A Term Assignment for Natural Deduction Formulation of Elle

$vars$, n, a, x, y, z, w, m, o
$ivar$, i, k, j, l
$const$, b

$A,\ B,\ C$	::=	
	|	B
	|	UnitS
	|	$A \triangleright B$
	|	$A \rightharpoonup B$
	|	$A \leftharpoonup B$
	|	$\mathsf{F}X$
$X,\ Y,\ Z$	::=	
	|	B
	|	UnitT
	|	$X \otimes Y$
	|	$X \multimap Y$
	|	$\mathsf{G}A$
T	::=	
	|	A
	|	X
p	::=	
	|	$\star$
	|	x
	|	trivT
	|	trivS
	|	$p \otimes p'$
	|	$p \triangleright p'$
	|	$\mathsf{F}\, p$
	|	$\mathsf{G}\, p$
s	::=	
	|	x
	|	b
	|	trivS
	|	$\mathsf{let}\, s_1 : T\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, s_2$
	|	$\mathsf{let}\, t : T\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, s$
	|	$s_1 \triangleright s_2$
	|	$\lambda_l x : A.s$
	|	$\lambda_r x : A.s$
	|	$\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2$

	$\mid$	$\mathsf{app}_r\ s_1\ s_2$	
	$\mid$	$\mathsf{derelict}\ t$	
	$\mid$	$\mathsf{ex}\ s_1, s_2\ \mathsf{with}\ x_1, x_2\ \mathsf{in}\ s_3$	
	$\mid$	(s)	S
	$\mid$	$\mathsf{F}t$	
t	$::=$		
	$\mid$	x	
	$\mid$	b	
	$\mid$	trivT	
	$\mid$	$\mathsf{let}\ t_1 : X\ \mathsf{be}\ p\ \mathsf{in}\ t_2$	
	$\mid$	$t_1 \otimes t_2$	
	$\mid$	$\lambda x : X.t$	
	$\mid$	$\mathsf{app}\ t_1\ t_2$	
	$\mid$	$\mathsf{ex}\ t_1, t_2\ \mathsf{with}\ x_1, x_2\ \mathsf{in}\ t_3$	
	$\mid$	(t)	S
	$\mid$	$\mathsf{G}s$	
$\Gamma,\ \Delta,\ \Phi,\ \Psi$	$::=$		
	$\mid$	$\cdot$	
	$\mid$	Γ_1, Γ_2	
	$\mid$	$x : A$	
	$\mid$	(Γ)	S
	$\mid$	$x : X$	

$\boxed{\Gamma \vdash t : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash x : X}\ \text{T\_ID}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}}\ \text{T\_UNITI}$$

$$\frac{\Delta \vdash t_1 : \mathsf{UnitT} \quad \Gamma \vdash t_2 : Y}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{let}\ t_1 : \mathsf{UnitT}\ \mathsf{be}\ \mathsf{trivT}\ \mathsf{in}\ t_2 : Y}\ \text{T\_UNITE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \quad \Delta \vdash t_2 : Y}{\Gamma, \Delta \vdash t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y}\ \text{T\_TENI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \otimes Y \quad \Delta, x : X, y : Y \vdash t_2 : Z}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{let}\ t_1 : X \otimes Y\ \mathsf{be}\ x \otimes y\ \mathsf{in}\ t_2 : Z}\ \text{T\_TENE}$$

$$\frac{\Gamma, x : X \vdash t : Y}{\Gamma \vdash \lambda x : X.t : X \multimap Y}\ \text{T\_IMPI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \multimap Y \quad \Delta \vdash t_2 : X}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{app}\ t_1\ t_2 : Y}\ \text{T\_IMPE}$$

$$\frac{\texttt{<<no parses (char 5): G ;*** . |- s : A >>}}{\Gamma \vdash \mathsf{G}s : \mathsf{G}A}\ \text{T\_GI}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash t : Z}{\Gamma, z : Y, w : X, \Delta \vdash \mathsf{ex}\ w, z\ \mathsf{with}\ x, y\ \mathsf{in}\ t : Z}\ \text{T\_BETA}$$

$\boxed{\Psi \vdash s : A}$

$$\frac{}{x : A \vdash x : A}\ \textsc{S\_id}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}}\ \textsc{S\_unitI}$$

$$\frac{\Psi \vdash s_1 : \mathsf{UnitS} \quad \Phi \vdash s_2 : A}{\Psi, \Phi \vdash \mathsf{let}\, s_1 : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \textsc{S\_unitE1}$$

$$\frac{\Psi \vdash s_1 : \mathsf{UnitS} \quad \Phi \vdash s_2 : A}{\Phi, \Psi \vdash \mathsf{let}\, s_1 : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \textsc{S\_unitE2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathsf{UnitT} \quad \Phi \vdash s : A}{\Gamma, \Phi \vdash \mathsf{let}\, t : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_unitE3}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathsf{UnitT} \quad \Phi \vdash s : A}{\Phi, \Gamma \vdash \mathsf{let}\, t : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_unitE4}$$

$$\frac{\Phi \vdash s_1 : A \quad \Psi \vdash s_2 : B}{\Phi, \Psi \vdash s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B}\ \textsc{S\_tenI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : X \otimes Y \quad \Phi, x : X, y : Y \vdash s : A}{\Phi, \Gamma \vdash \mathsf{let}\, t : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_tenE1}$$

$$\frac{\Psi \vdash s_1 : A \triangleright B \quad \Phi, x : A, y : B \vdash s_2 : C}{\Phi, \Psi \vdash \mathsf{let}\, s_1 : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_2 : C}\ \textsc{S\_tenE2}$$

$$\frac{\Phi, x : A \vdash s : B}{\Phi \vdash \lambda_r x : A.s : A \rightharpoonup B}\ \textsc{S\_imprI}$$

$$\frac{\Phi \vdash s_1 : A \rightharpoonup B \quad \Psi \vdash s_2 : A}{\Phi, \Psi \vdash \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 : B}\ \textsc{S\_imprE}$$

$$\frac{x : A, x : A \vdash s : B}{\Phi \vdash \lambda_l x : A.s : B \leftharpoonup A}\ \textsc{S\_implI}$$

$$\frac{\Phi \vdash s_1 : B \leftharpoonup A \quad \Psi \vdash s_2 : A}{\Phi, \Psi \vdash \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 : B}\ \textsc{S\_implE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : X}{\texttt{<<no parses (char 4): G;***. |- F t : F X >>}}\ \textsc{S\_FI}$$

$$\frac{\Psi \vdash y : \mathsf{F}X \quad \Phi_1, x : X, \Phi_2 \vdash s : A}{\Phi_1, \Psi, \Phi_2 \vdash \mathsf{let}\, \mathsf{F}x : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_FE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathsf{G}A}{\texttt{<<no parses (char 5): G ;*** . |- derelict t : A >>}}\ \textsc{S\_GE}$$

$$\frac{\Phi, x : X, y : Y, \Psi \vdash s : A}{\Phi, z : Y, w : X, \Psi \vdash \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_beta}$$

$\boxed{t_1 \rightsquigarrow t_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, t \rightsquigarrow t}\ \textsc{Tred\_letU}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_3 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]t_3}\ \textsc{Tred\_letT}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}\, (\lambda x : X.t_1)\, t_2 \rightsquigarrow [t_2/x]t_1}\ \textsc{Tred\_lam}$$

$$\frac{t_1 \rightsquigarrow t_1'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1'\, t_2} \quad \textsc{Tred\_app1}$$

$$\frac{t_2 \rightsquigarrow t_2'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1\, t_2'} \quad \textsc{Tred\_app2}$$

$\boxed{s_1 \rightsquigarrow s_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow s} \quad \textsc{Sred\_letU1}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow s} \quad \textsc{Sred\_letU2}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_3 \rightsquigarrow [s_1/x][s_2/y]s_3} \quad \textsc{Sred\_letT}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{F}t : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow [t/x]s} \quad \textsc{Sred\_letF}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_l\, (\lambda_l x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1} \quad \textsc{Sred\_lamL}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_r\, (\lambda_r x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1} \quad \textsc{Sred\_lamR}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1'\, s_2} \quad \textsc{Sred\_appl1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2'} \quad \textsc{Sred\_appl2}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1'\, s_2} \quad \textsc{Sred\_appr1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2'} \quad \textsc{Sred\_appr2}$$

$$\frac{}{\mathsf{derelict}\, \mathsf{G}s \rightsquigarrow s} \quad \textsc{Sred\_derelict}$$