A Term Assignment for Natural Deduction Formulation of Elle

$vars$, n, a, x, y, z, w, m, o
$ivar$, i, k, j, l
$const$, b

A, B, C	::=	
	|	B
	|	UnitS
	|	$A \triangleright B$
	|	$A \rightharpoonup B$
	|	$A \leftharpoonup B$
	|	$\mathsf{F}X$
X, Y, Z	::=	
	|	B
	|	UnitT
	|	$X \otimes Y$
	|	$X \multimap Y$
	|	$\mathsf{G}A$
T	::=	
	|	A
	|	X
p	::=	
	|	$\star$
	|	x
	|	trivT
	|	trivS
	|	$p \otimes p'$
	|	$p \triangleright p'$
	|	$\mathsf{F}\,p$
	|	$\mathsf{G}\,p$
s	::=	
	|	x
	|	b
	|	trivS
	|	$\mathsf{let}\, s_1 : T\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, s_2$
	|	$\mathsf{let}\, t : T\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, s$
	|	$s_1 \triangleright s_2$
	|	$\lambda_l x : A.s$
	|	$\lambda_r x : A.s$
	|	$\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2$

$$
\begin{array}{lll}
 & | & \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \\
 & | & \mathsf{derelict}\, t \\
 & | & \mathsf{ex}\, s_1, s_2\ \mathsf{with}\ x_1, x_2\ \mathsf{in}\ s_3 \\
 & | & (s) \qquad\qquad\qquad\qquad \mathsf{S} \\
 & | & \mathsf{F}t
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
t & ::= & \\
 & | & x \\
 & | & b \\
 & | & \mathsf{trivT} \\
 & | & \mathsf{let}\, t_1 : X\ \mathsf{be}\ p\ \mathsf{in}\ t_2 \\
 & | & t_1 \otimes t_2 \\
 & | & \lambda x : X.t \\
 & | & \mathsf{app}\, t_1\, t_2 \\
 & | & \mathsf{ex}\, t_1, t_2\ \mathsf{with}\ x_1, x_2\ \mathsf{in}\ t_3 \\
 & | & (t) \qquad\qquad\qquad\qquad \mathsf{S} \\
 & | & \mathsf{G}s
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\Phi,\ \Psi & ::= & \\
 & | & \cdot \\
 & | & \Phi_1, \Phi_2 \\
 & | & x : X \\
 & | & (\Phi) \qquad\qquad\qquad\qquad \mathsf{S}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma,\ \Delta & ::= & \\
 & | & \cdot \\
 & | & x : A \\
 & | & \Phi \\
 & | & \Gamma_1, \Gamma_2 \\
 & | & (\Gamma) \qquad\qquad\qquad\qquad \mathsf{S}
\end{array}
$$

$\boxed{\Phi \vdash t : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash x : X}\ \textsc{T\_id}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}}\ \textsc{T\_unitI}$$

$$\frac{\Phi \vdash t_1 : \mathsf{UnitT} \quad \Psi \vdash t_2 : Y}{\Phi, \Psi \vdash \mathsf{let}\, t_1 : \mathsf{UnitT}\ \mathsf{be}\ \mathsf{trivT}\ \mathsf{in}\ t_2 : Y}\ \textsc{T\_unitE}$$

$$\frac{\Phi \vdash t_1 : X \quad \Phi \vdash t_2 : Y}{\Phi, \Psi \vdash t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y}\ \textsc{T\_tenI}$$

$$\frac{\Phi \vdash t_1 : X \otimes Y \quad \Psi_1, x : X, y : Y, \Psi_2 \vdash t_2 : Z}{\Psi_1, \Phi, \Psi_2 \vdash \mathsf{let}\, t_1 : X \otimes Y\ \mathsf{be}\ x \otimes y\ \mathsf{in}\ t_2 : Z}\ \textsc{T\_tenE}$$

$$\frac{\Phi, x : X \vdash t : Y}{\Phi \vdash \lambda x : X.t : X \multimap Y}\ \textsc{T\_impI}$$

$$\frac{\Phi \vdash t_1 : X \multimap Y \quad \Psi \vdash t_2 : X}{\Phi, \Psi \vdash \mathsf{app}\, t_1\, t_2 : Y}\ \textsc{T\_impE}$$

$$\frac{\Phi \vdash s : A}{\Phi \vdash \mathsf{G}s : \mathsf{G}A}\ \text{T\_GI}$$

$\boxed{\Gamma \vdash s : A}$

$$\frac{}{x : A \vdash x : A}\ \text{S\_ID}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}}\ \text{S\_UNITI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : \mathsf{UnitS} \quad \Delta \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{let}\, s_1 : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \text{S\_UNITE1}$$

$$\frac{\Phi \vdash t : \mathsf{UnitT} \quad \Gamma \vdash s : A}{\Phi, \Gamma \vdash \mathsf{let}\, t : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_UNITE2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : A \quad \Delta \vdash s_2 : B}{\Gamma, \Delta \vdash s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B}\ \text{S\_TENI}$$

$$\frac{\Phi \vdash t : X \otimes Y \quad \Gamma_1, x : X, y : Y, \Gamma_2 \vdash s : A}{\Gamma_1, \Phi, \Gamma_2 \vdash \mathsf{let}\, t : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_TENE1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : A \triangleright B \quad \Delta_1, x : A, y : B, \Delta_2 \vdash s_2 : C}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash \mathsf{let}\, s_1 : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_2 : C}\ \text{S\_TENE2}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash s : B}{\Gamma \vdash \lambda_r x : A.s : A \rightharpoonup B}\ \text{S\_IMPRI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : A \rightharpoonup B \quad \Delta \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 : B}\ \text{S\_IMPRE}$$

$$\frac{x : A, \Gamma \vdash s : B}{\Gamma \vdash \lambda_l x : A.s : B \leftharpoonup A}\ \text{S\_IMPLI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : B \leftharpoonup A \quad \Delta \vdash s_2 : A}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 : B}\ \text{S\_IMPLE}$$

$$\frac{\Phi \vdash t : X}{\Phi \vdash \mathsf{F}t : \mathsf{F}X}\ \text{S\_FI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash y : \mathsf{F}X \quad \Delta_1, x : X, \Delta_2 \vdash s : A}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash \mathsf{let}\, \mathsf{F}x : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_FE}$$

$$\frac{\Phi \vdash t : \mathsf{G}A}{\Phi \vdash \mathsf{derelict}\, t : A}\ \text{S\_GE}$$

$\boxed{t_1 \rightsquigarrow t_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, t \rightsquigarrow t}\ \text{TRED\_LETU}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_3 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]t_3}\ \text{TRED\_LETT}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}\, (\lambda x : X.t_1)\, t_2 \rightsquigarrow [t_2/x]t_1}\ \text{TRED\_LAM}$$

$$\frac{t_1 \rightsquigarrow t_1'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1'\, t_2}\ \text{TRED\_APP1}$$

$$\frac{t_2 \rightsquigarrow t_2'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1\, t_2'}\ \text{TRED\_APP2}$$

$\boxed{s_1 \rightsquigarrow s_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let\,trivS} : \mathsf{UnitS\ be\ trivS\ in}\ s \rightsquigarrow s}\ \textsc{Sred\_letU1}$$

$$\frac{}{\mathsf{let\,trivT} : \mathsf{UnitT\ be\ trivT\ in}\ s \rightsquigarrow s}\ \textsc{Sred\_letU2}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\ s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B\ \mathsf{be}\ x \triangleright y\ \mathsf{in}\ s_3 \rightsquigarrow [s_1/x][s_2/y]s_3}\ \textsc{Sred\_letT}$$

$$\frac{}{\mathsf{let\ F}\,t : \mathsf{F}X\ \mathsf{be\ F}\,x\ \mathsf{in}\ s \rightsquigarrow [t/x]s}\ \textsc{Sred\_letF}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_l\,(\lambda_l x : A.s_1)\,s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1}\ \textsc{Sred\_lamL}$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_r\,(\lambda_r x : A.s_1)\,s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1}\ \textsc{Sred\_lamR}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_l\,s_1\,s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\,s_1'\,s_2}\ \textsc{Sred\_appl1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_l\,s_1\,s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\,s_1\,s_2'}\ \textsc{Sred\_appl2}$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_r\,s_1\,s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\,s_1'\,s_2}\ \textsc{Sred\_appr1}$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_r\,s_1\,s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\,s_1\,s_2'}\ \textsc{Sred\_appr2}$$

$$\frac{}{\mathsf{derelict\ G}s \rightsquigarrow s}\ \textsc{Sred\_derelict}$$