Deriving the cut rules in Elle-ND:

A Term Assignment for Natural Deduction Formulation of Elle

vars, n, a, x, y, z, w, m, o		
ivar, i, k, j, l		
const, b		
A, B, C	::=	
	|	B
	|	UnitS
	|	$A \triangleright B$
	|	$A \rightharpoonup B$
	|	$A \leftharpoonup B$
	|	FX
X, Y, Z	::=	
	|	B
	|	UnitT
	|	$X \otimes Y$
	|	$X \multimap Y$
	|	GA
T	::=	
	|	A
	|	X
p	::=	
	|	$\star$
	|	x
	|	trivT
	|	trivS
	|	$p \otimes p'$
	|	$p \triangleright p'$
	|	F p
	|	G p
s	::=	
	|	x
	|	b
	|	trivS
	|	let s_1 : T be p in s_2
	|	let t : T be p in s

	|	$s_1 \triangleright s_2$	
	|	$\lambda_l x : A.s$	
	|	$\lambda_r x : A.s$	
	|	$\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2$	
	|	$\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2$	
	|	$\mathsf{derelict}\, t$	
	|	$\mathsf{ex}\, s_1, s_2\ \mathsf{with}\ x_1, x_2\ \mathsf{in}\ s_3$	
	|	(s)	S
	|	$\mathsf{F}t$	
t	::=		
	|	x	
	|	b	
	|	trivT	
	|	$\mathsf{let}\, t_1 : X\ \mathsf{be}\ p\ \mathsf{in}\ t_2$	
	|	$t_1 \otimes t_2$	
	|	$\lambda x : X.t$	
	|	$\mathsf{app}\, t_1\, t_2$	
	|	$\mathsf{ex}\, t_1, t_2\ \mathsf{with}\ x_1, x_2\ \mathsf{in}\ t_3$	
	|	(t)	S
	|	$\mathsf{G}s$	
$\Phi,\ \Psi$	::=		
	|	$\cdot$	
	|	Φ_1, Φ_2	
	|	$x : X$	
	|	(Φ)	S
$\Gamma,\ \Delta$	::=		
	|	$\cdot$	
	|	$x : A$	
	|	Φ	
	|	Γ_1, Γ_2	
	|	(Γ)	S

$\boxed{\Phi \vdash_C t : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash_C x : X}\ \textsc{T\_id}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash_C \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}}\ \textsc{T\_unitI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_C t_1 : \mathsf{UnitT} \quad \Psi \vdash_C t_2 : Y}{\Phi, \Psi \vdash_C \mathsf{let}\, t_1 : \mathsf{UnitT}\ \mathsf{be}\ \mathsf{trivT}\ \mathsf{in}\ t_2 : Y}\ \textsc{T\_unitE}$$

$$\frac{\Phi \vdash_C t_1 : X \quad \Psi \vdash_C t_2 : Y}{\Phi, \Psi \vdash_C t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y}\ \textsc{T\_tenI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_C t_1 : X \otimes Y \quad \Psi_1, x : X, y : Y, \Psi_2 \vdash_C t_2 : Z}{\Psi_1, \Phi, \Psi_2 \vdash_C \mathsf{let}\, t_1 : X \otimes Y\ \mathsf{be}\ x \otimes y\ \mathsf{in}\ t_2 : Z}\ \textsc{T\_tenE}$$

$$\frac{\Phi, x : X \vdash_{\mathcal{C}} t : Y}{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} \lambda x : X.t : X \multimap Y}\ \text{T\_IMPI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t_1 : X \multimap Y \quad \Psi \vdash_{\mathcal{C}} t_2 : X}{\Phi, \Psi \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{app}\, t_1\, t_2 : Y}\ \text{T\_IMPE}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{G}s : \mathsf{G}A}\ \text{T\_GI}$$

$$\frac{\Phi, x : X, y : Y, \Psi \vdash_{\mathcal{C}} t : Z}{\Phi, z : Y, w : X, \Psi \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : Z}\ \text{T\_BETA}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t_1 : X \quad \Psi_1, x : X, \Psi_2 \vdash_{\mathcal{C}} t_2 : Y}{\Psi_1, \Phi, \Psi_2 \vdash_{\mathcal{C}} [t_1/x]t_2 : Y}\ \text{T\_CUT}$$

$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s : A}$

$$\frac{}{x : A \vdash_{\mathcal{L}} x : A}\ \text{S\_ID}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}}\ \text{S\_UNITI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : \mathsf{UnitT} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Phi, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, t : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_UNITE1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : \mathsf{UnitS} \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : A}{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, s_1 : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s_2 : A}\ \text{S\_UNITE2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : B}{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B}\ \text{S\_TENI}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : X \otimes Y \quad \Gamma_1, x : X, y : Y, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma_1, \Phi, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, t : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_TENE1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \triangleright B \quad \Delta_1, x : A, y : B, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : C}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, s_1 : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_2 : C}\ \text{S\_TENE2}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{L}} s : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_r x : A.s : A \rightharpoonup B}\ \text{S\_IMPRI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \rightharpoonup B \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : A}{\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 : B}\ \text{S\_IMPRE}$$

$$\frac{x : A, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \lambda_l x : A.s : B \leftharpoonup A}\ \text{S\_IMPLI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : B \leftharpoonup A \quad \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : A}{\Delta, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 : B}\ \text{S\_IMPLE}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : X}{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{F}t : \mathsf{F}X}\ \text{S\_FI}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} y : \mathsf{F}X \quad \Delta_1, x : X, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{let}\, \mathsf{F}x : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \text{S\_FE}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : \mathsf{G}A}{\Phi \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{derelict}\, t : A}\ \text{S\_GE}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma, z : Y, w : X, \Delta \vdash_{\mathcal{L}} \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : A}\ \textsc{S\_beta}$$

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathcal{C}} t : X \quad \Gamma_1, x : X, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} s : A}{\Gamma_1, \Phi, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} [t/x]s : A}\ \textsc{S\_cut}1$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} s_1 : A \quad \Delta_1, x : A, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} s_2 : B}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash_{\mathcal{L}} [s_1/x]s_2 : B}\ \textsc{S\_cut}2$$

$\boxed{t_1 \rightsquigarrow t_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, t \rightsquigarrow t}\ \textsc{Tred\_let}U$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t_3 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]t_3}\ \textsc{Tred\_let}T$$

$$\frac{}{\mathsf{app}\, (\lambda x : X.t_1)\, t_2 \rightsquigarrow [t_2/x]t_1}\ \textsc{Tred\_lam}$$

$$\frac{t_1 \rightsquigarrow t_1'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1'\, t_2}\ \textsc{Tred\_app}1$$

$$\frac{t_2 \rightsquigarrow t_2'}{\mathsf{app}\, t_1\, t_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\, t_1\, t_2'}\ \textsc{Tred\_app}2$$

$\boxed{s_1 \rightsquigarrow s_2}$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivS} : \mathsf{UnitS}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivS}\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow s}\ \textsc{Sred\_let}U1$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{trivT} : \mathsf{UnitT}\, \mathsf{be}\, \mathsf{trivT}\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow s}\ \textsc{Sred\_let}U2$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, s_1 \triangleright s_2 : A \triangleright B\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_3 \rightsquigarrow [s_1/x][s_2/y]s_3}\ \textsc{Sred\_let}T1$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, t_1 \otimes t_2 : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \triangleright y\, \mathsf{in}\, s_3 \rightsquigarrow [t_1/x][t_2/y]s_3}\ \textsc{Sred\_let}T2$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\, \mathsf{F}t : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}\, x\, \mathsf{in}\, s \rightsquigarrow [t/x]s}\ \textsc{Sred\_let}F$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_l\, (\lambda_l x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1}\ \textsc{Sred\_lam}L$$

$$\frac{}{\mathsf{app}_r\, (\lambda_r x : A.s_1)\, s_2 \rightsquigarrow [s_2/x]s_1}\ \textsc{Sred\_lam}R$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1'\, s_2}\ \textsc{Sred\_appl}1$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2'}\ \textsc{Sred\_appl}2$$

$$\frac{s_1 \rightsquigarrow s_1'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1'\, s_2}\ \textsc{Sred\_appr}1$$

$$\frac{s_2 \rightsquigarrow s_2'}{\mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2'}\ \textsc{Sred\_appr}2$$

$$\frac{}{\mathsf{derelict}\, \mathsf{G}s \rightsquigarrow s}\ \textsc{Sred\_derelict}$$