线的一段，这两个投影比较好画，因此先画出Γ的这两个投影，然后就可画出曲线Γ以及它在yOx面上的投影。由于曲线Γ关于xOy面对称，所以我们只画出xOy面上方的那一部分（如图3.28）.

例 3.7 求曲线Γ

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, & (3.42)\\ 2x-z^2+3=0 & (3.43)\end{cases}$$

在 xOy 面和 xOz 面上的投影的方程， 并且画出这两个投影和曲线Γ(在 xOy 面上方的部分)。

解 先看 Γ 上的点的坐标有哪些限制。从方程(3.42)得：

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|.$$

再代入(3.43)中得：

$$0=2x-z^2+3\leqslant 2x-x^2+3=-(x-1)^2+4,$$

于是得

$$-1\leqslant x\leqslant 3.$$

Γ 在 xOy 面上的投影为：

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4,\\ z=0.\end{cases}\tag{3.44}$$

Γ 在 xOz 面上的投影为：

$$\begin{cases}2x-z^2+3=0,\\ y=0,\end{cases}\tag{3.45}$$

其中 $-1\leqslant x\leqslant 3$。

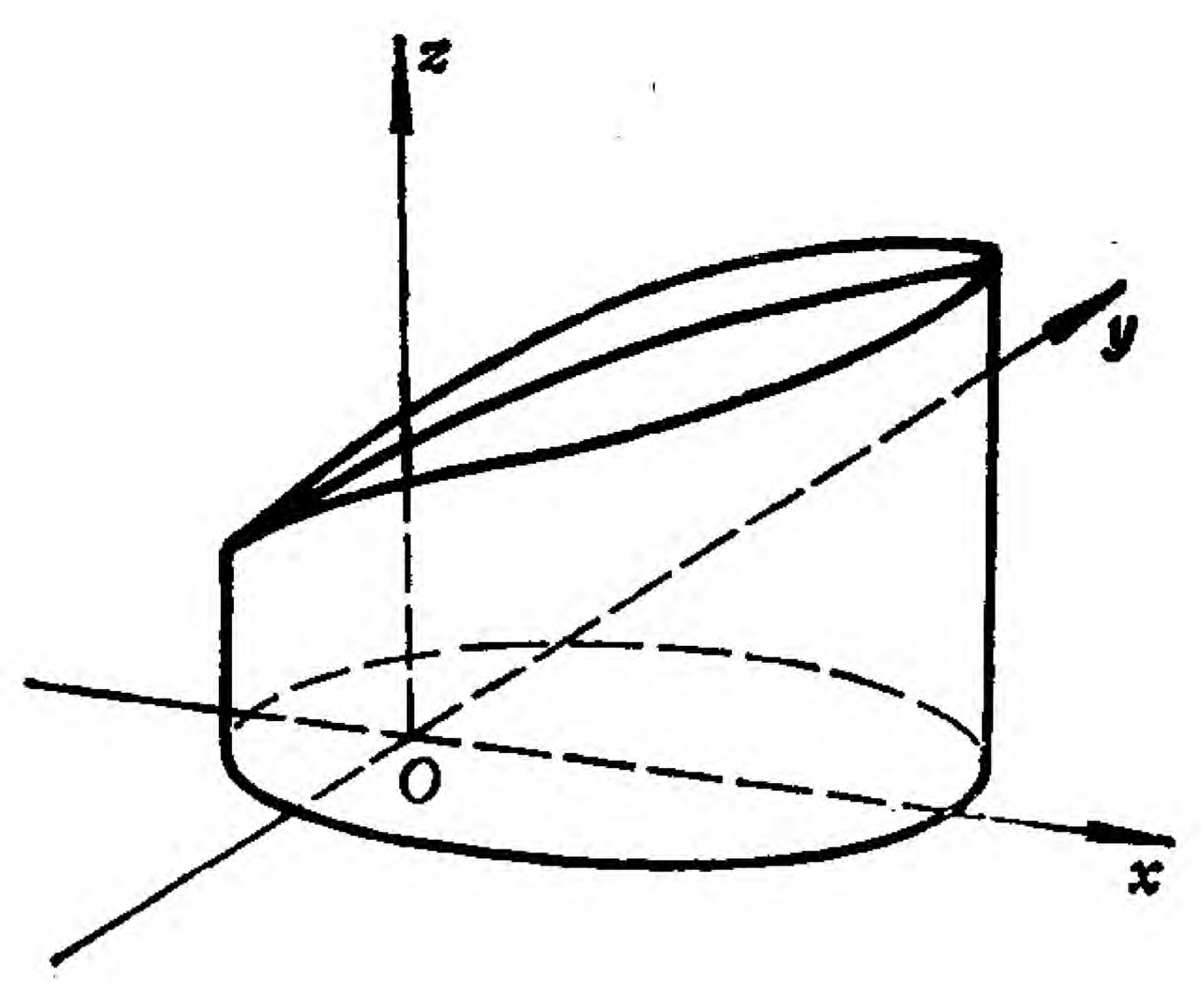

图 3.29

5.3 曲面所围成的区域的画法

几个曲面或平面所围成的空间的区域可用几个不等式联立起来表示。如何画出这个区域？关键是要画出相应曲面的交线，随之，所求区域也就表示出来了。

例3.8 用不等式组表示出下列曲面或平面所围成的区域，并画图。

$$x^2+y^2=2z,\quad x^2+y^2=4x,\quad z=0.$$

解 $x^2+y^2=2z$ 是椭圆抛物面，$x^2+y^2=4x$ 是圆柱面，$z=0$ 是 xOy 面。因此它们所围成的区域应当是在 xOy 面上方，在

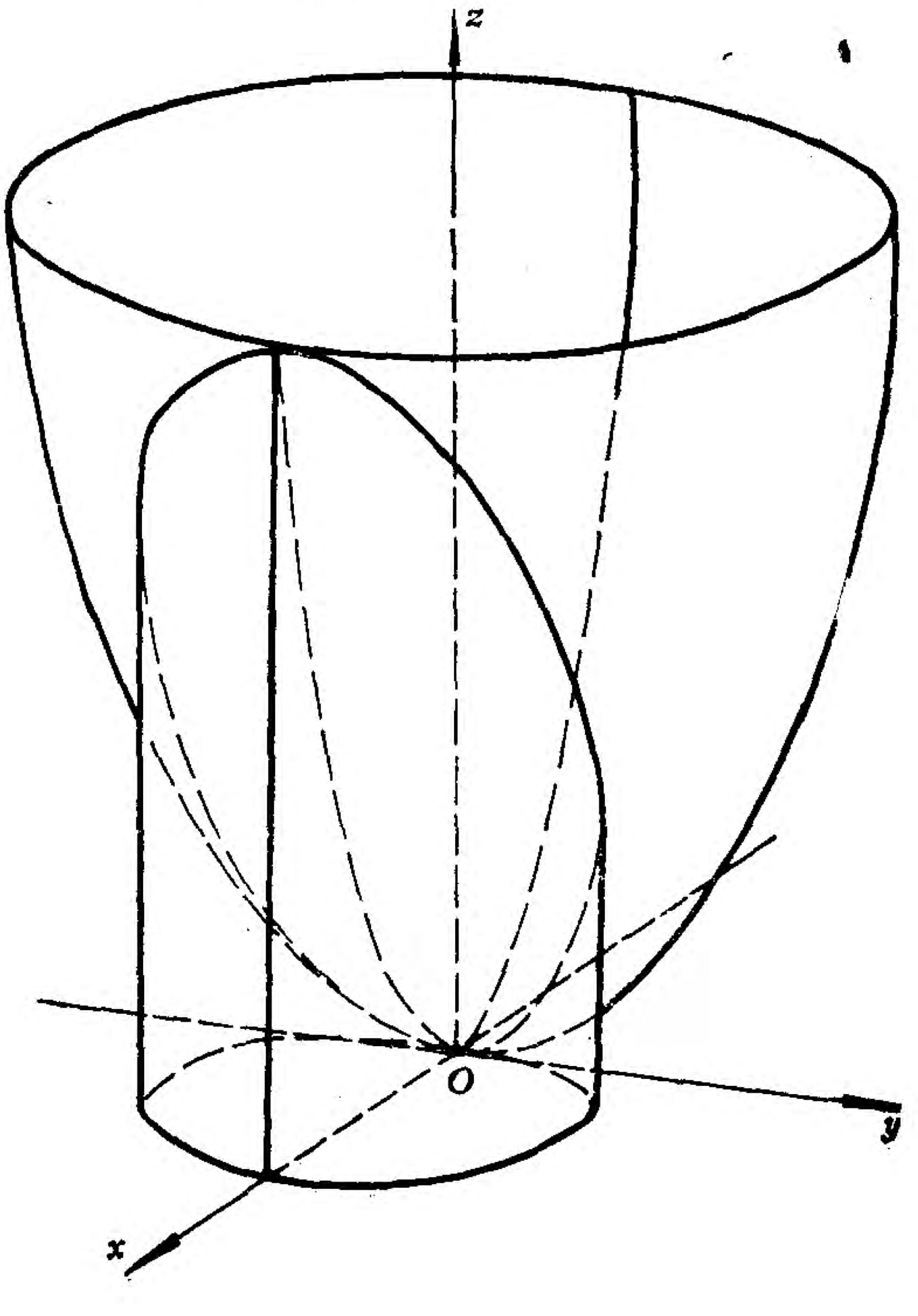

图 3.30

椭圆抛物面下方，在圆柱面里面。于是这个区域可表示成

$$\begin{cases} z \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \geqslant 2z, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4x. \end{cases} \tag{3.46}$$

为了画出这个区域，关键是要画出椭圆抛物面与圆柱面的交线Γ：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ x^2 + y^2 = 4x. \end{cases} \tag{3.47}$$

Γ在 xOy 面上的投影为：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ z = 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

Γ 在 xOz面上的投影为：

$$\begin{cases} z = 2x, \\ y = 0, \end{cases} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4. \tag{3.49}$$

由 Γ 的两个投影可画出 Γ，再画出圆柱面和椭圆抛物面，则所求的区域就画出来了(如图3.30)。

习　题　3.5

1．画出下列曲面。

(1) $x^2 - y = 0$；　　(2) $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$；

(3) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$；　　(4) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$；

(5) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = -1$；　　(6) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 2z$；

(7) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 2z$。

2．求下列曲线在 xOy 面和 yOz 面上的投影的方程，并

且画出这两个投影和曲线本身。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y^2+z^2=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=2y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5, \\ x^2+y^2=4z. \end{cases}$

3. 求下列曲线在 xOy 面和 xOz 面上的投影的方程，并且画出这两个投影和曲线本身。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ 2x-z^2+1=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}-\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x-2=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} z=4-x^2-\dfrac{1}{4}y^2, \\ z=3x^2+\dfrac{1}{4}y^2. \end{cases}$

4. 用不等式组表达下列曲面或平面所围成的空间区域，并且画图。

(1) $x^2+y^2=16$, $z=x+4$, $z=0$;

(2) $x^2+y^2=4$, $y^2+z^2=1$;

(3) $x^2+y^2+z^2=5$, $x^2+y^2=4z$.

5. 画出下列不等式组表示的区域。

(1) $x^2+y^2\leqslant 1$, $y^2+z^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$;

(2) $x^2+y^2\geqslant 4z$, $x+y\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.