Deriving exchange in Elle comonadicly:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y_0 : \mathsf{G}B \vdash y_0 : \mathsf{G}B}\,\text{AX}}{y_0 : \mathsf{G}B; \cdot \vdash \mathsf{F}y_0 : \mathsf{FG}B}\,\text{FR} \quad \dfrac{\dfrac{}{x_0 : \mathsf{G}A \vdash x_0 : \mathsf{G}A}\,\text{AX}}{x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}A}\,\text{FR}}{y_0 : \mathsf{G}B, x_0 : \mathsf{G}A; \cdot \vdash \mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0 : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A}\,\text{TENR}}{x_1 : \mathsf{G}A, y_1 : \mathsf{G}B; \cdot \vdash \mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0) : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A}\,\text{BETA}}{x_1 : \mathsf{G}A; y_2 : \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0)) : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A}\,\text{FL}}{\cdot; x_2 : \mathsf{FG}A, y_2 : \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0))) : \mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A}\,\text{FL}}{\cdot; z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B \vdash \mathsf{let}\, z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, x_2 \otimes y_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0)))) : (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)}\,\text{TENL}}{\cdot; \cdot \vdash \lambda_l z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B . \mathsf{let}\, z : \mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, x_2 \otimes y_2 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, x_2 : \mathsf{FG}A \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}x_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{let}\, y_2 : \mathsf{FG}B \,\mathsf{be}\, \mathsf{F}y_1 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{ex}\, y_1, x_1 \,\mathsf{with}\, y_0, x_0 \,\mathsf{in}\, (\mathsf{F}y_0 \otimes \mathsf{F}x_0)))) : (\mathsf{FG}A \otimes \mathsf{FG}B) \rightharpoonup (\mathsf{FG}B \otimes \mathsf{FG}A)}\,\text{IMPR}$$

A Full Ott Spec

vars, *n*, *a*, *x*, *y*, *z*, *w*, *m*, *o*
ivar, *i*, *k*, *j*, *l*
const, *b*

A, B, C ::=
- | B
- | Unit
- | $A \otimes B$
- | $A \rightharpoonup B$
- | $A \leftharpoonup B$
- | FX

X, Y, Z ::=
- | B
- | Unit
- | $X \otimes Y$
- | $X \rightharpoonup Y$
- | $X \leftharpoonup Y$
- | GA

T ::=
- | A
- | X

p ::=
- | $\star$
- | x
- | triv
- | $p \otimes p'$
- | Fx
- | Gx

t ::=

$$
\begin{array}{lll}
 & | & x \\
 & | & b \\
 & | & \mathsf{triv} \\
 & | & \mathsf{let}\, t_1 : T\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, t_2 \\
 & | & t_1 \otimes t_2 \\
 & | & \lambda_l x : A.t \\
 & | & \lambda_r x : A.t \\
 & | & \lambda x : A.t \\
 & | & \mathsf{app}_l\, t_1\, t_2 \\
 & | & \mathsf{app}_r\, t_1\, t_2 \\
 & | & \mathsf{app}\, t_1\, t_2 \\
 & | & \mathsf{ex}\, x_1, x_2\, \mathsf{with}\, t_1, t_2\, \mathsf{in}\, t_3 \\
 & | & (t) \qquad\qquad \mathsf{S} \\
 & | & \mathsf{F}s
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
s & ::= & \\
 & | & x \\
 & | & b \\
 & | & \mathsf{triv} \\
 & | & \mathsf{let}\, s_1 : X\, \mathsf{be}\, p\, \mathsf{in}\, s_2 \\
 & | & s_1 \otimes s_2 \\
 & | & \lambda_l x : X.s \\
 & | & \lambda_r x : X.s \\
 & | & \lambda x : X.s \\
 & | & \mathsf{app}_l\, s_1\, s_2 \\
 & | & \mathsf{app}_r\, s_1\, s_2 \\
 & | & \mathsf{app}\, s_1\, s_2 \\
 & | & \mathsf{ex}\, x_1, x_2\, \mathsf{with}\, s_1, s_2\, \mathsf{in}\, s_3 \\
 & | & (s) \qquad\qquad \mathsf{S} \\
 & | & \mathsf{G}t
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma,\ \Delta,\ \Phi,\ \Psi & ::= & \\
 & | & \cdot \\
 & | & \Gamma_1, \Gamma_2 \\
 & | & x : A \\
 & | & (\Gamma) \qquad\qquad \mathsf{S} \\
 & | & x : X
\end{array}
$$

$\boxed{\Gamma \vdash s : X}$

$$\frac{}{x : X \vdash x : X}\ \textsc{S\_var}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash s : X}{\Gamma, x : \mathsf{Unit}, \Delta \vdash \mathsf{let}\, x : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, s : X}\ \textsc{S\_unit}\mathrm{L}$$

$$\frac{}{\cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \textsc{S\_unit}\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash s : Z}{\Gamma, z : Y, w : X, \Delta \vdash \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, s : Z}\ \textsc{S\_beta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : X \quad \Delta_1, x : X, \Delta_2 \vdash s_2 : Y}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \vdash [s_1/x]s_2 : Y}\ \text{S\_CUT}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta \vdash s : Z}{\Gamma, z : X \otimes Y, \Delta \vdash \mathsf{let}\, z : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, s : Z}\ \text{S\_TENL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : X \quad \Delta \vdash s_2 : Y}{\Gamma, \Delta \vdash s_1 \otimes s_2 : X \otimes Y}\ \text{S\_TEN}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : X \quad \Delta_1, x : Y, \Delta_2 \vdash s_2 : Z}{\Delta_1, \Gamma, y : X \multimap Y, \Delta_2 \vdash [\mathsf{app}_l\, y\, s_1/x]s_2 : Z}\ \text{S\_IMPLL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s_1 : X \quad \Delta_1, x : Y, \Delta_2 \vdash s_2 : Z}{\Delta_1, y : Y \multimap X, \Gamma, \Delta_2 \vdash [\mathsf{app}_r\, y\, s_1/x]s_2 : Z}\ \text{S\_IMPL2}$$

$$\frac{\Gamma, x : X \vdash s : Y}{\Gamma \vdash \lambda_l x : X.s : X \multimap Y}\ \text{S\_IMPRL}$$

$$\frac{x : X, \Gamma \vdash s : Y}{\Gamma \vdash \lambda_r x : X.s : Y \multimap X}\ \text{S\_IMPRR}$$

$$\frac{\Gamma; \cdot \vdash t : A}{\Gamma \vdash \mathsf{G}t : \mathsf{G}A}\ \text{S\_GR}$$

$\boxed{\Gamma; \Psi \vdash t : A}$

$$\frac{}{\cdot; x : A \vdash x : A}\ \text{L\_AX}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta; \Psi \vdash t : A}{\Gamma, x : \mathsf{Unit}, \Delta; \Psi \vdash \mathsf{let}\, x : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, t : A}\ \text{L\_UNITL1}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, \Phi \vdash t : A}{\Gamma; \Psi, x : \mathsf{Unit}, \Phi \vdash \mathsf{let}\, x : \mathsf{Unit}\, \mathsf{be}\, \mathsf{triv}\, \mathsf{in}\, t : A}\ \text{L\_UNITL2}$$

$$\frac{}{\cdot; \cdot \vdash \mathsf{triv} : \mathsf{Unit}}\ \text{L\_UNITR}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta; \Psi \vdash t : A}{\Gamma, z : Y, w : X, \Delta; \Psi \vdash \mathsf{ex}\, w, z\, \mathsf{with}\, x, y\, \mathsf{in}\, t : A}\ \text{L\_BETA}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s : X \quad \Delta_1, x : X, \Delta_2; \Psi \vdash t : A}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2; \Phi \vdash [s/x]t : A}\ \text{L\_CUT1}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash t_1 : A \quad \Delta; \Phi_1, x : A, \Phi_2 \vdash t_2 : B}{\Gamma, \Delta; \Phi_1, \Psi, \Phi_2 \vdash [t_1/x]t_2 : B}\ \text{L\_CUT2}$$

$$\frac{\Gamma, x : X, y : Y, \Delta; \Psi \vdash t : A}{\Gamma, z : X \otimes Y, \Delta; \Psi \vdash \mathsf{let}\, z : X \otimes Y\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t : A}\ \text{L\_TENL1}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, x : A, y : B, \Phi \vdash t : A}{\Gamma; \Psi, z : A \otimes B, \Phi \vdash \mathsf{let}\, z : A \otimes B\, \mathsf{be}\, x \otimes y\, \mathsf{in}\, t : A}\ \text{L\_TENL2}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash t_1 : A \quad \Delta; \Phi \vdash t_2 : B}{\Gamma, \Delta; \Psi, \Phi \vdash t_1 \otimes t_2 : A \otimes B}\ \text{L\_TENR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s : X \quad \Delta_1, x : Y, \Delta_2; \Psi \vdash t : A}{\Delta_1, \Gamma, y : X \multimap Y, \Delta_2; \Psi \vdash [\mathsf{app}_l\, y\, s/x]t : A}\ \text{L\_IMPLL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s : X \quad \Delta_1, x : Y, \Delta_2; \Psi \vdash t : A}{\Delta_1, y : Y \leftharpoonup X, \Gamma, \Delta_2; \Psi \vdash [\mathsf{app}_r\, y\, s_1/x]t : A} \;\; \text{L\_IMPL2}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash t_1 : A \quad \Delta; \Phi_1, x : B, \Phi_2 \vdash t_2 : A}{\Gamma, \Delta; \Phi_1, \Psi, y : A \rightharpoonup B, \Phi_2 \vdash [\mathsf{app}_l\, y\, t_1/x]t_2 : A} \;\; \text{L\_IMPL3}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi \vdash t_1 : A \quad \Delta; \Phi_1, x : B, \Phi_2 \vdash t_2 : A}{\Gamma, \Delta; \Phi_1, y : B \leftharpoonup A, \Psi, \Phi_2 \vdash [\mathsf{app}_l\, y\, t_1/x]t_2 : A} \;\; \text{L\_IMPL4}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, x : A \vdash t : B}{\Gamma; \Psi \vdash \lambda_l x : A.t : A \rightharpoonup B} \;\; \text{L\_IMPRL}$$

$$\frac{\Gamma; x : A, \Psi \vdash t : B}{\Gamma; \Psi \vdash \lambda_r x : A.t : B \leftharpoonup A} \;\; \text{L\_IMPRR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s : X}{\Gamma; \cdot \vdash \mathsf{F}s : \mathsf{F}X} \;\; \text{L\_FR}$$

$$\frac{\Gamma, x : X; \Psi \vdash t : A}{\Gamma; z : \mathsf{F}X, \Psi \vdash \mathsf{let}\, z : \mathsf{F}X\, \mathsf{be}\, \mathsf{F}x\, \mathsf{in}\, t : A} \;\; \text{L\_FL}$$

$$\frac{\Gamma; \Psi, x : A \vdash t : B}{z : \mathsf{G}A, \Gamma; \Psi \vdash \mathsf{let}\, z : \mathsf{G}A\, \mathsf{be}\, \mathsf{G}x\, \mathsf{in}\, t : B} \;\; \text{L\_GL}$$