Deriving exchange in Elle comonadicly:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B \vdash y_0 : \mathsf{G}B$}
\RightLabel{F\textsc{r}}
\UnaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B; \cdot \vdash \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A \vdash x_0 : \mathsf{G}A$}
\RightLabel{F\textsc{r}}
\UnaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{ten}R}
\BinaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B, x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{beta}}
\UnaryInfC{$x_1 : \mathsf{G}A, y_1 : \mathsf{G}B; \cdot \vdash \mathsf{ex}\ y_1, x_1\ \mathsf{with}\ y_0, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0) : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{F\textsc{l}}
\UnaryInfC{$x_1 : \mathsf{G}A; y_2 : \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\ y_2 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{ex}\ y_1, x_1\ \mathsf{with}\ y_0, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0)) : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{F\textsc{l}}
\UnaryInfC{$\cdot; x_2 : \mathsf{FG}A, y_2 : \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\ x_2 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ y_2 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{ex}\ y_1, x_1\ \mathsf{with}\ y_0, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0))) : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{ten}L}
\UnaryInfC{$\cdot; z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\ z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ x_2 \otimes y_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_2 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ y_2 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{ex}\ y_1, x_1\ \mathsf{with}\ y_0, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0)))) : (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)$}
\RightLabel{\textsc{imp}R}
\UnaryInfC{$\cdot; \cdot \vdash \lambda_l z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B.\mathsf{let}\ z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ x_2 \otimes y_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_2 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ y_2 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{ex}\ y_1, x_1\ \mathsf{with}\ y_0, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0)))) : (\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \rightharpoonup (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)$}
\end{prooftree}
$$

Deriving right contraction in Elle comonadicly:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$x_1 : \mathsf{G}A \vdash x_1 : \mathsf{G}A$}
\RightLabel{F\textsc{r}}
\UnaryInfC{$x_1 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}x_1 : \mathsf{FG}A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B \vdash y_0 : \mathsf{G}B$}
\RightLabel{F\textsc{r}}
\UnaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B; \cdot \vdash \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A \vdash x_0 : \mathsf{G}A$}
\RightLabel{F\textsc{r}}
\UnaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{ten}R}
\BinaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B, x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{ten}R}
\BinaryInfC{$x_1 : \mathsf{G}A, y_0 : \mathsf{G}B, x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}x_1 \otimes (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0) : \mathsf{FG}A \otimes (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)$}
\RightLabel{\textsc{contr}R}
\UnaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B, x_2 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{contrR}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_1, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}x_1 \otimes (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0)) : \mathsf{FG}A \otimes (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)$}
\RightLabel{F\textsc{l}}
\UnaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B; x_3 : \mathsf{FG}A \vdash \mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{contrR}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_1, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}x_1 \otimes (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0))) : \mathsf{FG}A \otimes (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)$}
\RightLabel{F\textsc{l}}
\UnaryInfC{$\cdot; y_1 : \mathsf{FG}B, x_3 : \mathsf{FG}A \vdash \mathsf{let}\ y_1 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{contrR}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_1, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}x_1 \otimes (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0)))) : \mathsf{FG}A \otimes (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)$}
\RightLabel{\textsc{ten}L}
\UnaryInfC{$\cdot; z : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A \vdash \mathsf{let}\ z : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ y_1 \otimes x_3\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ y_1 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{contrR}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_1, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}x_1 \otimes (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0))))) : \mathsf{FG}A \otimes (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)$}
\RightLabel{\textsc{imp}R}
\UnaryInfC{$\cdot; \cdot \vdash \lambda_l z : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A.\mathsf{let}\ z : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ y_1 \otimes x_3\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ y_1 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{contrR}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_1, x_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}x_1 \otimes (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0))))) : (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A) \rightharpoonup (\mathsf{FG}A \otimes (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A))$}
\end{prooftree}
$$

Deriving left contraction in Elle comonadicly:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A \vdash x_0 : \mathsf{G}A$}
\RightLabel{F\textsc{r}}
\UnaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B \vdash y_0 : \mathsf{G}B$}
\RightLabel{F\textsc{r}}
\UnaryInfC{$y_0 : \mathsf{G}B; \cdot \vdash \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}B$}
\RightLabel{\textsc{ten}R}
\BinaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A, y_0 : \mathsf{G}B; \cdot \vdash \mathsf{F}x_0 \otimes \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$x_1 : \mathsf{G}A \vdash x_1 : \mathsf{G}A$}
\RightLabel{F\textsc{r}}
\UnaryInfC{$x_1 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}x_1 : \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{ten}R}
\BinaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A, y_0 : \mathsf{G}B, x_1 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash (\mathsf{F}x_0 \otimes \mathsf{F}y_0) \otimes \mathsf{F}x_1 : (\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{contr}R}
\UnaryInfC{$x_2 : \mathsf{G}A, y_0 : \mathsf{G}B; \cdot \vdash \mathsf{contrL}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_0, x_1\ \mathsf{in}\ ((\mathsf{F}x_0 \otimes \mathsf{F}y_0) \otimes \mathsf{F}x_1) : (\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{F\textsc{l}}
\UnaryInfC{$x_2 : \mathsf{G}A; y_1 : \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\ y_1 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{contrL}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_0, x_1\ \mathsf{in}\ ((\mathsf{F}x_0 \otimes \mathsf{F}y_0) \otimes \mathsf{F}x_1)) : (\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{F\textsc{l}}
\UnaryInfC{$\cdot; x_3 : \mathsf{FG}A, y_1 : \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ y_1 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{contrL}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_0, x_1\ \mathsf{in}\ ((\mathsf{F}x_0 \otimes \mathsf{F}y_0) \otimes \mathsf{F}x_1))) : (\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{ten}L}
\UnaryInfC{$\cdot; z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\ z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ x_3 \otimes y_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ y_1 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{contrL}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_0, x_1\ \mathsf{in}\ ((\mathsf{F}x_0 \otimes \mathsf{F}y_0) \otimes \mathsf{F}x_1)))) : (\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \otimes \mathsf{FG}A$}
\RightLabel{\textsc{imp}R}
\UnaryInfC{$\cdot; \cdot \vdash \lambda_l z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B.\mathsf{let}\ z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ x_3 \otimes y_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_3\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ y_1 : \mathsf{FG}B\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,y_0\ \mathsf{in}\ (\mathsf{contrL}\ x_2\ \mathsf{as}\ x_0, x_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{F}x_0 \otimes (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_1))))) : (\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \rightharpoonup ((\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \otimes \mathsf{FG}A)$}
\end{prooftree}
$$

Deriving weakening in Elle comonadicly:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{unit}R}
\UnaryInfC{$\cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}$}
\RightLabel{\textsc{weak}}
\UnaryInfC{$x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{weak}\ x_0\ \mathsf{in}\ \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}$}
\RightLabel{F\textsc{l}}
\UnaryInfC{$\cdot; x_1 : \mathsf{FG}A \vdash \mathsf{let}\ x_1 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_0\ \mathsf{in}\ \mathsf{weak}\ x_0\ \mathsf{in}\ \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}$}
\RightLabel{\textsc{imp}R}
\UnaryInfC{$\cdot; \cdot \vdash \lambda_l x_1 : \mathsf{FG}A.\mathsf{let}\ x_1 : \mathsf{FG}A\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_0\ \mathsf{in}\ \mathsf{weak}\ x_0\ \mathsf{in}\ \mathsf{triv} : (\mathsf{FG}A) \rightharpoonup (\mathsf{Unit})$}
\end{prooftree}
$$

GF is a monad:

- Deriving η:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{\textsc{ax}}
\UnaryInfC{$\cdot; x_0 : \mathsf{F}X \vdash x_0 : \mathsf{F}X$}
\RightLabel{G\textsc{l}}
\UnaryInfC{$x_1 : \mathsf{GF}X; \cdot \vdash \mathsf{let}\ x_1 : \mathsf{GF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{G}\,x_0\ \mathsf{in}\ x_0 : \mathsf{F}X$}
\RightLabel{F\textsc{l}}
\UnaryInfC{$\cdot; x_2 : \mathsf{FGF}X \vdash \mathsf{let}\ x_2 : \mathsf{FGF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_1 : \mathsf{GF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{G}\,x_0\ \mathsf{in}\ x_0) : \mathsf{F}X$}
\RightLabel{G\textsc{l}}
\UnaryInfC{$x_3 : \mathsf{GFGF}X; \cdot \vdash \mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{GFGF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{G}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_2 : \mathsf{FGF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_1 : \mathsf{GF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{G}\,x_0\ \mathsf{in}\ x_0)) : \mathsf{F}X$}
\RightLabel{G\textsc{r}}
\UnaryInfC{$x_3 : \mathsf{GFGF}X \vdash \mathsf{G}(\mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{GFGF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{G}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_2 : \mathsf{FGF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_1 : \mathsf{GF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{G}\,x_0\ \mathsf{in}\ x_0))) : \mathsf{GF}X$}
\RightLabel{\textsc{imp}R}
\UnaryInfC{$\cdot \vdash \lambda_l x_3 : \mathsf{GFGF}X.\mathsf{G}(\mathsf{let}\ x_3 : \mathsf{GFGF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{G}\,x_2\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_2 : \mathsf{FGF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{F}\,x_1\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x_1 : \mathsf{GF}X\ \mathsf{be}\ \mathsf{G}\,x_0\ \mathsf{in}\ x_0))) : (\mathsf{GFGF}X) \rightharpoonup (\mathsf{GF}X)$}
\end{prooftree}
$$

- Deriving μ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : X \vdash x : X}\;\textsc{ax}}{x : X; \cdot \vdash \mathsf{F}x : \mathsf{F}X}\;\textsc{Fr}}{x : X \vdash \mathsf{GF}x : \mathsf{GF}X}\;\textsc{Gr}}{\cdot \vdash \lambda_l x : X.\mathsf{GF}x : (X) \rightharpoonup (\mathsf{GF}X)}\;\textsc{impR}$$

The monad GF is strong:

- Deriving the tensorial strength τ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_0 : X \vdash x_0 : X}\;\textsc{ax} \quad \dfrac{}{y_0 : Y \vdash y_0 : Y}\;\textsc{ax}}{x_0 : X, y_0 : Y \vdash x_0 \otimes y_0 : X \otimes Y}\;\textsc{tenR}}{x_0 : X, y_0 : Y; \cdot \vdash \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0) : \mathsf{F}(X \otimes Y)}\;\textsc{Fr}}{x_0 : X; y_1 : \mathsf{F}Y \vdash \mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0) : \mathsf{F}(X \otimes Y)}\;\textsc{Fl}}{y_2 : \mathsf{GF}Y, x_0 : X; \cdot \vdash \mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0)) : \mathsf{F}(X \otimes Y)}\;\textsc{Gl}}{y_2 : \mathsf{GF}Y, x_0 : X \vdash \mathsf{G}(\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0))) : \mathsf{GF}(X \otimes Y)}\;\textsc{Gr}}{x_1 : X, y_3 : \mathsf{GF}Y \vdash \mathsf{ex}\, y_3, x_1 \,\mathsf{with}\, y_2, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{G}(\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0)))) : \mathsf{GF}(X \otimes Y)}\;\textsc{beta}}{z : X \otimes \mathsf{GF}Y \vdash \mathsf{let}\, z : X \otimes \mathsf{GF}Y \,\mathsf{be}\, x_1 \otimes y_3 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_3, x_1 \,\mathsf{with}\, y_2, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{G}(\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0))))) : \mathsf{GF}(X \otimes Y)}\;\textsc{tenL}}{\cdot \vdash \lambda_l z : X \otimes \mathsf{GF}Y.\mathsf{let}\, z : X \otimes \mathsf{GF}Y \,\mathsf{be}\, x_1 \otimes y_3 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_3, x_1 \,\mathsf{with}\, y_2, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{G}(\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{GF}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{G}\, y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_1 : \mathsf{F}Y \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}\, y_0 \,\mathsf{in}\, \mathsf{F}(x_0 \otimes y_0))))) : (X \otimes \mathsf{GF}Y) \rightharpoonup (\mathsf{GF}(X \otimes Y))}\;\textsc{impR}$$

A Full Ott Spec

$vars, n, a, x, y, z, w, m, o$
$ivar, i, k, j, l$
$const, b$

$$\begin{array}{lcl}
A, B, C & ::= & \\
 & | & \mathsf{B} \\
 & | & \mathsf{Unit} \\
 & | & A \otimes B \\
 & | & A \rightharpoonup B \\
 & | & A \leftharpoondown B \\
 & | & \mathsf{F}X \\
 & & \\
X, Y, Z & ::= & \\
 & | & \mathsf{B} \\
 & | & \mathsf{Unit} \\
 & | & X \otimes Y \\
 & | & X \rightharpoonup Y \\
 & | & X \leftharpoondown Y \\
 & | & \mathsf{G}A \\
 & & \\
T & ::= & \\
 & | & A \\
 & | & X
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
p & ::= & \\
& | & \star \\
& | & x \\
& | & \mathsf{triv} \\
& | & p \otimes p' \\
& | & \mathsf{F}\, p \\
& | & \mathsf{G}\, p \\
\\
s & ::= & \\
& | & x \\
& | & b \\
& | & \mathsf{triv} \\
& | & \mathsf{let}\, s_1 : T \,\mathsf{be}\, p \,\mathsf{in}\, s_2 \\
& | & s_1 \otimes s_2 \\
& | & \lambda_l x : A.s \\
& | & \lambda_r x : A.s \\
& | & \lambda x : A.s \\
& | & \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \\
& | & \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \\
& | & \mathsf{app}\, s_1\, s_2 \\
& | & \mathsf{ex}\, x_1, x_2 \,\mathsf{with}\, s_1, s_2 \,\mathsf{in}\, s_3 \\
& | & \mathsf{contrR}\, x_1 \,\mathsf{as}\, s_1, s_2 \,\mathsf{in}\, s_3 \\
& | & \mathsf{contrL}\, x_1 \,\mathsf{as}\, s_1, s_2 \,\mathsf{in}\, s_3 \\
& | & \mathsf{weak}\, x \,\mathsf{in}\, s \\
& | & (s) \qquad\qquad\qquad\qquad \mathsf{S} \\
& | & \mathsf{F} t \\
\\
t & ::= & \\
& | & x \\
& | & b \\
& | & \mathsf{triv} \\
& | & \mathsf{let}\, t_1 : X \,\mathsf{be}\, p \,\mathsf{in}\, t_2 \\
& | & t_1 \otimes t_2 \\
& | & \lambda_l x : X.t \\
& | & \lambda_r x : X.t \\
& | & \lambda x : X.t \\
& | & \mathsf{app}_l\, t_1\, t_2 \\
& | & \mathsf{app}_r\, t_1\, t_2 \\
& | & \mathsf{app}\, t_1\, t_2 \\
& | & \mathsf{ex}\, x_1, x_2 \,\mathsf{with}\, t_1, t_2 \,\mathsf{in}\, t_3 \\
& | & \mathsf{contrR}\, x_1 \,\mathsf{as}\, t_1, t_2 \,\mathsf{in}\, t_3 \\
& | & \mathsf{contrL}\, x_1 \,\mathsf{as}\, t_1, t_2 \,\mathsf{in}\, t_3 \\
& | & \mathsf{weak}\, x \,\mathsf{in}\, t
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
 & | & (t) & \mathsf{S} \\
 & | & \mathsf{G}s & \\
 & & & \\
\Gamma,\ \Delta,\ \Phi,\ \Psi & ::= & & \\
 & | & \cdot & \\
 & | & \Gamma_1, \Gamma_2 & \\
 & | & x : A & \\
 & | & (\Gamma) & \mathsf{S} \\
 & | & x : X &
\end{array}
$$

$\boxed{\Gamma \vdash t : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash x : X}\ \textsc{T\_var}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash t : X}{\Gamma, x : \mathsf{Unit}, \Delta \vdash \mathsf{let}\, x : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, t : X}\ \textsc{T\_unitL}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \textsc{T\_unitR}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash t : Z}{\Gamma, z : Y, w : X, \Delta \vdash \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : Z}\ \textsc{T\_beta}$$

$$\frac{\Gamma_1, x : X, \Gamma_2, y : X, \Gamma_3 \vdash t : Y}{\Gamma_1, \Gamma_2, z : X, \Gamma_3 \vdash \mathsf{contrR}\, z\, \mathsf{as}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : Y}\ \textsc{T\_contrR}$$

$$\frac{\Gamma_1, x : X, \Gamma_2, y : X, \Gamma_3 \vdash t : Y}{\Gamma_1, z : X, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \mathsf{contrL}\, z\, \mathsf{as}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : Y}\ \textsc{T\_contrL}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash t : Y \quad x \notin |\Gamma, \Delta|}{\Gamma, x : X, \Delta \vdash \mathsf{weak}\, x\, \mathsf{in}\, t : Y}\ \textsc{T\_weak}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \quad \Delta_1, x : X, \Delta_2 \vdash t_2 : Y}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash [t_1/x]t_2 : Y}\ \textsc{T\_cut}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash t : Z}{\Gamma, z : X \otimes Y, \Delta \vdash \mathsf{let}\, z : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t : Z}\ \textsc{T\_tenL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \quad \Delta \vdash t_2 : Y}{\Gamma, \Delta \vdash t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y}\ \textsc{T\_ten}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \quad \Delta_1, x : Y, \Delta_2 \vdash t_2 : Z}{\Delta_1, \Gamma, y : X \rightharpoonup Y, \Delta_2 \vdash [\mathsf{app}_l\, y\, t_1/x]t_2 : Z}\ \textsc{T\_impL1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \quad \Delta_1, x : Y, \Delta_2 \vdash t_2 : Z}{\Delta_1, y : Y \leftharpoonup X, \Gamma, \Delta_2 \vdash [\mathsf{app}_r\, y\, t_1/x]t_2 : Z}\ \textsc{T\_impL2}$$

$$\frac{\Gamma, x : X \vdash t : Y}{\Gamma \vdash \lambda_l x : X.t : X \rightharpoonup Y}\ \textsc{T\_impRl}$$

$$\frac{x : X, \Gamma \vdash t : Y}{\Gamma \vdash \lambda_r x : X.t : Y \leftharpoonup X}\ \textsc{T\_impRr}$$

$$\frac{\Gamma; \cdot \vdash s : A}{\Gamma \vdash \mathsf{G}s : \mathsf{G}A}\ \textsc{T\_Gr}$$

$\boxed{\Gamma; \Psi \vdash s : A}$

$$\frac{}{\cdot; x : A \vdash x : A}\ \textsc{S\_ax}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta; \Psi \vdash s : A}{\Gamma, x : \mathsf{Unit}, \Delta; \Psi \vdash \mathsf{let}\, x : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_unitL}1$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, \Phi \vdash s : A}{\Gamma; \Psi, x : \mathsf{Unit}, \Phi \vdash \mathsf{let}\, x : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_unitL}2$$

$$\frac{}{\cdot; \cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \textsc{S\_unitR}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta; \Psi \vdash s : A}{\Gamma, z : Y, w : X, \Delta; \Psi \vdash \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_beta}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta; \Psi \vdash s : B \quad x \notin |\Gamma, \Delta, \Psi|}{\Gamma, x : X, \Delta; \Psi \vdash \mathsf{weak}\, x\, \mathsf{in}\, s : B}\ \textsc{S\_weak}$$

$$\frac{\Gamma_1, x : X, \Gamma_2, y : X, \Gamma_3; \Psi \vdash s : B}{\Gamma_1, \Gamma_2, z : X, \Gamma_3; \Psi \vdash \mathsf{contrR}\, z\, \mathsf{as}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : B}\ \textsc{S\_contrR}$$

$$\frac{\Gamma_1, x : X, \Gamma_2, y : X, \Gamma_3; \Psi \vdash s : B}{\Gamma_1, z : X, \Gamma_2, \Gamma_3; \Psi \vdash \mathsf{contrL}\, z\, \mathsf{as}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : B}\ \textsc{S\_contrL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : X \quad \Delta_1, x : X, \Delta_2; \Psi \vdash s : A}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2; \Phi \vdash [t/x]s : A}\ \textsc{S\_cut}1$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash s_1 : A \quad \Delta; \Phi_1, x : A, \Phi_2 \vdash s_2 : B}{\Gamma, \Delta; \Phi_1, \Psi, \Phi_2 \vdash [s_1/x]s_2 : B}\ \textsc{S\_cut}2$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta; \Psi \vdash s : A}{\Gamma, z : X \otimes Y, \Delta; \Psi \vdash \mathsf{let}\, z : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_tenL}1$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, x : A, y : B, \Phi \vdash s : A}{\Gamma; \Psi, z : A \otimes B, \Phi \vdash \mathsf{let}\, z : A \otimes B\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_tenL}2$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash s_1 : A \quad \Delta; \Phi \vdash s_2 : B}{\Gamma, \Delta; \Psi, \Phi \vdash s_1 \otimes s_2 : A \otimes B}\ \textsc{S\_tenR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : X \quad \Delta_1, x : Y, \Delta_2; \Psi \vdash s : A}{\Delta_1, \Gamma, y : X \rightharpoonup Y, \Delta_2; \Psi \vdash [\mathsf{app}_l\, y\, t/x]s : A}\ \textsc{S\_impLl}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : X \quad \Delta_1, x : Y, \Delta_2; \Psi \vdash s : A}{\Delta_1, y : Y \leftharpoonup X, \Gamma, \Delta_2; \Psi \vdash [\mathsf{app}_r\, y\, t/x]s : A}\ \textsc{S\_impL}2$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash s_1 : A \quad \Delta; \Phi_1, x : B, \Phi_2 \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta; \Phi_1, \Psi, y : A \rightharpoonup B, \Phi_2 \vdash [\mathsf{app}_l\, y\, s_1/x]s_2 : A}\ \textsc{S\_impL}3$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash s_1 : A \quad \Delta; \Phi_1, x : B, \Phi_2 \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta; \Phi_1, y : B \leftharpoonup A, \Psi, \Phi_2 \vdash [\mathsf{app}_l\, y\, s_1/x]s_2 : A}\ \textsc{S\_impL}4$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, x : A \vdash s : B}{\Gamma; \Psi \vdash \lambda_l x : A.s : A \rightharpoonup B}\ \textsc{S\_impRl}$$

$$\frac{\Gamma; x : A, \Psi \vdash s : B}{\Gamma; \Psi \vdash \lambda_r x : A.s : B \leftharpoonup A}\ \textsc{S\_impRr}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : X}{\Gamma; \cdot \vdash \mathsf{F}t : \mathsf{F}X}\ \text{S\_F}_{\text{R}}$$

$$\frac{\Gamma, x : X; \Psi \vdash s : A}{\Gamma; z : \mathsf{F}X, \Psi \vdash \mathsf{let}\, z : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_F}_{\text{L}}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, x : A \vdash s : B}{z : \mathsf{G}A, \Gamma; \Psi \vdash \mathsf{let}\, z : \mathsf{G}A\, \mathsf{be}\, \mathsf{G}\, x\, \mathsf{in}\, s : B}\ \text{S\_G}_{\text{L}}$$