Obliczenia naukowe Lista 3
Adrian Kuta 204423

1 ZADANIE

1.1 OPIS PROBLEMU

Napisać funkcje rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji

1.2 ROZWIĄZANIE

Funkcja napisana na podstawie algorytmu podanego na wykładzie:

Dane: a, b, M, δ, ϵ
Wyniki: k, $\tilde{r}$, $f(\tilde{r})$

```
u ← f(a); v ← f(b);
e ← b − a;
if sgn(u) = sgn(v) then
    return error;
end if
for k ← 1 to M do
    e ← e/2;
    c ← a + e;
    w ← f(c);
    if |e| < δ or |w| < ε then
        return k, c, w
    end if
    if sgn(w) ≠ sgn(u) then
        b ← c; v ← w;
    else
        a ← c; u ← w;
    end if
end for
```

Dane wejściowe:

- **f** – funkcja $f(x)$ dla której poszukujemy rozwiązania
- **a, b** – końce przedziału początkowego
- **delta, epsilon** – dokładność obliczeń

Wyniki:

- **r** – przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$
- **v** – wartość $f(r)$

it – liczba wykonanych iteracji
err – sygnalizacja błędu: 0 – brak błędu, 1 - funkcja nie zmienia znaku

Zasada działania funkcji:

1. Sprawdzamy czy dana funkcja f, zmienia znak w przedziale [a, b], jeśli nie, to zwracamy informację o błędzie. W przeciwnym wypadku:
2. Obliczamy $x = \frac{a+b}{2}$ i sprawdzamy czy $f(x) = 0$, jeśli tak to kończymy działanie programu a x jest naszym rozwiązaniem, jeśli nie, to dzielimy przedział [a,b] na dwa mniejsze [a, x] i [x, b].
3. Wybieramy ten przedział w którym funkcja zmienia znak, za a i b przypisujemy krańce wybranego przedziału i powtarzamy punkt 2.

2 ZADANIE

2.1 OPIS PROBLEMU

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona

2.2 ROZWIĄZANIE

Funkcja napisana na podstawie algorytmu podanego na wykładzie:

Dane: x_0, M, δ, ϵ
Wyniki: k, $\tilde{r}$, $f(\tilde{r})$

```
v ← f(x0);
if |v| < ε then
    return 0, x0, v;
end if
for k ← 1 to M do
    x1 ← x0 − v/f'(x0);
    v ← f(x1);
    if |x1 − x0| < δ or |v| < ε then
        return k, x1, v;
    end if
    x0 ← x1;
end for
```

Dane wejściowe:
f – funkcja $f(x)$ dla której poszukujemy rozwiązania
pf – pochodna funkcji $f(x)$
x0 – przybliżenie początkowe
delta, epsilon – dokładność obliczeń
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Wyniki:

r – przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$

v – wartość $f(r)$

it – liczba wykonanych iteracji

err – sygnalizacja błędu: 0 – metoda zbieżna, 1 – nie osiągnięto wymaganej dokładności w **maxit** iteracji, 2 – pochodna bliska zeru

Zasada działania programu:

Wybieramy punkt startowy (w tym przypadku jest to **x_0**). Z punktu startowego wyprowadzamy styczną. Odcięta punktu przecięcia stycznej z osią OX jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania(ozn. $\boldsymbol{x_1}$). Jeśli dane rozwiązanie nie osiągnęło naszego przybliżenia to $\boldsymbol{x_1}$ traktujemy jako nowy punkt startowy. Kolejne przybliżenia rozwiązania obliczamy za pomocą rekurencyjnego wzoru $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ gdzie x_k to kolejne punkty startowe. Funkcja zwraca błąd gdy $f'(x) = 0$.

3 ZADANIE

3.1 OPIS PROBLEMU

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych

3.2 ROZWIĄZANIE

Funkcja napisana na podstawie algorytmu podanego na wykładzie:

Dane: a, b, M, δ, ϵ
Wyniki: k, $\tilde{r}$, $f(\tilde{r})$
$\quad fa \leftarrow f(a)$; $fb \leftarrow f(b)$;
$\quad$ **for** $k \leftarrow 1$ to M **do**
$\quad\quad$ **if** $|fa| > |fb|$ **then**
$\quad\quad\quad a \leftrightarrow b$; $fa \leftrightarrow fb$;
$\quad\quad$ **end if**
$\quad\quad s \leftarrow (b - a)/(fb - fa)$;
$\quad\quad b \leftarrow a$; $fb \leftarrow fa$;
$\quad\quad a \leftarrow a - fa * s$;
$\quad\quad fa \leftarrow f(a)$;
$\quad\quad$ **if** $|b - a| < \delta$ **or** $|fa| < \epsilon$ **then**
$\quad\quad\quad$ **return** k, a, fa;
$\quad\quad$ **end if**
$\quad$ **end for**

Dane wejściowe:

f – funkcja $f(x)$ dla której poszukujemy rozwiązania

x0, x1 – przybliżenia początkowe

delta, epsilon – dokładność obliczeń

maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Wyniki:
r – przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$
v – wartość $f(r)$
it – liczba wykonanych iteracji
err – sygnalizacja błędu: 0 – metoda zbieżna, 1 – nie osiągnięto wymaganej dokładności w **maxit** iteracji.

Zasada działania programu:

Do obliczenia kolejnych przybliżeń rozwiązania stosujemy rekurencyjny wzór $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ obliczenia kontynuujemy do czasu aż osiągniemy pożądane przybliżenie $|x_n - x_{n-1}| < \Delta$ lub $|f(x_n)| < \varepsilon$

4 ZADANIE

4.1 OPIS PROBLEMU

W celu wyznaczenia pierwiastka równania $\sin x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 0$ zastosować zaprogramowane metody z zadań 1, 2 i 3.

4.2 ROZWIĄZANIE

Do obliczeń użyto funkcji z zadań 1, 2 i 3.

4.3 WYNIKI

	x_0	$\sin x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$	**liczba iteracji**
metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
metoda Newtona	1.933930573929843	-2.2423316314856834e-8	4
metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

4.4 WNIOSKI

Liczba iteracji w metodzie bisekcji jest dużo większa niż w pozostałych dwóch metodach.

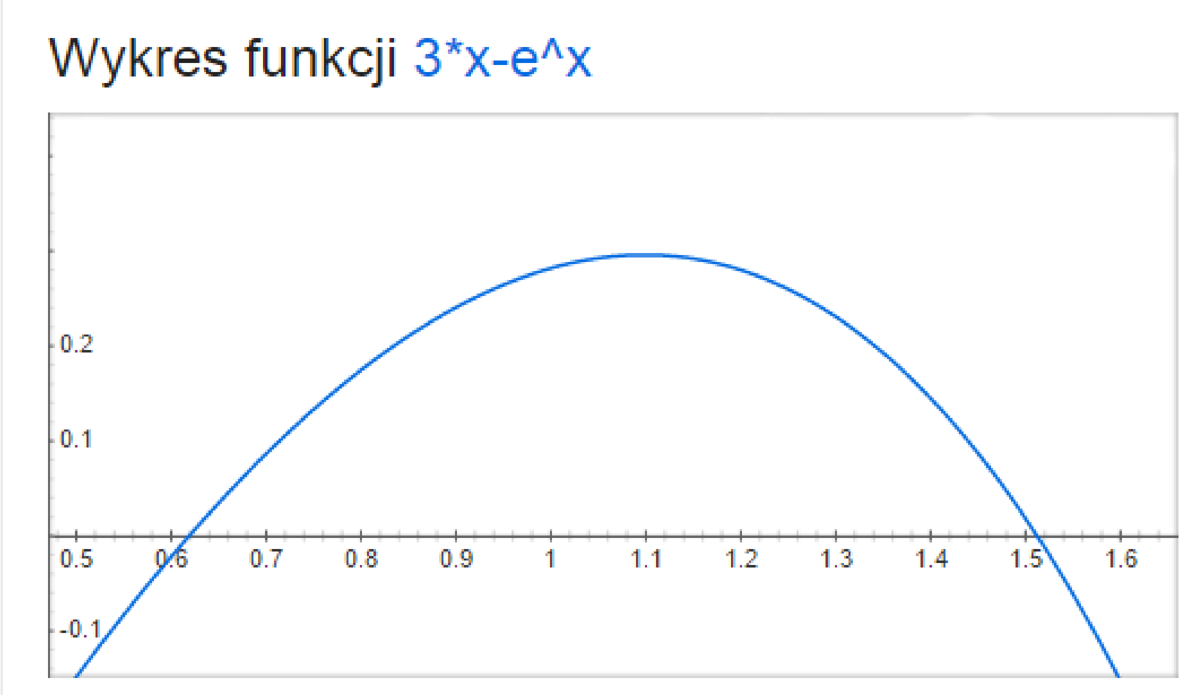
5 ZADANIE

5.1 OPIS PROBLEMU

Metodą bisekcji znaleźć wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$.
Wymagana dokładność obliczeń: $\delta = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-4}$.

5.2 ROZWIĄZANIE

Przyrównujemy funkcje $y = 3x, y = e^x$ do siebie $3x = e^x \rightarrow 3x - e^x = 0$
Z wykresu funkcji $f(x) = 3x - e^x$ widzimy że ta funkcja ma dwa miejsca zerowe:



Obliczamy miejsca zerowe dla dwóch przedziałów [0,1] i [1,2]

5.3 WYNIKI

	[0, 1]	**[1, 2]**
x	0.619064331	1.51213073730

5.4 WNIOSKI

W metodzie bisekcji musimy odpowiednio dobrać przedział początkowy, dobrym sposobem jest wcześniejsza analiza wykresu funkcji. W tym przypadku dla przedziału [0, 2] nie otrzymalibyśmy rozwiązania ponieważ $f(0)$ i $f(2)$ ma ten sam znak.

6 ZADANIE

6.1 OPIS PROBLEMU

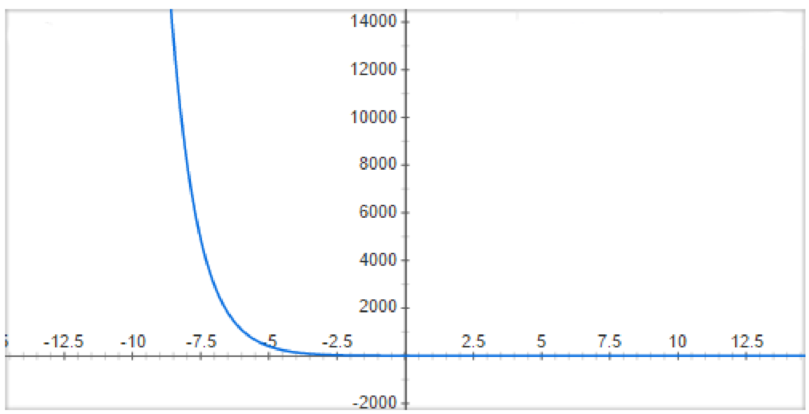
Znaleźć miejsca zerowe funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f(x) = xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych. Wymagane dokładność obliczeń: $\delta = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-4}$. Dobrać odpowiednio przedział i przybliżenia początkowe.

6.2 ROZWIĄZANIE

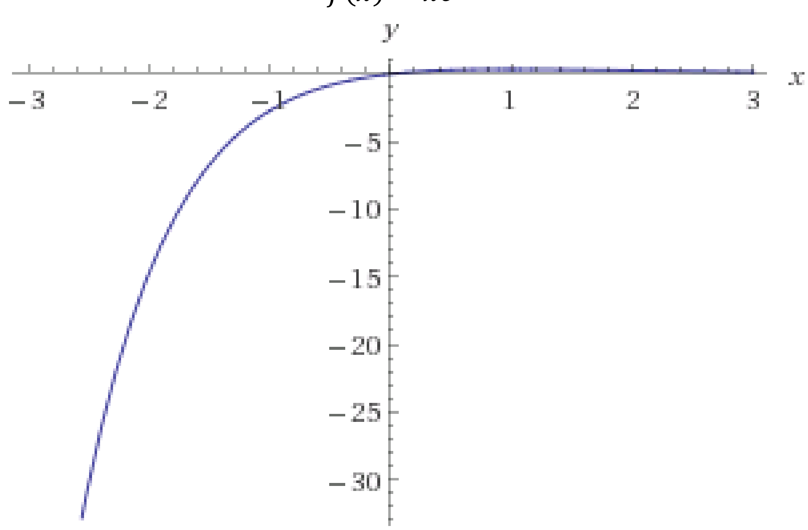
Do rozwiązania tego zadania użyto funkcji z zadań 1, 2 i 3.

W pierwszym kroku musimy przeanalizować wykresu funkcji, aby odpowiednio dobrać parametry funkcji.

$f(x) = e^{1-x} - 1$



$f(x) = xe^{-x}$



6.3 WYNIKI

	$f(x) = e^{1-x} - 1$	$f(x) = xe^{-x}$
metoda bisekcji	1.0	0.0
metoda Newtona	1.0	$-3.198414689582009e^{-11}$
metoda siecznych	0.9999999624498374	$-2.5898726695688354e^{-9}$

6.4 WNIOSKI

Jeśli dobierzemy odpowiednio parametry do funkcji, to metoda bisekcji jest najdokładniejsza.