B13

1. 交流电路的复数解法
2. 交流电功率
3. 谐振电路

§ 7.3 交流电路的复数解法

交流电的复数表示：

- **复电压** $u(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_u)\longleftrightarrow\tilde{U}=U_0e^{i(\omega t+\varphi_u)}$

- **复电流** $i(t)=I_i\cos(\omega t+\varphi_i)\longleftrightarrow\tilde{I}_i=I_0e^{i(\omega t+\varphi_i)}$

- **复阻抗**

$$\frac{U_0}{I_0}$$

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$$

$$\tilde{Z}=\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}=\frac{U_0e^{i(\omega t+\varphi_u)}}{I_0e^{i(\omega t+\varphi_i)}}=\frac{U_0}{I_0}e^{i(\varphi_u-\varphi_i)}=Ze^{i\varphi}$$

复阻抗的模和辐角

$$\begin{cases} Z = \left|\tilde{Z}\right| = \dfrac{U_0}{I_0} \\ \arg(\tilde{Z}) = \varphi = \varphi_u - \varphi_i \end{cases}$$

- 复导纳 $\tilde{Y} = \dfrac{1}{\tilde{Z}} = \dfrac{1}{Z} e^{-i\varphi} = Y e^{-i\varphi}$

复导纳的模和辐角

$$\begin{cases} Y = \left|\tilde{Y}\right| = \dfrac{I_0}{U_0} \\ \arg(\tilde{Y}) = \varphi_i - \varphi_u = -\varphi \end{cases}$$

和复阻抗相比幅角差一个负号

好处

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = Ze^{i\varphi}$$

复数形式的欧姆定律；
将Z、φ用一个复阻抗来代替

元件	阻抗	相位关系	复阻抗	复导纳
R	R与f无关	0	R	$\frac{1}{R}$
C	$\frac{1}{\omega c}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{i\omega c}$	$i\omega c$
L	ωL	$+\frac{\pi}{2}$	$i\omega L$	$\frac{1}{i\omega L}$

$$\tilde{Z} = \frac{1}{\omega c} e^{i(-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\omega c}(-i) = \frac{1}{i\omega c}$$

交流串、并联电路的复数解法

- 用复数法计算简单电路时，电路的电压、电流关系与直流电路一样

- 串联电路

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2,$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 = \tilde{I}\tilde{Z}_1 + \tilde{I}\tilde{Z}_2 = \tilde{I}\tilde{Z}$$

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$$

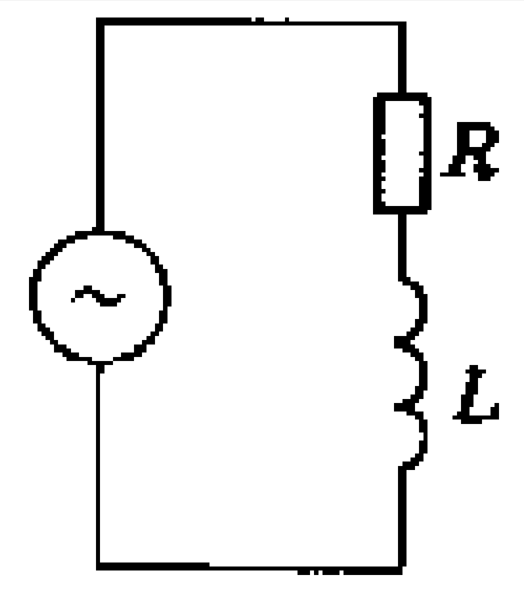
- 并联电路

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 = \tilde{U}_2,$$

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}_1} + \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}_2} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}}$$

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$$

用复数法求RL串联电路总阻抗:



解:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L = R + i\omega L$$

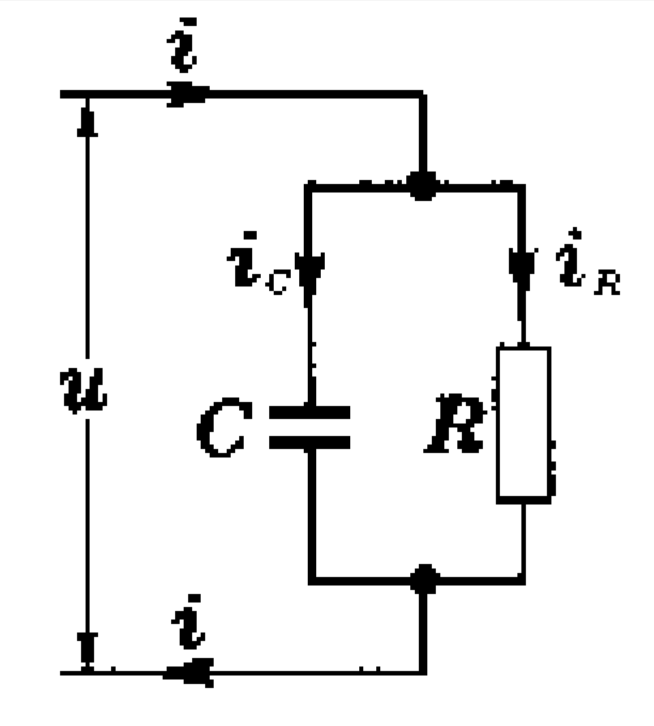
$$Z = \left|\tilde{Z}\right| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

相位差：$\varphi = \arg(\tilde{Z}) = \arctan\dfrac{\omega L}{R}$

用复数法求RC并联电路总阻抗

解：

$$\tilde{Y}=\tilde{Y}_R+\tilde{Y}_C=\frac{1}{R}+i\omega C$$

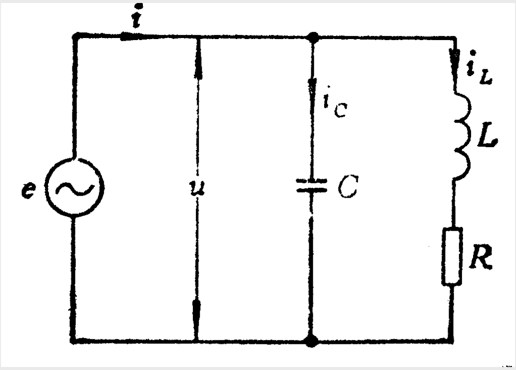


$$\tilde{Z}=\frac{1}{\tilde{Y}}=\frac{1}{\frac{1}{R}+i\omega C}$$

$$Z=\left|\tilde{Z}\right|=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+(\omega C)^2}}$$

$$\varphi=\arg(\tilde{Z})=-\arg(\tilde{Y})=-\arctan(\omega CR)$$

例题1：如图，求电路的总阻抗



- 先算L、R 串联电路的复阻抗Z_{LR}

$$\tilde{Z}_{LR}=\tilde{Z}_L+\tilde{Z}_R=R+i\omega L$$

- 再算总电路复导纳Y

$$\tilde{Y}=\tilde{Y}_{LR}+\tilde{Y}_C=\frac{1}{R+i\omega L}+i\omega C$$

$$=\frac{1-\omega^2LC+i\omega CR}{R+i\omega L}$$

- 复阻抗

$$\therefore\tilde{Z}=\frac{R+i\omega L}{1-\omega^2LC+i\omega CR}$$

$$Z=\left|\tilde{Z}\right|=\frac{\left|R+i\omega L\right|}{\left|1-\omega^2LC+i\omega CR\right|}=\sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{(1-\omega^2LC)^2+(\omega CR)^2}}$$

$$\tilde{Z}=\frac{R+i\omega L}{1-\omega^2LC+i\omega CR}=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2}=\frac{Z_1e^{i\varphi_1}}{Z_2e^{i\varphi_2}}=\frac{Z_1}{Z_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\arctan\frac{\omega L}{R}-\arctan\frac{\omega CR}{1-\omega^2LC}$$

交流元件的特点

$\tilde{Z}_L = i\omega L, \qquad \tilde{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C}$ → 都与频率有关

ω一定时 $\tilde{Z}_L = i\omega L, \qquad \tilde{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C}$ 有确定值

ω改变时 $\tilde{Z}_L = i\omega L, \qquad \tilde{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C}$ 随着变化

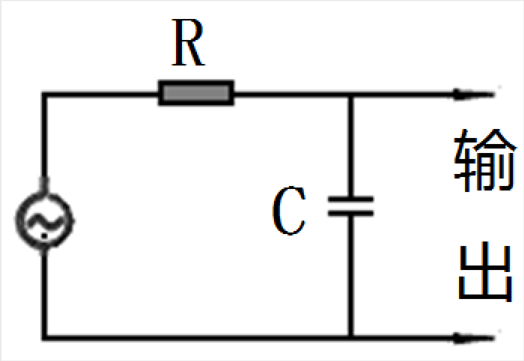
- 交流元件的这种特性——“频率响应”

滤波电路

- 能使某些频率的交流讯号顺利通过，而将另外一些频率的交流讯号阻挡住的电路
- 低通滤波电路：能使低频讯号顺利通过，而将高频讯号阻挡住的电路
- 高通滤波电路：能使高频讯号顺利通过，而将低频讯号阻挡住的电路
- 在无线电、多路载波通讯等技术领域中广泛地使用着各种类型的滤波电路

单级的RC低通滤波电路

- 由电容和电阻组合而成
- 利用电容具有隔直流、通交流，高频短路，直流开路的频率特性，实际上是一个分压电路。
- 以电容两端作为输出端，则该电路的输出复电压与输入复电压之比为



$$\frac{\tilde{U}_{输出}}{\tilde{U}_{输入}} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{R+\dfrac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1+i\omega RC}$$

模

$$\left|\frac{\tilde{U}_{输出}}{\tilde{U}_{输入}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

幅角

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

是ω的函数

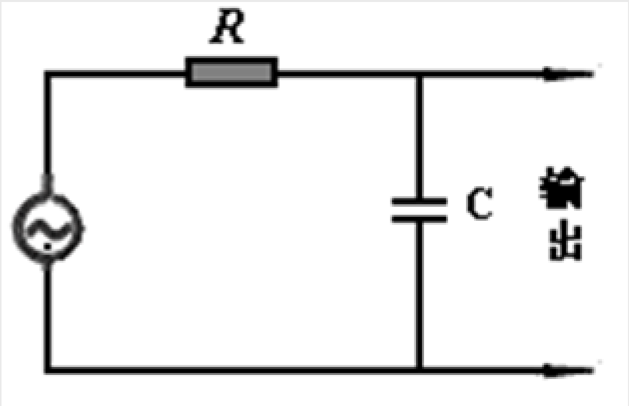
$$\left|\frac{\tilde{U}_{输出}}{\tilde{U}_{输入}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

- 对于一定的输入电压，输出端分压与频率成反比，频率越高，输出电压占输入电压的份额就越少
- 当输入电压中包含有各种频率的交流成分和直流成分时，直流成分大小不变，而交流成分减少，起到了滤波作用
- 因为输出的交流成分中，低频成分比高频成分占的比例多一些，——低通滤波电路

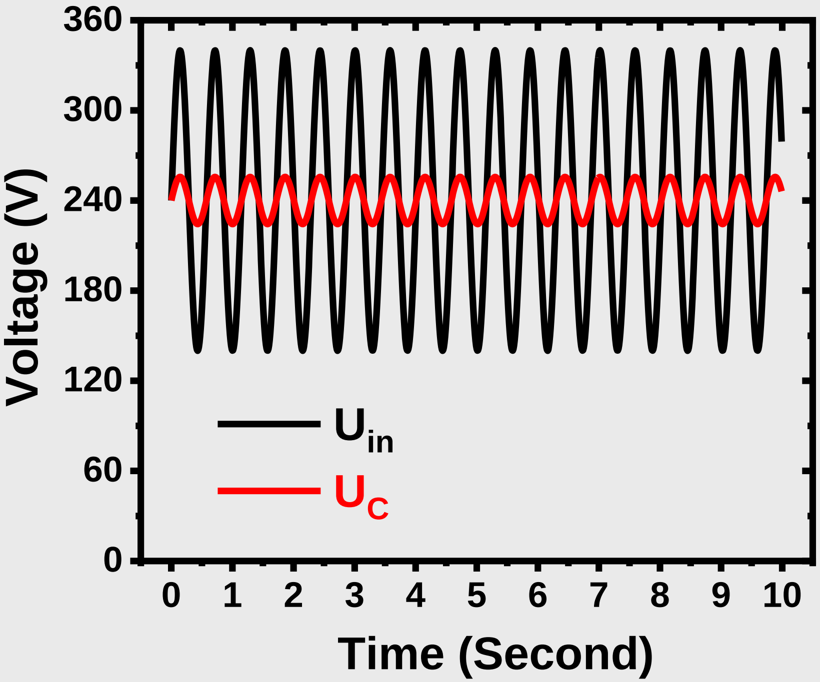
例题2：已知电压中包含直流成分240V和100Hz、 100V的交流成分，将此电压输入低通滤波电路，其中R＝200Ω，C=50μf。求：输出电压中的交、直流成分各占多少?

- 直流成分全部集中在电容上
- 电容上的交流成分？



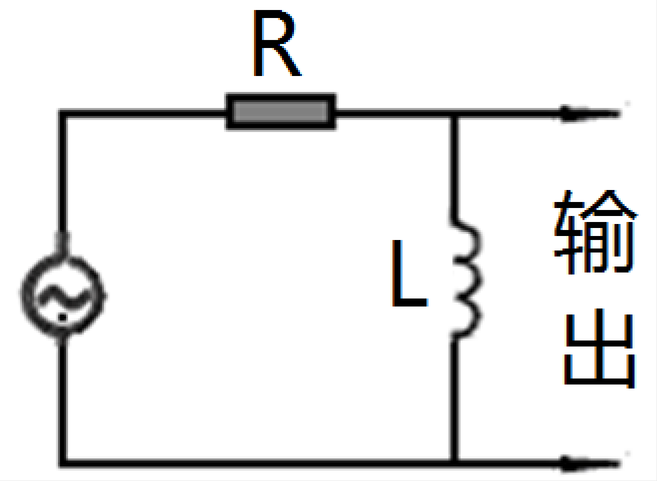
$$\left|\frac{\tilde{U}_C}{\tilde{U}}\right| = \frac{U_C}{U} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = 0.157$$

$$U_C = 100V \times 0.157 = 15.7V \approx 16V$$



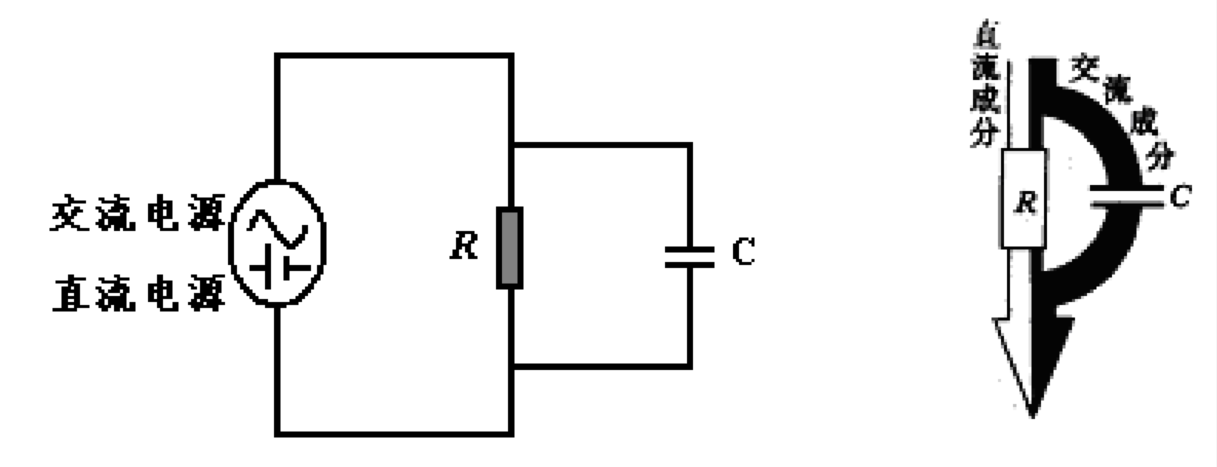
- **输出讯号交流成分由100V降到16伏，输出电压比原来平稳多了**

高通滤波电路



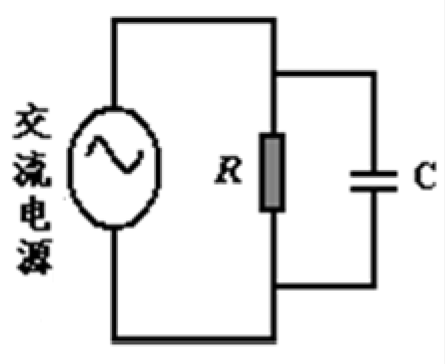
- 由于高频讯号的电压在电感上分配得比较多，因此输出端将得到较多的高频讯号
- 利用电感具有阻高频、通低频的频率特征，可以将电感和电阻组合成高通滤波电路

旁路作用



- 无线电路设计中，要求某一部位有一定直流压降，但同时必须让交流畅通、交流压降很小，使压降保持稳定
- 通常在这种部位中安置适当搭配的*RC*并联电路，此时由于电容隔直流、通交流，因此起到交流旁路作用

例题3：如图所示，电源提供500Hz 3 mA电流给R＝500 Ω的电阻。未接通电容时，两端交流电压为多少？当并联一个30μf的电容后又如何？



- 没有电容时，电源提供的电流全部通过电阻，电阻两端的交流压降为

$$U_R = IR = 3\times10^{-3}\times500V = 1.5V$$

- **并联30μf电容，其容抗**

$$Z_C = \frac{1}{2\pi fC} \approx 10\Omega$$

- **电流向电容支路分流，其电流有效值之比为**

$$\frac{I_c}{I_R} = \frac{Z_R}{Z_C} = \frac{500}{10} = 50$$

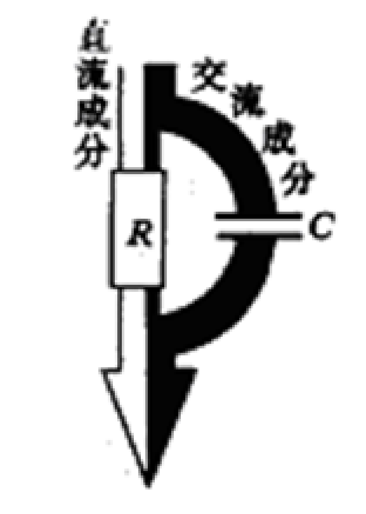
- 绝大部分电流从电容支路旁路流过，通过电阻的电流还不到总电流的1/50，近似认为

$$I_C \approx I = 3mA$$

$$U' = I_C Z_C = 30mV$$

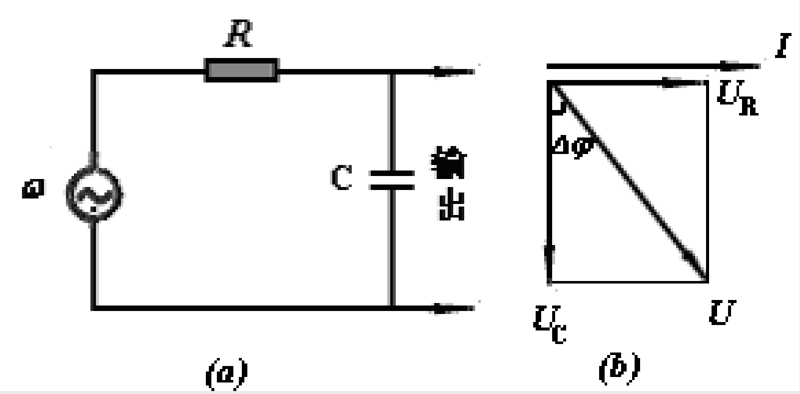
- **电容上交流压降为R的1/50**

旁路作用



相移作用

- R、C滤波电路，不仅有低通滤波作用，而且也改变了输出电压和输入电压的相位差，因此它可构成相移电路（相移器）



$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

U_C与U相位差

- 显然输出电压相位落后于输入电压。当输入讯号的频率一定时，改变电容或电阻，即可改变输出电压与电流之间的相位差

§ 7.4 交流电功率

- **瞬时功率和平均功率**
  - **瞬时功率：某一瞬时电压与电流的乘积**

设：$i(t)=I_0\cos\omega t,\qquad u(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi)$

时间的函数

$$
\begin{aligned}
P(t)&=U_0I_0\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)\\
&=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi+\frac{1}{2}U_0I_0\cos(2\omega t+\varphi)
\end{aligned}
$$

与时间有关项，频率变为2倍

与时间无关项

平均功率

- **瞬时功率在一个周期内的平均值**

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}U_0 I_0\cos\varphi dt+\frac{1}{2}\int_0^T U_0 I_0\cos(2\omega t+\varphi)dt$$

$$=\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}U_0 I_0\cos\varphi\right)T+0=\frac{1}{2}U_0 I_0\cos\varphi$$

$$=UI\cos\varphi$$

不仅与峰值还与相位差有关

功率因数

提高功率因数的意义

- 提高功率因数可充分发挥电器设备潜力
  - 例：一台发电机装机容量为S＝15000千伏安

$$\text{若}\cos\phi = 0.6,\ \text{则}\quad \bar{P} = 9000kW$$

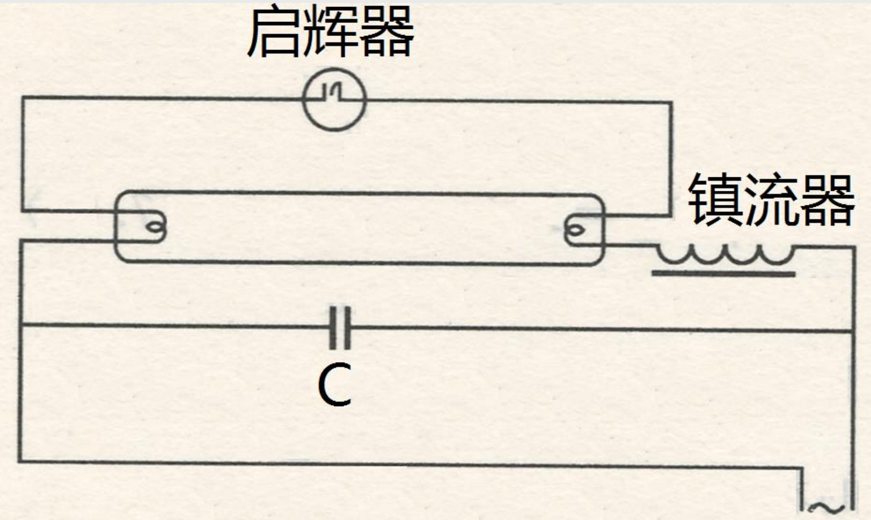
$$\text{若}\cos\phi = 0.8,\ \text{则}\quad \bar{P} = 12000kW$$

- 提高功率因数可减少输电耗能

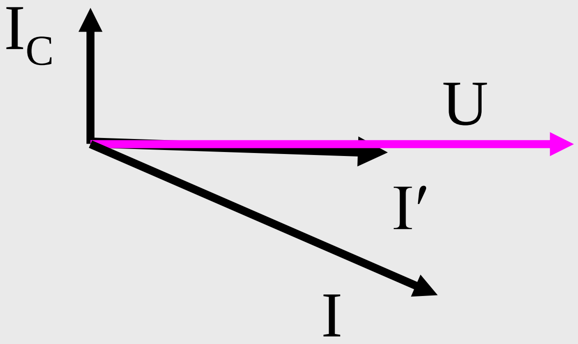
无功电流总是损耗焦耳热

提高功率因数的方法

- 日光灯附有镇流器，为L、R串联电路，一般$cos\varphi=0.4$，如何提高$cos\varphi$？

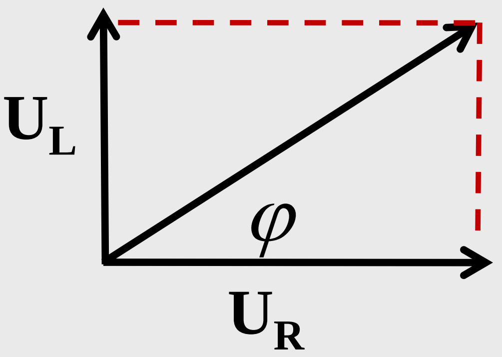


- 只要并联适当的电容C，使电路的$cos\varphi=1$,这样做，可以使日光灯外部输电线和电源中的电流没有无功分量



例题1.

0.**0191H**的电感和8Ω的电阻串联后接到电压有效值为$220V, 50Hz$的交流电的两端，电路中消耗的总功率？



$$Z_L = \omega L = 6\Omega$$

等效阻抗：$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 10\Omega$

$$I = 220/10 = 22A$$

$$\cos\varphi = 0.8$$

$$P = UI\cos\varphi$$

3872 W

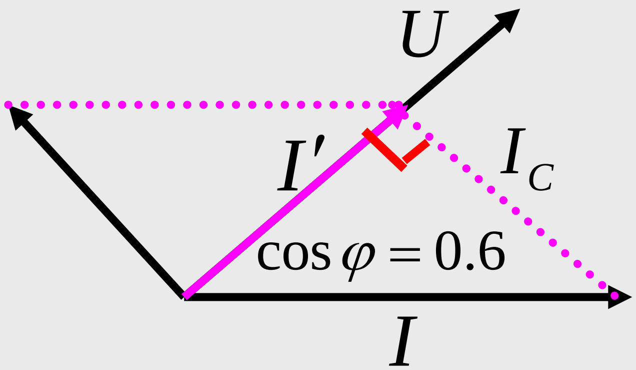
例题2.

一个110V,50Hz的交流电源供给一电路330W的功率，功率因数为0.6，且电流相位落后于电压。若在电路中并联一电容使功率因数增大到1，求电容器的电容。

解： $\bar{P} = UI\cos\varphi$

$$I = \frac{\bar{P}}{U\cos\varphi} = \frac{330}{110\times 0.6} = 5A$$

$$I' = \frac{\bar{P}}{U\cos\phi} = \frac{330}{110\times 1} = 3A$$

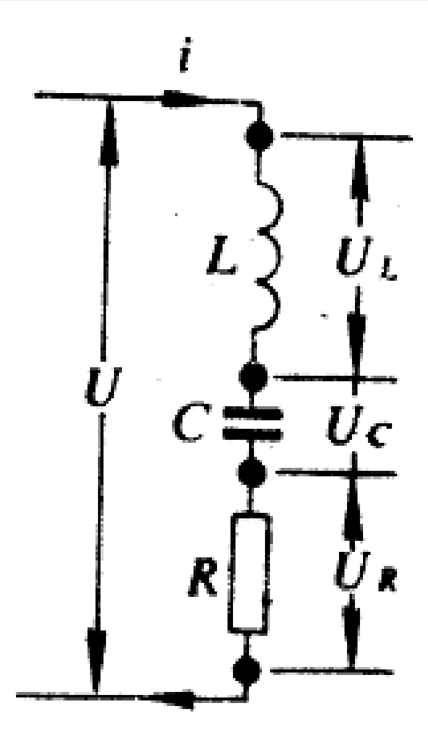


$$\sin\varphi = I_c / I = 0.8 \qquad I_c = 4A$$

$$I_C = \frac{U}{Z_C} = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = 4A \qquad C \approx 120\mu F$$

§ 7.6 谐振电路

- **R、L、C串联谐振电路**

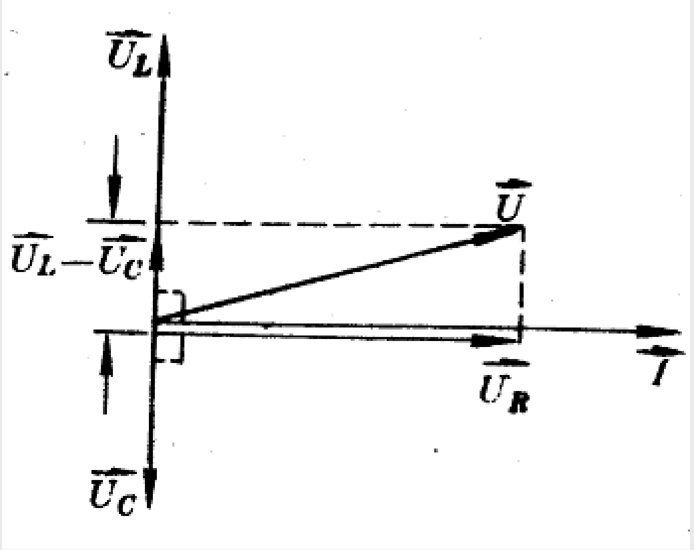


  - 矢量图

$$U=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}=I\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

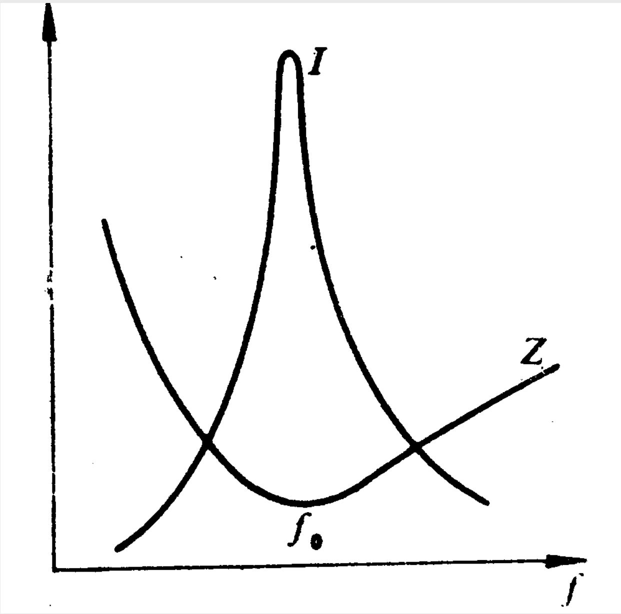
$$Z=\frac{U}{I}=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\varphi=\arctan\frac{U_l-U_C}{U_R}=\arctan\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$



谐振现象

$$Z=\frac{U}{I}=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$



谐振条件

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0,\qquad Z=R$$

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}>0,\qquad Z>R$$

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}<0,\qquad Z>R$$

$\omega=1/\sqrt{LC}$ 时阻抗达到极小值，此时电流I达到极大值——谐振现象，**相位差为0**

- **电源的频率与系统的固有频率一致时，发生谐振**

谐振时的特征

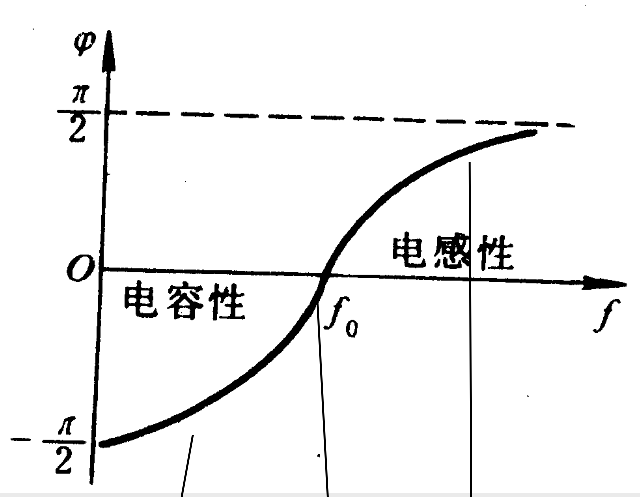
- 谐振频率
  - 满足谐振条件的频率

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC},\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

固有频率由电路中的L、C的量值决定，

- 总电压与总电流的相位关系

$$\varphi=tg^{-1}\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}$$



U超前I

U与I同相位

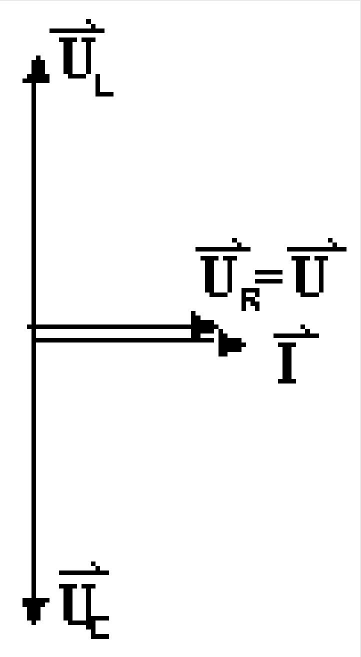
U落后I

谐振时的特征

$$U_R = I_m R = U$$

$$U_L = I_m Z_L = \frac{U}{R}\omega_0 L$$

$$U_C = I_m Z_C = \frac{U}{R\omega_0 C}$$



- **总阻抗、总电流**

  谐振时 总阻抗极小 $Z=R$

  总电流极大 $I_m=U/R$

- **电压分配**
  - **总电压$U=U_R=IR$**
  - **但电感、电容上有电压**
  - **实际上，谐振时,L、C上的电压往往比总电压大几倍到几十倍**

$$\frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U} = \frac{Z_C}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{Z_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q$$

品质因数

Q值的物理意义

- 品质因数是衡量谐振电路好坏的参量，其物理意义是多方面的

  - 储能和耗能　Q值的第一种物理意义
    - 在R、L、C串联电路中，电阻是耗能元件，而电感和电容是储能元件，在交流电一个周期内

电阻耗能：$W_R = RI^2T$

在C、L总储能 $$W_S = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}Cu_C^2(t)$$

$$i(t) = I_0\cos\omega t$$

$$u_c = \frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{I_0}{\omega C}\sin\omega t$$

$$W_S = \frac{1}{2}I_0^2[L\cos^2\omega t + \frac{1}{\omega^2 C}\sin^2\omega t]$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$W_S = \frac{1}{2}LI_0^2 = LI^2 = \frac{I^2}{\omega_0^2 C}$$

W_S与W_R之比

- 总储能W_S就是在谐振状态下，稳定地储存在电路中的电、磁能
- 这能量是在谐振电路开始接通时经历的暂态过程中由外电路输入给它的
- 达到稳定后，为了维持稳定的振荡，外电路要不断地输入能量以补充电阻上的耗能W_R
- W_S与W_R之比反映了一个谐振电路储能的效率

$$\frac{W_S}{W_R}=\frac{\frac{I^2}{\omega_0^2 C}}{RI^2T}=\frac{1}{\omega_0^2 CRT}=\frac{1}{2\pi RC\omega_0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\omega_0 RC}=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{Q}{2\pi}$$

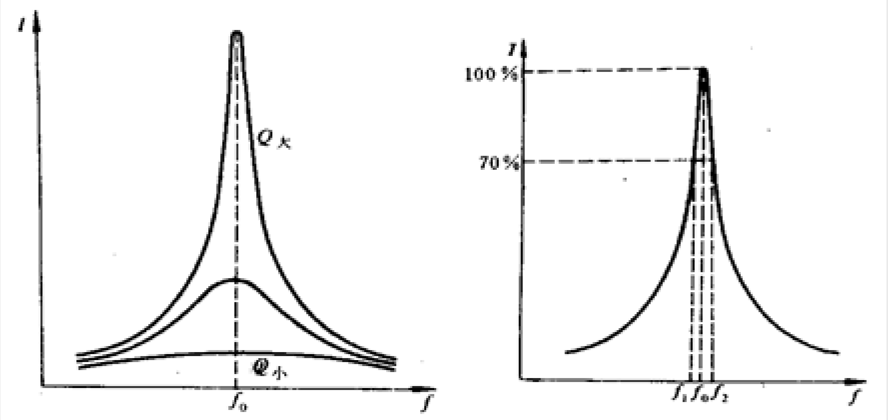
$$Q=2\pi\frac{W_S}{W_R}$$

Q值高——相对于储存的能量来说所需付出的能量耗散越少。

Q值等于谐振电路中储存的能量与每个周期内消耗能量之比的2π倍

频率的选择性和Q值的第二种物理意义

- 如图，Q值越大，谐振峰越尖锐，电路的频率选择性能越好



- 通频带宽度：I_m的70%处频率之间的宽度 $\Delta f=|f_1-f_2|$

$$Q=\frac{f_0}{\Delta f}$$

- **证明(自己阅读)**

■Q值越大，Δf越小，谐振峰越尖锐，频率选择性能也越好——Q值的第二种物理意义。

- **Q值越高，△f越小电路的选择性能越好**

电压分配——Q值的第三种物理意义

$$Q = \frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U}$$

- Q值标志了谐振电路中电感、或电容上电压与总电压的比值
- **Q值越大，电感和电容上的电压与总电压之比越大**
- 例如：一谐振电路的$Q=100$，

  若测得$U=5V$,则$U_L=U_C=500V$