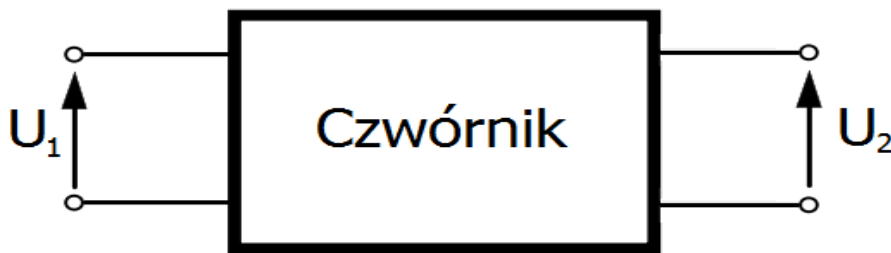


## Charakterystyki układów liniowych

Celem ćwiczenia jest zapoznanie z właściwościami i metodami opisu liniowych układów elektrycznych i elektronicznych przenoszących sygnały.

### Wprowadzenie

Układem liniowym nazywamy układ, w którym zachodzące procesy opisujemy za pomocą równań liniowych tzn. takich których parametry nie zmieniają się podczas zmiany stanu układu. W elektronice za przykład mogą posłużyć układy których opór, indukcyjność bądź pojemność nie zależą od napięcia i natężenia. Jednym z najprostszych układów które spełniają wymienione warunki są czwórniki.



Ilustracja 1

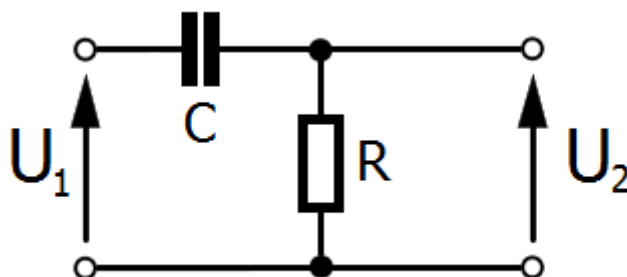
Czwórnik (inaczej zwany dwuwrotnikiem) to obwód elektryczny, lub element obwodu, który posiada cztery zaciski, uporządkowane w dwie pary (nazywane także wrotami). Jedna z par stanowi wejście czwórnika, a druga wyjście. W stosunku do wejścia i wyjścia czwórnika musi być spełniony warunek równoważenia prądów. Ogromną zaletą czwórników jest możliwość zastąpienia nimi układów równoważnych, ale bardziej złożonych.

W zależności od wartości średniej energii przekazywanej łącznie do i z czwórnika możemy wyróżnić ich dwa rodzaje. Układy zawierające elementy czynne np. wzmacniacze operacyjne, tranzystory nazywamy czynnymi, natomiast te które zawierają jedynie elementy stratne, takie jak

oporniki, cewki i kondensatory, nazywamy biernymi.

Bardzo istotnym elementem, mającym dla nas znaczenie jest również sposób przenoszenia sygnału. Czy jest on wierny, czy zniekształcony. Pobudzając układ sygnałem harmonicznym otrzymujemy zależność od częstotliwości transmitancję. Pobudzając natomiast sygnałem stałym możemy zbadać zależność transmitancji w dziedzinie czasu.

### *Filtr górnoprzepustowy*

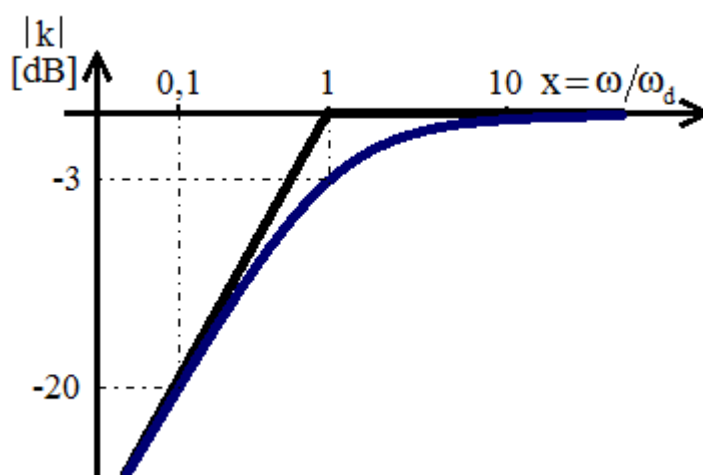


*Ilustracja 2: Schemat filtru górnoprzepustowego*

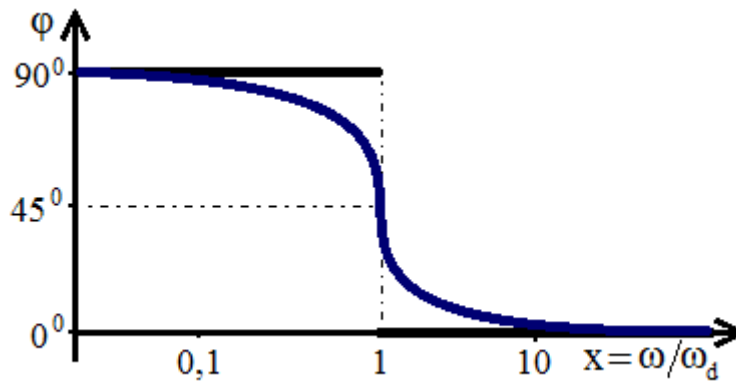
Transmitancję napięciową ( $\frac{U_2}{U_1}$ ) możemy przedstawić jako:

$$k(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\omega RC}{\omega RC - j} = \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} e^{j \arctg(\omega RC)}$$

Ze względu na skalę rozpiętości częstotliwości posłużymy się skalą logarymiczną podczas obrazowania jej. Moduł transmitancji podamy we względnych jednostkach logarytmicznych w ten sposób, że na osi rzędnych przedstawimy  $|k|_{[dB]} = 20 \log |k|$ .



*Ilustracja 3: Moduł transmitancji*



Ilustracja 4: Faza transmitancji

Rzeczywisty przebieg przedstawia niebieska krzywa.

Zauważamy, że dla:

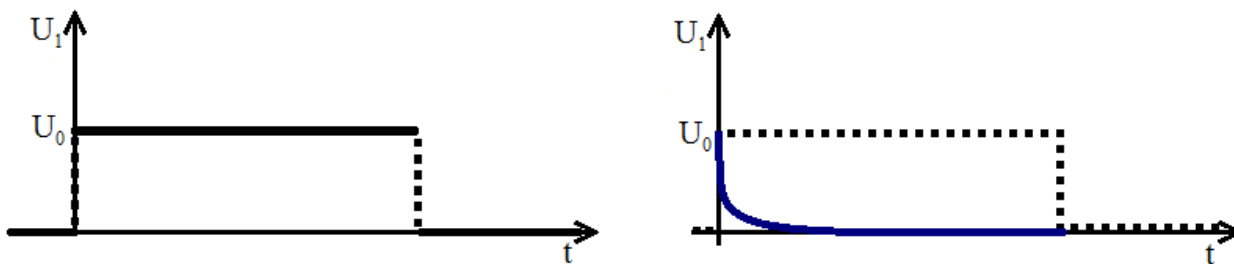
$x \ll 1$	$20 \log  k  \approx +20 \log x$	$\varphi \approx +\pi/2$
$x \gg 1$	$20 \log  k  \approx 0$	$\varphi \approx 0$

Oznacza to, że we wskazanych zakresach możemy przebieg rzeczywisty aproksymować prostymi. Najmniejszy błąd przybliżenia występuje z dala od częstotliwości granicznej filtru  $\omega_d = \frac{1}{RC}$ . Proste te zaznaczono kolorem czarnym na ilustracji. Każda z nich jest nachylona pod odpowiednim kątem, którego wartość wyrażamy w decybelach na oktawie (oktawą oznaczamy interwał częstotliwości różniących się dwukrotnie) lub w decybelach na dekadę (dekada to interwał częstotliwości różniących się dziesięciokrotnie). Dla  $x \ll 1$  nachylenie to wynosi 6 dB/oct czyli 20 dB/dec, zaś dla  $x \gg 1$  wynosi 0 dB/dec.

Analizując równanie układu:  $RC \frac{dU_2}{dt} + U_2 = RC \frac{dU_1}{dt}$  zauważamy że jest to liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Przy zerowym napięciu początkowym otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

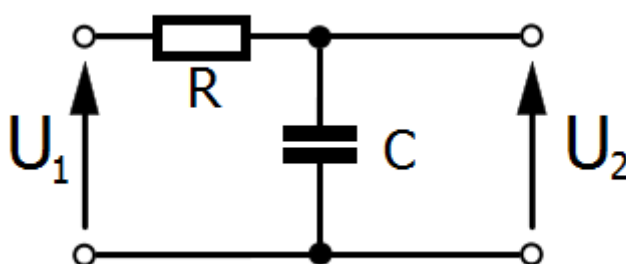
$$U_2(t) = e^{\frac{-i}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{t}{RC}} \frac{dU_1}{dt} dt.$$

Jeśli  $t \gg RC$ , to  $U_2(t) = RC \frac{dU_1}{dt}$ . Otrzymaliśmy więc układ który dla pewnych częstotliwości różniczuje napięcie wejściowe. Jednym ze sposobów obserwacji tego zjawiska jest podanie na wejściu prostokątnego sygnału o wypełnieniu  $\frac{1}{2}$  i o odpowiedniej częstotliwości. Spodziewaną odpowiedź prezentuje ilustracja 5.



Ilustracja 5: Różniczkowanie sygnału prostokątnego

### Filtr dolnoprzepustowy

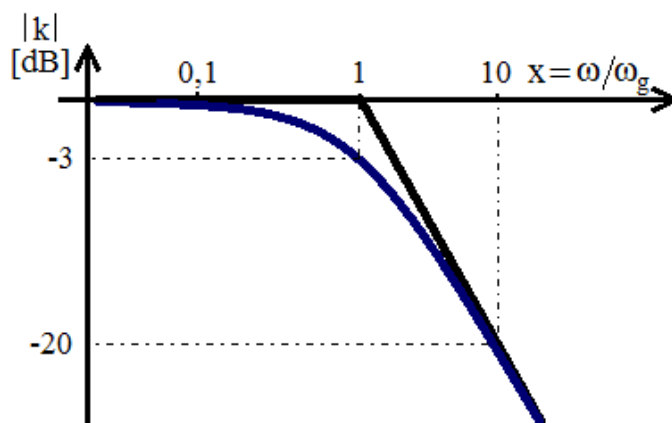


Ilustracja 6: Schemat filtra dolnoprzepustowego

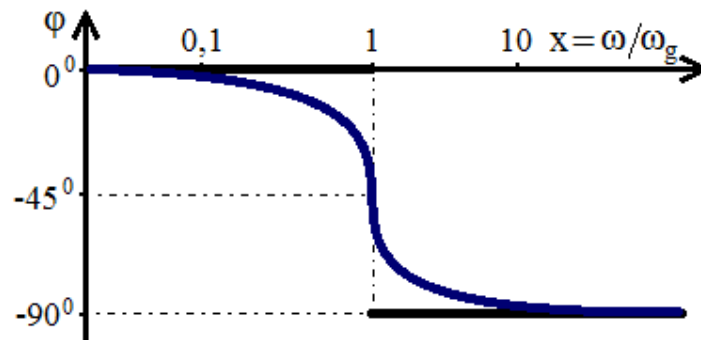
Transmitancję napięciową ( $\frac{U_2}{U_1}$ ) możemy przedstawić jako:

$$k(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} e^{-j \arctg(\omega RC)}$$

Również ze względu na skalę rozpiętości częstotliwości posłużymy się skalą logarymiczną.



Ilustracja 7: Moduł transmitancji



Ilustracja 8: Faza transmitancji

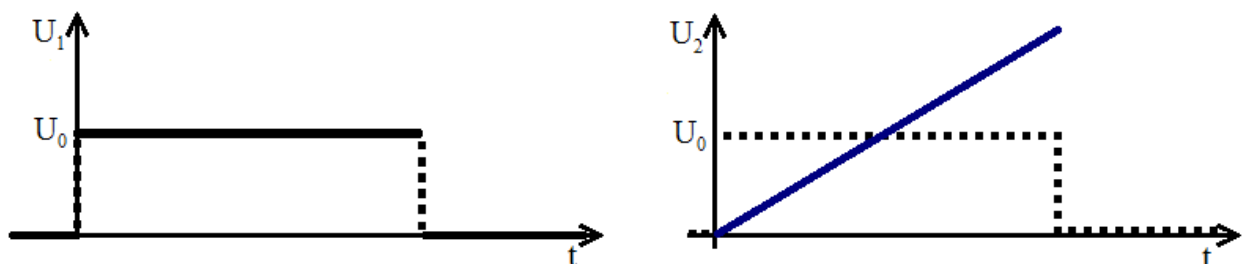
Możemy zauważyć analizując funkcję fazy transmitancji że dla:

$x \ll 1$	$20 \log  k  \approx 0$	$\varphi \approx 0$
$x \gg 1$	$20 \log  k  \approx -20 \log x$	$\varphi \approx -\pi/2$

Oznacza to że we wskazanych zakresach możemy przebieg rzeczywisty aproksymować prostymi. Najmniejszy błąd przybliżenia występuje również z dala od częstotliwości granicznej filtra  $\omega_g = \frac{1}{RC}$ . Dla  $x \gg 1$  nachylenie to wynosi -6 dB/oct czyli -20 dB/dec, zaś dla  $x \ll 1$  wynosi 0 dB/dec.

Równanie układu ma postać:  $RC \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1$  również jest to liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Przy zerowym napięciu początkowym otrzymujemy rozwiązanie w postaci:  $U_2(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U_1(t) dt$ .

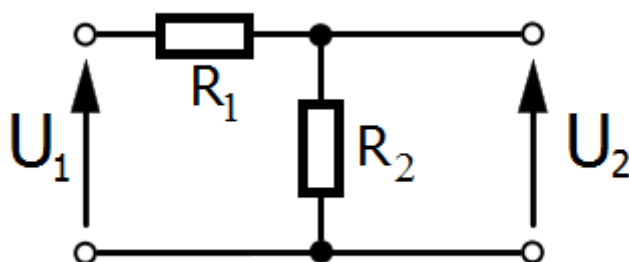
Otrzymaliśmy więc układ który dla pewnych częstotliwości całkuje napięcie wejściowe. Jak w poprzednim przypadku, ze sposobów obserwacji tego zjawiska jest podanie na wejściu prostokątnego sygnału o wypełnieniu  $\frac{1}{2}$  i o odpowiedniej częstotliwości. Spodziewaną odpowiedź prezentuje ilustracja 9.



Ilustracja 9: Różniczkowanie sygnału prostokątnego

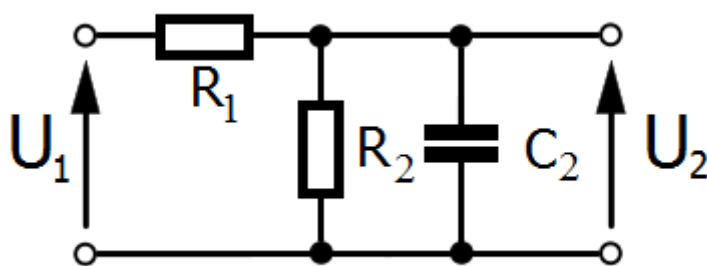
## Praktyczne zastosowanie filtrów

Praktycznym przykładem zastosowania filtrów jest kompensacja wpływu pojemności oporowego dzielnika napięcia, stosowana w sondach biernych, zwiększających oporność wejściową oscyloskopu.



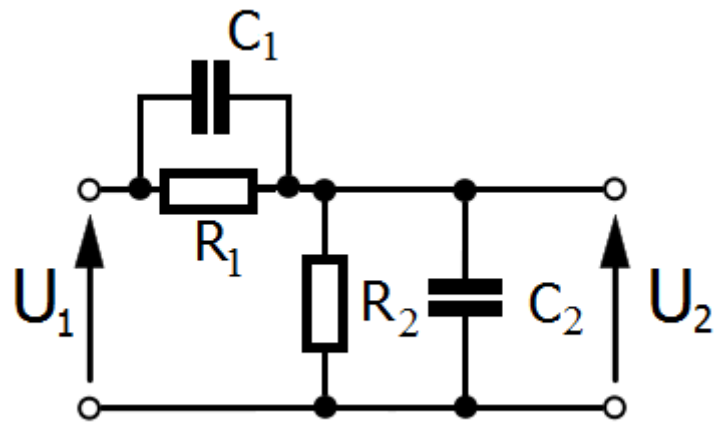
Ilustracja 10: Oporowy dzielnik napięcia

Oporność wejściowa oscyloskopu  $R_2$  może zbyt obciążać układ (zbyt mała). Aby przeciwdziałać temu zjawisku dodajemy opornik  $R_1$  dzięki któremu powstaje czwórnik o transmitancji  $k_d = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ . Niestety rzeczywiste urządzenia posiadają również swoją pojemność wejściową.



Ilustracja 11: Rzeczywisty dzielnik napięcia

Układ ten będzie się zachowywał jak jeden z już omówionych. Występująca zależność transmitancji od pojemności nie jest mile widziana, dlatego postaramy się ją również skompensować.



*Ilustracja 12: Skompensowany dzielnik napięcia*

Dzięki kompensacji charakterystyka amplitudowa w dziedzinie częstotliwości będzie płaska, a w dziedzinie czasu wystąpią jedynie minimalne zniekształcenia. Aby zmiany w dziedzinie czasu były jak najmniejsze spełniony musi być warunek kompensacji  $R_1 C_1 = R_2 C_2$ .

### *Do wykonania na zajęciach*

- 1.) Wyznaczenie częstotliwości granicznych dla filtrów górnoprzepustowych oraz dolnoprzepustowych.
- 2.) Zdjęcie charakterystyk czasowych oraz częstotliwościowych dla filtrów górnoprzepustowych, dolnoprzepustowych oraz nieskompensowanego dzielnika napięcia.
- 3.) Obliczenie wartości pojemności spełniającej warunek kompensacji oraz dołączenie go do układu.
- 4.) Zdjęcie charakterystyk czasowych oraz częstotliwościowych dla skompensowanego dzielnika napięcia.

### *Do opracowania*

Wykreślić charakterystyki amplitudowe transmitancji napięciowej dla badanych układów. Należy przyjąć logarytmiczną skalę częstotliwości, oraz wyrazić moduł transmitancji w dB.

Wyznaczyć równania prostych aproksymujących krzywe doświadczalne i wyznaczyć ich nachylenie.

Przedstawić otrzymane wyniki w dziedzinie czasu.

*Pozdrawiam Łukasz Boniecki*