Pertemuan 11

Aturan Rantai & Turunan Tingkat Tinggi

Aturan Rantai
(untuk turunan fungsi komposit)

Teorema A:

Misalkan f = f(u) dan u = g(x) dengan f dan g fungsi-fungsi. Jika g dapat diturunkan di x dan f dapat diturunkan di u=g(x) maka fungsi komposit y = f(g(x)) dapat diturunkan di x dan berlaku:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} \text{ atau}$$

$$\boldsymbol{D_x} f(g(x) = f'(u) \,.\, g'(x)$$

Contoh Aturan Rantai

1.Jika y = $(x^3 - 10)^9$. Tentukan dy/dx ?

Jawab: y = $(x^3 - 10)^9$

Misalkan y = u^9 maka $\frac{dy}{du} = 9u^{9-1} = 9u^8$ dan

u = $x^3 - 10$ maka $\frac{du}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = (9u^8)(3x^2) = 9(x^3 - 10)^8(3x^2)$

Contoh Aturan Rantai

2. Jika f(x) = $(2x)^9$. Tentukan $\frac{dy}{dx}$?

Jawab: Misalkan y = u^9 maka $\frac{dy}{du} = 9u^{9-1} = 9u^8$ dan

u = $2x$ maka $\frac{du}{dx}$ = 2

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$ = $(9u^8)(2)$ = $18u^8 = 18(2x)^8$

Contoh Aturan Rantai

3. dy/dx = $\left(\frac{3x^3 - 5x}{4x+17}\right)^{13}$

Jawab: Misalkan y = u^{13} maka $\frac{dy}{du} = 13u^{13-1} = 13u^{12}$ dan

$$u = \frac{3x^3 - 5x}{4x+17} \text{ maka } \frac{du}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(9x^2-5)(4x+17)-(3x^3-5x)(4)}{(4x+17)^2} =$$

$$\frac{36x^3+153x^2-20x-85-12x^3+20x}{(4x+17)^2} = \frac{24x^3+153x^2-85}{(4x+17)^2}$$

Sehingga : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = (13u^{12})\frac{24x^3+153x^2-85}{(4x+17)^2} = 13\left(\frac{3x^3 - 5x}{4x+17}\right)^{12}\left(\frac{24x^3+153x^2-85}{(4x+17)^2}\right)$

Contoh Aturan Rantai

4. y= $\frac{1}{(2x^5-7)^3}$,carilah $\frac{dy}{dx}$

Jawab: y =$\frac{1}{u^3} = u^{-3}$ maka $\frac{dy}{du} = -3u^{-3-1} = -3u^{-4} = \frac{-3}{u^4}$ dan

u = $2x^5 - 7$ maka $\frac{du}{dx} = 5.2\, x^{5-1} = 10x^4$

Sehingga : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{-3}{u^4}\,(10x^4) = \frac{-30x^4}{(2x^5-7)^4}$

Turunan Tingkat Tinggi

Defenisi:

Jika fungsi diturunkan maka turunannya f'. Turunan pertama f' adalah turunan kedua f jika ada dan dilambangkan f'' baca: f dua aksen) dan disebut turunan kedua dari f. Pada gilirannya dia boleh dideferensilkan lagi, dengan demikian menghasilkan f''', yang disebut turunan ketiga dari f. Turunan keempat $f^{(4)}$, turunan kelima dinyatakan $f^{(5)}$ dan seterusnya.

Contoh:

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$$

Maka $f'(\mathrm{x}) = 6\mathrm{x}^2 - 8\mathrm{x} + 7$

$$f''(\mathrm{x}) = 12\mathrm{x} - 8$$

$$f'''(\mathrm{x}) = 12$$

$$f^{(4)} = 0$$

Turunan Tingkat Tinggi

Kita telah memperkenalkan tiga cara penulisan untuk Cara penulisan untuk turunan dari y=f(x). Notasinya adalah

$$f'(\mathrm{x}) \qquad D_x y \qquad \frac{dy}{dx}$$

Cara penulisan untuk turunan dari y = f(x)

Turunan	Notasi(f’)	Notasi (y’)	Notasi (D)	Notasi Leibnitz
pertama	$f'(\mathrm{x})$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
kedua	$f''(\mathrm{x})$	y''	$D\hat{}2_x y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
ketiga	$f'''(\mathrm{x})$	y'''	d^3xy	$\frac{d^3y}{dx^3}$
keempat	$f^{(4)}(\mathrm{x})$	$y(4)$	$D_x^{\hat{}4}y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
….	……	……	….	….
Ke-n	$f^n(\mathrm{x})$	y^n	$D\hat{}n_x y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh

Tentukan turunan tingkat tinggi dari 3x^5 + 2x^3 + 2x – 5 menggunakan *menggunakan notasi leibnitz*

F(x) = 3x^5 + 2x^3 + 2x – 5

$\frac{dy}{dx}$ = 15x^4 + 6x^2 + 2

$\frac{d^2y}{dx^2}$= 60x^3 + 12x

$\frac{d^3y}{dx^3}$= 180x^2 + 12

$\frac{d^4y}{dx^4}$= 360x

$\frac{d^5y}{dx^5}$= 360

$\frac{d^6y}{dx^6}$= 0

LATIHAN

1. $y = (2x + 3)^{-4}$, carilah dy/dx

2. $y = (7x^2 + 3x - 1)^{-3/2}$, carilah dy/dx

3. $y = \frac{1}{(x+3)^5}$, carilah dy/dx

4. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$, carilah dy/dx

5. $y = (\frac{3x - 2}{x+5})^3$, carilah dy/dx

6. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x$, tentukan turunan tingkat tinggi

7. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 6x + 3$, tentukan turunan tingkat tinggi

8. $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + x$, cari $f'''(x)$