Obliczenia naukowe
Lista nr 5

zad. 1 Dany jest układ $Ax = b$:

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, b = b^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Rozwiązać powyższy układ metodą eliminacji Gaussa (wariant bez wyboru elementu głównego)
2. Podać rozkład LU macierzy A.
3. Obliczyć wyznacznik macierzy A.

zad. 2 Dany jest układ $Ax = b$:

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, b = b^{(1)} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Rozwiązać powyższy układ metodą eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego.
2. Podać rozkład LU macierzy. Sprawdzić czy iloczyn macierzy L i U jest równy macierzy A.
3. Obliczyć wyznacznik macierzy A.
4. Wykonać pierwszy krok eliminacji Gaussa z pełnym wyborem elementu głównego

zad. 3 Niech $\overline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ będzie wektorem prawych stron. Rozwiązać układ $Ax = \overline{b}$, gdzie A jest macierzą z zadania 1. Zastosować wcześniej wyznaczony rozkład LU.

zad. 4 Oszacować liczbę wykonywanych działań (jedno działanie to mnożenie lub dzielenie) jaka potrzebna jest do przekształcenia danej macierzy $A \in R^{n\times n}$ do macierzy trójkątnej górnej (I etap) w metodzie eliminacji Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych.

Oszacować liczbę wykonywanych działań potrzebnych do rozwiązania układu z macierzą trójkątną górną (II etap).

zad. 5 Niech $A \in R^{n\times n}$ będzie macierzą nieosobliwą. Zaproponować metodę obliczania A^{-1}, $det(A)$.

Oszacować liczbę wykonywanych działań potrzebnych do obliczenia A^{-1}.

zad. 6 (Higham) Wyznaczyć rozkład LU macierzy (wariant bez wyboru elementu głównego)

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ gdzie } 0 < \epsilon \ll 1.$$

Niech fl będzie arytmetyką taką, że $fl(1-\epsilon^{-1}) = -\epsilon^{-1}$. Ocenić wyznaczony w fl rozkład $\tilde{L}\tilde{U}$, zakładając, że ϵ^{-1} jest obliczane dokładnie.

zad. 7 Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Obliczyć wskaźniki uwarunkowania $\text{cond}_1(A) = ||A||_1 \cdot ||A^{-1}||_1$ i $\text{cond}_\infty(A) = ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty$ Niech $b = A[1-\gamma, 1]^T$, czyli rozwiązaniem układu $Ax = b$ jest $x = [1-\gamma, 1]^T$. Niech $\hat{b} = b + \delta b$. Niech $\hat{x}$ będzie rozwiązaniem układu $Ax = \hat{b}$. Wyrazić oszacowanie błędu względnego $||\hat{x} - x||_1/||x||_1$ przez $||\delta b||_1/||b||_1$. Czy zadanie rozwiązania układu $Ax = b$ jest dobrze uwarunkowane?

Wsk. Zobacz wykład nr 2.

zad. 8 Napisać schemat algorytmu rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie A jest macierzą Hessenberga górną, tzn. jej elementy są niezerowe tylko w górnym trójkącie i bezpośrednio pod nim. Zastosować metodę eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego.

zad. 9 Niech A będzie macierzą nieosobliwą zespoloną, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, i niech $b \in \mathbb{C}^n$. Pokazać, że układ ten można rozwiązać, nie używając arytmetyki zespolonej.

Wsk. Przyrównać części rzeczywiste i urojone z obu stron układu.

zad. 10 (Bai) Dana jest macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jak efektywnie, stosując eliminację Gaussa bez wyboru elementu głównego,

(a) obliczyć $\alpha = c^T A^{-1} b$, gdzie b i c są wektorami kolumnowymi,

(b) rozwiązać równanie macierzowe $AX = B$, gdzie $X, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

(c) rozwiązać układ $A^k x = b$, gdzie k jest liczbą naturalną?

zad. 11 Pokazać, że zadanie rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$ z macierzą A ortogonalną ($A^{-1} = A^T$) jest zawsze bardzo dobrze uwarunkowane.

Wsk. Obliczyć $\text{cond}_2(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2$

zad. 12 Niech $A \in R^{n\times n}$ będzie macierzą symetryczną dodatnio określoną. Wówczas można ją jednoznacznie przedstawić w postaci $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$, $\tilde{L}$ jest macierzą trójkątną dolną. Rozkład taki nazywa się rozkładem Cholesky'ego-Banachiewicza. Podać algorytm otrzymywania takiego rozkładu oraz liczbę wykonywanych działań (literatura: każda książka z metod numerycznych).

zad. 13 Niech $A \in R^{n\times n}$ będzie macierzą symetryczną dodatnio określoną. Znając rozkład Cholesky'ego-Banachiewicza macierzy, $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$. Zaproponować metodę obliczania A^{-1}, $det(A)$ oraz rozwiązywania układu równań $Ax = b$.