Monika Tworek
nr indeksu: 229776

Obliczenia naukowe

Lista 3

Zad1

Należało napisać funkcję rozwiązującą równanie f(x) = 0 metodą bisekcji:

function mbisekcji(f, a::Float64, b::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64)

Dane:
f – funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja (ang. anonymous function),
a,b – końce przedziału początkowego,
delta,epsilon – dokładności obliczeń

Wyniki: (r,v,it,err), gdzie:
r – przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0,
v – wartość f(r),
it – liczba wykonanych iteracji,
err – sygnalizacja błędu 0 - brak błędu 1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a,b]

Funkcja została napisana za pomocą algorytmu:

Dane: a, b, M, δ, ε
Wyniki: k,˜r, f(˜r)

u ← f(a); v ← f(b);
e ← b − a;
if sgn(u) = sgn(v) **then**
    return error;
end if
for k ← 1 to M **do**
    e ← e/2;
    c ← a + e;
    w ← f(c);
    if |e| < δ **or** |w| < ε **then**
        return k, c, w
    end if
    if sgn(w) ≠ sgn(u) **then**
        b ← c; v ← w;
    else
        a ← c; u ← w;
    end if
end for

Zasady działania funkcji:
Sprawdzamy, czy dana funkcja f zmienia znak w przedziale [a,b], jeśli nie, to zwracamy informacje o błędzie. W przeciwnym wypadku obliczamy $x = \frac{a+b}{2}$ i sprawdzamy, czy f(x) < ε. Jeśli tak jest, to zwracamy wynik, jeśli nie, to wybieramy przedział z [a,x], [b,x], w którym funkcja zmienia znak i powtarzamy funkcję.

Zad2

Należało napisać funkcję rozwiązującą równanie f(x) = 0 metodą Newtona(metodą stycznych)
function mstycznych(f,pf,x0::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64, maxit::Int)

Dane:

f, pf – funkcją f(x) oraz pochodną f'(x) zadane jako anonimowe funkcje,
x_0 – przybliżenie początkowe,
delta,epsilon – dokładności obliczeń,
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Wyniki: (r,v,it,err), gdzie:

r – przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0,
v – wartość f(r),
it – liczba wykonanych iteracji,
err – sygnalizacja błędu:

  0 - metoda zbieżna
  1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji,
  2 - pochodna bliska zeru

Funkcja została napisana za pomocą algorytmu:

Dane: x0, M, δ, ε

Wyniki: k,˜r, f(˜r)

v ← f(x_0);
if |v| < ε **then**
  return 0, x_0, v;
end if
for k ← 1 to M **do**
  x_1 ← x0 – v/f'(x_0);
  v ← f(x_1);
  if |x_1 – x_0| < δ **or** |v| < ε **then**
    return k, x_1, v;
  end if
  x_0 ← x_1;
end for

Zasady działania funkcji:

Dla punktu startowego wyprowadzamy styczną i wyliczamy punkt przecięcia z osią OX. Jest to pierwsze przybliżenie oznaczane jako x_1. Jeżeli dane rozwiązanie nie osiągnęło naszego przybliżenia to x_1 traktujemy jako nowy punkt startowy. Funkcja zwraca błąd jeśli f(x) < ε. Korzystamy w tej funkcji ze wzoru $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Zad3

Należało napisać funkcję rozwiązującą równanie f(x) = 0 metodą siecznych

function msiecznych(f, x0::Float64, x1::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64, maxit::Int)

Dane:

f – funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja,
x_0,x_1 – przybliżenia początkowe,
delta,epsilon – dokładności obliczeń,
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Wyniki: (r,v,it,err), gdzie:

r – przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0,
v – wartość f(r),
it – liczba wykonanych iteracji,
err – sygnalizacja błędu:

0 - metoda zbieżna
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji

Funkcja korzystała z poniższego algorytmu:

Dane: a, b, M, δ, ε

Wyniki: k,˜r, f(˜r)

fa ← f(a);
fb ← f(b);
for k ← 1 to M **do**
  if |fa| > |fb| **then**
    a ↔ b;
    fa ↔ fb;
  end if
  s ← $\frac{b-a}{fb-fa}$;
  b ← a;
  fb ← fa;
  a ← a − fa ∗ s;
  fa ← f(a);
  if |b − a| < δ **or** |fa| < ε **then**
    return k, a, fa;
  end if
end for

Zasady działania funkcji:

Do obliczenia stosujemy rekurencyjny wzór

$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}f(x_n)$

Warunek końcowy : $|x_{n+1}-x_n|\leq \delta$ i $|f(x_{n+1})| \leq \varepsilon$

Zad4

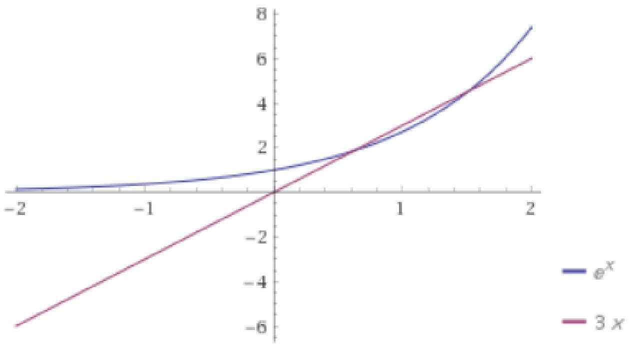
Należy wyznaczyć pierwiastek równania $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

Metoda:	r-przybliżenie	f(r)	Liczba iteracji	Kod błędu
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	17	0
Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

Metoda bisekcji wykonała aż 17 iteracji, a w efekcie końcowym dala najmniej dokładny wynik. Zdecydowanie mniejszą ilość iteracji wykonano metodą Newtona i siecznych. Najdokładniejsza jest w tym wypadku metoda Newtona.

Zad5

Metodą bisekcji znaleźć wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$. Wymagana dokładności obliczeń: $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.



Wykres ze strony wolframalpha

Wyznaczenie punktu przecięcia się wykresów polega na tym, że muszą przyjmować tę samą wartość dla tego samego argumentu. Po analizie wykresów można spokojnie wyznaczyć dwa przedziały dla których będzie szukane zero. Ponieważ funkcja przyjmuje tylko jedną funkcję, to wywołuję mbisekcji dla $f(x)= e^x-3x$. Wyniki będą się znajdować w przedziale [0.0, 1.0] i [1.0, 2.0].

Przedział	x	e^x-3x	Liczba iteracji
[0.0, 1.0]	0.619140625	-9.066320343276146e-5	9
[1.0,2.0]	1.5120849609375	-7.618578602741621e-5	13

Zad6

Zadanie polega na znalezieniu miejsca zerowego funkcji $f_1(x)=e^{1-x}-1$ i $f_2(x)=xe^{-x}$ metodą bisekcji, Newtona i siecznych. Dokładności obliczeń $\delta = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Dla $f_1(x)= e^{1-x}-1$

Przede wszystkim należy dobrać odpowiedni przedział. Patrząc na wykres funkcji można zauważyć, że rozwiązanie wynosi 1.0, więc przedział nie może zawierać 1.0 w środku, gdyż wtedy funkcja zakończyłaby działanie po pierwszej iteracji, co mija się z celem zadania. Przy dobieraniu x_0 dla metody Newtona należy pamiętać, że pochodna dązy do 0, co jest niepożądaną sytuacją dla tej metody. Przy ostatniej metodzie należy uważać, by nie dobrać zbyt dużych wartości przybliżeń, bo kolejne obliczenia będą na tyle blisko siebie, że działanie zostanie zakończone ze względu na wymaganą precyzję.

Metoda	Dane początkowe	Miejsce zerowe x	f(x)	Liczba iteracji
bisekcji	[0.0, 1.1]	0.9999969482421877	3.051762468953001e-6	15
bisekcji	[0.0, 2.0]	1.0	0.0	1
Newtona	x_0=0.2	0.9999999173530496	8.264695372517394e-8	4
Newtona	X_0=1.0	0.0	1.0	1
siecznych	x_0=0.5, x_1=1.5	0.9999999624498374	3.755016342310569e-8	5

W przypadku funkcji $f_2(x)= xe^{-x}$ można łatwo stwierdzić, że miejsce zerowe wynosi 0. Analogicznie jak dla poprzedniej funkcji unikamy w metodzie bisekcji, by miejsce zerowe było środkiem podziału. Podobne warunki są w przypadku pozostałych metod.

Metoda	Dane początkowe	Miejsce zerowe x	f(x)	Liczba iteracji
bisekcji	[-0.4, 0.6]	-6.1035156250222045e-6	-6.103552878038877e-6	15
Bisekcji	[-1.0, 1.0]	0.0	0.0	1
Newtona	x_0=0.5	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5
Newtona	X_0=0.0	0.0	0.0	1
siecznych	x_0=-1.0, x_1=1.0	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18

Można zauważyć, że metoda bisekcji niezależnie od przesunięcia przedziału względem pierwiastka osiąga wynik w tym samym tempie (zależy tylko od wielkości początkowego przedziału), wyjątkiem jest sytuacja, gdy szukany pierwiastek jest środkiem przedziału (w dowolnym momencie działania funkcji niż w sytuacji o innych wartościach brzegowych dla przedziału tej samej długości), w takim wypadku jest ona najdokładniejsza. Metoda Newtona osiąga wynik po najmniejszej liczbie iteracji, niestety wymusza konieczność liczenia pochodnej, więc wyklucza rozwiązania, gdzie wyliczona pochodna jest bliska zeru.

Kiedy dla f_1 w metodzie Newtona wybierzemy $x_0 \in (1, \infty]$ otrzymujemy:

x_0	Miejsce zerowe x	f(x)	Liczba iteracji
2.0	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5
3.0	0.9999999710783241	2.892167638712806e-8	9
4.0	0.9999999995278234	4.721765201054495e-10	21
5.0	0.10729086765700213	1.4417356840557312	50

Dla x_0=10.0 liczba iteracji wynosząca 1000 wciąż była niewystarczająca.

Kiedy dla f_2 w metodzie Newtona wybierzemy x_0 >1 i x_0=1 otrzymujemy:

x_0	Miejsce zerowe x	f(x)	Liczba iteracji
1.0	X	X	X
1.5	14.787436802837927	5.594878975694858e-6	10
3.5	15.111707370551219	4.134113653986997e-6	10
4.5	14.787436802837927	5.594878975694858e-6	9
5.0	15.194283983439147	3.827247505782993e-6	9
10.0	14.380524159896261	8.173205649825554e-6	4

W przypadku x_0=1.0 funkcja zwraca błąd – pochodna bliska zeru.

Jeżeli wyliczona pochodna nie jest bliska zeru, to metoda Newtona zwraca najlepszy wynik po najmniejszej liczbie iteracji. W przypadku gdy ze względu na działanie funkcji dość szybko trafimy dokładnie w miejsce zerowe, to metoda bisekcji i Newtona jest w stanie od razu podać prawidłowy wynik.