Лекция по математическому анализу №1.

Чудинов Никита (группа 145)

02 сентября 2015

Определение 1. *Числовой ряд* — формула вида

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n;\ a_i \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}).$$

Определение 2. n-той *частичной суммой ряда* называется конечная сумма вида:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Определение 3. Числовой предел *сходится*, если его частичные суммы имеют предел. Такой предел называется *суммой* ряда.

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n;\ S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q};$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}; & |q| < 1; \\ \infty; & |q| \geqslant 1; \\ \nexists; & q = -1. \end{cases}$$

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k};\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k};$$
$$\frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1};$$
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1};$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1.$$

Заметка. В дальнейшем, для простоты, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ может быть иногда записан как $\sum\limits_{1}^{\infty}$, или, реже, просто $\sum$.

Определение 4 (Необходимый признак сходимости)**.** Если ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{a\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1};$$
$$\text{Т.к. } \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S, \text{ то } \lim_{n\to\infty} a_n = S - S_n = 0.$$

$\square$

Следствие. Если $a_n \nrightarrow 0$, то ряд расходится.

Заметка. Обратное неверно! $a_n \to 0 \nRightarrow$ сходимость ряда!

Пример.

$$\sum_1^\infty \left(\frac{n}{n+2}\right)^n; \ a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \to [1^\infty] = \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e^2} \neq 0.$$

Пример.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}; \ a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty.$$

Ряд не сходится.

Определение 5 (Критерий Коши)**.** Ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

Следствие. Ряд $\sum\limits_1^\infty$ расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N, p : |S_{n+p} - S_n| > \varepsilon$.

Пример. $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n}$ (гармонический ряд):

$$p = n = N; \ |S_{n+p} - S_n| = |S_{2N} - S_N| = \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} \geqslant \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Заметка (Свойства сходящихся рядов).

1. Если ряды $\sum\limits_1^\infty a_n = A, \sum\limits_1^\infty b_n = B$ сходятся, то $\sum\limits_1^\infty \alpha a_n + \beta b_n = \alpha A + \beta B$;
2. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный выбрасыванием любого конечного числа слагаемых;
3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из исходного произвольной группировкой членов.

Заметка. Обратное неверно! $\sum\limits_1^\infty (-1)^n$ не сходится, но $(-1+1) + (-1+1) + \dots$ сходится!

Теорема. *Ряд* $\sum\limits_1^\infty; \ a_n \geqslant 0$ *сходится* $\Leftrightarrow S_n = \sum\limits_1^n$ *ограничена.*

Доказательство. Необходимое условие: $\sum\limits_{1}^{\infty}$ сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \{S_n\}$ — ограничена (из теории пределов);

Достаточное условие: $S_n \leqslant\ M\ \forall n$. S_n — монотонная ограниченная последовательность $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. □

Определение 6 (Интегральный признак сходимости)**.** Пусть $S(x)$ монотонна на $[1; +\infty)$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится и расходится одновременно с $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha};\ f(x) = \frac{1}{x^\alpha};\ [1; +\infty) f(x) \geqslant 0;$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\bigg|_1^n = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right);$$

$$\begin{cases} \infty & \text{if } \alpha \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{if } \alpha > 1; \end{cases}$$

Определение 7 (Признак сравнения)**.** Если $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n, a_n > 0;\ \sum\limits_{1}^{\infty} b_n, b_n > 0 \forall n$ и $a_n \leqslant b_n \forall n$, то

- из сходимости $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n \Rightarrow \sum a_n$ тоже сходится;
- из расходимости $\sum a_n \Rightarrow \sum b_n$ тоже расходится.

Следствие (Признак сравнения в предельной форме)**.**

$$\sum a_n, a_n > 0 \forall n$$
$$\sum b_n, b_n > 0 \forall n$$

Если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$ (т.е. $\frac{a_n}{b_n} = 1$), то $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.