Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

П Р О Е К Т

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2015/16

Тема № 78

06.06.2016 Изготвил: Моника Ивова Герова

София Ф. No.: 61832

Група: 4 (четвърта)

Оценка :……………………………........

Съдържание:

1. Тема (задание) на проекта

Задача 1: Дадено е условието

$$xy' = 2\sqrt{y} * \cos x - 2y$$

А) Да се определи реда му, от кой вид е и да се намери общото му решение

Б) Да се начертаят със жълт цвят получените с помощта на оператора *dsolve* интегрални криви на това уравнение минаващи през точката с координати $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi^2}\right)$. Чертежът да е разположен в правоъгълника

$$\Pi = \left\{(x, y): \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1\right\}$$

В) В същия прозорец с червен цвят да се начертаят интегралните криви, преминаващи през точката с координати $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$

Задача 2:

Трептенията на хомогенна идеално гъвкава неразтеглива струна с дължина *L* се моделират с уравнението $u_{tt} = u_{xx}$ за $0 < x < \pi$, $t > 0$. В началния момент формата на струната е зададена с равенството $u(x, 0) = \varphi(x)$, а скоростта ѝ е $u_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq \pi$. Положенията на краищата на струната се описват с условията $u_x(0, t) = 0$ и $u(\pi, t) = 0$ при $t \geq 0$.

Нека $\varphi(x) = \cos\frac{x}{2}$ и $\psi(x) = x * \sin x$

1) Като използвате метода на разделяне на променливите, представете закона за движение на струната във вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) * T_k(t)$$

Получете функциите $\boldsymbol{X_k(x)}$ като изведете задачата на Щурм-Лиувил и намерите нейните собствени стойности и собствени функции. Решете съответните уравнения за функциите $\boldsymbol{T_k(t)}$. Напишете формулите за пресмятане на коефициентите в реда $\boldsymbol{u(x, 0)}$. Изследвайте дали има равни на нула коефициенти.

2) Направете анимация на Matlab за трептенето на струната при $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{35}]$ като използвате частичната сума с номер **28** на намерения в подточка **1)** ред на Фурие. В един прозорец начертайте една под друга графиките на струната в моментите $\boldsymbol{t_0 = 0}$, $\boldsymbol{t_1 = 15}$, $\boldsymbol{t_2 = 30}$ с надписи коя графика за кой момент се отнася. Определете за всеки от краищата на струната дали е неподвижно закрепен или е свободен.

2. Решение на Задача 1

2.1. Теоретична част

А)

Уравнението е уравнение на Бернули от 1 ред и е нелинейно.

Има следния вид: $A(x) * y' + B(x) * y = F(x) * y^m$

Трябва да го преобразуваме в линейно

$$xy' = 2\sqrt{y} * cosx - 2y$$

$$xy' + 2y = 2\sqrt{y} * cosx \ \ | : \sqrt{y}$$

$\frac{xy'}{\sqrt{y}} + 2 * \sqrt{y} = 2 * cosx$ за $y \neq 0$

Но дали $y \equiv 0$ е особено решение?

$x0' = 2\sqrt{0} * cosx - 2 * 0$ - вярно $=>$ $y \equiv 0$ е особено решение

Полагаме $z = \sqrt{y} \ \ => \ \ z' = \frac{1}{2} * \frac{y'}{\sqrt{y}} \ \ => \ \ 2 * z' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$

Уравнението придобива вида:

$$2 * x * z' + 2 * z = 2 * cosx \ \ | : 2x$$

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{cosx}{x}$$

$z = u * v => \frac{z}{u} = v \ \ => z' = u' * v + u * v'$

$u' + \frac{u}{x} = 0 \ => \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x} \ \ => \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \ \ => \ \ \ln|y| = -\ln|x| + C$

Взимаме конкретното решение $u = \frac{1}{x}$

$u' * v + u * v' + \frac{u*v}{x} = \frac{cosx}{x} \ \ => v\underbrace{\left(u' + \frac{u}{x}\right)}_{0} + u * v' = \frac{cosx}{x} \ \ => \ u * v' = \frac{cosx}{x}$

Взимаме конкретното решение за u и получаваме: $\frac{1}{x} * v' = \frac{cosx}{x}$

$$v' = cosx \quad => \quad v = \int cosx\, dx = sinx + C$$

$$z = \frac{1}{x}(sinx + C) \quad => \quad \sqrt{y} = \frac{1}{x}(sinx + C)$$

Общо решение: $y = \frac{1}{x^2}(sinx + C)^2$ и $y \equiv 0$

Б) За да намерим интегрална крива минаваща през точка $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi^2}\right)$ трябва да добавим следното условие

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi^2}$$

Тогава получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{c} xy' = 2\sqrt{y} * cosx - 2y \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi^2} \end{array} \right.$$

В) За да намерим интегрална крива минаваща през точка $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$ трябва да добавим следното условие

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$$

Тогава получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{c} xy' = 2\sqrt{y} * cosx - 2y \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2} \end{array} \right.$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

А)

```
syms x;
y=dsolve('x*Dy=2*sqrt(y)*cos(x)-2*y','x')
```

резултат:

```
y=                0

 (C7 + sin(x))^2/x^2
```

Б) Като използваме системата:

$$\left| \begin{array}{c} xy' = 2\sqrt{y} * cosx - 2y \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi^2} \end{array} \right.$$

Ще построим интегралните криви на уравнението оцветени в жълто в правоъгълника $\prod = \left\{(x,y): \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\, , 0 \leq y \leq 1\right\}$.

```
hold on;

x=pi/2:pi/25:2*pi;
axis([x(1),x(length(x)),0,1]);

y=dsolve('x*Dy=2*sqrt(y)*cos(x)-2*y','y(pi/2)=2/pi^2','x');
plot(x,eval(y),'y','LineWidth',2); % интегрална крива
plot(pi/2,2/pi^2,'g*','LineWidth',3); % точката (π/2, 2/π²)
```

В) Като използваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} xy' = 2\sqrt{y} * cosx - 2y \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2} \end{array} \right.$$

Ще построим интегралните криви на уравнението оцветени в червено в правоъгълника $\Pi = \left\{(x,y): \frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 1\right\}$.

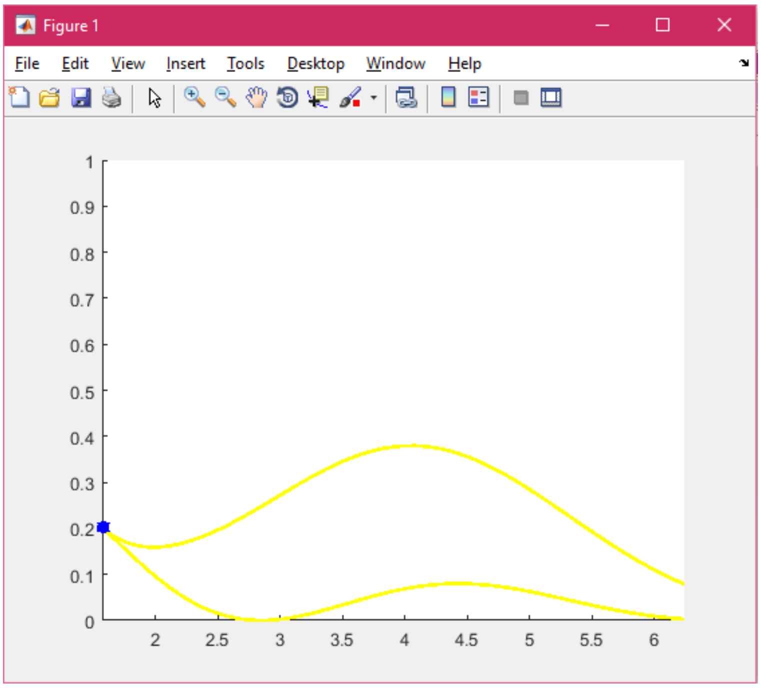
```
hold on;

x=pi/2:pi/25:2*pi;
axis([x(1),x(length(x)),0,1])

y=dsolve('x*Dy=2*sqrt(y)*cos(x)-2*y','y(pi/2)=4/pi^2','x');
plot(x,eval(y),'r','LineWidth',2); % интегрална крива
plot(pi/2,4/pi^2,'g*','LineWidth',3); % точката (π/2, 4/π²)
```

Цялостен код:

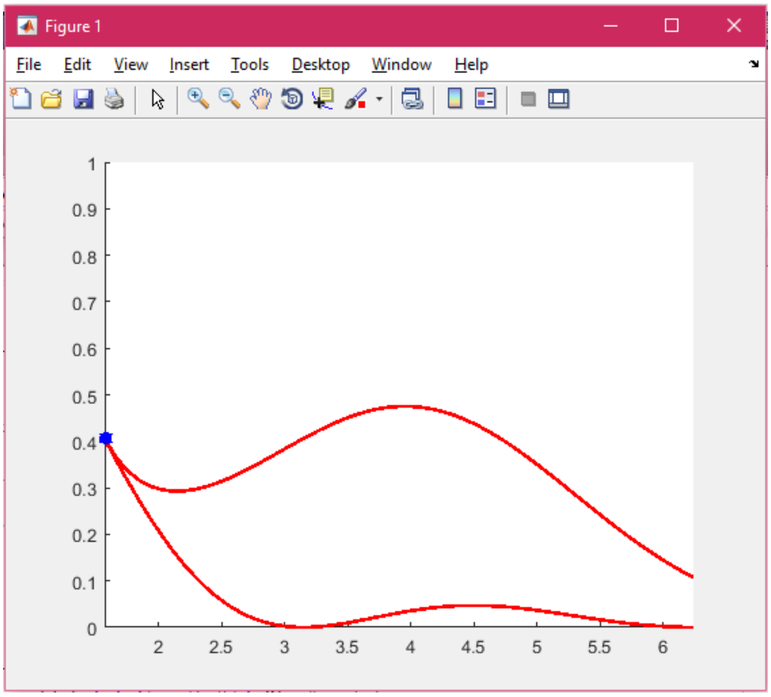
```
clc;clear;

syms x;
y=dsolve('x*Dy=2*sqrt(y)*cos(x)-2*y','x')

x=pi/2:pi/35:2*pi
axis([x(1),x(length(x)),0,1])

hold on;

y=dsolve('x*Dy=2*sqrt(y)*cos(x)-2*y','y(pi/2)=2/pi^2','x');
plot(x,eval(y),'y','LineWidth',2); % интегрална крива
plot(pi/2,2/pi^2,'b*','LineWidth',3); % точката (π/2, 2/π²)

y=dsolve('x*Dy=2*sqrt(y)*cos(x)-2*y','y(pi/2)=4/pi^2','x');
plot(x,eval(y),'r','LineWidth',2); % интегрална крива
plot(pi/2,4/pi^2,'b*','LineWidth',3); % точката (π/2, 4/π²)
```

2.3. Графики (включително от анимация)

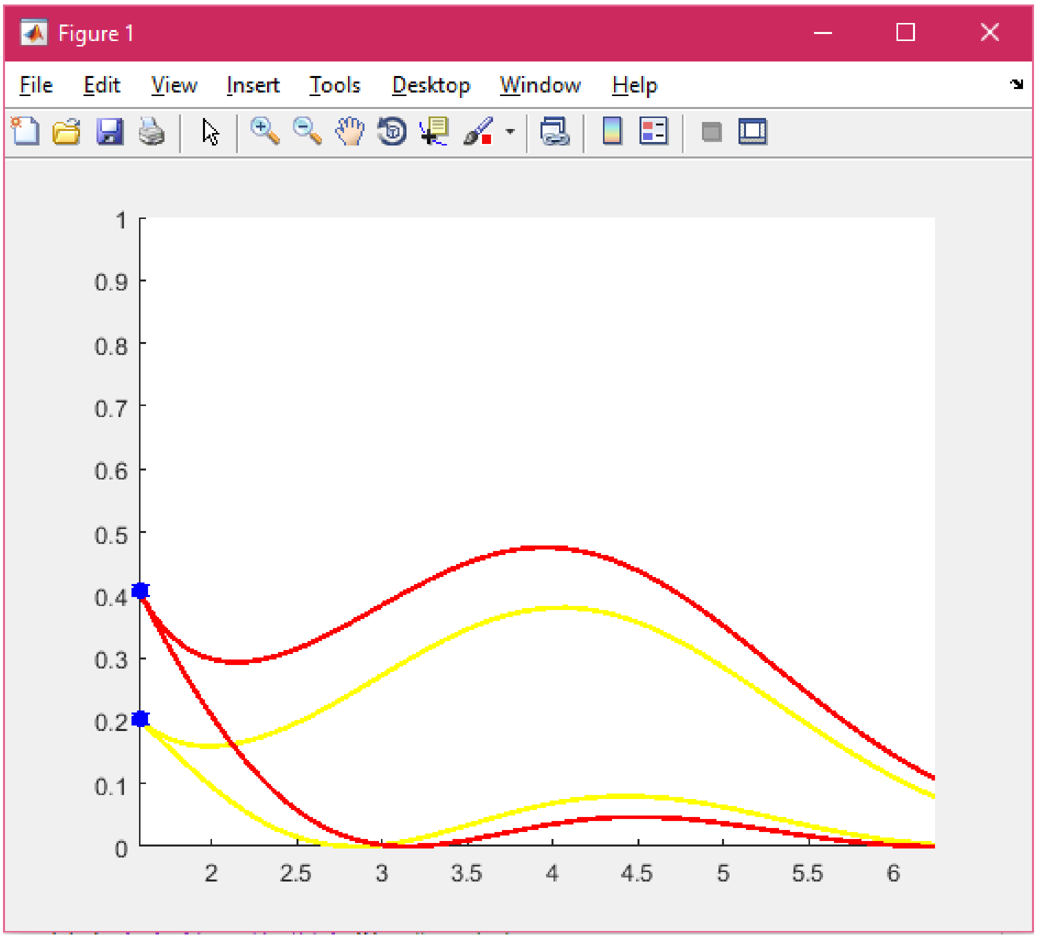
✓ Графика на интегралните криви на уравнението в точката $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi^2}\right)$.



✓ Графика на интегралните криви на уравнението в точката $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$.



✓ Пълна графика.



3. Решение на Задача 2

3.1. Теоретична част

$u_{tt} = u_{xx}$ за $0 < x < \pi\ ,\ t > 0$

Начални условия:

$$\left| \begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{array} \right. \text{ за } 0 \le x \le \pi$$

Гранични условия:

$$\left| \begin{array}{l} u_x(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{array} \right. \text{ при } t \ge 0$$

Нека $\varphi(x) = \cos\frac{x}{2}$ и $\psi(x) = x * \sin x$

От граничните условия, можем да кажем, че струната има ляв свободен край и десен закрепен край

Търсим решения от вида $u(x,t) = X(x) * T(t)$

От $X''(x) * T(t) = X(x) * T''(t) \ => \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda -\ const$

От $\left| \begin{array}{l} u_x(0,t) = X(0) * T(t) = 0 \\ u(\pi,t) = X(\pi) * T(t) = 0 \end{array} \right. \ => \left| \begin{array}{l} X'(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{array} \right. \ (*)$

Взимаме $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \ => \left| \begin{array}{l} X'(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \\ X''(x) + \lambda * X(x) = 0 \end{array} \right.$ и $T''(t) + \lambda * T(t) = 0$

Ще има смисъл ако $\lambda < 0$ и тогава X(x) и T(t) ще имат вида:

$$X_k(x) = C_1 * \cos\lambda x + C_2 * \sin\lambda x$$

$$T_k(t) = C_3 * \cos\lambda t + C_4 * \sin\lambda t$$

$X(x) = C_1 * \cos\lambda x + C_2 * \sin\lambda x$

$X'(x) = -\lambda * C_1 * \sin\lambda x + \lambda * C_2 * \cos\lambda x$

Ще използваме уравненията от (*)

$$X'(0) = \underbrace{-\lambda * C_1 * \sin\lambda * 0}_{0} + \lambda * C_2 * \underbrace{\cos\lambda * 0}_{1} = 0 \quad => \quad \lambda * C_2 = 0 \; => \; C_2 = 0$$

Щом $C_2 = 0$, то $C_1 \neq 0$

Тогава: $X(x) = C_1 * \cos\lambda x$

$$X(\pi) = C_1 * \cos\lambda * \pi = 0 \quad => \; \cos\lambda * \pi = 0 \quad => \; \lambda * \pi = \frac{\pi(2k+1)}{2}$$

$\lambda = \frac{2k+1}{2}$ - собствени стойности

Тогава:

$$\boldsymbol{X_k(x) = C_1 * cos\frac{(2k+1)x}{2}}$$
$$\boldsymbol{T_k(t) = C_3 * \cos\frac{2k+1}{2} * t + C_4 * \sin\frac{(2k+1)t}{2}}$$ - собствени функции

Така уравнението придобива вида:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) * T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{cos\frac{(k+1)x}{2}} * \left(A_k * \cos\frac{(2k+1)t}{2} + B_k * \sin\frac{(2k+1)t}{2}\right)$$

Формулите за пресмятане на коефициентите A_k и B_k са :

$$A_k = \frac{2}{\pi} * \int_0^{\pi} \varphi(x) * X_k(x)\, dx = \frac{2}{\pi} * \int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2} * C * \cos\frac{(2k+1)x}{2} dx$$

$$B_k = \frac{4}{\pi(2k+1)} * \int_0^{\pi} \psi(x) * X_k(x)\, dx = \frac{4}{\pi(2k+1)} * \int_0^{\pi} x * \sin x * \cos\frac{(2k+1)x}{2} dx$$

3.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

- ✓ Дефиниране на променливите

```
L=pi;
a=1;
tmax=35;
x=0:L/50:L;
t=0:tmax/100:tmax;
```

- ✓ Дефиниране на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

```
%Дефиниране на φ(x)
function y=phi(x)
    for j=1:length(x)
            y(j)=cos(x(j)/2);
    end
end

% Дефиниране на ψ(x)
function y=psi(x)
    y=x.*sin(x);
end
```

- ✓ Дефиниране на коефициентите A_k и B_k

```
% Дефиниране на A_k
function y=A(k)
    Xk=cos((2*k+1)*pi*x/(2*L));
    y=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
end

% Дефиниране на B_k
function y=B(k)
    Xk=cos((2*k+1)*pi*x/(2*L));
    y=4*trapz(x,psi(x).*Xk)/(a*(2*k+1)*pi);
end
```

✓ Дефиниране на функцията на Фурие

```
function y=fourier(x,t)
    y=0;
    for k=1:28
         Xk=cos((2*k+1)*pi*x/(2*L));

Tk=A(k)*cos(a*(2*k+1)*pi*t/(2*L))+B(k)*sin(a*(2*k+1)*pi*t/(2*L));
        y=y+Xk.*Tk;
    end
end
```

✓ Изчертаване на графиката в моменти $t_0 = 0$

```
subplot(4,1,2)
plot(x,fourier(x,0),'r' ,'LineWidth' ,2)
title('Moment t=0')
axis([0 L -1.75 1.75])
grid on
```

✓ Изчертаване на графиката в моменти $t_1 = 15$

```
subplot(4,1,2)
plot(x,fourier(x,15),'r' ,'LineWidth' ,2)
title('Moment t=15')
axis([0 L -1.75 1.75])
grid on
```

✓ Изчертаване на графиката в моменти $t_2 = 30$

```
subplot(4,1,2)
plot(x,fourier(x,30),'r' ,'LineWidth' ,2)
title('Moment t=30')
axis([0 L -1.75 1.75])
grid on
```

✓ Изчертаване на трептенето на струната

```
for i=1:length(t)
    subplot(4,1,1);
    plot(x,fourier(x,t(i)),'b' ,'LineWidth' ,2)
    title('Animation')
    axis([0 L -1.5 1.5])
    grid on
    M(i)=getframe;
end
movie(M,10)
```

✓ Цялостен код

```
function stringfourier
    clc;clear;

    % Дефиниране на променливите, дадени по условие
    L=pi;
    a=1;
    tmax=35;
    x=0:L/50:L;
    t=0:tmax/100:tmax;

    % Изчертаване на трептенето на струната
    for i=1:length(t)
        subplot(4,1,1);
        plot(x,fourier(x,t(i)),'b' ,'LineWidth' ,2)
        title('Animation')
        axis([0 L -1.5 1.5])
        grid on

      % Изчертаване на графиката в момент t=0
        subplot(4,1,2)
        plot(x,fourier(x,0),'r' ,'LineWidth' ,2)
        title('Moment t=0')
        axis([0 L -1.75 1.75])
        grid on

      % Изчертаване на графиката в момент t=15
        subplot(4,1,3)
        plot(x,fourier(x,15),'r' ,'LineWidth' ,2)
        title('Moment t=15')
        axis([0 L -1.5 1.5])
        grid on

      % Изчертаване на графиката в момент t=30
        subplot(4,1,4)
        plot(x,fourier(x,30),'r' ,'LineWidth' ,2)
        title('Moment t=30')
        axis([0 L -1.5 1.5])
        grid on
        M(i)=getframe;
    End

    movie(M,10)
```

```matlab
 % Дефиниране на функцията на Фурие
    function y=fourier(x,t)
        y=0;
        for k=1:28
             Xk=cos((2*k+1)*pi*x/(2*L));

Tk=A(k)*cos(a*(2*k+1)*pi*t/(2*L))+B(k)*sin(a*(2*k+1)*pi*t/(2*L));
            y=y+Xk.*Tk;
        end
    end

 % Дефиниране на коефициентите
    function y=A(k)
        Xk=cos((2*k+1)*pi*x/(2*L));
        y=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
    end

    function y=B(k)
        Xk=cos((2*k+1)*pi*x/(2*L));
        y=4*trapz(x,psi(x).*Xk)/(a*(2*k+1)*pi);
    end

 % Дефиниране на φ(x)
    function y=phi(x)
        for j=1:length(x)
                y(j)=cos(x(j)/2);
        end
    end

 % Дефиниране на ψ(x)
    function y=psi(x)
        y=x.*sin(x);
    end
end
```

3.3. Графики(включително от анимация)