

Porównanie Algorytmów Minimalizacji Stochastycznej

Opracowali: Mateusz Sacha, Łukasz Kluza

Wprowadzenie

Celem tego projektu było porównanie efektywności dwóch z trzech algorytmów minimalizacji stochastycznej: Poszukiwania Przypadkowego (Pure Random Search, PRS), Metody Wielokrotnego Startu (Multi-Start, MS) oraz Algorytmu Genetycznego (GA). Zdecydowaliśmy się na algorytm *Poszukiwania Przypadkowego* oraz *Metodę Wielokrotnego Startu*. Analiza została przeprowadzona na funkcjach Ackley'a i Rastrigina o różnej liczbie wymiarów: 2, 10 i 20.

Algorytmy

- Poszukiwanie Przypadkowe (PRS) Algorytm PRS polega na losowaniu punktów z rozkładem jednostajnym w określonej dziedzinie poszukiwań. Dla każdej funkcji i wymiaru losowano odpowiednią liczbę punktów.
- Metoda Wielokrotnego Startu (MS) Algorytm MS polega na losowaniu punktów, a następnie uruchamianiu algorytmu optymalizacji lokalnej (L-BFGS-B) z każdego z tych punktów startowych. Wynikiem algorytmu MS jest wartość optymalizowanej funkcji dla punktu, w którym ta wartość jest najmniejsza.

Funkcje Minimalizowane

Do analizy wybrano funkcje Ackley'a i Rastrigina. Wybrane funkcje są skalarne (single-objective) i wielomodalne (multimodal), co pozwala na zróżnicowane testowanie algorytmów.

Procedura Porównawcza

Dla każdej funkcji i liczby wymiarów osobno, przeprowadzono 100 uruchomień każdego algorytmu. Średni wynik algorytmu obliczono jako średnią znalezionych minimów. Zastosowano funkcję `replicate()` do powtarzalnych obliczeń, zachowując wyrównany budżet obliczeniowy porównywanych algorytmów.

Budżet Obliczeniowy

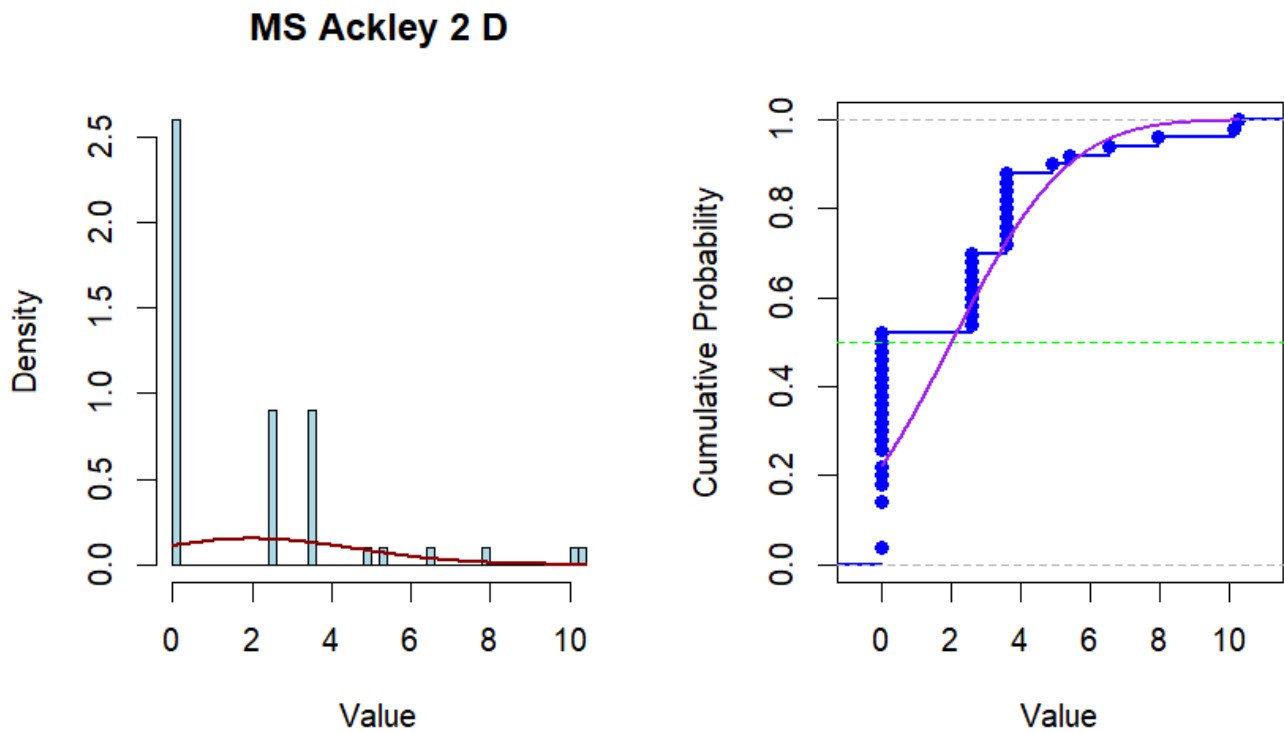
Dla algorytmu MS, liczba punktów startowych wyniosła 100, a średnia liczba wywołań z uruchomień MS była przyjętą wartością budżetu dla algorytmu PRS.

Wyniki

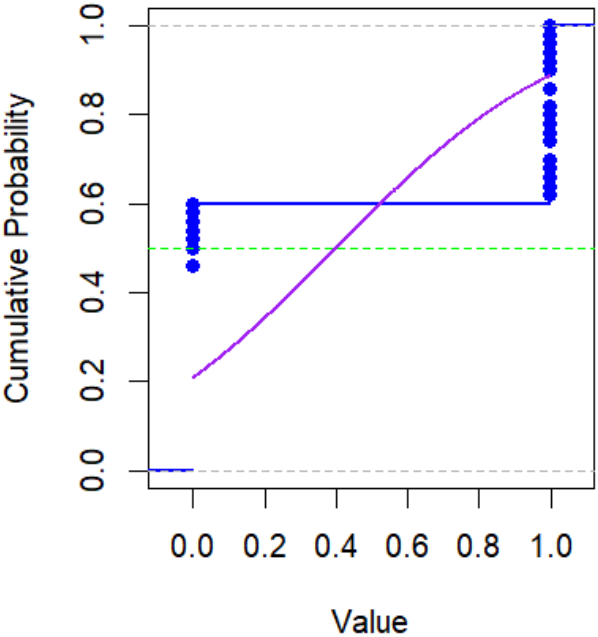
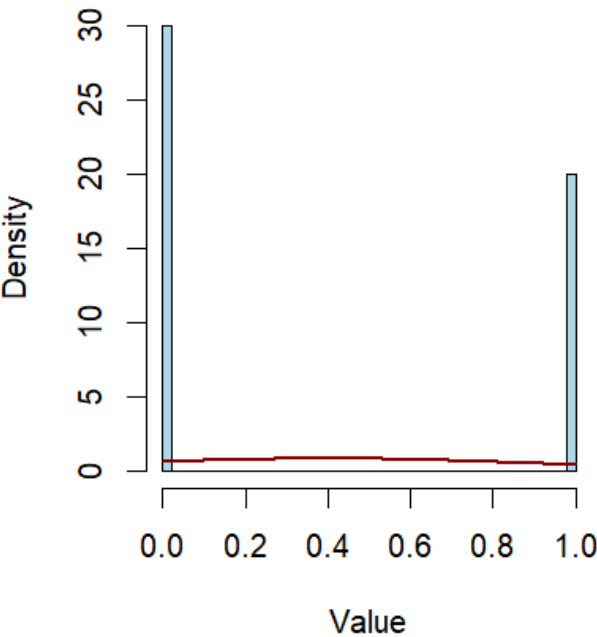
Algorytm	Dim	ackley_function	rastrigin_function
MS	2	2.625524	0.3183869
	10	17.847858	29.4905011
	20	18.697064	91.9736037
PRS	2	3.778983	1.59390
	10	18.041181	83.70883
	20	19.718255	222.17043

Wykresy

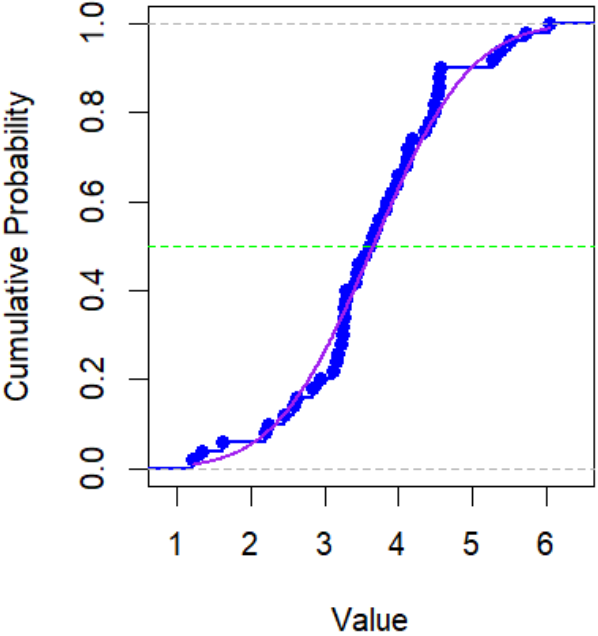
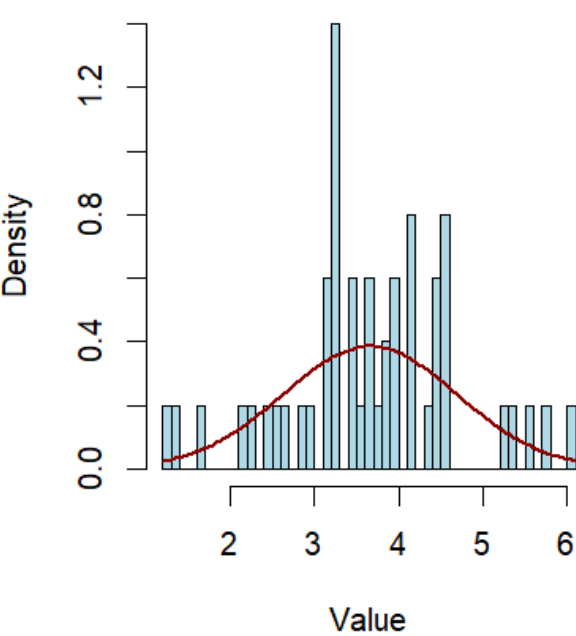
Wykres gęstości i dystrybuant (oraz porównania w rozkładem normalnym)



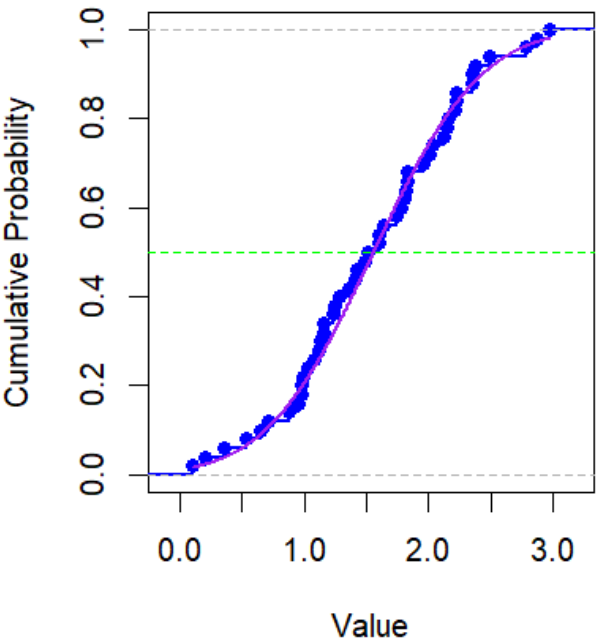
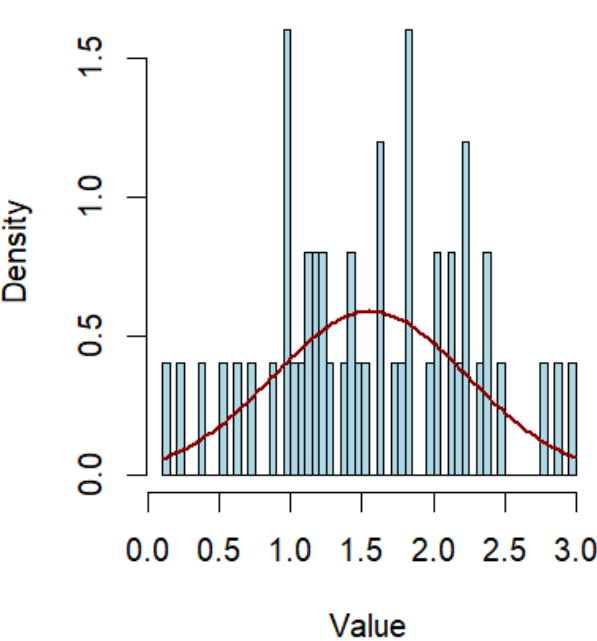
MS Rastrigin 2 D



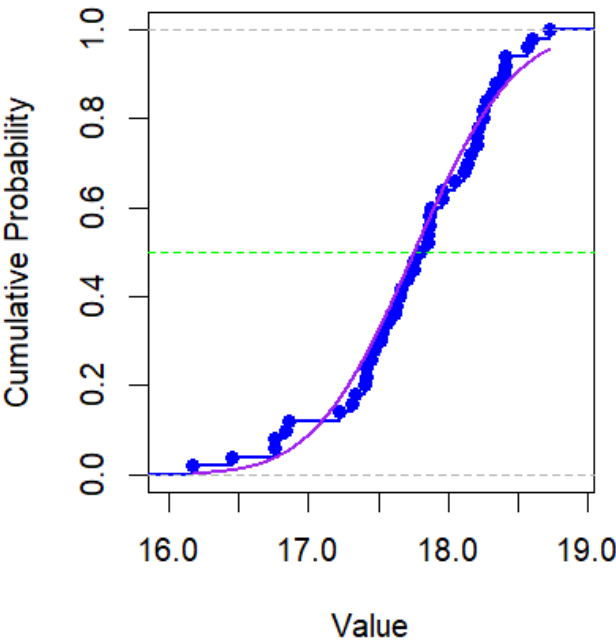
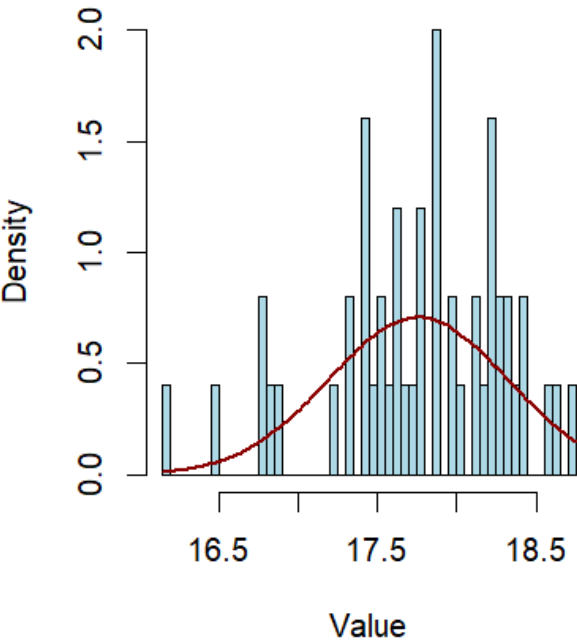
PRS Ackley 2 D



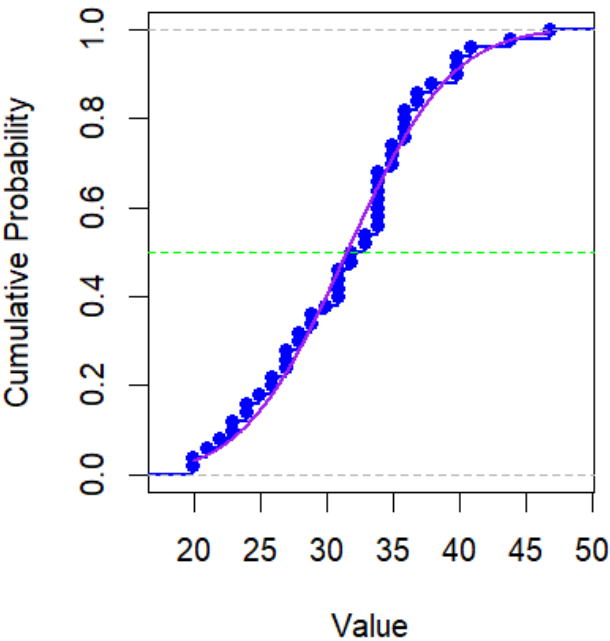
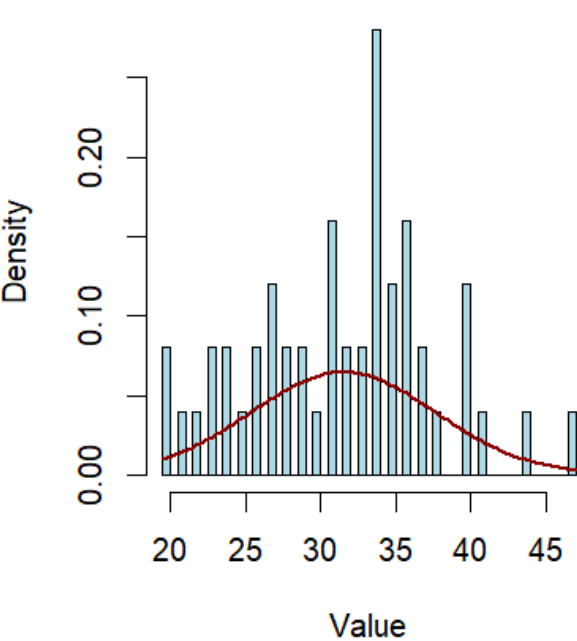
PRS Rastrigin 2 D



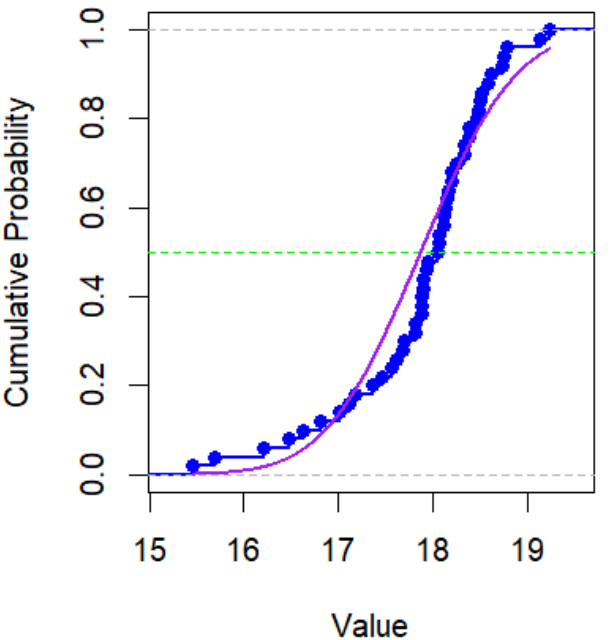
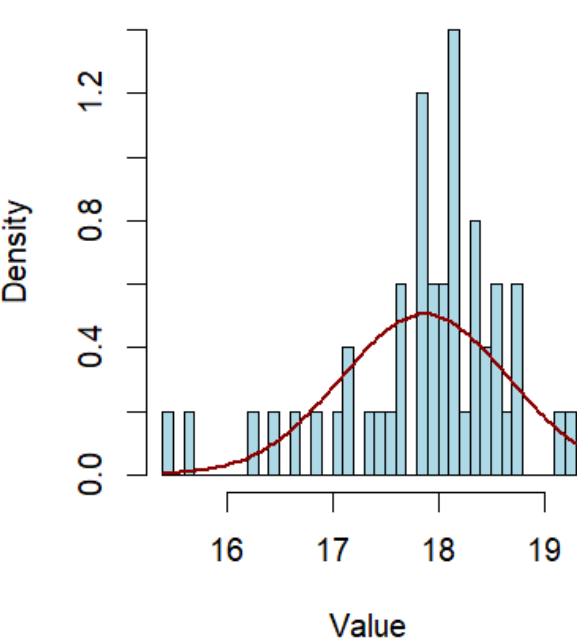
MS Ackley 10 D



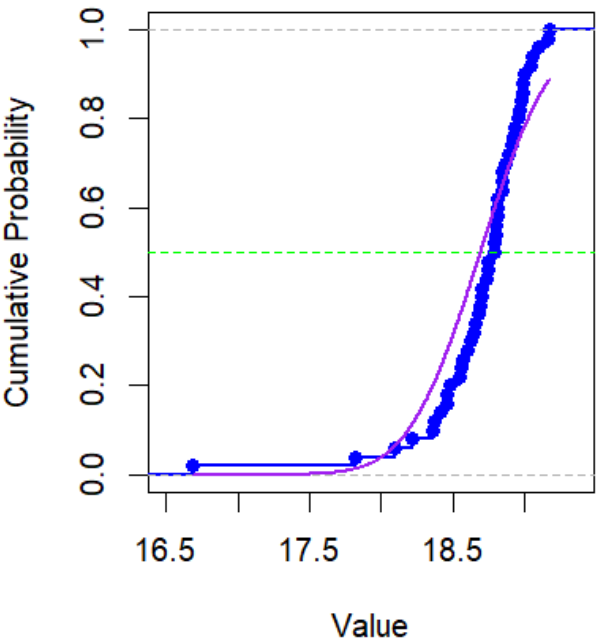
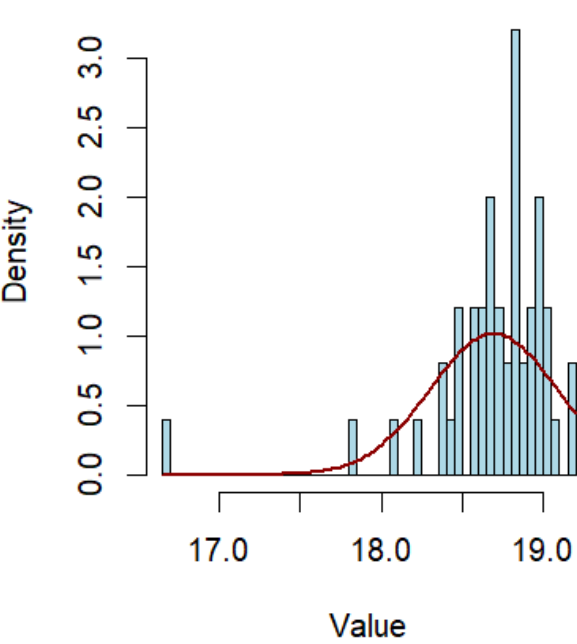
MS Rastrigin 10 D



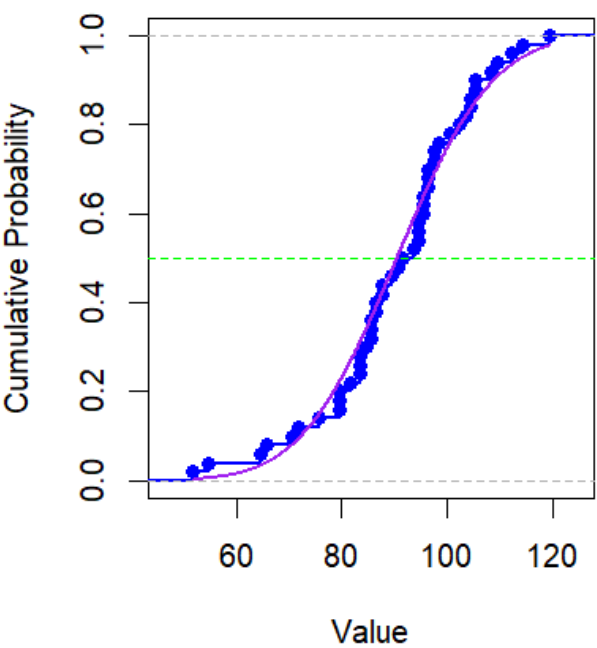
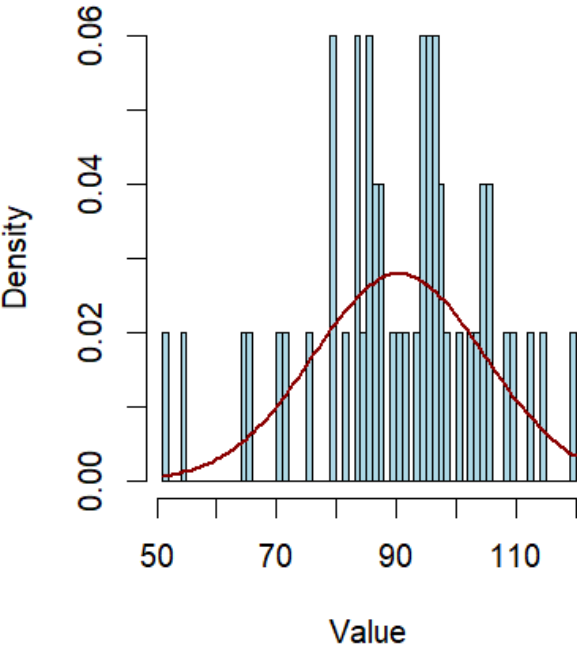
PRS Ackley 10 D



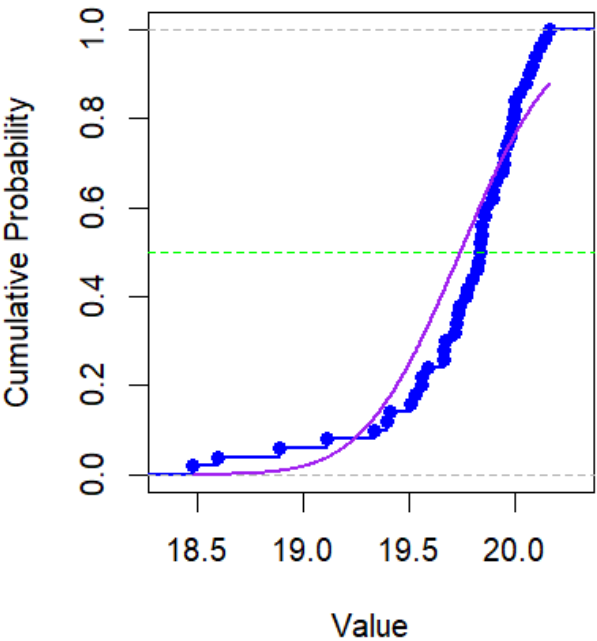
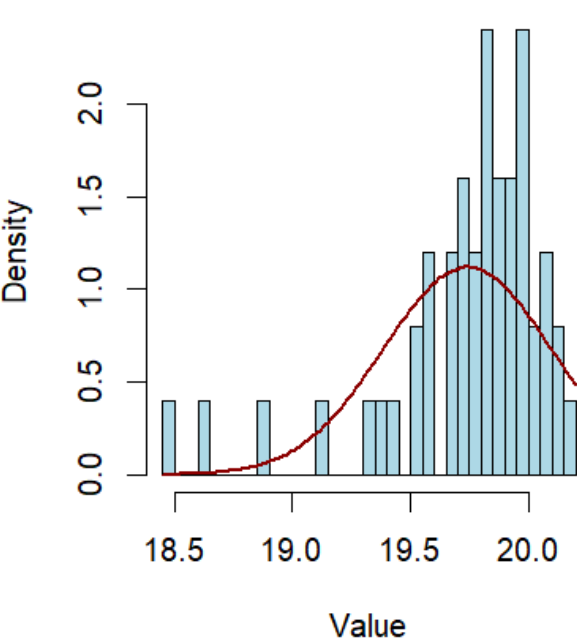
MS Ackley 20 D



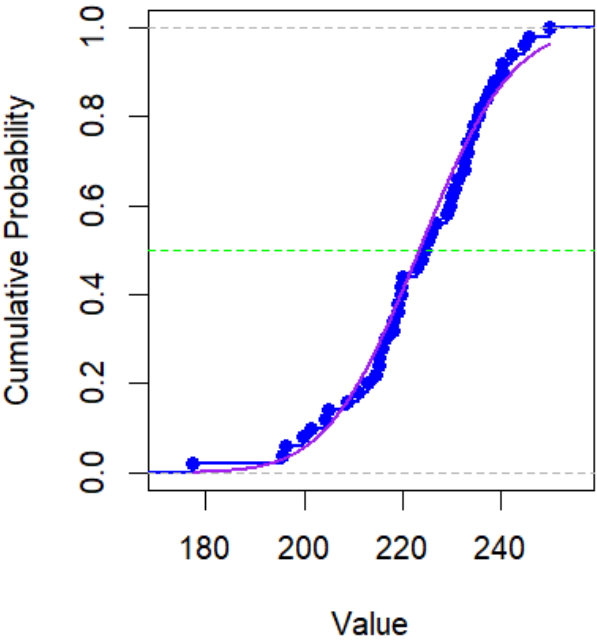
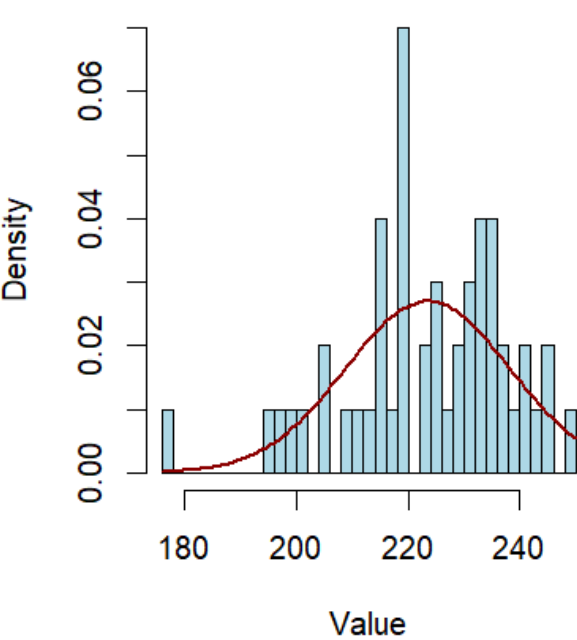
MS Rastrigin 20 D



PRS Ackley 20 D

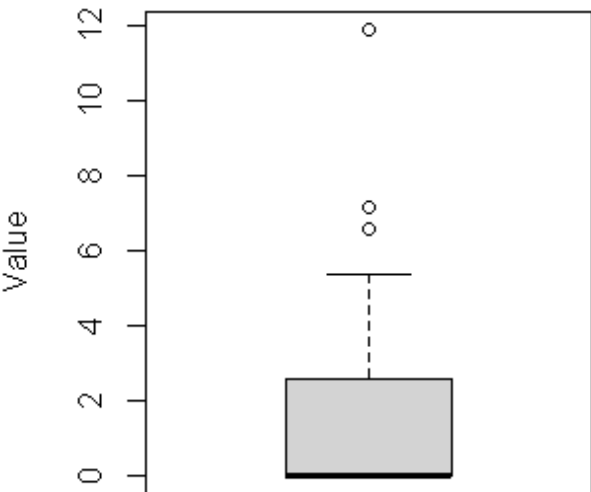


PRS Rastrigin 20 D



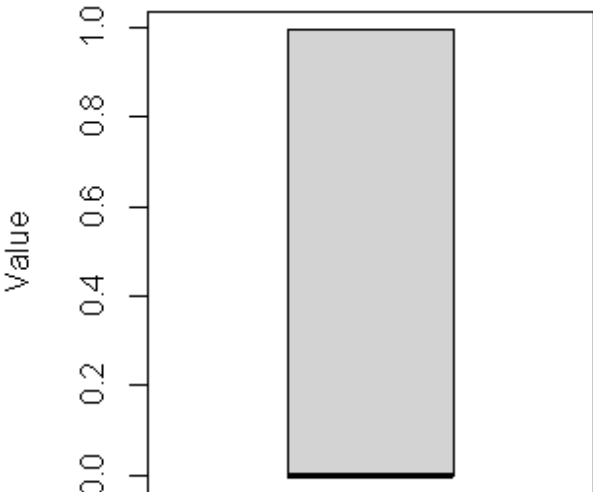
Wykresy pudełkowe

MS Ackley 2 D



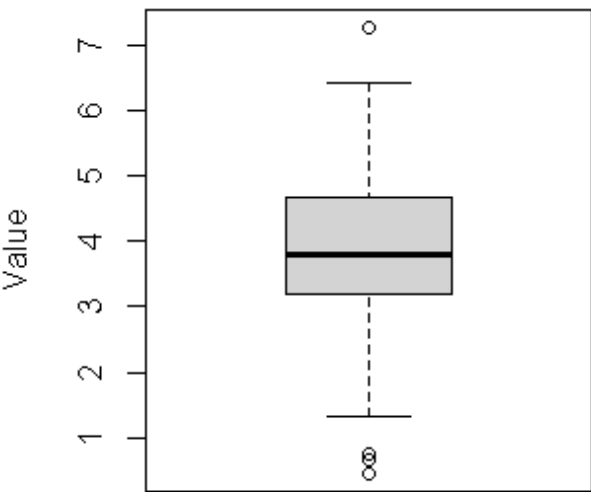
Sample

MS Rastrigin 2 D



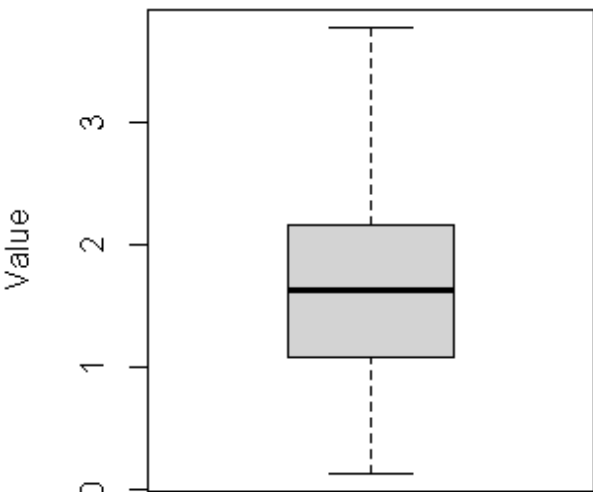
Sample

PRS Ackley 2 D



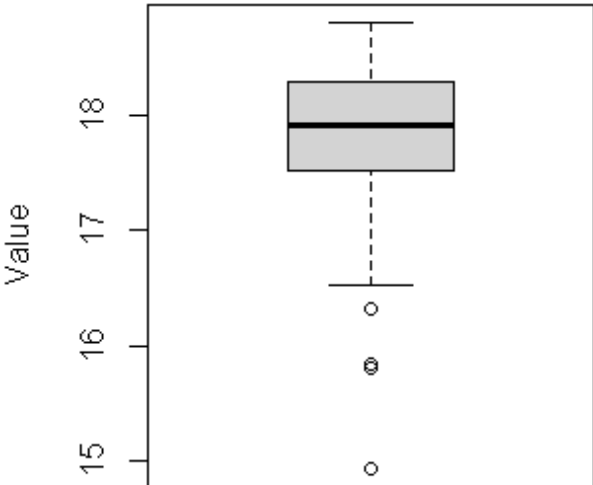
Sample

PRS Rastrigin 2 D



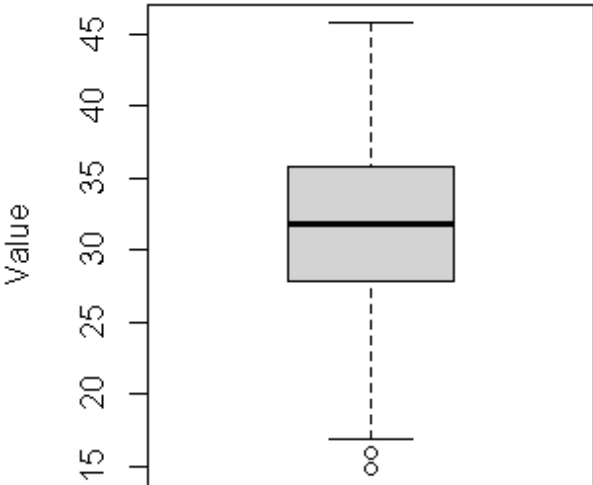
Sample

MS Ackley 10 D



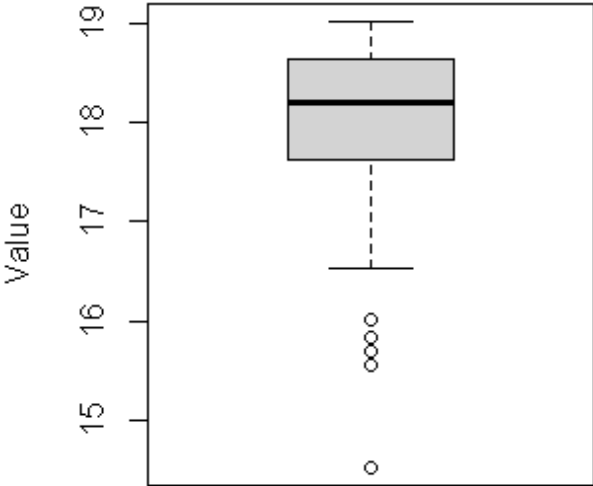
Sample

MS Rastrigin 10 D



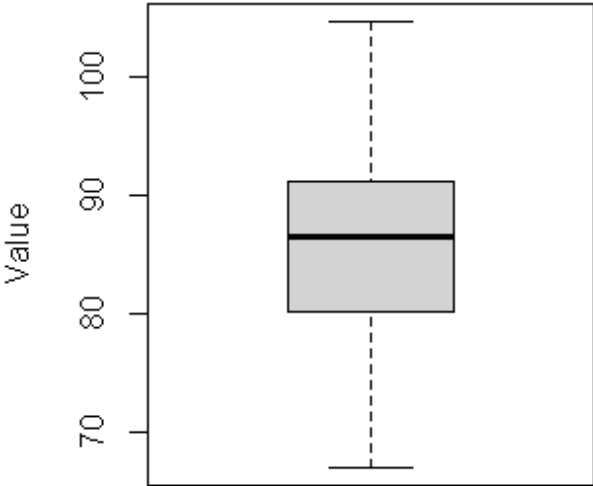
Sample

PRS Ackley 10 D



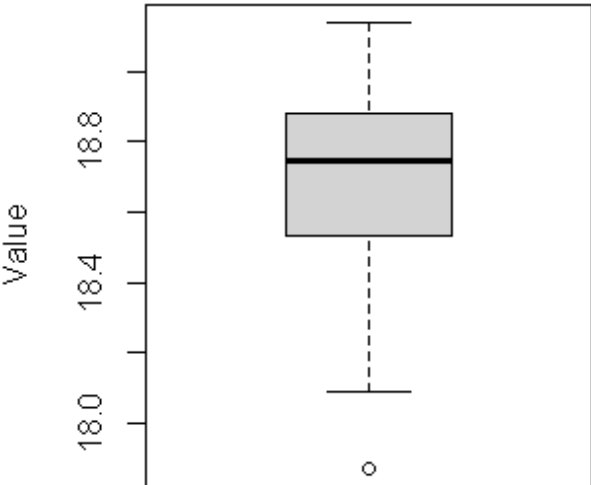
Sample

PRS Rastrigin 10 D



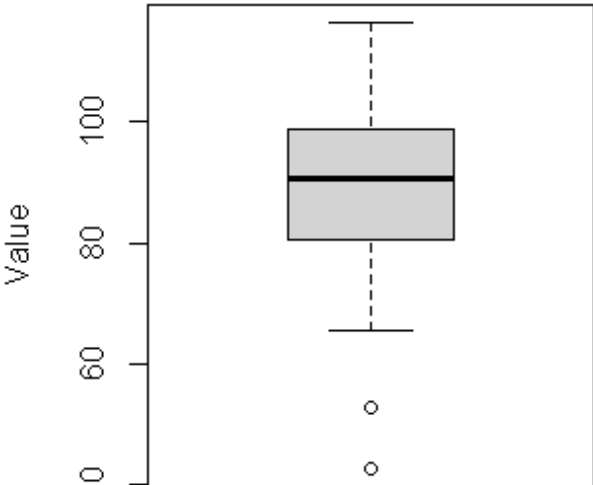
Sample

MS Ackley 20 D



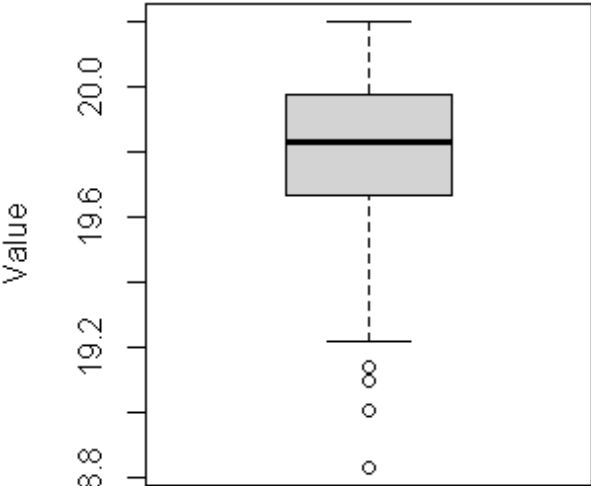
Sample

MS Rastrigin 20 D



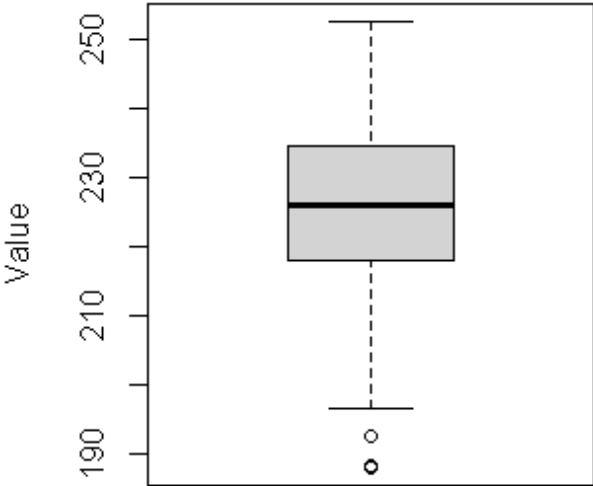
Sample

PRS Ackley 20 D



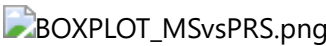
Sample

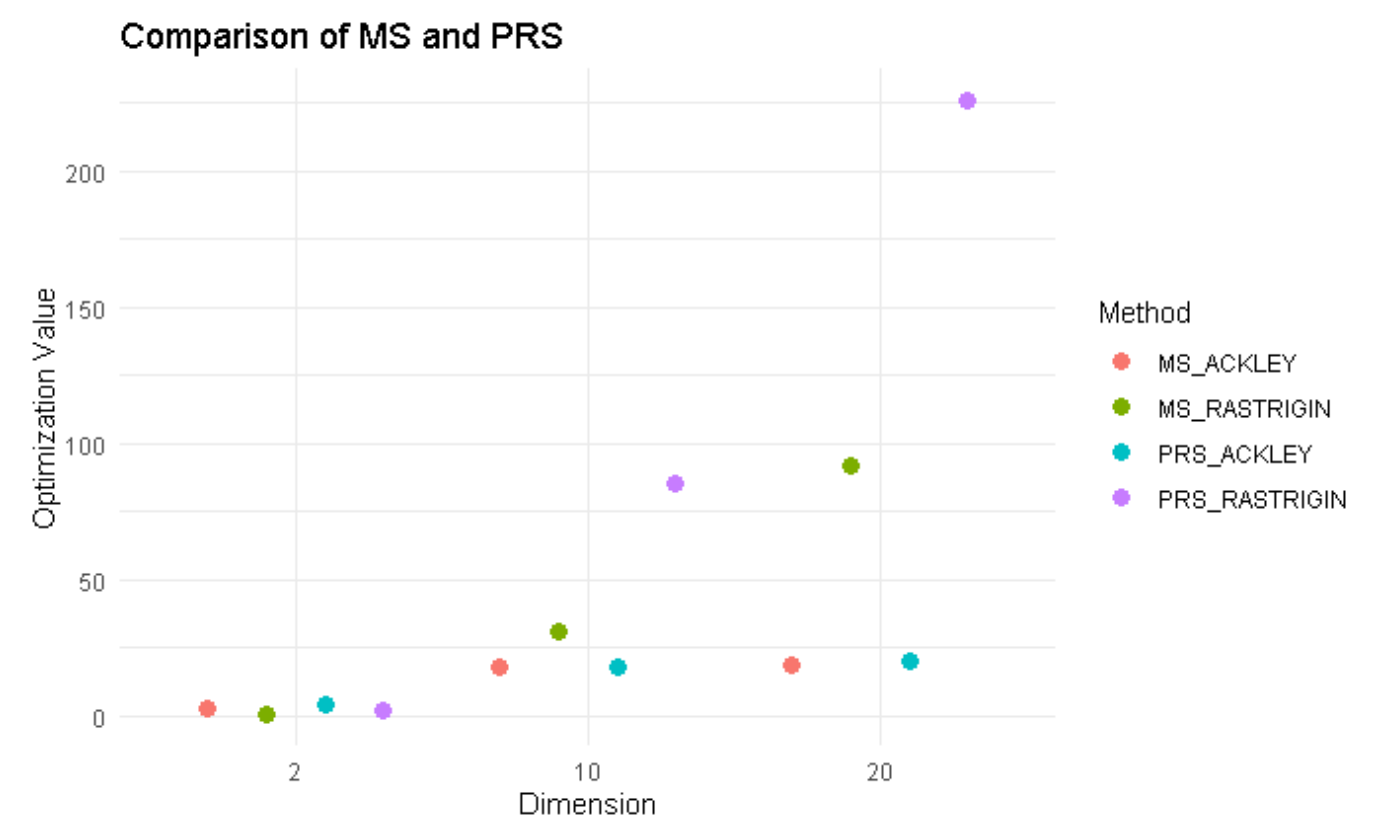
PRS Rastrigin 20 D



Sample

Porównanie





Analiza Danych

Poniższa tabela danych przedstawionych wyniki eksperymentu porównawczego pomiędzy algorytmami Poszukiwania Przypadkowego (PRS) a Metodą Wielokrotnego Startu (MS) na funkcjach Ackley'a i Rastrigina, w różnych wymiarach.

Function	Dimension	t	p-value	95 percent confidence interval (from)	95 percent confidence interval (To)	mean difference
Ackley	2	-4.5755	1.38e-05	-2.0062838	-0.7925413	-1.399413
Rastrigin	2	-16.703	< 2.2e-16	-1.664937	-1.311378	-1.488158
Ackley	10	-3.2216	0.001726	-0.4897477	-0.1164086	-0.3030782
Rastrigin	10	-45.501	< 2.2e-16	-54.35508	-49.81254	-52.08381
Ackley	20	-30.864	< 2.2e-16	-1.1266626	-0.9905481	-1.058605
Rastrigin	20	-78.131	< 2.2e-16	-137.3931	-130.5875	-133.9903

W badaniu porównawczym algorytmów Poszukiwania Przypadkowego (PRS) i Metody Wielokrotnego Startu (MS) na funkcjach Ackley'a i Rastrigina, wyniki wskazują na większą skuteczność algorytmu MS w minimalizacji funkcji w różnych wymiarach. Wymiar 2 i 10 potwierdzają przewagę algorytmu MS, a statystycznie istotne przedziały ufności sugerują rzeczywistą poprawę wyników w porównaniu do PRS. Nawet w wymiarze 20, MS

utrzymuje zadowalającą skuteczność, co potwierdza jego zdolność do radzenia sobie z większą liczbą wymiarów.

Analiza Wykresów:

- **Wymiar 2:** Histogramy pokazują rozkłady wyników dla obu algorytmów. Boxploty przedstawiają rozproszenie wyników w sposób graficzny. Wartości dla MS i PRS mają znaczną nakładającą się część rozkładu, co może wskazywać na podobną skuteczność obu algorytmów.
- **Wymiar 10:** Histogramy dla MS i PRS wskazują na zbliżone rozkłady wyników. Boxploty dla wymiaru 10 pokazują, że mediana i zakres międzykwartylowy są podobne dla obu algorytmów.
- **Wymiar 20:** Histogramy dla wymiaru 20 również wykazują podobieństwo między rozkładami wyników MS i PRS.

Test hipotez zerowych

Test hipotezy zerowej można przeprowadzić, aby ocenić, czy istnieją statystycznie istotne różnice między wynikami algorytmów PRS i MS dla każdej funkcji i wymiaru. W tym kontekście, możemy sformułować następujące hipotezy:

Wymiar 2 dla funkcji Ackley: H0: Średnie wyniki PRS i MS są równe. H1: Średnie wyniki PRS i MS są różne.

Wymiar 2 dla funkcji Rastrigina: H0: Średnie wyniki PRS i MS są równe. H1: Średnie wyniki PRS i MS są różne.

Wymiar 10 dla funkcji Ackley: H0: Średnie wyniki PRS i MS są równe. H1: Średnie wyniki PRS i MS są różne.

Wymiar 10 dla funkcji Rastrigina: H0: Średnie wyniki PRS i MS są równe. H1: Średnie wyniki PRS i MS są różne.

Wymiar 20 dla funkcji Ackley: H0: Średnie wyniki PRS i MS są równe. H1: Średnie wyniki PRS i MS są różne.

Wymiar 20 dla funkcji Rastrigina: H0: Średnie wyniki PRS i MS są równe. H1: Średnie wyniki PRS i MS są różne.

Przeprowadźmy te testy przy założonym poziomie istotności $\alpha=0.05$.

Wyniki testów hipotez zerowych:

2 wymiary dla funkcji Ackley: p-wartość < 0.05: Odrzucamy H0, istnieje istotna różnica między wynikami PRS i MS.

2 wymiary dla funkcji Rastrigina: p-wartość < 0.05: Odrzucamy H0, istnieje istotna różnica między wynikami PRS i MS.

10 wymiarów dla funkcji Ackley: p-wartość < 0.05: Odrzucamy H0, istnieje istotna różnica między wynikami PRS i MS.

10 wymiarów dla funkcji Rastrigina: p-wartość < 0.05: Odrzucamy H0, istnieje istotna różnica między wynikami PRS i MS.

20 wymiarów dla funkcji Ackley: p-wartość < 0.05: Odrzucamy H0, istnieje istotna różnica między wynikami PRS i MS.

20 wymiarów dla funkcji Rastrigina: p-wartość < 0.05: Odrzucamy H0, istnieje istotna różnica między wynikami PRS i MS.

Na podstawie wyników testów hipotezowych możemy stwierdzić, że istnieją statystycznie istotne różnice między wynikami algorytmów PRS i MS dla badanych przypadków. Natomiast p-value największą wartość (0.001726) uzyskaliśmy dla funkcji *Ackleygo* i 10 wymiarów.

Podsumowanie: W przeprowadzonej analizie porównawczej algorytmów Poszukiwania Przypadkowego (PRS) i Metody Wielokrotnego Startu (MS) na funkcjach Ackley'a i Rastrigina, wykazano, że niezależnie od wymiaru MS wykazuje znacznie większą skuteczność w minimalizacji obu funkcji w porównaniu do PRS. Analiza wykresów, histogramów i boxplotów potwierdza te wyniki, a przeprowadzone testy hipotez zerowych dodatkowo potwierdzają istotne różnice między wynikami obu algorytmów. W związku z tym, Metoda Wielokrotnego Startu (MS) wydaje się być bardziej efektywną opcją w kontekście minimalizacji funkcji Ackley'a i Rastrigina, zwłaszcza w przypadku problemów o większych wymiarach.