Определения к коллоквиуму по линейной алгебре и геометрии 15-16 мая (v0.3)

Чудинов Никита (группа 104)*

Вопрос 1 (Умножение комплексных чисел)**.** Комплексным умножением называется операция

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' \\ ab' + ba' \end{pmatrix}$$

Вопрос 2 (Деление комплексных чисел)**.** Если $u = a + bi, v = c + di \in \mathbb{C}, v \neq 0$, то

$$\frac{u}{v} = \frac{u \cdot \bar{v}}{v \cdot \bar{v}} = \frac{u \cdot \bar{v}}{|v^2|}; \quad \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i$$

Вопрос 3 (Аргумент комплексного числа)**.** *Малый аргумент* комплексного числа $z = a + bi$ — такой угол $\varphi = \arg(z)$, что

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|} \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$\arg(z) = \arccos\frac{a}{|z|} = \arcsin\frac{b}{|z|} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Большой аргумент комплексного числа $z = a + bi$ — множество всех углов φ таких, что

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|} \end{cases}$$

то есть

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\arg(z) + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Вопрос 4 (Сопряжение комплексных чисел и его геометрический смысл)**.** Число $\bar{z} = a - bi$ называется *сопряжённым* к числу $z = a + bi$. Геометрически сопряжение — это зеркальное отражение относительно оси OX.

Вопрос 5 (Модуль комплексного числа)**.** Модуль комплексного числа $z = a + bi$ — это длина вектора z, то есть

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Вопрос 6 (Основная теорема алгебры)**.** Всякий отличный от константы многочлен с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один корень на поле комплексных чисел.

Вопрос 7 (Что происходит с модулями при умножении комплексных чисел?)**.** При произведении комплексных чисел модули перемножаются.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Вопрос 8 (Как найти аргумент произведения двух комплексных чисел, зная аргументы множителей?)**.** При произведении комплексных чисел аргументы складываются.

$$\arg(z_1 \cdot z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$$

*Отдельное спасибо 104 группе за помощь в исправлении ошибок и предоставлении материала.

Вопрос 9 (Сколько комплексных решений может иметь уравнение $z^n = a$, где $a \in \mathbb{C}$?)**.** При $a \neq 0$ у числа a будет ровно n корней n-ной степени. При $a = 0$ у числа будет один корень, 0.

Вопрос 10. Корни n-ной степени числа $z^n = a$ вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{a} = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}; \quad x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$$

Или без экспоненты (если заменить её по формуле Эйлера):

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n})),\ k = \{0 \ldots n-1\}$$

Вопрос 11 (Комплексификация действительного пространства)**.** Пусть $W_\mathbb{R}$ — действительное пространство. Тогда *комплексификация* пространства $W = W_\mathbb{R}$ — это множество

$$W_\mathbb{C} = W \times W = \{(u, v);\ u, v \in W\}$$

с операцией

$$(a + bi)(\vec{u}, \vec{v}) = (a\vec{u} - b\vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u})$$

При этом мы отождествляем $w \in W$ с $(w, 0)$. Тогда $i \cdot w = (0, w)$.

Вопрос 12 (Овеществление комплексного пространства)**.** Пусть V — комплексное линейное пространство. Тогда *овеществление* пространства V — это то же множество V, рассмотренное как пространство над $\mathbb{R}$. Так как $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, то это возможно. Обозначается $V_\mathbb{R}$.

Таким образом при овеществлении «забывается», как умножать на мнимую единицу.

Пример: $\mathbb{C}_\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Вопрос 13 (Кратность корня многочлена)**.** Говорят, что корень c имеет кратность m, если рассматриваемый многочлен делится на $(x-c)^m$ и не делится на $(x-c)^{m+1}$.

Вопрос 14 (Теорема Виета для многочлена n-й степени)**.** Если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$ (каждый корень взят соответствующее его кратности число раз), то коэффициенты $a_{n-1}, \ldots, a_0$ выражаются в виде многочленов от корней, а именно:

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) \\
a_{n-2} &= c_1c_2 + c_1c_3 + \cdots + c_1c_n + c_2c_3 + \cdots + c_{n-1}c_n \\
\ldots &= \ldots \\
a_k &= \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots < j_{n-k} \leqslant} (-1)^{n-k} x_{j_1} \ldots x_{j_{n-k}} \\
\ldots &= \ldots \\
a_1 &= (-1)^{n-1}(c_1c_2 \ldots c_{n-1} + c_1c_2 \ldots c_{n-2}c_n + \cdots + c_2c_3 \ldots c_n) \\
a_0 &= (-1)^n c_1c_2 \ldots c_n
\end{aligned}$$

Вопрос 15 (Матрица перехода от одного базиса к другому)**.** Матрицей перехода от базиса a к базису b (или матрицей замены координат) называется такая матрица $n \times n$

$$T = T_{a \to b} = (t_{ij})_{n \times n}$$

у которой в j-том столбце стоит вектор-столбец $(b_j)_a$ — координаты $\vec{b_j}$ в базисе a, то есть

$$(b_j)_a = \begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix}$$

Вопрос 16 (Как связаны координаты одного и того же вектора в разных базисах?)**.** $\forall \vec{x} \in V$ связь координат вектора $\vec{x}$ в базисах a и b определяется формулой

$$\vec{x_a} = T_{a \to b} \vec{x_b}$$

Вопрос 17 (Линейный функционал)**.** Линейный функционал (линейная форма) на V — линейное отображение из V в F.

Вопрос 18 (Пространство, двойственное к данному[1])**.** Сопряжённым, или двойственным, пространством к данному, называют множество линейных функционалов на данном линейном пространстве. Обозначается E^*.

Вопрос 19 (Линейное отображение)**.** Отображение φ из линейного пространства V в линейное пространство W над одним и тем же полем F называется линейным, если для любых $x, y \in V$ и $\alpha \in F$ выполняется

$$\begin{aligned} &1) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ &2) \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \end{aligned}$$

Вопрос 20 (Линейный оператор)**.** Линейное отображение пространства в само себя называется линейным оператором.

Вопрос 21 (Изоморфизм линейных пространств)**.** Если линейное отображение $\varphi : V \to W$ является биекцией (взаимно однозначным), то оно называется изоморфизмом.

Два пространства называются изоморфными, если между ними есть изоморфизм. Обозначается $V \simeq W$ или $V \approx W$.

Вопрос 22 (Матрица линейного отображения)**.** Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение из n-мерного пространства в m-мерное над полем F, и пусть $b \subset V$, $c \subset W$ — базисы в этих пространствах. Тогда для любой $m \times n$ матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$ следующие два условия эквивалентны:

1. Для любого $j = 1 \ldots n$ столбец с номером j матрицы A составляет координаты вектора $\varphi(b_j)$ в базисе c (где $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$)

2. $\forall x \in V : \varphi(x)_c = A \cdot (x_b)$.

Это матрица линейного отображения φ в базисах b и c. Обозначается $A(\varphi)_c = {}_b\varphi_c$.

Вопрос 23 (Матрица оператора поворота плоскости на угол α, записанная в стандартном базисе[1])**.** В двумерном пространстве поворот можно описать одним углом α со следующей матрицей линейного преобразования:

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Вопрос 24 (Как меняется матрица линейного оператора при замене базиса?)**.** Если b, b' — два базиса в V, $\varphi : V \to V$ — линейный оператор

$$A = \varphi_b = {}_b\varphi_b; \quad A' = \varphi_{b'} = {}_{b'}\varphi_{b'}$$

— его матрицы в разных базисах, то

$$A' = T^{-1}AT,$$

где $T = T_{b\to b'}$.

Вопрос 25 (Какими условиями характеризуется матрица изоморфизма линейных пространств?)**.** Если A — матрица изоморфизма, то она невырожденная, то есть $\det A \neq 0$. Из-за невырожденности, у неё всегда есть обратная матрица A^{-1}.

Вопрос 26 (Ядро линейного отображения)**.** Ядро линейного отображения φ — это полный прообраз нулевого вектора, то есть

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{\vec{x} \in V : \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

[1] Я не нашёл этого материала в конспектах Ярослава, так что пришлось взять из интернета (в основном, Википедии). При неточностях и расхождениях с действительным материалом, сообщите, пожалуйста, мне.

Вопрос 27 (Образ линейного отображения)**.** Образ линейного отображения φ — это множество его значений. Обозначается $\mathrm{Im}\ \varphi$.

Вопрос 28 (Как найти размерности ядра и образа матрицы, зная её ранг и размеры?)**.** Размерность образа линейного отображения — ранг его матрицы

$$\dim(\mathrm{Im}\, y) = \mathrm{rk}\, A$$

Размерность ядра линейного отображения — размерность пространства минус ранг его матрицы

$$\dim(\mathrm{Ker}\, y) = n - \mathrm{rk}\, A$$

Вопрос 29 (Инвариантное подпространство линейного оператора)**.** Инвариантным подпространством оператора $\varphi : V \to V$ называется такое подпространство $W \subseteq V$, что $\varphi(W) \subseteq W$.

Вопрос 30 (Как выглядит матрица линейного оператора, если первые k векторов базиса составляют базис некоторого инвариантного подпространства этого оператора?)**.** Матрица φ_b линейного оператора $\varphi : V \to V$ (где $\dim\ V = n$) имеет вид

$$\varphi_b = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right),$$

где $P \in \mathrm{Mat}_{k\times k}, R \in \mathrm{Mat}_{(n-k)\times(n-k)}$ в том и только том случае, когда первые k базисных векторов порождают инвариантное подпространство $W \subseteq V$.

Вопрос 31 (Собственные значения линейного оператора)**.** λ называется собственным значением линейного оператора φ, если

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

для некоторого $\vec{x} \in V$.

Вопрос 32 (Собственные векторы линейного оператора)**.** Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором оператора φ, если

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

для некоторого $\lambda \in F$.

Вопрос 33 (Характеристический многочлен линейного оператора)**.** Характеристическим многочленом матрицы A называется многочлен от переменной λ

$$\chi(A) = \det A_\lambda = \det(A - \lambda E)$$

Вопрос 34 (Как связаны коэффициенты характеристического многочлена с собственными значениями линейного оператора?[1])**.**

Вопрос 35 (Как характеристический многочлен линейного оператора связан со следом матрицы этого оператора?)**.** Коэффициент при степени $n-1$ равен следу матрицы с точностью до знака:

$$\begin{aligned} \chi_A(1) &= (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\, A \end{aligned}$$

Вопрос 36 (Как определитель матрицы связан с его характеристическим многочленом?)**.**

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E) \\ \chi(0) &= \det(A - 0 \cdot E) = \det(A) \end{aligned}$$

Вопрос 37 (Как, зная собственные значения линейного оператора и их кратности, найти след и определитель этого оператора?)**.** Согласно теореме Виета,

$$\begin{aligned} \det A &= a_0 = \lambda_1 \dots \lambda_n \\ \mathrm{tr}\, A &= a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \end{aligned}$$

Вопрос 38 (Какой вид имеет матрица линейного оператора, если все векторы базиса являются его собственными векторами?). В таком случае матрица линейного оператора имеет диагональный вид, при этом на диагонали будут собственные значения оператора.

Вопрос 39 (Собственное пространство линейного оператора[1]). Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями собственных векторов и нулевой вектор называют собственным пространством.

Вопрос 40 (Корневое подпространство линейного оператора[1]). Корневым вектором линейного преобразования A для данного собственного значения $\lambda \in F$ называется такой ненулевой вектор $x \in V$, что для некоторого натурального числа m

$$(A - \lambda \cdot E)^m x = 0$$

Корневым подпространством линейного преобразования A для данного собственного числа $\lambda \in F$ называется множество всех корневых векторов $x \in V$, соответствующих данному числу (дополненное нулевым вектором).

$$V_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \ker(A - \lambda \cdot E)^m$$

Вопрос 41 (Размерность корневого пространства в конечномерном комплексном пространстве). Размерность корневого подпространства V_{λ_i} равна кратности собственного значения.

Вопрос 42 (Корневой вектор). Корневым вектором линейного преобразования A для данного собственного значения $\lambda \in F$ называется такой ненулевой вектор $x \in V$, что для некоторого натурального числа m

$$(A - \lambda \cdot E)^m x = 0$$

Вопрос 43 (Высота корневого вектора). Если для некоторого собственного значения $\lambda \in F$ и вектора x какое-то число m является наименьшим, при котором выполняется условие $(A - \lambda \cdot E)^m x = 0$, то есть $(A - \lambda \cdot E)^{m-1} x \neq 0$, то m называется высотой корневого вектора x.

Вопрос 44 (Жорданова форма матрицы). Матрица принимает жорданову форму в том случае, если она имеет блочно-диагональный вид, при этом каждый блок имеет вид

$$J_{\lambda_i}^{c_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

который называется жордановой клеткой порядка c_i (блок имеет размер $c_i \times c_i$).

Вопрос 45 (Теорема о жордановой форме линейного оператора в конечномерном комплексном пространстве). Для любого линейного оператора $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ существует базис j в $\mathbb{C}^n$ (жорданов базис) такой, что в этом базисе матрица принимает вид

$$A_j = J_A = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1}^{c_1}, \dots, J_{\lambda_t}^{c_t}),$$

где J_λ^c — жорданова клетка, а $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ — все собственные значения (возможно, повторяющиеся, но необязательно с учётом кратностей). При этом матрица J_A единственна с точностью до перестановки клеток.

Вопрос 46 (Билинейная форма). Функция $B : V \times V \to F$ (то есть $B(\vec{x}, \vec{y}) \in F$, где $\vec{x}, \vec{y} \in V$) называется билинейной, если она линейна по x и по y, то есть

$$\begin{aligned} B(x + x', y) &= B(x, y) + B(x', y) \\ B(x, y + y') &= B(x, y) + B(x, y') \\ \alpha B(x, y) &= B(\alpha x, y) = B(x, \alpha y) \end{aligned}$$

Вопрос 47 (Симметрическая билинейная форма)**.** Билинейная форма называется симметрической, если $\forall x, y \in V$

$$B(x, y) = B(y, x)$$

Вопрос 48 (Матрица билинейной формы)**.** Пусть e — базис в V, а B — билинейная форма на V. Обозначим через B_e матрицу $B_e = (b_{ij})_{n\times n}$ — матрица билинейной формы B в базисе e. Тогда:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$
$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_e^T B_e \vec{y}_e$$
2. Если для какой-то матрицы M и для любых $\vec{x}, \vec{y} \in V$
$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_e^T M \vec{y}_e,$$
то $M = B_e$.

Вопрос 49 (Как меняется матрица билинейной формы при замене координат?)**.** Если $e, e' \subset V$ — два базиса, $C = T_{e\to e'}$, то

$$B_{e'} = C^T B_e C$$

Вопрос 50 (Как меняется матрица квадратичной формы при замене координат?)**.** Если $e, e' \subset V$ — два базиса, $C = T_{e\to e'}$, то

$$Q_{e'} = C^T Q_e C$$

Вопрос 51 (Квадратичная форма)**.** Пусть B — билинейная форма на векторном пространстве V над полем F. Тогда функция $Q : V \to F$:

$$Q(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{x})$$

называется квадратичной формой на V.

Заметка (Канонический и нормальный вид квадратичной формы)*.* Квадратичная форма Q имеет в базисе e канонический вид, если

$$Q(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2$$

для $\vec{x}_e = \begin{pmatrix} x1 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix}$, то есть $Q_e = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, и нормальный вид, если все α_i равны 1, -1, 0.

Вопрос 52 (Индексы инерции квадратичной формы)**.** Пусть i_+, i_-, i_0 — число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов α_i в каноническом виде соответственно. Тогда набор чисел (i_+, i_-, i_0) называется индексами инерции и не зависит от выбора канонического вида, то есть его можно однозначно определить по форме Q.

Вопрос 53 (Сигнатура квадратичной формы)**.** Разность между положительным индексом квадратичной формы и отрицательным индексом называется сигнатурой квадратичной формы.

Вопрос 54 (Положительно определённая квадратичная форма)**.** Квадратичную форму Q называют положительно определённой, если $\forall \vec{x} \neq 0 : Q(\vec{x}) > 0$.

Вопрос 55 (Отрицательно определённая квадратичная форма)**.** Квадратичную форму Q называют отрицательно определённой, если $\forall \vec{x} \neq 0 : Q(\vec{x}) < 0$.

Заметка (Угловые миноры)*.* Угловым минором Δ матрицы A называются определители вида

$$\Delta_1 = a_{11}$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$\dots$$
$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

Вопрос 56 (Критерий Сильвестра для положительно определённой квадратичной формы). Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все её угловые миноры Δ_i положительны.

Вопрос 57 (Критерий Сильвестра для отрицательно определённой квадратичной формы). Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки её угловых миноров Δ_i чередуются, при этом $\Delta_1 < 0$.

Вопрос 58 (Полуторалинейная форма в комплексном пространстве). Пусть V — комплексное линейное пространство, $B(x, y) : V \times V \to \mathbb{C}$. Тогда B называется полуторалинейной, если

$$\begin{aligned} B(x + x', y) &= B(x, y) + B(x', y) \\ B(x, y + y') &= B(x, y) + B(x, y') \\ B(\alpha x, y) &= \alpha B(x, y) \\ B(x, \alpha y) &= \bar{\alpha} B(x, y) \end{aligned}$$

Вопрос 59 (Эрмитова полуторалинейная форма). Полуторалинейная форма B называется эрмитовой, если для неё выполнено условие

$$B(x, y) = \overline{B(y, x)}$$

Вопрос 60 (Эрмитово (или унитарное) пространство). Комплексное пространство, на котором задана положительно определённая эрмитова форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (скалярное произведение) называется эрмитовым.

Заметка (Ортогональность векторов). Два вектора a и b называются ортогональными, если их скалярное произведение $\langle a, b \rangle = 0$.

Вопрос 61 (Ортогональный базис в евклидовом и эрмитовом пространствах[1]). Базис e в евклидовом и эрмитовом пространствах называется ортогональным, если он составлен из попарно ортогональных векторов.

$$\forall i, j \leqslant n;\ i, j \in \mathbb{N};\ i \neq j;\ \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

Вопрос 62 (Ортонормированный базис в евклидовом и эрмитовом пространствах[1]). Базис e называется ортонормированным, если у всех его векторов единичная норма.

$$\forall i \in \mathbb{N};\ i \leqslant n;\ ||e_i|| = 1$$

Вопрос 63 (Ортогональное дополнение линейного подпространства в евклидовом или эрмитовом пространстве[1]). Ортогональное дополнение подпространства W векторного пространства V — это множество всех векторов V, ортогональных каждому из векторов в W. Такое множество является векторным подпространством, которое обычно обозначается $W^{\perp}$.

Вопрос 64 (Размерность ортогонального дополнения данного линейного подпространства в конечномерном евклидовом или эрмитовом пространстве[1]). Пусть W — k-мерное подпространство n-мерного евклидового или эрмитового пространства V. Тогда $W^{\perp}$ является $(n-k)$-мерным подпространством V, к тому же, $V = W \sqcup W^{\perp}$.

Вопрос 65 (Что такое ортогональная проекция вектора на подпространство в евклидовом или эрмитовом пространстве?[1]). Пусть $W \subset V$ — подпространство евклидова или эрмитова пространства. Для произвольного вектора $v \in V$ запишем разложение $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in W$, а $v_2 \in W^{\perp}$. Тогда вектор v_1 называется ортогональной проекцией вектора v на подпространство W и обозначается $\mathrm{pr}_W v$.

Вопрос 66 (Что такое ортогональная составляющая вектора относительно подпространства в евклидовом или эрмитовом пространстве?[1]). В продолжение предыдущего вопроса, вектор $v_2 = v - \mathrm{pr}_W v$ называется ортогональной составляющей вектора v относительно подпространства W и обозначается $\mathrm{ort}_W v$.

Вопрос 67 (Матрица Грама данной системы векторов в евклидовом или эрмитовом пространстве[1])**.** Матрицей Грама системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \ldots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \ldots & \langle e_2, e_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \langle e_n, e_2\rangle & \ldots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix}$$

Вопрос 71 (Оператор, сопряжённый к данному)**.** Оператор ψ называется сопряжённым к φ и обозначается как $\psi = \varphi^*$, если

$$\langle x, \varphi(y)\rangle = \langle \psi(x), y\rangle$$

Вопрос 72 (Самосопряжённый оператор)**.** Оператор φ называется самосопряжённым, если он сопряжён сам себе, то есть $\varphi^* = \varphi$.

Заметка (Самосопряжённая матрица). Эрмитова, или самосопряжённая матрица — квадратная матрица в поле комплексных чисел, такая, что $A^T = \bar{A}$.

Вопрос 73 (Какими свойствами характеризуется матрица самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе?)**.** В ортонормированном базисе матрица самосопряжённого оператора самосопряжена.

To be continued...