Transformările Laplace şi Z

Dependent de modul de tratare a timpului, caracterizarea matematică în domeniul operaţional a sistemelor liniare (SL) sau sistemelor liniarizate (SLn) are la bază două transformări operaţionale:

- transformarea Laplace, pentru cazul sistemelor cu timp continuu (-C),
- transformarea Laplace discretă, sau transformarea *Z*, pentru cazul sistemelor cu timp discret (-D).

3.1. Transformarea Laplace. Definirea matematică

Definirea transformării Laplace: Dacă o funcţie u(t): $R \rightarrow R$ are următoarele proprietăţi:

- ❑ $u(t) = 0 \,, \ \forall\, t < 0$,
- ❑ este derivabilă pe porţiuni,
- ❑ $\exists\, M > 0$ şi $\sigma_0 \geq 0$ astfel încât:

$$|u(t)| \leq M \cdot e^{\sigma_0 t} \,, \qquad \forall\, t \geq 0 \,,$$

atunci, ea admite o ***transformată Laplace*** unilaterală definită prin relaţia ([P1], [D1], [V1]):

$$u(s) = L\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t) \cdot e^{-st}\, dt \,, \qquad (3.1.1)$$

cu $u(s): \Delta_0 \rightarrow C$, în care $\Delta_0 = \{s \in C \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$.

Funcţia u(s) este numită ***imaginea Laplace*** a funcţiei u(t). Invers, funcţia u(t) este numită ***originalul*** lui u(s) sau ***funcţia original*** a lui u(s). Numărul σ_0 este numit ***indice de creştere***. Funcţia complexă de variabilă complexă u(s) este peste tot definită în semiplanul Δ_0 al planului complex. ***Transformarea Laplace*** este o aplicaţie liniară.

Originalul u(t) se determină pe baza lui u(s) cu ***formula de inversiune Mellin-Fourier***:

$$u(t) = L^{-1}\{u(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} u(s) \cdot e^{ts}\, ds \,, \qquad c > \sigma_0 \,, \qquad (3.1.2)$$

valabilă în punctele de continuitate ale lui u(t).

Principalele proprietăţi ale transformării Laplace, utilizate in calculele legate de studiul SCA sunt sintetizate în tabelul 3.1. Transformatele Laplace aferente unor funcţii de timp frecvente în aplicaţiile de conducere sunt prezentate apoi în anexa 3, tabelul A.3.1.

Tabelul 3.1. *Propretăţile de bază ale transformării Laplace.*

Nr. crt.	Proprietate	Enunţ
1.	Liniaritate	$L\{c_1f(t) + c_2g(t)\}=c_1f(s) + c_2g(s)$, $\forall$ $c_1, c_2 \in R$
2.	Teorema derivării originalului	$L\{f'(t)\}=sf(s)-f(0_+)$, $L\{f^{(n)}(t)\}=s^nf(s)-s^{n-1}f(0_+)-s^{n-2}f'(0_+)-\ldots-sf^{(n-2)}(0_+)-f^{(n-1)}(0_+)$
3.	Teorema integrării originalului	$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = (1/s) \bullet f(s)$
4.	Teorema întârzierii	$L\{f(t-\tau)\} = e^{-st} \bullet f(s)$, $\tau \in R$
5.	Teorema deplasării	$L\{f(t)e^{\alpha t}\} = f(s-\alpha)$, $\alpha \in R$
6.	Transformata produsului de convoluţie (Borel)	$L\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\}=L\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\}= f(s) \bullet g(s)$
7.	Teorema valorii iniţiale	Dacă există $f(0_+)$ atunci: $f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$
8.	Teorema valorii finale	Dacă există $f(\infty)$ atunci: $f(\infty) = \lim_{s\to 0} sf(s)$
9.	Teorema derivării imaginii	$L\{tf(t)\} = - f'(s)$, $L\{t^nf(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$

3.2. Transformarea Laplace discretă (transformarea *Z*)

Definirea transformării Z (se utilizează exclusiv în studiul SD-D). Dacă o funcţie de timp (un şir) $u^*(k) = \{u_k = u(k)\}_{k\in N}$, $u^*: N \to R$ (fig.3.1) are proprietatea:

- ❑ $\exists$ M > 0 şi $\sigma_0 \geq 0$ (σ_0 - indice de creştere) astfel încât

$|u_k| \leq M \bullet \sigma_0^k$, $\forall$ $k \in N$,

atunci ea admite o *transformată Z definită prin relaţia* ([P1], [D1], [V1]):

$$u(z) = Z\{u^*(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot z^{-k} , \qquad (3.2.1)$$

cu u(z): $\Delta_0 \rightarrow C$, în care $\Delta_0 = \{z \in C \mid |z| > \sigma_0\}$, iar σ_0 reprezintă tocmai raza de convergenţă a seriei din membrul drept al relaţiei (3.2.1).

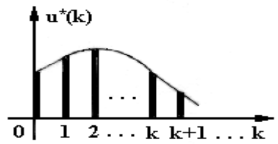

Fig.3.1. *Secvenţa de valori $u^*(k)$.*

Prin analogie cazului cu timp continuu, u(z) este numită ***imaginea*** lui u(k) sau ***transformata Laplace discretă*** a lui u(k), iar u(k) ***originalul*** lui u(z) sau ***şirul original*** al lui u(z). Şirul original este marcat cu indicele superior "*". ***Transformarea Laplace discretă*** este o aplicaţie liniară de la mulţimea şirurilor original la mulţimea funcţiilor complexe de variabilă complexă, care asociază fiecărui şir original transformata sa *Z*. Funcţia complexă de variabilă complexă u(z) este peste tot definită în exteriorul discului Δ_0 al planului complex.

Originalul u(k) se poate calcula din u(z) utilizând relaţia de inversiune:

$$u(k) = Z^{-1}\{u(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{(C)} u(z)\bullet z^{n-1}\,ds\,, \quad c > \sigma_0\,, \tag{3.2.2}$$

Conturul (C) - reprezintă o curbă închisă care include toate singularităţile lui f(z).

În tabelul 3.2 sunt sintetizate principalele proprietăţi şi teoreme referitoare la transformarea *Z*. În anexa 4, tabelul A.4.1. sunt sintetizate transformatele Laplace şi Z ale unor funcţii de timp discret care apar frecvent în aplicaţiile de conducere.

Remarcă: Relaţia de definiţie (3.2.1) nu include perioada de eşantionate T_e. În tabelele de transformate *Z,* în expresiile transformatelor *Z* , perioada de eşantionare este însă reflectată.

În studiul sistemelor *o secvenţă de valori* u(k), k = 0, 1, …, se consideră *obţinută prin eşantionarea ideală a unui semnal continuu. Eşantionarea ideală* se poate interpreta ca *un proces de modulare a unei secvenţe de impulsuri* Dirac $\delta^*(t)$ *de către semnalul continuu*, fig.3.2. Pe această bază, transformarea *Z* se introduce ca transformare Laplace aplicată secvenţei de valori aferente eşantioanelor, $u^*(t)$:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e)\delta(t-kT_e)\,, \qquad \rightarrow \qquad u^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e)e^{-kT_e s}\,. \tag{3.2.3}$$

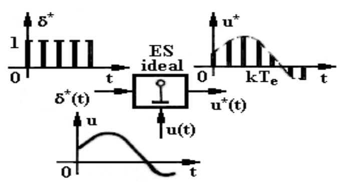

Fig.3.2. *Interpretarea procesului ideal de eşantionare*

Tabelul 3.2. *Propretăţile de bază ale transformării Z.*

Nr. crt.	Proprietate	Enunţ
1.	Liniaritate	$Z\{c_1 f_k + c_2 g_k\} = c_1 f(z) + c_2 g(z)$, $\forall\ c_1, c_2 \in R$
2.	Teorema diferenţei originalului	$Z\{f_{k+1} - f_k\} = (z-1)f(z) - f_0$, $Z\{f_k - f_{k-1}\} = (1-z^{-1})f(z) - f_{-1}$,
3.	Teorema sumei originalului	$Z\{\sum_{i=0}^{k} f_i\} = \dfrac{1}{1-z^{-1}} f(z)$
4.	Teorema întârzierii	$Z\{f_{k-d}\} = z^{-d} f(z)$, $d \in N^*$
5.	Teorema amortizării	$Z\{f_k e^{-akT}\} = f(z\, e^{aT})$, $a, T \in R$
6.	Transformata produsului de convoluţie (teorema lui Borel)	$Z\{\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} = Z\{\sum_{i=0}^{k} f_{k-i} g_k = f(z) \bullet g(z)$
7.	Teorema valorii iniţiale	Dacă există f_0 atunci: $f_0 = \lim_{z\to\infty} (z-1)f(z)$
8.	Teorema valorii finale	Dacă există $f_\infty = \lim_{k\to\infty} f_k$ atunci $f_\infty = \lim_{z\to 1,\ z>1} (z-1)f(z)$

Cu substituţia:

$$e^{sT_e} = z \quad \text{sau} \quad e^{-sT_e} = z^{-1}, \tag{3.2.4}$$

se regăseşte relaţia (3.2.1) într-o altă formulare. z reprezintă *anticiparea cu un pas de eşantionare* iar z^{-1} reprezintă *întârzierea cu un pas de eşantionare*.

Cum sistemele evoluează cauzal numai în sensul *trecut → prezent → viitor*, prezintă interes mai mare exlicitările în z^{-1}, $u(z^{-1})$. Expresia $u(z^{-1})$ se obţine împărţind cu z^n atât numărătorul cât şi numitorul expresiei raţionale u(z), n este gradul polinomului de la numitorul lui u(z).

Observaţie: Originalul $u^{*}(t)$ este o secvenţă de valori care nu caracterizează o funcţie continuă unică. În fig.3.3, funcţiile de timp continuu $u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(t)$, $u^{(3)}(t)$, …, sunt caracterizate în timp discret de o aceeaşi secvenţă de valori $u^{*}(t)$.

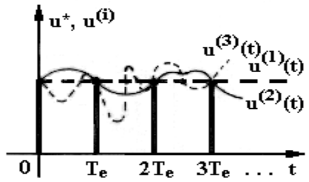

Fig.3.3. *Referitoare la neunivocitatea dintre $u^{*}(t)$ şi u(t).*

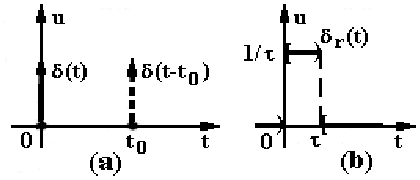

Fig.3.4. *Graficul funcţiei Dirac şi semnalul impuls unitate real.*