A Term Assignment for Natural Deduction Formulation of Elle

vars, n, a, x, y, z, w, m, o		
ivar, i, k, j, l		
const, b		
$A,\ B,\ C$	$::=$	
	$\vert$	B
	$\vert$	Unit
	$\vert$	$A \triangleright B$
	$\vert$	$A \rightharpoonup B$
	$\vert$	$A \leftharpoonup B$
	$\vert$	$\mathsf{F}X$
$X,\ Y,\ Z$	$::=$	
	$\vert$	B
	$\vert$	Unit
	$\vert$	$X \otimes Y$
	$\vert$	$X \multimap Y$
	$\vert$	$\mathsf{G}A$
T	$::=$	
	$\vert$	A
	$\vert$	X
p	$::=$	
	$\vert$	$\star$
	$\vert$	x
	$\vert$	triv
	$\vert$	$p \otimes p'$
	$\vert$	$p \triangleright p'$
	$\vert$	$\mathsf{F}\, p$
	$\vert$	$\mathsf{G}\, p$
s	$::=$	
	$\vert$	x
	$\vert$	b
	$\vert$	triv
	$\vert$	$\mathsf{let}\, s_1 : T\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, s_2$
	$\vert$	$s_1 \triangleright s_2$
	$\vert$	$\lambda_l x : A.s$
	$\vert$	$\lambda_r x : A.s$
	$\vert$	$\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2$
	$\vert$	$\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2$
	$\vert$	$\mathsf{derelict}\, t$

	$\mid$	(s)	S
	$\mid$	$\mathsf{F}t$	
t	::=		
	$\mid$	x	
	$\mid$	b	
	$\mid$	triv	
	$\mid$	$\mathsf{let}\, t_1 : X\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, t_2$	
	$\mid$	$t_1 \otimes t_2$	
	$\mid$	$\lambda x : X.t$	
	$\mid$	$\mathsf{app}\, t_1\, t_2$	
	$\mid$	(t)	S
	$\mid$	$\mathsf{G}s$	
$\Gamma,\ \Delta,\ \Phi,\ \Psi$	::=		
	$\mid$	$\cdot$	
	$\mid$	Γ_1, Γ_2	
	$\mid$	$x : A$	
	$\mid$	(Γ)	S
	$\mid$	$x : X$	

$\boxed{\Gamma \vdash t : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash x : X}\ \text{T\_IDENTITY}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \text{T\_UNITI}$$

$$\frac{\Delta \vdash t_1 : \mathsf{Unit} \quad \Gamma \vdash t_2 : Y}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{let}\, t_1 : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, t_2 : Y}\ \text{T\_UNITE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \quad \Delta \vdash t_2 : Y}{\Gamma, \Delta \vdash t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y}\ \text{T\_TENI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \otimes Y \quad \Delta, x : X, y : Y \vdash t_2 : Z}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{let}\, t_1 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_2 : Z}\ \text{T\_TENE}$$

$$\frac{\Gamma, x : X \vdash t : Y}{\Gamma \vdash \lambda x : X.t : X \multimap Y}\ \text{T\_IMPI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : X \multimap Y \quad \Delta \vdash t_2 : X}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{app}\, t_1\, t_2 : Y}\ \text{T\_IMPE}$$

$$\frac{\Gamma; \cdot \vdash s : A}{\Gamma \vdash \mathsf{G}s : \mathsf{G}A}\ \text{T\_GI}$$

$\boxed{\Gamma; \Psi \vdash s : A}$

$$\frac{}{\cdot; x : A \vdash x : A}\ \text{S\_IDENTITY}$$

$$\frac{}{\cdot; \cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \text{S\_UNITI}$$

$$\frac{\Delta; \Phi \vdash s_1 : \mathsf{Unit} \quad \Gamma; \Psi \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta; \Psi, \Phi \vdash \mathsf{let}\, s_1 : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \text{S\_UNITE}$$

$$\frac{\Gamma;\Psi \vdash s_1 : A \quad \Delta;\Phi \vdash s_2 : B}{\Gamma,\Delta;\Psi,\Phi \vdash s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B}\ \text{S\_TENI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : X \otimes Y \quad \Delta, x : X, y : Y;\Psi \vdash s : A}{\Delta,\Gamma;\Psi \vdash \mathsf{let}\, z : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_TENE1}$$

$$\frac{\Gamma;\Psi \vdash z : A \triangleright B \quad \Delta;\Phi, x : A, y : B \vdash s : C}{\Gamma,\Delta;\Phi,\Psi \vdash \mathsf{let}\, z : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s : C}\ \text{S\_TENE2}$$

$$\frac{\Gamma;\Psi, x : A \vdash s : B}{\Gamma;\Psi \vdash \lambda_r x : A.s : A \rightharpoonup B}\ \text{S\_IMPLI}$$

$$\frac{\Gamma;\Psi \vdash s_1 : A \rightharpoonup B \quad \Delta;\Phi \vdash s_2 : A}{\Gamma,\Delta;\Psi,\Phi \vdash \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 : B}\ \text{S\_IMPLE}$$

$$\frac{\Gamma; x : A, \Psi \vdash s : B}{\Gamma;\Psi \vdash \lambda_l x : A.s : B \leftharpoonup A}\ \text{S\_IMPRI}$$

$$\frac{\Gamma;\Psi \vdash s_1 : B \leftharpoonup A \quad \Delta;\Phi \vdash s_2 : A}{\Gamma,\Delta;\Psi,\Phi \vdash \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 : B}\ \text{S\_IMPRE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : X}{\Gamma; \cdot \vdash \mathsf{F}t : \mathsf{F}X}\ \text{S\_FI}$$

$$\frac{\Gamma;\Psi \vdash y : \mathsf{F}X \quad \Gamma, x : X;\Phi \vdash s_2 : A}{\Gamma;\Psi,\Phi \vdash \mathsf{let}\, \mathsf{F}x : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, y\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \text{S\_FE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathsf{G}A}{\Gamma; \cdot \vdash \mathsf{derelict}\, t : A}\ \text{S\_GE}$$

$\boxed{t_1 \rightsquigarrow t_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, t \rightsquigarrow t}\ \text{TRED\_LETU}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_3 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]t_3}\ \text{TRED\_LETT}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}\, (\lambda x : X.t_1)\, t_2 \rightsquigarrow [t_2/x]t_1}\ \text{TRED\_LAM}$$

$$\frac{t_1 \rightsquigarrow t_1'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1'\, t_2}\ \text{TRED\_APP1}$$

$$\frac{t_2 \rightsquigarrow t_2'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1\, t_2'}\ \text{TRED\_APP2}$$

$\boxed{s_1 \rightsquigarrow s_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow s}\ \text{SRED\_LETU}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_3 \rightsquigarrow [s_1/x][s_2/y]s_3}\ \text{SRED\_LETT}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{F}t : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow [t/x]s}\ \text{SRED\_LETF}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_l\, (\lambda_l x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1}\ \text{SRED\_LAML}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_r\, (\lambda_r x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1}\ \text{SRED\_LAMR}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1'\, s_2}\ \textsc{Sred\_appl1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2'}\ \textsc{Sred\_appl2}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1'\, s_2}\ \textsc{Sred\_appr1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2'}\ \textsc{Sred\_appr2}$$

$$\frac{}{\mathsf{derelict}\,\mathsf{G}s \rightsquigarrow s}\ \textsc{Sred\_derelict}$$