A Term Assignment for Natural Deduction Formulation of Elle

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{vars},\ n,\ a,\ x,\ y,\ z,\ w,\ m,\ o & & \\
\mathit{ivar},\ i,\ k,\ j,\ l & & \\
\mathit{const},\ b & & \\
A,\ B,\ C & ::= & \\
& | & \mathsf{B} \\
& | & \mathsf{Unit} \\
& | & A \otimes B \\
& | & A \rightharpoonup B \\
& | & A \leftharpoonup B \\
& | & \mathsf{F}X \\
\\
X,\ Y,\ Z & ::= & \\
& | & \mathsf{B} \\
& | & \mathsf{Unit} \\
& | & X \otimes Y \\
& | & X \multimap Y \\
& | & \mathsf{G}A \\
\\
T & ::= & \\
& | & A \\
& | & X \\
\\
p & ::= & \\
& | & \star \\
& | & x \\
& | & \mathsf{triv} \\
& | & p \otimes p' \\
& | & \mathsf{F}\,p \\
& | & \mathsf{G}\,p \\
\\
s & ::= & \\
& | & x \\
& | & b \\
& | & \mathsf{triv} \\
& | & \mathsf{let}\,s_1 : T\,\mathsf{be}\,p\,\mathsf{in}\,s_2 \\
& | & s_1 \otimes s_2 \\
& | & \lambda_l x : A.s \\
& | & \lambda_r x : A.s \\
& | & \lambda x : A.s \\
& | & (\lambda_l x : A.s_1)\, s_2 \\
& | & (\lambda_r x : A.s_1)\, s_2 \\
& | & (\lambda x : A.s_1)\, s_2
\end{array}
$$

	$\mid$	$\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2$	
	$\mid$	$\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2$	
	$\mid$	$\mathsf{app}\, s_1\, s_2$	
	$\mid$	$\mathsf{ex}\, x_1, x_2\, \mathsf{with}\, s_1, s_2\, \mathsf{in}\, s_3$	
	$\mid$	$\mathsf{contrR}\, x_1\, \mathsf{as}\, s_1, s_2\, \mathsf{in}\, s_3$	
	$\mid$	$\mathsf{contrL}\, x_1\, \mathsf{as}\, s_1, s_2\, \mathsf{in}\, s_3$	
	$\mid$	$\mathsf{weak}\, x\, \mathsf{in}\, s$	
	$\mid$	$\mathsf{derelict}\, t$	
	$\mid$	(s)	S
	$\mid$	$\mathsf{F}t$	
t	$::=$		
	$\mid$	x	
	$\mid$	b	
	$\mid$	triv	
	$\mid$	$\mathsf{let}\, t_1 : X\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, t_2$	
	$\mid$	$t_1 \otimes t_2$	
	$\mid$	$\lambda x : X.t$	
	$\mid$	$\mathsf{app}\, t_1\, t_2$	
	$\mid$	$(\lambda x : X.t_1)\, t_2$	
	$\mid$	$\mathsf{ex}\, x_1, x_2\, \mathsf{with}\, t_1, t_2\, \mathsf{in}\, t_3$	
	$\mid$	$\mathsf{contrR}\, x_1\, \mathsf{as}\, t_1, t_2\, \mathsf{in}\, t_3$	
	$\mid$	$\mathsf{contrL}\, x_1\, \mathsf{as}\, t_1, t_2\, \mathsf{in}\, t_3$	
	$\mid$	$\mathsf{weak}\, x\, \mathsf{in}\, t$	
	$\mid$	(t)	S
	$\mid$	$\mathsf{G}s$	
$\Gamma,\ \Delta,\ \Phi,\ \Psi$	$::=$		
	$\mid$	$\cdot$	
	$\mid$	Γ_1, Γ_2	
	$\mid$	$x : A$	
	$\mid$	(Γ)	S
	$\mid$	$x : X$	

$\boxed{\Gamma \vdash t : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash x : X}\ \textsc{T\_identity}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \textsc{T\_unitI}$$

$$\frac{\Delta \vdash t_1 : \mathsf{Unit} \quad \Gamma \vdash t_2 : Y}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{let}\, t_1 : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, t : Y}\ \textsc{T\_unitE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \quad \Delta \vdash t_2 : Y}{\Gamma, \Delta \vdash t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y}\ \textsc{T\_tenI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \otimes Y \quad \Delta, x : X, y : Y \vdash t_2 : Z}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{let}\, t_1 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_2 : Z}\ \textsc{T\_tenE}$$

$$\frac{\Gamma, x : X \vdash t : Y}{\Gamma \vdash \lambda x : X.t : X \multimap Y}\ \textsc{T\_impI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \multimap Y \quad \Delta \vdash t_2 : X}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{app}\, t_1\, t_2 : Y}\ \text{T\_IMPE}$$

$$\frac{\Gamma; \cdot \vdash s : A}{\Gamma \vdash \mathsf{G}s : \mathsf{G}A}\ \text{T\_GI}$$

$\boxed{\Gamma; \Psi \vdash s : A}$

$$\frac{}{\cdot; x : A \vdash x : A}\ \text{S\_IDENTITY}$$

$$\frac{}{\cdot; \cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \text{S\_UNITI}$$

$$\frac{\Delta; \Phi \vdash s_1 : \mathsf{Unit} \quad \Gamma; \Psi \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta; \Psi, \Phi \vdash \mathsf{let}\, s_1 : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \text{S\_UNITE}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash s_1 : A \quad \Delta; \Phi \vdash s_2 : B}{\Gamma, \Delta; \Psi, \Phi \vdash s_1 \otimes s_2 : A \otimes B}\ \text{S\_TENI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : X \otimes Y \quad \Delta, x : X, y : Y; \Psi \vdash s : A}{\Delta, \Gamma; \Psi \vdash \mathsf{let}\, z : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_TENE1}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash z : A \otimes B \quad \Delta; \Phi, x : A, y : B \vdash s : C}{\Gamma, \Delta; \Phi, \Psi \vdash \mathsf{let}\, z : A \otimes B\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : C}\ \text{S\_TENE2}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, x : A \vdash s : B}{\Gamma; \Psi \vdash \lambda_l x : A.s : A \rightharpoonup B}\ \text{S\_IMPLI}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash s_1 : A \rightharpoonup B \quad \Delta; \Phi \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta; \Psi, \Phi \vdash \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 : B}\ \text{S\_IMPLE}$$

$$\frac{\Gamma; x : A, \Psi \vdash s : B}{\Gamma; \Psi \vdash \lambda_r x : A.s : B \leftharpoondown A}\ \text{S\_IMPRI}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash s_1 : B \leftharpoondown A \quad \Delta; \Phi \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta; \Psi, \Phi \vdash \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 : B}\ \text{S\_IMPRE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : X}{\Gamma; \cdot \vdash \mathsf{F}t : \mathsf{F}X}\ \text{S\_FI}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash y : \mathsf{F}X \quad \Gamma, x : X; \Phi \vdash s_2 : A}{\Gamma; \Psi, \Phi \vdash \mathsf{let}\, \mathsf{F}x : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, y\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \text{S\_FE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathsf{G}A}{\Gamma; \cdot \vdash \mathsf{derelict}\, t : A}\ \text{S\_GE}$$

$\boxed{t_1 \rightsquigarrow t_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, t \rightsquigarrow t}\ \text{TRED\_LETU}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_3 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]t_3}\ \text{TRED\_LETT}$$

$$\frac{}{(\lambda x : X.t_1)\, t_2 \rightsquigarrow [t_2/x]t_1}\ \text{TRED\_LAM}$$

$$\frac{t_1 \rightsquigarrow t_1'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1'\, t_2}\ \text{TRED\_APP1}$$

$$\frac{t_2 \rightsquigarrow t_2'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1\, t_2'} \quad \textsc{Tred\_app2}$$

$\boxed{s_1 \rightsquigarrow s_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let\, triv : Unit\, be\, triv\, in}\, s \rightsquigarrow s} \quad \textsc{Sred\_letU}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, s_1 \otimes s_2 : A \otimes B\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s_3 \rightsquigarrow [s_1/x][s_2/y]s_3} \quad \textsc{Sred\_letT}$$

$$\frac{}{\mathsf{let\, F}t : \mathsf{F}X\, \mathsf{be\, F}\, x\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow [t/x]s} \quad \textsc{Sred\_letF}$$

$$\frac{}{(\lambda_l x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1} \quad \textsc{Sred\_lamL}$$

$$\frac{}{(\lambda_r x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1} \quad \textsc{Sred\_lamR}$$

$$\frac{}{(\lambda x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1} \quad \textsc{Sred\_lam}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1'\, s_2} \quad \textsc{Sred\_appl1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2'} \quad \textsc{Sred\_appl2}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1'\, s_2} \quad \textsc{Sred\_appr1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2'} \quad \textsc{Sred\_appr2}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, s_1'\, s_2} \quad \textsc{Sred\_app1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, s_1\, s_2'} \quad \textsc{Sred\_app2}$$

$$\frac{}{\mathsf{derelict\, G}s \rightsquigarrow s} \quad \textsc{Sred\_derelict}$$