Deriving the cut rules in Elle-ND:

A Term Assignment for Natural Deduction Formulation of Elle

vars, n, a, x, y, z, w, m, o
ivar, i, k, j, l
const, b

$A,\ B,\ C$	::=	
	|	B
	|	UnitS
	|	$A \triangleright B$
	|	$A \rightharpoonup B$
	|	$A \leftharpoondown B$
	|	$\mathsf{F}X$
$X,\ Y,\ Z$	::=	
	|	B
	|	UnitT
	|	$X \otimes Y$
	|	$X \multimap Y$
	|	$\mathsf{G}A$
T	::=	
	|	A
	|	X
p	::=	
	|	$\star$
	|	x
	|	trivT
	|	trivS
	|	$p \otimes p'$
	|	$p \triangleright p'$
	|	$\mathsf{F}\,p$
	|	$\mathsf{G}\,p$
s	::=	
	|	x
	|	b
	|	trivS
	|	$\mathsf{let}\,s_1 : T\,\mathsf{be}\,p\,\mathsf{in}\,s_2$
	|	$\mathsf{let}\,t : T\,\mathsf{be}\,p\,\mathsf{in}\,s$

	$\mid$	$s_1 \triangleright s_2$	
	$\mid$	$\lambda_l x : A.s$	
	$\mid$	$\lambda_r x : A.s$	
	$\mid$	$\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2$	
	$\mid$	$\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2$	
	$\mid$	$\mathsf{derelict}\, t$	
	$\mid$	$\mathsf{ex}\, s_1, s_2\, \mathsf{with}\, x_1, x_2\, \mathsf{in}\, s_3$	
	$\mid$	(s)	S
	$\mid$	$\mathsf{F}t$	
t	$::=$		
	$\mid$	x	
	$\mid$	b	
	$\mid$	trivT	
	$\mid$	$\mathsf{let}\, t_1 : X\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, t_2$	
	$\mid$	$t_1 \otimes t_2$	
	$\mid$	$\lambda x : X.t$	
	$\mid$	$\mathsf{app}\, t_1\, t_2$	
	$\mid$	$\mathsf{ex}\, t_1, t_2\, \mathsf{with}\, x_1, x_2\, \mathsf{in}\, t_3$	
	$\mid$	(t)	S
	$\mid$	$\mathsf{G}s$	
$\Phi,\ \Psi$	$::=$		
	$\mid$	$\cdot$	
	$\mid$	Φ_1, Φ_2	
	$\mid$	$x : X$	
	$\mid$	(Φ)	S
$\Gamma,\ \Delta$	$::=$		
	$\mid$	$\cdot$	
	$\mid$	$x : A$	
	$\mid$	Φ	
	$\mid$	Γ_1, Γ_2	
	$\mid$	(Γ)	S

$\boxed{\Phi \vdash_C t : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash_C x : X}\ \textsc{T\_id}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash_C \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}}\ \textsc{T\_unitI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_C t_1 : \mathsf{UnitT} \quad \Psi \vdash_C t_2 : Y}{\Phi, \Psi \vdash_C \mathsf{let}\, t_1 : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, t_2 : Y}\ \textsc{T\_unitE}$$

$$\frac{\Phi \vdash_C t_1 : X \quad \Psi \vdash_C t_2 : Y}{\Phi, \Psi \vdash_C t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y}\ \textsc{T\_tenI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_C t_1 : X \otimes Y \quad \Psi_1, x : X, y : Y, \Psi_2 \vdash_C t_2 : Z}{\Psi_1, \Phi, \Psi_2 \vdash_C \mathsf{let}\, t_1 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_2 : Z}\ \textsc{T\_tenE}$$

$$\frac{\Phi, x : X \vdash_{\mathcal{C}} t : Y}{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} \lambda x : X.t : X \multimap Y}\ \textsc{T\_impI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t_1 : X \multimap Y \quad \Psi \vdash_{\mathcal{C}} t_2 : X}{\Phi, \Psi \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{app}\, t_1\, t_2 : Y}\ \textsc{T\_impE}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{G}s : \mathsf{G}A}\ \text{T\_GI}$$

$$\frac{\Phi, x : X, y : Y, \Psi \vdash_{\mathcal{C}} t : Z}{\Phi, z : Y, w : X, \Psi \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : Z}\ \textsc{T\_beta}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t_1 : X \quad \Psi_1, x : X, \Psi_2 \vdash_{\mathcal{C}} t_2 : Y}{\Psi_1, \Phi, \Psi_2 \vdash_{\mathcal{C}} [t_1/x]t_2 : Y}\ \textsc{T\_cut}$$

$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s : A}$

$$\frac{}{x : A \vdash_{\mathcal{L}} x : A}\ \textsc{S\_id}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}}\ \textsc{S\_unitI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : \mathsf{UnitT} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Phi, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, t : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_unitE1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : \mathsf{UnitS} \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : A}{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, s_1 : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \textsc{S\_unitE2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : B}{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B}\ \textsc{S\_tenI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : X \otimes Y \quad \Gamma_1, x : X, y : Y, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma_1, \Phi, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, t : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_tenE1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \triangleright B \quad \Delta_1, x : A, y : B, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : C}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, s_1 : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_2 : C}\ \textsc{S\_tenE2}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{L}} s : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_r x : A.s : A \rightharpoonup B}\ \textsc{S\_imprI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \rightharpoonup B \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : A}{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 : B}\ \textsc{S\_imprE}$$

$$\frac{x : A, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_l x : A.s : B \leftharpoonup A}\ \textsc{S\_implI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : B \leftharpoonup A \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : A}{\Delta, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 : B}\ \textsc{S\_implE}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : X}{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}t : \mathsf{F}X}\ \text{S\_FI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} y : \mathsf{F}X \quad \Delta_1, x : X, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, \mathsf{F}x : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_FE}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : \mathsf{G}A}{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{derelict}\, t : A}\ \text{S\_GE}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma, z : Y, w : X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : A} \quad \text{S\_BETA}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{C} t : X \quad \Gamma_1, x : X, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma_1, \Phi, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} [t/x]s : A} \quad \text{S\_CUT1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \quad \Delta_1, x : A, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : B}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} [s_1/x]s_2 : B} \quad \text{S\_CUT2}$$

$\boxed{t_1 \rightsquigarrow t_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, t \rightsquigarrow t} \quad \text{TRED\_LETU}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_3 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]t_3} \quad \text{TRED\_LETT}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}\, (\lambda x : X.t_1)\, t_2 \rightsquigarrow [t_2/x]t_1} \quad \text{TRED\_LAM}$$

$$\frac{t_1 \rightsquigarrow t_1'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1'\, t_2} \quad \text{TRED\_APP1}$$

$$\frac{t_2 \rightsquigarrow t_2'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1\, t_2'} \quad \text{TRED\_APP2}$$

$\boxed{s_1 \rightsquigarrow s_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow s} \quad \text{SRED\_LETU1}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow s} \quad \text{SRED\_LETU2}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_3 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]s_3} \quad \text{SRED\_LETT1}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_3 \rightsquigarrow [s_1/x][s_2/y]s_3} \quad \text{SRED\_LETT2}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{F}x : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow [y/x]s} \quad \text{SRED\_LETF}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_l\, (\lambda_l x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1} \quad \text{SRED\_LAML}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_r\, (\lambda_r x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1} \quad \text{SRED\_LAMR}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1'\, s_2} \quad \text{SRED\_APPL1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2'} \quad \text{SRED\_APPL2}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1'\, s_2} \quad \text{SRED\_APPR1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2'} \quad \text{SRED\_APPR2}$$

$$\frac{}{\mathsf{derelict}\, \mathsf{G}s \rightsquigarrow s} \quad \text{SRED\_DERELICT}$$