

1 Calculer `exp 2 3` :

Essai avec réduction pure:

$$\begin{aligned}
(\lambda m. \lambda n. mn) \ 2 \ 3 &\longrightarrow (2 \ 3) \\
&\longrightarrow (\lambda f. \lambda x. f(f \ x)) \ 3 \\
&\longrightarrow \lambda x. 3(3 \ x) \\
&\longrightarrow \lambda x. 3(\lambda f. \lambda a. f(f(f \ a)) \ x) \\
&\longrightarrow \lambda x. 3(\lambda a. x(x(x \ a))) \\
&\longrightarrow \lambda x. (\lambda f. \lambda b. f(f(f \ b))) (\lambda a. x(x(x \ a))) \\
&\longrightarrow \lambda x. \lambda b. (\lambda a. x(x(x \ a))) (\lambda a. x(x(x \ a))) (\lambda a. x(x(x \ a)) \ b)) \\
&\longrightarrow \lambda x. \lambda b. (\lambda a. x(x(x \ a))) ((\lambda a. x(x(x \ a))) (x(x(x \ b)))) \\
&\longrightarrow \lambda x. \lambda b. (\lambda a. x(x(x \ a))) ((x(x(x(x(x \ b)))))) \\
&\longrightarrow \lambda x. \lambda b. (x(x(x(x(x(x(x \ b))))))) \\
&\longrightarrow \lambda f. \lambda x. (f(f(f(f(f(f(f \ x)))))))
\end{aligned}$$

Essai avec une certaine logique :

$$\begin{aligned}
(\lambda m. \lambda n. mn) \ 2 \ 3 &\longrightarrow (2 \ 3) \\
&\longrightarrow \lambda x. 3(3 \ x) \text{ On applique 2 fois la fonction 3 avec une donnée quelconque } x \\
&\longrightarrow \lambda x. \lambda a. (3 \ x)((3 \ x)((3 \ x) \ a)) \text{ De même on applique 3 fois la fonction } (3 \ x) \text{ à une donnée } a \\
&\longrightarrow \lambda x. \lambda a. (3 \ x)((3 \ x)(x(x \ a))) \text{ On applique 3 fois la fonction } x \text{ à la donnée } a \\
&\longrightarrow \lambda x. \lambda a. (3 \ x)(x(x(x(x \ a)))) \text{ On applique 3 fois la fonction } x \text{ à la donnée } x(x \ a) \\
&\longrightarrow \lambda x. \lambda a. x(x(x(x(x(x(x \ a)))))) \text{ Et on fait de nouveaux de même pour } x(x(x(x(x \ a)))) \\
&\longrightarrow \lambda f. \lambda x. (f(f(f(f(f(f \ x))))))
\end{aligned}$$

On remarque par contre que `exp 2 3` calcule 3^2 et non 2^3 , pour effectivement calculer 2^3 , il aurait fallu définir `exp m n := λm. λn. n m`.