Deriving exchange in Elle comonadicly:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{y_0 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{C}} y_0 : \mathsf{G}B}\textsc{ax}}{y_0 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}B}\textsc{Fr}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{C}} x_0 : \mathsf{G}A}\textsc{ax}}{x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}A}\textsc{Fr}
}{y_0 : \mathsf{G}B, x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{tenR}
}{x_1 : \mathsf{G}A, y_1 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0) : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{beta}
}{x_1 : \mathsf{G}A, y_2 : \mathsf{FG}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0)) : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{Fl}
}{x_2 : \mathsf{FG}A, y_2 : \mathsf{FG}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0))) : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{Fl}
}{z : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, z : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, x_2 \triangleright y_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0)))) : (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A)}\textsc{tenL}
}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_r z : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B.\mathsf{let}\, z : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, x_2 \triangleright y_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0)))) : (\mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B) \rightharpoonup (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A)}\textsc{imprR}
$$

Deriving right contraction in Elle comonadicly:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{x_1 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{C}} x_1 : \mathsf{G}A}\textsc{ax}}{x_1 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}x_1 : \mathsf{FG}A}\textsc{Fr}
\quad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{y_0 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{C}} y_0 : \mathsf{G}B}\textsc{ax}}{y_0 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}B}\textsc{Fr}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{C}} x_0 : \mathsf{G}A}\textsc{ax}}{x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}A}\textsc{Fr}
}{y_0 : \mathsf{G}B, x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{tenR}
}{x_1 : \mathsf{G}A, y_0 : \mathsf{G}B, x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}x_1 \triangleright (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0) : \mathsf{FG}A \triangleright (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A)}\textsc{tenR}
}{y_0 : \mathsf{G}B, x_2 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{contrR}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_1, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}x_1 \triangleright (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0)) : \mathsf{FG}A \triangleright (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A)}\textsc{contrR}
}{y_0 : \mathsf{G}B, x_3 : \mathsf{FG}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{contrR}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_1, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}x_1 \triangleright (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0))) : \mathsf{FG}A \triangleright (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A)}\textsc{Fl}
}{y_1 : \mathsf{FG}B, x_3 : \mathsf{FG}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{contrR}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_1, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}x_1 \triangleright (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0)))) : \mathsf{FG}A \triangleright (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A)}\textsc{Fl}
}{z : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, z : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, y_1 \triangleright x_3 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{contrR}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_1, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}x_1 \triangleright (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0))))) : \mathsf{FG}A \triangleright (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A)}\textsc{tenL}
}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_r z : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A.\mathsf{let}\, z : \mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, y_1 \triangleright x_3 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{contrR}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_1, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}x_1 \triangleright (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_0))))) : (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A) \rightharpoonup (\mathsf{FG}A \triangleright (\mathsf{FG}B \triangleright \mathsf{FG}A))}\textsc{imprR}
$$

Deriving left contraction in Elle comonadicly:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{C}} x_0 : \mathsf{G}A}\textsc{ax}}{x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}A}\textsc{Fr}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{y_0 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{C}} y_0 : \mathsf{G}B}\textsc{ax}}{y_0 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}B}\textsc{Fr}
}{x_0 : \mathsf{G}A, y_0 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}x_0 \triangleright \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B}\textsc{tenR}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{x_1 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{C}} x_1 : \mathsf{G}A}\textsc{ax}}{x_1 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}x_1 : \mathsf{FG}A}\textsc{Fr}
}{x_0 : \mathsf{G}A, y_0 : \mathsf{G}B, x_1 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} (\mathsf{F}x_0 \triangleright \mathsf{F}y_0) \triangleright \mathsf{F}x_1 : (\mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B) \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{tenR}
}{x_2 : \mathsf{G}A, y_0 : \mathsf{G}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{contrL}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_0, x_1 \,\mathsf{in}\, ((\mathsf{F}x_0 \triangleright \mathsf{F}y_0) \triangleright \mathsf{F}x_1) : (\mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B) \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{contrR}
}{x_2 : \mathsf{G}A, y_1 : \mathsf{FG}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{contrL}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_0, x_1 \,\mathsf{in}\, ((\mathsf{F}x_0 \triangleright \mathsf{F}y_0) \triangleright \mathsf{F}x_1)) : (\mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B) \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{Fl}
}{x_3 : \mathsf{FG}A, y_1 : \mathsf{FG}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{contrL}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_0, x_1 \,\mathsf{in}\, ((\mathsf{F}x_0 \triangleright \mathsf{F}y_0) \triangleright \mathsf{F}x_1))) : (\mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B) \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{Fl}
}{z : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, z : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, x_3 \triangleright y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{contrL}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_0, x_1 \,\mathsf{in}\, ((\mathsf{F}x_0 \triangleright \mathsf{F}y_0) \triangleright \mathsf{F}x_1)))) : (\mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B) \triangleright \mathsf{FG}A}\textsc{tenL}
}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_r z : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B.\mathsf{let}\, z : \mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, x_3 \triangleright y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_3 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{contrL}\, x_2 \,\mathsf{as}\, x_0, x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}x_0 \triangleright (\mathsf{F}y_0 \triangleright \mathsf{F}x_1))))) : (\mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B) \rightharpoonup ((\mathsf{FG}A \triangleright \mathsf{FG}B) \triangleright \mathsf{FG}A)}\textsc{imprR}
$$

Deriving weakening in Elle comonadicly:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}}\textsc{unitR}
}{x_0 : \mathsf{G}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{weak}\, x_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}}\textsc{weak}
}{x_1 : \mathsf{FG}A \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x_1 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{weak}\, x_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}}\textsc{Fl}
}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_r x_1 : \mathsf{FG}A.\mathsf{let}\, x_1 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{weak}\, x_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{trivS} : (\mathsf{FG}A) \rightharpoonup (\mathsf{UnitS})}\textsc{imprR}
$$

GF is a monad:

- Deriving η:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{x_0 : \mathsf{F}X \vdash_{\mathcal{L}} x_0 : \mathsf{F}X}\textsc{ax}
}{x_1 : \mathsf{GF}X \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x_1 : \mathsf{GF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x_0 \,\mathsf{in}\, x_0 : \mathsf{F}X}\textsc{Gl}
}{x_2 : \mathsf{FGF}X \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FGF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_1 : \mathsf{GF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x_0 \,\mathsf{in}\, x_0) : \mathsf{F}X}\textsc{Fl}
}{x_3 : \mathsf{GFGF}X \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{GFGF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FGF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_1 : \mathsf{GF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x_0 \,\mathsf{in}\, x_0)) : \mathsf{F}X}\textsc{Gl}
}{x_3 : \mathsf{GFGF}X \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{G}(\mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{GFGF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FGF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_1 : \mathsf{GF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x_0 \,\mathsf{in}\, x_0))) : \mathsf{GF}X}\textsc{Gr}
}{\cdot \vdash_{\mathcal{C}} \lambda x_3 : \mathsf{GFGF}X.\mathsf{G}(\mathsf{let}\, x_3 : \mathsf{GFGF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FGF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_1 : \mathsf{GF}X \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x_0 \,\mathsf{in}\, x_0))) : (\mathsf{GFGF}X) \multimap (\mathsf{GF}X)}\textsc{imprR}
$$

- Deriving μ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : X \vdash_{\mathcal{C}} x : X}\,\textsc{ax}}{x : X \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}x : \mathsf{F}X}\,\textsc{Fr}}{x : X \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{GF}x : \mathsf{GF}X}\,\textsc{Gr}}{\cdot \vdash_{\mathcal{C}} \lambda x : X.\mathsf{GF}x : (X) \multimap (\mathsf{GF}X)}\,\textsc{imprR}$$

The monad GF is strong:

- Deriving the tensorial strength τ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_0 : X \vdash_{\mathcal{C}} x_0 : X}\,\textsc{ax} \quad \dfrac{}{y_0 : Y \vdash_{\mathcal{C}} y_0 : Y}\,\textsc{ax}}{x_0 : X, y_0 : Y \vdash_{\mathcal{C}} x_0 \otimes y_0 : X \otimes Y}\,\textsc{tenR}}{x_0 : X, y_0 : Y \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0) : \mathsf{F}(X \otimes Y)}\,\textsc{Fr}}{x_0 : X, y_1 : \mathsf{F}Y \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0\, \mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0) : \mathsf{F}(X \otimes Y)}\,\textsc{Fl}}{y_2 : \mathsf{GF}Y, x_0 : X \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1\, \mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0\, \mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0)) : \mathsf{F}(X \otimes Y)}\,\textsc{Gl}}{y_2 : \mathsf{GF}Y, x_0 : X \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{G}(\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1\, \mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0\, \mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0))) : \mathsf{GF}(X \otimes Y)}\,\textsc{Gr}}{x_1 : X, y_3 : \mathsf{GF}Y \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{ex}\, y_3, x_1\, \mathsf{with}\, y_2, x_0\, \mathsf{in}\, (\mathsf{G}(\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1\, \mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0\, \mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0)))) : \mathsf{GF}(X \otimes Y)}\,\textsc{beta}}{z : X \otimes \mathsf{GF}Y \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{let}\, z : X \otimes \mathsf{GF}Y\, \mathsf{be}\, x_1 \otimes y_3\, \mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_3, x_1\, \mathsf{with}\, y_2, x_0\, \mathsf{in}\, (\mathsf{G}(\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1\, \mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0\, \mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0))))) : \mathsf{GF}(X \otimes Y)}\,\textsc{tenL}}{\cdot \vdash_{\mathcal{C}} \lambda z : X \otimes \mathsf{GF}Y.\mathsf{let}\, z : X \otimes \mathsf{GF}Y\, \mathsf{be}\, x_1 \otimes y_3\, \mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_3, x_1\, \mathsf{with}\, y_2, x_0\, \mathsf{in}\, (\mathsf{G}(\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1\, \mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0\, \mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0))))) : (X \otimes \mathsf{GF}Y) \multimap (\mathsf{GF}(X \otimes Y))}\,\textsc{imprR}$$

A Full Ott Spec

vars, n, a, x, y, z, w, m, o
ivar, i, k, j, l
const, b

A, B, C	::=	
	|	B
	|	UnitS
	|	$A \triangleright B$
	|	$A \rightharpoonup B$
	|	$A \leftharpoonup B$
	|	FX
X, Y, Z	::=	
	|	B
	|	UnitT
	|	$X \otimes Y$
	|	$X \multimap Y$
	|	GA
T	::=	
	|	A
	|	X
p	::=	

	|	$\star$	
	|	x	
	|	trivT	
	|	trivS	
	|	$p \otimes p'$	
	|	$p \triangleright p'$	
	|	F p	
	|	G p	
s	::=		
	|	x	
	|	b	
	|	trivS	
	|	let $s_1 : T$ be p in s_2	
	|	let $t : T$ be p in s	
	|	$s_1 \triangleright s_2$	
	|	$\lambda_l x : A.s$	
	|	$\lambda_r x : A.s$	
	|	app$_l$ s_1 s_2	
	|	app$_r$ s_1 s_2	
	|	ex s_1, s_2 with x_1, x_2 in s_3	
	|	contrR x as s_1, s_2 in s_3	
	|	contrL x as s_1, s_2 in s_3	
	|	weak x in s	
	|	(s)	S
	|	Ft	
t	::=		
	|	x	
	|	b	
	|	trivT	
	|	let $t_1 : X$ be p in t_2	
	|	$t_1 \otimes t_2$	
	|	$\lambda x : X.t$	
	|	app t_1 t_2	
	|	ex t_1, t_2 with x_1, x_2 in t_3	
	|	contrR x as t_1, t_2 in t_3	
	|	contrR x as t_1, t_2 in t_3	
	|	weak x in t	
	|	(t)	S
	|	Gs	
Φ, Ψ	::=		

	$\mid$	$\cdot$
	$\mid$	Φ_1, Φ_2
	$\mid$	$x : X$
	$\mid$	X
	$\mid$	(Φ) S

$\Gamma,\ \Delta$	$::=$	
	$\mid$	$\cdot$
	$\mid$	$x : A$
	$\mid$	A
	$\mid$	Φ
	$\mid$	Γ_1, Γ_2
	$\mid$	(Γ) S

$\boxed{\Phi \vdash_{C} t : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash_{C} x : X} \quad \text{T\_AX}$$

$$\frac{\Psi \vdash_{C} t : X}{x : \mathsf{UnitT}, \Psi \vdash_{C} \mathsf{let}\, x : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, t : X} \quad \text{T\_UNITL}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash_{C} \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}} \quad \text{T\_UNITR}$$

$$\frac{\Phi, x : X, y : Y, \Psi \vdash_{C} t : Z}{\Phi, z : Y, w : X, \Psi \vdash_{C} \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : Z} \quad \text{T\_BETA}$$

$$\frac{\Phi_1, x : X, \Phi_2, y : X, \Phi_3 \vdash_{C} t : Y}{\Phi_1, \Phi_2, z : X, \Phi_3 \vdash_{C} \mathsf{contrR}\, z\, \mathsf{as}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : Y} \quad \text{T\_CONTRR}$$

$$\frac{\Phi_1, x : X, \Phi_2, y : X, \Phi_3 \vdash_{C} t : Y}{\Phi_1, z : X, \Phi_2, \Phi_3 \vdash_{C} \mathsf{contrR}\, z\, \mathsf{as}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : Y} \quad \text{T\_CONTRL}$$

$$\frac{\Phi, \Psi \vdash_{C} t : Y \quad x \notin |\Phi, \Psi|}{\Phi, x : X, \Psi \vdash_{C} \mathsf{weak}\, x\, \mathsf{in}\, t : Y} \quad \text{T\_WEAK}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} t_1 : X \quad \Psi_1, x : X, \Psi_2 \vdash_{C} t_2 : Y}{\Psi_1, \Phi, \Psi_2 \vdash_{C} [t_1/x]t_2 : Y} \quad \text{T\_CUT}$$

$$\frac{\Phi, x : X, y : Y, \Psi \vdash_{C} t : Z}{\Phi, z : X \otimes Y, \Psi \vdash_{C} \mathsf{let}\, z : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t : Z} \quad \text{T\_TENL}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} t_1 : X \quad \Psi \vdash_{C} t_2 : Y}{\Phi, \Psi \vdash_{C} t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y} \quad \text{T\_TENR}$$

$$\frac{\Phi, x : X \vdash_{C} t : Y}{\Phi \vdash_{C} \lambda x : X.t : X \multimap Y} \quad \text{T\_IMPR}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} t_1 : X \quad \Psi_1, x : Y, \Psi_2 \vdash_{C} t_2 : Z}{\Psi_1, y : X \multimap Y, \Phi, \Psi_2 \vdash_{C} [\mathsf{app}\, y\, t_1/x]t_2 : Z} \quad \text{T\_IMPL}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Phi \vdash_{C} \mathsf{G}s : \mathsf{G}A} \quad \text{T\_GR}$$

$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s : A}$

$$\frac{}{x : A \vdash_{\mathcal{L}} x : A}\ \textsc{S\_ax}$$

$$\frac{\Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{x : \mathsf{UnitT}, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_unitL1}$$

$$\frac{\Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{x : \mathsf{UnitS}, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, x : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_unitL2}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}}\ \textsc{S\_unitR}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma, z : Y, w : X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_beta}$$

$$\frac{\Gamma_1, x : X, \Gamma_2, y : X, \Gamma_3 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma_1, \Gamma_2, y : X, \Gamma_3 \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{contrR}\, z\, \mathsf{as}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_contrR}$$

$$\frac{\Gamma_1, x : X, \Gamma_2, y : X, \Gamma_3 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma_1, y : X, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{contrR}\, z\, \mathsf{as}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_contrL}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A \quad x \notin |\Gamma, \Delta|}{\Gamma, x : X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{weak}\, x\, \mathsf{in}\, s : B}\ \textsc{S\_weak}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : X \quad \Gamma_1, x : X, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma_1, \Phi, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} [t/x]s : A}\ \textsc{S\_cut1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \quad \Delta_1, x : A, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : B}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} [s_1/x]s_2 : B}\ \textsc{S\_cut2}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma, z : X \otimes Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, z : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_tenL1}$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : C}{\Gamma, z : A \triangleright B, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, z : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s : C}\ \textsc{S\_tenL2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : B}{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B}\ \textsc{S\_tenR}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : X \quad \Gamma, x : Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma, y : X \multimap Y, \Phi, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} [\mathsf{app}\, y\, t/x]s : A}\ \textsc{S\_impL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \quad \Delta, x : B \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : C}{\Delta, y : A \rightharpoonup B, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} [\mathsf{app}_r\, y\, s_1/x]s_2 : C}\ \textsc{S\_imprL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \quad x : B, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : C}{\Gamma, y : B \leftharpoonup A, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} [\mathsf{app}_l\, y\, s_1/x]s_2 : C}\ \textsc{S\_implL}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{L}} s : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_r x : A.s : A \rightharpoonup B}\ \textsc{S\_imprR}$$

$$\frac{x : A, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_l x : A.s : B \leftharpoonup A}\ \textsc{S\_implR}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : X}{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}t : \mathsf{F}X}\ \textsc{S\_Fr}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma, y : \mathsf{F}X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, y : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_Fl}$$

$$\frac{\Gamma, x : A, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : B}{\Gamma, y : \mathsf{G}A, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, y : \mathsf{G}A\, \mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x\, \mathsf{in}\, s : B} \quad \textsc{S\_Gl}$$

$\boxed{\Phi \vdash_{C} X}$

$$\frac{}{X \vdash_{C} X} \quad \textsc{Tty\_ax}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} X}{\mathsf{UnitT}, \Phi \vdash_{C} X} \quad \textsc{Tty\_unitL}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash_{C} \mathsf{UnitT}} \quad \textsc{Tty\_unitR}$$

$$\frac{\Phi, X, Y, \Psi \vdash_{C} Z}{\Phi, Y, X, \Psi \vdash_{C} Z} \quad \textsc{Tty\_beta}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} X \quad \Psi_1, X, \Psi_2 \vdash_{C} Y}{\Psi_1, \Phi, \Psi_2 \vdash_{C} Y} \quad \textsc{Tty\_cut}$$

$$\frac{\Phi, X, Y, \Psi \vdash_{C} Z}{\Phi, X \otimes Y, \Psi \vdash_{C} Z} \quad \textsc{Tty\_tenL}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} X \quad \Psi \vdash_{C} Y}{\Phi, \Psi \vdash_{C} X \otimes Y} \quad \textsc{Tty\_tenR}$$

$$\frac{\Phi, X \vdash_{C} Y}{\Phi \vdash_{C} X \multimap Y} \quad \textsc{Tty\_impR}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} X \quad \Psi_1, Y, \Psi_2 \vdash_{C} Z}{\Psi_1, X \multimap Y, \Phi, \Psi_2 \vdash_{C} Z} \quad \textsc{Tty\_impL}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} A}{\Phi \vdash_{C} \mathsf{G}A} \quad \textsc{Tty\_GR}$$

$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A}$

$$\frac{}{A \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \textsc{Sty\_ax}$$

$$\frac{\Delta \vdash_{\mathcal{L}} A}{\mathsf{UnitT}, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \textsc{Sty\_unitL1}$$

$$\frac{\Delta \vdash_{\mathcal{L}} A}{\mathsf{UnitS}, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \textsc{Sty\_unitL2}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{UnitS}} \quad \textsc{Sty\_unitR}$$

$$\frac{\Gamma, X, Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A}{\Gamma, Y, X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \textsc{Sty\_beta}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} X \quad \Gamma_1, X, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} A}{\Gamma_1, \Phi, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \textsc{Sty\_cut1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \quad \Delta_1, A, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Delta_1, A, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} B} \quad \textsc{Sty\_cut2}$$

$$\frac{\Gamma, X, Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A}{\Gamma, X \otimes Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \textsc{Sty\_tenL1}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} C}{\Gamma, A \triangleright B, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} C} \quad \textsc{Sty\_tenL2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A \triangleright B} \quad \textsc{Sty\_tenR}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} X \quad \Gamma, Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A}{\Gamma, X \multimap Y, \Phi, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \textsc{Sty\_impL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \quad \Delta, B \vdash_{\mathcal{L}} C}{\Delta, A \rightharpoonup B, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} C} \quad \textsc{Sty\_imprL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \quad B, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} C}{\Gamma, B \leftharpoonup A, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} C} \quad \textsc{Sty\_implL}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \rightharpoonup B} \quad \textsc{Sty\_imprR}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B \leftharpoonup A} \quad \textsc{Sty\_implR}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} X}{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}X} \quad \textsc{Sty\_FR}$$

$$\frac{\Gamma, X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A}{\Gamma, \mathsf{F}X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \textsc{Sty\_FL}$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Gamma, \mathsf{G}A, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} B} \quad \textsc{Sty\_GL}$$