Obliczenia naukowe
Lista nr 4

zad. 1 Zastosować algorytm Hornera do obliczenia wartości wielomianu $w(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2$ w punkcie $x = 2$.

zad. 2 Niech

$$w(x) = (x-1)(x+2)(x^2+2) = x^4 + x^3 + 2x - 4 \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $n = 4$. Zlokalizować pierwiastki wielomianu $w(x)$ stosując odpowiednie twierdzenia z wykładu.

zad. 3 Zastosować algorytm Hornera do obliczenia wartości $w(3)$

$$w(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2,$$

gdzie $w(3)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez $x - 3$. Obliczyć za pomocą algorytmu Hornera wartość pierwszej pochodnej wielomianu $w(x)$ w punkcie 3.
Uwaga. Nie wyznaczać jawnie pochodnej.

Wiadomo, że $r = 2$ jest zerem wielomianu $w(x)$. Za pomocą algorytmu Hornera wykonać deflację czynnikiem $x - 2$.

zad. 4 Znaleźć rozwiązania zadania interpolacyjnego

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	-25	3	1	-1	27	235

metodą Newtona (obliczenia wykonać w domu).

zad. 5 Wiadomo, że wielomian

$$w(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1)$$

interpoluje funkcję $f(x)$, przyjmującą w węzłach: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ wartości: $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 2$, $f(x_3) = -7$. Przez dodanie do wielomianu $w(x)$ jednego składnika znaleźć wielomian interpolujący funkcję f w powyższych czterech węzłach i dodatkowym węźle $x_4 = 3$, w którym $f(x_4) = 10$.

zad. 6 Wyznaczyć możliwie niskiego stopnia wielomian interpolujący w węzłach: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$ funkcję przyjmującą odpowiednio wartości: $y_0 = y_1 = y_2 = -1$, $y_3 = -7$, $y_4 = 5$.

zad. 7 Czy każdy wielomian $w \in \Pi_{n-1}$ (stopnia $\leqslant n-1$) spełnia zależność:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} w[x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j).$$

zad. 8 Pokazać, że wartość wielomianu interpolacyjnego Newtona

$$N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

można obliczać za pomocą wzorów (uogólniony algorytm Hornera)

$$\begin{aligned} w_n(x) &:= f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\ w_k(x) &:= f[x_0, x_1, \ldots, x_k] + (x - x_k)w_{k+1}(x) \ (k = n-1, \ldots, 0) \\ N_n(x) &:= w_0(x). \end{aligned}$$

zad. 9 Znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona $c_0 = f[x_0]$, $c_1 = f[x_0, x_1]$, $c_2 = f[x_0, x_1, x_2]$, …, $c_n = f[x_0, \ldots, x_n]$ oraz węzły $x_0, x_2, \ldots, x_n$ sformułować metodę obliczania współczynników jego postaci naturalnej $a_0, \ldots, a_n$ tzn. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.
Wsk. Skorzystać z zadania 8.

zad. 10 Pokazać, że obliczanie ilorazów różnicowych występujących we wzorze interpolacyjnym Newtona wymaga wykonania $n(n+1)$ odejmowań i $n(n+1)/2$ dzieleń, a obliczanie współczynników wielomianu interpolacyjnego (zob. zad. 9) wymaga $n(n+1)/2$ odejmowań i $n(n+1)/2$ mnożeń.

zad. 11 Sprawdzić, że wzór interpolacyjny Lagrange'a można zapisać w postaci

$$L_n(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{(x - x_k)w'(x_k)} \tag{1}$$

gdzie $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

zad. 12 Jak upraszcza się wzór interpolacyjny Lagrange'a w przypadku węzłów równoodległych? Węzły równoodległe: $x_k = x_0 + kh$, dla $k = 0 \ldots n$, gdzie $h = (b - a)/n$, $x_0 = a$, oraz $x \in [a, b]$, $x = x_0 + th$, dla $t \in [0, n]$. Skorzystać z faktu, że wzór interpolacyjny Lagrange'a można zapisać w postaci (1).

zad. 13 Oszacować błąd obliczania wartości $\sqrt{117}$ za pomocą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a dla danych węzłów $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$ i wartości funkcji w tych węzłach.

zad. 14 (Taylor) Rozważając funkcję $x(1 - x)$, pokazać, że jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią, to dla $0 \leqslant r \leqslant n$

$$\frac{r(n-r)}{n^2} = \frac{r}{n}\left(1 - \frac{r}{n}\right),$$

$$0 \leqslant \frac{r(n-r)}{n^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Następnie pokazać, że

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| \left(x - \frac{r}{n}\right)\left(x - \frac{n-r}{n}\right) \right| \leqslant \frac{1}{4}$$

i wobec tego

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{n-1}{n}\right)(x-1)\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Zastosować tę nierówność do pokazania następującego oszacowania reszty dla $f(x)=\mathrm{e}^x$ i wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a L_n z $n+1$ węzłami równoodległymi $x_r=\frac{r}{n}$, dla $0\leqslant r\leqslant n$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\mathrm{e}^x-L_n(x)|\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

zad. 15 Funkcję $\cos x$ przybliżamy za pomocą wielomianu interpolacyjnego $w(x)$ stopnia $n-1$, korzystając z n równoodległych węzłów interpolacji z przedziału $[0,1]$. Jak dokładne jest to przybliżenie, czyli jakie jest oszacowanie z góry ma błąd

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\cos x-w(x)|$$

np. dla n = 10? Jakie powinno być n, żeby ten błąd był mniejszy niż 10^{-7}?

zad. 16 Pokazać, że współczynnik przy x^n we wzorze interpolacyjnym Lagrange'a jest postaci

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)^{-1}.$$

zad. 17 Uzasadnić, że

(a)

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_j},$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^n\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_j}=1,$$

(c) iloraz różnicowy nie zależy od kolejności węzłów.

zad. 18 Równanie $x-9^{-x}=0$ ma rozwiązanie w przedziale $[0,1]$. Znaleźć wielomian interpolujący funkcję $f(x)=x-9^{-x}$ w węzłach $x_0=0$, $x_1=0.5$, $x_2=1$. Zero tego wielomianu przyjąć jako przybliżenie rozwiązania powyższego równania. Jak bardzo jego wartość różni się od dokładnej wartości?

zad. 19 Pokazać, że istnieją takie współczynniki $a_0,\ldots,a_n$, że

$$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n} a_i p(x_i)$$

dla wszystkich wielomianów p stopnia $\leqslant n$ i dowolnych różnych punktów $x_0,\ldots,x_n$. *Wsk.* Zastosować wzór interpolacyjny Lagrange'a.