高等数学(下)
速效救心丸

本文档由"*REKPARC-SPST-LZU-UHT*"项目组编写，如你也有相关笔记或资料，欢迎参与贡献*!*（点击上方 *github* 图标可跳转链接） 或者可以邮件传递你的资料*:*"*lzuanonymous@qq.com*"

Monika[1,2]
[1]zako University

最初写作于：**2025 年 06 月 24 日**
最后更新于：**2025 年 06 月 30 日**

目录

一、课程要求

1. 作业一章一交
2. 上课不迟到，上课不看手机，带纸笔
3. 总评= 40% 平时成绩，60% 期末考试

二、第七章 常微分方程（Ordinary Differential Equation）

Ordinary Differential Equation 简称 QDE

2.1 微分方程的基本概念

定义 2.1.1 (DE)

含有未知函数及其导数或微分的方程称为微分方程(DE)
其中出现的未知函数的最高阶导数称为微分方程的阶（Order）

例. $y''x + x^4 y''' = 114514$ 为四阶

$$\text{微分方程的分类} = \begin{cases} \text{常微分方程ODE:未知函数是一元函数} \\ \text{偏微分方程PDE未知函数是多元函数} \end{cases} \tag{2.1}$$

定义 2.1.2 (n 阶常微分方程的一般形式)

n 阶常微分方程的一般形式:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.2}$$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) \tag{2.3}$$

> ⓘ 注意
>
> $y^{(n)}$ 一定会出现，但是其他变量可以不出现

$$\text{ODE分类} = \begin{cases} \text{线性ODE: 式 (2.2) 的左端函数 } F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \\ \text{对 } y \text{ 及它的各阶导数都是一次的} \\ \\ \text{Otherwise} \end{cases} \tag{2.4}$$

定义 2.1.3 (Solution)

使 DE 称为恒等式的函数叫作 DE 的解（Solution）
不含任意常数的解称为特解
含有 n 个独立的任意常数的 n 阶方程的解称为通解

> 注意
>
> 通解不一定是全部解，
> 例. $(x+y)y'=0$，$y=-x$特解，$y=\mathrm{Const}$为通解

定义 2.1.4 (定解条件)

确定任意常数的条件称为定解条件
常用的定解条件为初值条件（Initial Condition）

式 (2.2) 的初值条件为

$$\begin{gathered} y|_{x=x_0}=y_0 \\ y'|_{x=x_0}=y_1 \\ y''|_{x=x_0}=y_2 \\ \cdots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1} \end{gathered} \tag{2.5}$$

其中 $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ 为已知常数

定义 2.1.5 (初值问题)

求 DE 满足初值条件的解的问题称为初值问题 (Initial Value Problem)

例.

1. 一阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

2. 1) 一阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y|_{x=x_0}=y_0 \\ y'|_{x=x_0}=y_1 \end{cases} \tag{2.7}$$

d

定义 2.1.6 (积分曲线)

DE 的解的图形在平面上一是条曲线，称之为 DE 的积分曲线
特解：一条积分曲线 通解：一系列的积分曲线

2.2 一阶微分方程（First-order DE）

一阶微分方程的常见形式:

$$\begin{aligned} f(x,y,y') &= 0 \\ y' &= f(x,y) \\ M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2.1 可分离变量方程 （Separable DE）

定义 2.2.1 (可分离变量 DE)

形如$y' = f(x)g(y)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ 的一阶 DE 称为可分离变量的 DE ♣

求解之法:

1. 分离变量，若 $g(y) \neq 0$ 则 $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. 积分求通解 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$

> **注意**
>
> 若只求通解，不需要判断$g(y) = 0$，若需求全部通解，则需要判断$g(y) = 0$的情况

例. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2y$求通解

答案.

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 3x^2\,\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= x^3 + c \\ y = \pm e^{x^3+c} &= C_1 e^{x^3} \end{aligned} \tag{2.9}$$

□

例. 求解 $x(y^2-1)\,\mathrm{d}x + y(x^2-1)\,\mathrm{d}y = 0$

答案.

1. 当 $x \neq \pm 1, y \neq \pm$ 时，分离变量容易解得

$$\begin{aligned} \ln\left(|x^2-1||y^2-1|\right) &= C_1 \\ \text{解为} \begin{cases} (x^2-1)(y^2-1) = C \\ x = \pm 1 \quad y = \pm 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.10}$$

□

例. 求 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解

答案.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= \ln|x| - x + C \\ y = \pm e^C e^{\ln|x|-x} &= C_1|x|e^{-x} \end{aligned} \tag{2.11}$$

□

2.2.2 齐次方程(Homogeneous Equation)

定义 2.2.2 (齐次方程)

若一个微分方程 $y' = f(x, y)$ 可化为 $y' = g(\frac{y}{x})$ 的形式，则称此方程为齐次方程

例.

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\ln\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ z := \frac{y}{x} \quad \frac{\mathrm{d}(zx)}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z\ln z \end{aligned} \tag{2.12}$$

♣

解法:

1. 将方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(\frac{y}{x})$
2. 令 $z := \frac{y}{x}, y = zx \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(zx)}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = g(z)$
3. 此方程一般易解

   例. $x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy - y^2$

答案.

$$\begin{cases} \frac{1}{z} = \ln|x| + c \quad \frac{x}{y} = \ln|x| + c \\ \text{when } z = 0 \quad y = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

□

例. $y' = \frac{y}{x} + \tan(\frac{y}{x})$

答案.

$$\begin{aligned} \ln|\sin(z)| = \ln|x| + c \\ \sin\frac{y}{x} = Cx \end{aligned} \tag{2.14}$$

□

> **注意**
>
> $\forall\tau \neq 0, f(\tau x, \tau y) = \tau^n f(x, y)$ 则称 $f(x, y)$ 为 n 次齐次式，相应的微分方程为 n 次齐次方程
> 解法：对于 $n = 1$ 时，令 $\tau = \frac{1}{x}$， $f(\tau x, \tau y) = f(1, \frac{y}{x}) = g(\frac{y}{x})$

2.2.3 准齐次方程(Quasi-homogeneous Equation)

定义 2.2.3 (准齐次方程)

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{2.15}$$

的方程称为准齐次方程

♣

解法

$$\begin{cases} \text{when} \quad c_1 = c_2 = 0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \text{Homo Equation} \\ \text{when } c_1 \quad c_2 \text{不全为零通过变量代换化为齐此方程} \end{cases} \tag{2.16}$$

变量代换：消去 $c_1 \quad c_2$ 即可，所以我们作代换

$$\begin{aligned} x &= \mathbb{X} + \mathrm{A} \\ y &= \mathbb{Y} + \mathrm{B} \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f\left(\frac{a_1(\mathbb{X}+\mathrm{A}) + b_1(\mathbb{Y}+\mathrm{A}) + c_1}{a_2(\mathbb{X}+\mathrm{B}) + b_2(\mathbb{Y}+\mathrm{B}) + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{\mathrm{A}_1\mathbb{X} + b_1\mathbb{Y} + a_1\mathrm{A} + b_1\mathrm{A} + c_1\mathrm{A}}{\mathrm{A}_2\mathbb{X} + b_2\mathbb{Y} + a_2\mathrm{B} + b_2\mathrm{B} + c_2\mathrm{B}}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

此时只需要满足

$$\begin{cases} a_1\mathrm{A} + b_1\mathrm{A} + c_1\mathrm{A} = 0 \\ a_2\mathrm{B} + b_2\mathrm{B} + c_2\mathrm{B} = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{\mathrm{A}_1\mathbb{X} + b_1\mathbb{Y}}{\mathrm{A}_2\mathbb{X} + b_2\mathbb{Y}}\right) \tag{2.20}$$

成功化为了齐次方程
那么什么如何解 式 (2.28) 呢？ 我们分为两种情况求解
定义

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{2.21}$$

1. when $\Delta = 0 \Rightarrow a_1b_2 = a_2b_1$
   - when $a_2 = b_2 = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{c_2}\right) \tag{2.22}$$

   令$z := a_1x + b_1y, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z+c_1}{c_2}\right)$
   - when $a_2 = 0, b_2 \neq 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{b_1y + c_1}{b_2y + c_2}\right) = g(y) \text{ 分离变量即可解} \tag{2.23}$$

   - when $a_2 \neq 0, b_2 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$ 与上一条完全对称

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + c_1}{a_1x + c_2}\right) = g(x) \text{ 分离变量即可解} \tag{2.24}$$

   - when $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ 令 $\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \overset{z=a_2x+b_2y}{=} f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) = g(z) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= a_2 + b_2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = a_2 + b_2 g(z) \text{ 分离变量可解} \end{aligned} \tag{2.25}$$

2. when $\Delta \neq 0 \Rightarrow a_1b_2 \neq a_2b_1$

作代换

$$\begin{aligned} x &= \mathbb{X} + \mathrm{A} \\ y &= \mathbb{Y} + \mathrm{B} \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f\left(\frac{a_1(\mathbb{X}+\mathrm{A}) + b_1(\mathbb{Y}+\mathrm{A}) + c_1}{a_2(\mathbb{X}+\mathrm{B}) + b_2(\mathbb{Y}+\mathrm{B}) + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{\mathrm{A}_1\mathbb{X} + b_1\mathbb{Y} + a_1\mathrm{A} + b_1\mathrm{A} + c_1\mathrm{A}}{\mathrm{A}_2\mathbb{X} + b_2\mathbb{Y} + a_2\mathrm{B} + b_2\mathrm{B} + c_2\mathrm{B}}\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

此时只需要满足

$$\begin{cases} a_1\mathrm{A} + b_1\mathrm{A} + c_1\mathrm{A} = 0 \\ a_2\mathrm{B} + b_2\mathrm{B} + c_2\mathrm{B} = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{\mathrm{A}_1\mathbb{X} + b_1\mathbb{Y}}{\mathrm{A}_2\mathbb{X} + b_2\mathbb{Y}}\right) \tag{2.29}$$

成功化为了齐次方程

例. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)$

$$\begin{cases} \beta+2=0 \\ \alpha+\beta-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-2 \end{cases}, \begin{cases} x=\mathbb{X}+\alpha \\ y=\mathbb{Y}+\beta \end{cases}, \frac{\mathrm{d}\mathbb{Y}}{\mathrm{d}\mathbb{X}} = 2\left(\frac{\mathbb{Y}}{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}\right)^2 \overset{z=\frac{\mathbb{Y}}{\mathbb{X}}}{\Rightarrow} z + \mathbb{X}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\mathbb{X}} = 2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 \Rightarrow$$

答案. $\ln(|z\mathbb{X}|) + 2\arctan(z) = C$

□

例. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$

答案. $\frac{1}{2}\ln\left|z^2 + 2z - 1\right| = -\ln|x| + C_1\left(z = \frac{y}{x}\right)$ or $\begin{cases} y=2\left(\sqrt{2}-1\right)(x-1) \\ y=2+\left(-1-\sqrt{2}\right)(x-1) \end{cases}$ □

2.2.4 一阶线性方程（First-order Linear DE）

定义 2.2.4 (一阶线性方程)

$y' + P(x)y = Q(x)$ 形式的方程，称为一阶线性微分方程

其中 $P(x), Q(x)$ 为某一区间上的连续函数

1. when $Q(x) = 0$ 时称为齐次线性方程
2. when $Q(x) \neq 0$ 时称为非齐次线性方程

♣

解法:

1. 解法一
   1) 先求解其对应的齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$ 易积得$y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$
   2) 常数变易法，令 $y = u(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} - P(x)y$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)\\
u(x)=\int Qe^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\\
y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Qe^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

2. 解法二（当你记不住公式时，这种方法可以快速推导）

   1）我们可以直接注意到，在$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$两边同时乘以$e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$，可以凑微分

$$
\begin{aligned}
e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+yP(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\right)=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\\
ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}=\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\\
y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Qe^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

例. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}=x^2$

答案. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}e^{-\ln x}-\frac{y}{x}e^{-\ln x}=x^2e^{-\ln x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{-\ln x}\right)=x^2e^{-\ln x}$, $y=e^{\ln x}\left(\int x^2e^{-\ln x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{2}x^3+Cx$ □

例. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$

答案. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x\cos y=\sin 2y$, $e^{\int -\cos y\,\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}e^{\sin y}-x\cos ye^{\sin y}=\sin 2ye^{\sin y}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^{\sin y}\right)=\sin 2ye^{\sin y}\Rightarrow x=e^{-\sin y}\left(\int\sin 2ye^{\sin y}\,\mathrm{d}y+C\right)=-2(\sin y+1)+Ce^{\sin y}$ □

例. $yy'=\frac{y^2}{x}-1+\frac{1}{x}$

答案. let $z:=y^2, \frac{1}{2}z'=\frac{z}{x}-1+\frac{1}{x}\Rightarrow z'-\frac{2}{x}z=\frac{1}{x}-1\overset{\int-\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x=-2\ln x}{\Rightarrow}\frac{z'}{x^2}-\frac{2}{x}\frac{z}{x^2}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z}{x^2}\right)=\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x+C\Rightarrow z=x^2\left(\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x+C\right)=-1+2x+Cx^2$ □

例. $y'+x\sin 2y=xe^{-x^2}\cos^2 y$

答案. $y'\cdot\frac{1}{\cos^2 y}+2x\tan y=xe^{-x^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\tan y}{\mathrm{d}x}+2x\tan y=xe^{-x^2}\overset{\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2}{\Rightarrow}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x^2}\tan y\right)=\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\tan y=\frac{1}{e^{x^2}}\left(\int xe^{-x^2\,\mathrm{d}x}+C\right)=\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)e^{-x^2}$ □

例. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+y}$

答案.

1. $z:=x+y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{z}{1+z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1+z-1}{1+z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\Rightarrow z-\ln(|1+z|)=x+C_1\Rightarrow x=Ce^y-y-1$
2. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x+y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y\overset{\int-1\,\mathrm{d}y=-y}{\Rightarrow}e^{-y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-xe^{-y}=ye^{-y}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(e^{-y}x)=ye^{-y}\Rightarrow x=\frac{1}{e^{-y}}\left(\int(ye^{-y})\,\mathrm{d}x+C_1\right)=-(y+1)+Ce^y$

□

2.2.5 贝努里方程(Bernoulli Equation)

定义 2.2.5 (Bernoulli)

形如 $y'+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)$ 的方程称为贝努里方程 ♣

解法:

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{y^n} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \\
\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}y^{1-n}}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x)
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

这样就变成了一阶线性方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y^{1-n}}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\int(1-n)P(x)\,\mathrm{d}x}y^{1-n}\right) = (1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)\,\mathrm{d}x} \\
y^{1-n} = e^{-\int(1-n)P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)\,\mathrm{d}x} + C\right)
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

例. $y' - 3xy = xy^2$

答案. $\frac{y'}{y^2} - 3x\frac{1}{y} = x \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}\frac{1}{y}}{\mathrm{d}x} - 3x\frac{1}{y} = x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\frac{1}{y}}{\mathrm{d}x} + 3x\frac{1}{y} = -x \overset{\int 3x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}e^{\frac{3}{2}x^2}\right) = \int -xe^{\frac{3}{2}x^2}\,\mathrm{d}x + C_1 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}x^2}}\left(\int -xe^{\frac{3}{2}x^2}\,\mathrm{d}x + C_1\right)$ □

例. $y' + \frac{y}{x} = ay^2\ln x$

答案. $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = a\ln x \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}\frac{1}{y}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = a\ln x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\frac{1}{y}}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{x}\frac{1}{y} = -a\ln x \overset{\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln x, e^{-\ln x} = \frac{1}{x}}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}\right) = -a\ln x\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} = x(\int -a\ln x\,\mathrm{d}\ln x + C) = x(-\frac{a}{2}\ln^2 x + C)$ □

例. $xy' + y = -xy^2$

答案. $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = -1 \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}\frac{1}{y}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{xy} = -1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\frac{1}{y}}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{x}\frac{1}{y} = 1 \overset{\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln x, e^{-\ln x} = \frac{1}{x}}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}\right) = \int 1\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{y} = x(x + C)$ □

2.3 高阶微分方程

定义 2.3.1 (高阶微分方程)

二阶或二阶以上的微分方程称为高阶微分方程 ♣

2.3.1 可降阶的微分方程

$$
\begin{cases}
y^n = f(x) \\
y'' = f(x, y') & \text{(no y)} \\
y'' = f(y, y') & \text{no x} \\
\text{齐次型}
\end{cases} \tag{2.34}
$$

2.3.1.1 纯导型 $y^n = f(x)$

直接积分就完事了

2.3.1.2 缺 y 型 $y'' = f(x, y')$

$p = y', p' = f(x, p)$

推论 2.3.1.1

方程

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{n}\right) = 0 (k \geq 0), z := y^{(k)}, F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$z = z(x, c_1, ..., c_{n-k}) \tag{2.35}$$
$$\text{积分n次即可求出} y(x)$$

例. $(1+x^2)y'' = 2xy'$

答案. $y = C_1\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + C_2$ □

例.

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1+(y')^2} \\ y|_{x=0} \end{cases} = a, y'|_x = 0 = 0, \tag{2.36}$$

答案. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ □

2.3.1.3 缺 x 型 $y'' = f(y, y')$

$$p = y', y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$
$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p) \tag{2.37}$$

例. $yy'' - (y')^2 = 0$

答案. $y' = p \Rightarrow y \cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}$ □

2.3.1.4 齐此方程

定义 2.3.2 (齐次方程)

若 $F(x, ty, ty', ty'') = t^k F(x, y, y', y'')$ 则称方程 $F(x, y, y', y'') = 0$ 为齐次方程，$F(x, y, y', y'')$ 为齐次函数

解法:

重要

齐次 e 代换，线齐特乘新

1. 齐次 e 代换 $y = e^{\int z \, \mathrm{d}x}$
   1) 若 $F(x, ty, ty', ty'') = t^k F(x, y, y', y'')$，求解 $F(x, y, y', y'') = 0$，若令 $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = zy, y'' = z'y + zy', y''' = z''y + 2z'y' + zy'', ...$ 由此可见，此代换可以将 $y^{(n)} (n \geq 2)$ 表示成 $z, z^{(1)}, ..., z^{(n-1)}, y, y^{(1)}, ..., y^{(n-1)}$ 的线性组合，此时方程变成 $F(x, z, z') = 0$ 由二阶变成一阶方程（没有 y 是因为可以由 $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow y = e^{\int z \, \mathrm{d}x}$）

   例. $x^2 yy' = (y - xy')^2$

答案. 作代换 $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = zy, y'' = z'y + zy', y''' = z''y + 2z'y' + zy'', \ldots \Rightarrow z' + 2\frac{z}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow z = \frac{x+c_1}{x^2} \Rightarrow y = Cxe^{-\frac{c}{x}}$ □

2. 线齐特乘新
   1) 先猜特解y_1，一般是 $\pm x, \pm\frac{1}{x}, \pm\frac{1}{x^2}, e^{\pm x}, \ln x$ 如果常见函数做不出来就立刻放弃
   2) 令 $y = zy_1$ 然后代入原方程，你应该能化简出一个较为简单的形式，如果复杂且确信没有算错，立刻放弃

例. $xy''' + 3y'' - xy' - y = 0$

答案. 可猜出解 $y_1 = \frac{1}{x}$, let $y = \frac{z}{x}$, 代入可得$z''' - z' = 0$, let$p := z', p'' = p \Rightarrow p = C_1e^x + C_2e^{-x}, z = \int p(x)\,\mathrm{d}x = C_1e^x - C_2e^{-x} + C_3$ □

2.3.2 高阶线性微分方程

定义 2.3.3 (高阶线性微分方程)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \tag{2.38}$$

称为 n 阶线性微分方程，其中 $\forall 1 \le k \le n, p_k(x)$ 和 $f(x)$ 都是某个区间上的连续函数

1. when $f(x) = 0$ 时称为齐次线性方程
2. when $f(x) \neq 0$ 时称为非齐次线性方程

♣

1. 对于齐次方程有 $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ 可以用算符 L来替代，即 $L(y(x)) = f(x)$，显然算符L是线性的，假如我们猜得了两个解$L(y_1(x)) = 0, L(y_2(x)) = 0$, 两式线性组合可得$L(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$显然两个解的线性组合仍然是原方程的解，所以我们说：对于n阶齐次次方程，将n个线性无关的解$y_k(x)$线性组合，即可得到通解$y^\star$
2. 对于非齐次方程 $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$,我们仍然用算符 L^*来替代，$L(y(x)) = f(x)$，假如我们已经由齐次方程$L(y(x)) = 0$解出了通解$y^\star$，那么我们可以猜一个特解$y_{p(x)}$，使得$L\left(y_{p(x)}\right) = f(x)$，那么我们就有$L\left(y^\star + y_{p(x)}\right) = L(y^\star) + L\left(y_{p(x)}\right) = 0 + f(x) = f(x)$ 所以 $y^\star + y_{p(x)}$ 也是原方程的解，所以我们说：将通解和特解直接相加，可得所有解

2.3.2.1 二阶线性微分方程

2.3.2.1.1 二阶线性齐次微分方程

特别的对于二阶线性齐次微分方程我们有

$$y'' + p_1y' + p_2y = 0 \tag{2.39}$$

其中 p_1, p_2 是常数
我们已经从解简谐振动的方程中知道了解

$$x'' + w^2x = 0 \Rightarrow x = c_1 \sin\omega t + c_2 \sin\omega t = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \tag{2.40}$$

于是我们猜解

$$\begin{gathered} y = Ae^{kx}, y' = ky, y' = k^2y \\ y(k^2 + p_1k + p_2) = 0, y \neq 0 \end{gathered} \tag{2.41}$$

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0$$
$$k = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\frac{p_1^2}{4} - p_2}, \Delta = p_1^2 - 4p_2, \omega_t = \sqrt{\frac{p_1^2}{4} - p_2} \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} y = Ae^{-\frac{p_1}{2}x + \omega_t x} + Be^{-\frac{p_1}{2}x - \omega_t x} = e^{-\frac{p_1}{2}x}(Ae^{\omega_t x} + Be^{-\omega_t x}) \quad \Delta > 0 \\ y = e^{-\frac{p_1}{2}x}(A + Bx) \quad \Delta = 0\text{你不难验证}Bxe^{-\frac{p_1}{2}x}\text{也是解这是delta为零时的特殊解} \\ y = e^{-\frac{p_1}{2}x}(Ae^{i\omega_b x} + Be^{-i\omega_b x}) = e^{-\frac{p_1}{2}x}(c_1 \sin\omega_b x + c_2 \cos\omega_b x) \quad \Delta < 0 \quad \omega_b = \sqrt{p_2 - \frac{p_1^2}{4}} \end{cases} \tag{2.43}$$

参考文献