Лекция по математическому анализу №8.

Чудинов Никита (группа 145)

2 октября 2015

Мотивация: вычисление объёма.

Пусть в xOy задана фигура G. $z = f(x, y) \geqslant 0 \ \forall (x, y) \in G$; f — непрерывна над G.

Теорема.

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i; \ G_i \cap G_j = \varnothing \ \forall i \neq j;$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \underbrace{m(G_i)}_{\text{площадь}};$$

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(G_i); \ \max d(G_i) \to 0.$$

Определение 1 (Диаметр множества)**.**

$$d(G_i) = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in G_i} d(\vec{x}, \vec{y}).$$

Мера Жордана

Пусть G — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Клеткой Π в $\mathbb{R}^n$ называется структура вида

$$\Pi = \{(x_1 \ldots x_n) : a_i \leqslant x_i < b_i \ \forall i = 1 \ldots n\}.$$

Определение 3. *Мера* клетки Π равна

$$m(\Pi) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n).$$

Свойство. $\Pi_1 \cap \Pi_2$ — клетка.

Определение 4. Множество A называется *клеточным*, если его можно представить в виде объединения конечного числа клеток.

Свойство.

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i).$$

Теорема. *Мера клеточной фигуры не зависит от способа разбиения на клетки.*

Доказательство. Пусть $T_1 : G = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i$; $T_2 : G = \bigcup_{j=1}^{m} \Pi'_j$

$$\Pi_{ij} = \Pi_i \cap \Pi'_j \Rightarrow G = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \Pi_{ij};$$

$$m(G) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m(\Pi_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \Pi_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{m} m(\Pi'_j)$$

$\square$

Свойства клеточных множеств:

1. Если A, B — клеточные множества, то $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ — тоже клеточные множества (то есть множество всех клеточных множеств образует кольцо над $\cup$ и $\cap$);

2. $m(A) \geqslant 0 \; \forall A$;

3. *Конечная аддитивность:* $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$ при $A_i \cap A_j = \varnothing \; \forall i \neq j$;

4. *Монотонность:* если $A \subseteq B$, то $m(A) \leqslant m(B)$;

   Доказательство. $m(B) = m(\underbrace{A \cup (B \backslash A)}_{\text{не пересекаются}}) = m(A) + m(B \backslash A) > A$; ☐

5. $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$.

Определение 5. Множество G называется *измеримым* (по Жордану), если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ клеточные множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon : A_\varepsilon \subset G \subset B_\varepsilon$; $m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Определение 6. Если G — измеримое множество, то его мера $m(A) < m(G) < m(B) \forall$ клеточных множеств $A, B : A \subset G \subset B$.

Теорема. *Если G — измеримо, то его $m(G)$ существует, единственно и:*

$$m(G) = \sup_{A \subset G} m(A) = \inf_{G \subset B} m(B).$$

Доказательство. Так как $\forall$ клеточных множеств $A, B : A \subseteq G \subseteq B$; $m(A) \leqslant m(B)$, то по теореме об отделимости числовых рядов $\Rightarrow \gamma : m(A) \leqslant \gamma \leqslant m(B) \Rightarrow m(G) = \gamma$ для любых клеточных множеств $A \subseteq G \subseteq B$.

Единственность от противного:
Пусть $\exists \alpha < \beta : m(A) \leqslant \alpha < \beta \leqslant m(B)$ $(\forall A, B : A \subseteq G \subseteq B)$. Так как G — измеримое, то $\forall \varepsilon : (\beta - \alpha) < \varepsilon : \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$. ☐

Пример. $G = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ — не измеримо по Жордану.

Определение 7. Множество G называется *множеством меры ноль*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ клеточное множество $B : G \subseteq B$; $m(B) < \varepsilon$.

Свойство.

1. Любое конечное объединение множеств меры ноль — тоже множество меры ноль;

2. Подмножество множества меры ноль — тоже множество меры ноль.

Теорема. *Множество G измеримо $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\partial G}_{\textit{граница } G}$ — множество меры 0.*

Свойства измеримых множеств:

1. Если A, B — измеримые множества, то $A \cap B, A \cup B, A \backslash B$ — измеримые множества;

   Доказательство. Пусть A, B — измеримы $\Rightarrow m(\partial A) = 0 = m(\partial B)$; $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B \Rightarrow m(\partial(A \cup B)) \leqslant m(\partial A \cup \partial B) \leqslant m(\partial A) + m(\partial B) = 0$. ☐

2. Если A, B — измеримые множества, $A \cap B = \varnothing$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;

3. (a) $m(A \cup B) \leqslant m(A) + m(B)$;

   Доказательство. $m(A_1 \cup A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2)$;
   $\exists$ клеточные множества $B_1, B_2 : A_i \subseteq B_i;\ i \in \{1, 2\};\ m(B_i) - m(A_i) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$
   $m(A_1 \cup A_2) \leqslant m(B_1 \cup B_2) \leqslant m(B_1) + m(B_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2)$; $\square$

   (b) $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$.

4. G — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$,
   $G_h = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \ldots x_n) \in G, 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant h\}$
   G_h — цилиндрическое множество. G_h — измеримое множество и $m(G_h) = h \cdot m(G)$.

   Доказательство. Из того, что G — цилиндрическое множество $\Rightarrow \exists A, B$ — клеточные множества $A \subseteq G \subseteq B, m(B) - m(A) < \varepsilon$. Пусть A_h, B_h — цилиндрические множества над A и B соответственно.

$$A_h \subseteq G_h \subseteq B_h;$$
$$m(A_h) = h \cdot m(A);$$
$$m(B_h) = h \cdot m(B);$$
$$m(B_h) - m(A_h) = h \cdot (m(B) - m(A)) \leqslant \varepsilon h \to 0.$$

$\square$