

# Определения к коллоквиуму по линейной алгебре и геометрии

## 15-16 мая (v0.3)

Чудинов Никита (группа 104)\*

**Вопрос 1** (Умножение комплексных чисел). Комплексным умножением называется операция

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' \\ ab' + ba' \end{pmatrix}$$

**Вопрос 2** (Деление комплексных чисел). Если  $u = a + bi, v = c + di \in \mathbb{C}, v \neq 0$ , то

$$\frac{u}{v} = \frac{u \cdot \bar{v}}{v \cdot \bar{v}} = \frac{u \cdot \bar{v}}{|v|^2}; \quad \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$$

**Вопрос 3** (Аргумент комплексного числа). *Малый аргумент* комплексного числа  $z = a + bi$  — такой угол  $\varphi = \arg(z)$ , что

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \\ \cos \varphi = \frac{a}{|z|} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\arg(z) = \arccos \frac{a}{|z|} = \arcsin \frac{b}{|z|} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

*Большой аргумент* комплексного числа  $z = a + bi$  — множество всех углов  $\varphi$  таких, что

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \\ \cos \varphi = \frac{a}{|z|} \end{cases}$$

то есть

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\arg(z) + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}\}$$

**Вопрос 4** (Сопряжение комплексных чисел и его геометрический смысл). Число  $\bar{z} = a - bi$  называется *сопряжённым* к числу  $z = a + bi$ . Геометрически сопряжение — это зеркальное отражение относительно оси  $OX$ .

**Вопрос 5** (Модуль комплексного числа). Модуль комплексного числа  $z = a + bi$  — это длина вектора  $z$ , то есть

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Вопрос 6** (Основная теорема алгебры). Всякий отличный от константы многочлен с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один корень на поле комплексных чисел.

**Вопрос 7** (Что происходит с модулями при умножении комплексных чисел?). При произведении комплексных чисел модули перемножаются.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

**Вопрос 8** (Как найти аргумент произведения двух комплексных чисел, зная аргументы множителей?). При произведении комплексных чисел аргументы складываются.

$$\arg(z_1 \cdot z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$$

---

\*Отдельное спасибо 104 группе за помощь в исправлении ошибок и предоставлении материала.

**Вопрос 9** (Сколько комплексных решений может иметь уравнение  $z^n = a$ , где  $a \in \mathbb{C}^?$ ). При  $a \neq 0$  у числа  $a$  будет ровно  $n$  корней  $n$ -ной степени. При  $a = 0$  у числа будет один корень, 0.

**Вопрос 10.** Корни  $n$ -ной степени числа  $z^n = a$  вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{a} = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}; \quad x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$$

**Вопрос 11** (Комплексификация действительного пространства). Пусть  $W_{\mathbb{R}}$  — действительное пространство. Тогда *комплексификация* пространства  $W = W_{\mathbb{R}}$  — это множество

$$W_{\mathbb{C}} = W \times W = \{(u, v); u, v \in W\}$$

с операцией

$$(a + bi)(\vec{u}, \vec{v}) = (a\vec{u} - b\vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u})$$

При этом мы отождествляем  $w \in W$  с  $(w, 0)$ . Тогда  $i \cdot w = (0, w)$ .

**Вопрос 12** (Овеществление комплексного пространства). Пусть  $V$  — комплексное линейное пространство. Тогда *овеществление* пространства  $V$  — это то же множество  $V$ , рассмотренное как пространство над  $\mathbb{R}$ . Так как  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , то это возможно. Обозначается  $V_{\mathbb{R}}$ .

Таким образом при овеществлении «забывается», как умножать на мнимую единицу.

Пример:  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

**Вопрос 13** (Кратность корня многочлена). Говорят, что корень  $c$  имеет кратность  $m$ , если рассматриваемый многочлен делится на  $(x - c)^m$  и не делится на  $(x - c)^{m+1}$ .

**Вопрос 14** (Теорема Виета для многочлена  $n$ -й степени). Если  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — корни многочлена  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$  (каждый корень взят соответствующее его кратности число раз), то коэффициенты  $a_{n-1}, \dots, a_0$  выражаются в виде многочленов от корней, а именно:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(c_1 + c_2 + \dots + c_n) \\ a_{n-2} &= c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_1 c_n + c_2 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n \\ &\dots = \dots \\ a_k &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n} (-1)^{n-k} x_{j_1} \dots x_{j_{n-k}} \\ &\dots = \dots \\ a_1 &= (-1)^{n-1} (c_1 c_2 \dots c_{n-1} + c_1 c_2 \dots c_{n-2} c_n + \dots + c_2 c_3 \dots c_n) \\ a_0 &= (-1)^n c_1 c_2 \dots c_n \end{aligned}$$

**Вопрос 15** (Матрица перехода от одного базиса к другому). Матрицей перехода от базиса  $a$  к базису  $b$  (или матрицей замены координат) называется такая матрица  $n \times n$

$$T = T_{a \rightarrow b} = (t_{ij})_{n \times n}$$

у которой в  $j$ -том столбце стоит вектор-столбец  $(b_j)_a$  — координаты  $\vec{b}_j$  в базисе  $a$ , то есть

$$(b_j)_a = \begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix}$$

**Вопрос 16** (Как связаны координаты одного и того же вектора в разных базисах?).  $\forall \vec{x} \in V$  связь координат вектора  $\vec{x}$  в базисах  $a$  и  $b$  определяется формулой

$$\vec{x}_a = T_{a \rightarrow b} \vec{x}_b$$

**Вопрос 17** (Линейный функционал). Линейный функционал (линейная форма) на  $V$  — линейное отображение из  $V$  в  $F$ .

**Вопрос 18** (Пространство, двойственное к данному<sup>1</sup>). Сопряжённым, или двойственным, пространством к данному, называют множество линейных функционалов на данном линейном пространстве. Обозначается  $E^*$ .

**Вопрос 19** (Линейное отображение). Отображение  $\varphi$  из линейного пространства  $V$  в линейное пространство  $W$  над одним и тем же полем  $F$  называется линейным, если для любых  $x, y \in V$  и  $\alpha \in F$  выполняется

- 1)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- 2)  $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

**Вопрос 20** (Линейный оператор). Линейное отображение пространства в само себя называется линейным оператором.

**Вопрос 21** (Изоморфизм линейных пространств). Если линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  является биекцией (взаимно однозначным), то оно называется изоморфизмом.

Два пространства называются изоморфными, если между ними есть изоморфизм. Обозначается  $V \simeq W$  или  $V \approx W$ .

**Вопрос 22** (Матрица линейного отображения). Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение из  $n$ -мерного пространства в  $m$ -мерное над полем  $F$ , и пусть  $b \subset V$ ,  $c \subset W$  — базисы в этих пространствах. Тогда для любой  $m \times n$  матрицы  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$  следующие два условия эквивалентны:

1. Для любого  $j = 1 \dots n$  столбец с номером  $j$  матрицы  $A$  составляет координаты вектора  $\varphi(b_j)$  в базисе  $c$  (где  $b = \{b_1, \dots, b_n\}$ )
2.  $\forall x \in V: \varphi(x)_c = A \cdot (x_b)$ .

Это матрица линейного отображения  $\varphi$  в базисах  $b$  и  $c$ . Обозначается  $A(\varphi)_c = {}_b\varphi_c$ .

**Вопрос 23** (Матрица оператора поворота плоскости на угол  $\alpha$ , записанная в стандартном базисе<sup>1</sup>). В двумерном пространстве поворот можно описать одним углом  $\alpha$  со следующей матрицей линейного преобразования:

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

**Вопрос 24** (Как меняется матрица линейного оператора при замене базиса?). Если  $b, b'$  — два базиса в  $V$ ,  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор

$$A = \varphi_b = {}_b\varphi_b; \quad A' = \varphi_{b'} = {}_{b'}\varphi_{b'}$$

— его матрицы в разных базисах, то

$$A' = T^{-1}AT,$$

где  $T = T_{b \rightarrow b'}$ .

**Вопрос 25** (Какими условиями характеризуется матрица изоморфизма линейных пространств?). Если  $A$  — матрица изоморфизма, то она невырожденная, то есть  $\det A \neq 0$ . Из-за невырожденности, у неё всегда есть обратная матрица  $A^{-1}$ .

**Вопрос 26** (Ядро линейного отображения). Ядро линейного отображения  $\varphi$  — это полный прообраз нулевого вектора, то есть

$$\text{Ker} \varphi = \{\vec{x} \in V : \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

**Вопрос 27** (Образ линейного отображения). Образ линейного отображения  $\varphi$  — это множество его значений. Обозначается  $\text{Im } \varphi$ .

<sup>1</sup>Я не нашёл этого материала в конспектах Ярослава, так что пришлось взять из интернета (в основном, Википедии). При неточностях и расхождениях с действительным материалом, сообщите, пожалуйста, мне.

**Вопрос 28** (Как найти размерности ядра и образа матрицы, зная её ранг и размеры?). Размерность образа линейного отображения — ранг его матрицы

$$\dim(\operatorname{Im} y) = \operatorname{rk} A$$

Размерность ядра линейного отображения — размерность пространства минус ранг его матрицы

$$\dim(\operatorname{Ker} y) = n - \operatorname{rk} A$$

**Вопрос 29** (Инвариантное подпространство линейного оператора). Инвариантным подпространством оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  называется такое подпространство  $W \subseteq V$ , что  $\varphi(W) \subseteq W$ .

**Вопрос 30** (Как выглядит матрица линейного оператора, если первые  $k$  векторов базиса составляют базис некоторого инвариантного подпространства этого оператора?). Матрица  $\varphi_b$  линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  (где  $\dim V = n$ ) имеет вид

$$\varphi_b = \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array} \right),$$

где  $P \in \operatorname{Mat}_{k \times k}$ ,  $R \in \operatorname{Mat}_{(n-k) \times (n-k)}$  в том и только том случае, когда первые  $k$  базисных векторов порождают инвариантное подпространство  $W \subseteq V$ .

**Вопрос 31** (Собственные значения линейного оператора).  $\lambda$  называется собственным значением линейного оператора  $\varphi$ , если

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

для некоторого  $\vec{x} \in V$ .

**Вопрос 32** (Собственные векторы линейного оператора). Ненулевой вектор  $\vec{x}$  называется собственным вектором оператора  $\varphi$ , если

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

для некоторого  $\lambda \in F$ .

**Вопрос 33** (Характеристический многочлен линейного оператора). Характеристическим многочленом матрицы  $A$  называется многочлен от переменной  $\lambda$

$$\chi(A) = \det A_\lambda = \det(A - \lambda E)$$

**Вопрос 34** (Как связаны коэффициенты характеристического многочлена с собственными значениями линейного оператора?<sup>1</sup>).

**Вопрос 35** (Как характеристический многочлен линейного оператора связан со следом матрицы этого оператора?). Коэффициент при степени  $n - 1$  равен следу матрицы с точностью до знака:

$$\begin{aligned} \chi_A(1) &= (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \end{aligned}$$

**Вопрос 36** (Как определитель матрицы связан с его характеристическим многочленом?).

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E) = \det(A) - \det(\lambda \cdot E) \\ \chi(0) &= \det(A - 0 \cdot E) = \det(A) \end{aligned}$$

**Вопрос 37** (Как, зная собственные значения линейного оператора и их кратности, найти след и определитель этого оператора?). Согласно теореме Виета,

$$\begin{aligned} \det A &= a_0 = \lambda_1 \dots \lambda_n \\ \operatorname{tr} A &= a_{n-1} = (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \end{aligned}$$

**Вопрос 38** (Какой вид имеет матрица линейного оператора, если все векторы базиса являются его собственными векторами?). Матрица имеет верхнетреугольный вид.

**Вопрос 39** (Собственное пространство линейного оператора<sup>1</sup>). Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями собственных векторов и нулевой вектор называют собственным пространством.

**Вопрос 40** (Корневое подпространство линейного оператора<sup>1</sup>). Корневым вектором линейного преобразования  $A$  для данного собственного значения  $\lambda \in F$  называется такой ненулевой вектор  $x \in V$ , что для некоторого натурального числа  $m$

$$(A - \lambda \cdot E)^m x = 0$$

Корневым подпространством линейного преобразования  $A$  для данного собственного числа  $\lambda \in F$  называется множество всех корневых векторов  $x \in V$ , соответствующих данному числу (дополненное нулевым вектором).

$$V_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \ker(A - \lambda \cdot E)^m$$

**Вопрос 41** (Размерность корневого пространства в конечномерном комплексном пространстве). Размерность корневого подпространства  $V_{\lambda_i}$  равна кратности собственного значения.

**Вопрос 42** (Корневой вектор). Корневым вектором линейного преобразования  $A$  для данного собственного значения  $\lambda \in F$  называется такой ненулевой вектор  $x \in V$ , что для некоторого натурального числа  $m$

$$(A - \lambda \cdot E)^m x = 0$$

**Вопрос 43** (Высота корневого вектора). Если для некоторого собственного значения  $\lambda \in F$  и вектора  $x$  какое-то число  $m$  является наименьшим, при котором выполняется условие  $(A - \lambda \cdot E)^m x = 0$ , то есть  $(A - \lambda \cdot E)^{m-1} x \neq 0$ , то  $m$  называется высотой корневого вектора  $x$ .

**Вопрос 44** (Жорданова форма матрицы). Матрица принимает жорданову форму в том случае, если она имеет блочно-диагональный вид, при этом каждый блок имеет вид

$$J_{\lambda_i}^{c_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

который называется жордановой клеткой порядка  $c_i$  (блок имеет размер  $c_i \times c_i$ ).

**Вопрос 45** (Теорема о жордановой форме линейного оператора в конечномерном комплексном пространстве). Для любого линейного оператора  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  существует базис  $j$  в  $\mathbb{C}^n$  (жорданов базис) такой, что в этом базисе матрица принимает вид

$$A_j = J_A = \text{diag}(J_{\lambda_1}^{c_1}, \dots, J_{\lambda_t}^{c_t}),$$

где  $J_\lambda^c$  — жорданова клетка, а  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  — все собственные значения (возможно, повторяющиеся, но необязательно с учётом кратностей). При этом матрица  $J_A$  единственна с точностью до перестановки клеток.

**Вопрос 46** (Билинейная форма). Функция  $B : V \times V \rightarrow F$  (то есть  $B(\vec{x}, \vec{y}) \in F$ , где  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ) называется билинейной, если она линейна по  $x$  и по  $y$ , то есть

$$\begin{aligned} B(x + x', y) &= B(x, y) + B(x', y) \\ B(x, y + y') &= B(x, y) + B(x, y') \\ \alpha B(x, y) &= B(\alpha x, y) = B(x, \alpha y) \end{aligned}$$

**Вопрос 47** (Симметрическая билинейная форма). Билинейная форма называется симметрической, если  $\forall x, y \in V$

$$B(x, y) = B(y, x)$$

**Вопрос 48** (Матрица билинейной формы). Пусть  $e$  — базис в  $V$ , а  $B$  — билинейная форма на  $V$ . Обозначим через  $B_e$  матрицу  $B_e = (b_{ij})_{n \times n}$  — матрица билинейной формы  $B$  в базисе  $e$ . Тогда:

1.  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_e^T B_e \vec{y}_e$$

2. Если для какой-то матрицы  $M$  и для любых  $\vec{x}, \vec{y} \in V$

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_e^T M \vec{y}_e,$$

то  $M = B_e$ .

**Вопрос 49** (Как меняется матрица билинейной формы при замене координат?). Если  $e, e' \subset V$  — два базиса,  $C = T_{e \rightarrow e'}$ , то

$$B_{e'} = C^T B_e C$$

**Вопрос 50** (Как меняется матрица квадратичной формы при замене координат?). Если  $e, e' \subset V$  — два базиса,  $C = T_{e \rightarrow e'}$ , то

$$Q_{e'} = C^T Q_e C$$

**Вопрос 51** (Квадратичная форма). Пусть  $B$  — билинейная форма на векторном пространстве  $V$  над полем  $F$ . Тогда функция  $Q : V \rightarrow F$ :

$$Q(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{x})$$

называется квадратичной формой на  $V$ .

*Заметка* (Канонический и нормальный вид квадратичной формы). Квадратичная форма  $Q$  имеет в базисе  $e$  канонический вид, если

$$Q(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

для  $\vec{x}_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , то есть  $Q_e = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , и нормальный вид, если все  $\alpha_i$  равны 1,  $-1$ , 0.

**Вопрос 52** (Индексы инерции квадратичной формы). Пусть  $i_+, i_-, i_0$  — число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов  $\alpha_i$  в каноническом виде соответственно. Тогда набор чисел  $(i_+, i_-, i_0)$  называется индексами инерции и не зависит от выбора канонического вида, то есть его можно однозначно определить по форме  $Q$ .

**Вопрос 53** (Сигнатура квадратичной формы). Разность между положительным индексом квадратичной формы и отрицательным индексом называется сигнатурой квадратичной формы.

**Вопрос 54** (Положительно определённая квадратичная форма). Квадратичную форму  $Q$  называют положительно определённой, если  $\forall \vec{x} \neq 0 : Q(\vec{x}) > 0$ .

**Вопрос 55** (Отрицательно определённая квадратичная форма). Квадратичную форму  $Q$  называют отрицательно определённой, если  $\forall \vec{x} \neq 0 : Q(\vec{x}) < 0$ .

*Заметка* (Угловые миноры). Угловым минором  $\Delta$  матрицы  $A$  называются определители вида

$$\Delta_1 = a_{11}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

...

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

**Вопрос 56** (Критерий Сильвестра для положительно определённой квадратичной формы). Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все её угловые миноры  $\Delta_i$  положительны.

**Вопрос 57** (Критерий Сильвестра для отрицательно определённой квадратичной формы). Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки её угловых миноров  $\Delta_i$  чередуются, при этом  $\Delta_1 < 0$ .

**Вопрос 58** (Полуторалинейная форма в комплексном пространстве). Пусть  $V$  — комплексное линейное пространство,  $B(x, y) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда  $B$  называется полуторалинейной, если

$$\begin{aligned} B(x + x', y) &= B(x, y) + B(x', y) \\ B(x, y + y') &= B(x, y) + B(x, y') \\ B(\alpha x, y) &= \alpha B(x, y) \\ B(x, \alpha y) &= \bar{\alpha} B(x, y) \end{aligned}$$

**Вопрос 59** (Эрмитова полуторалинейная форма). Полуторалинейная форма  $B$  называется эрмитовой, если для неё выполнено условие

$$B(x, y) = \overline{B(y, x)}$$

**Вопрос 60** (Эрмитово (или унитарное) пространство). Комплексное пространство, на котором задана положительно определённая эрмитова форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (скалярное произведение) называется эрмитовым.

*Заметка* (Ортогональность векторов). Два вектора  $a$  и  $b$  называются ортогональными, если их скалярное произведение  $\langle a, b \rangle = 0$ .

**Вопрос 61** (Ортогональный базис в евклидовом и эрмитовом пространствах<sup>1</sup>). Базис  $e$  в евклидовом и эрмитовом пространствах называется ортогональным, если он составлен из попарно ортогональных векторов.

$$\forall i, j \leq n; i, j \in \mathbb{N}; i \neq j; \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

**Вопрос 62** (Ортонормированный базис в евклидовом и эрмитовом пространствах<sup>1</sup>). Базис  $e$  называется ортонормированным, если у всех его векторов единичная норма.

$$\forall i \in \mathbb{N}; i \leq n; \|e_i\| = 1$$

**Вопрос 63** (Ортогональное дополнение линейного подпространства в евклидовом или эрмитовом пространстве<sup>1</sup>). Ортогональное дополнение подпространства  $W$  векторного пространства  $V$  — это множество всех векторов  $V$ , ортогональных каждому из векторов в  $W$ . Такое множество является векторным подпространством, которое обычно обозначается  $W^\perp$ .

**Вопрос 64** (Размерность ортогонального дополнения данного линейного подпространства в конечномерном евклидовом или эрмитовом пространстве<sup>1</sup>). Пусть  $W$  —  $k$ -мерное подпространство  $n$ -мерного евклидова или эрмитового пространства  $V$ . Тогда  $W^\perp$  является  $(n - k)$ -мерным подпространством  $V$ , к тому же,  $V = W \sqcup W^\perp$ .

**Вопрос 65** (Что такое ортогональная проекция вектора на подпространство в евклидовом или эрмитовом пространстве?<sup>1</sup>). Пусть  $W \subset V$  — подпространство евклидова или эрмитова пространства. Для произвольного вектора  $v \in V$  запишем разложение  $v = v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in W$ , а  $v_2 \in W^\perp$ . Тогда вектор  $v_1$  называется ортогональной проекцией вектора  $v$  на подпространство  $W$  и обозначается  $\text{rg}_W v$ .

**Вопрос 66** (Что такое ортогональная составляющая вектора относительно подпространства в евклидовом или эрмитовом пространстве?<sup>1</sup>). В продолжение предыдущего вопроса, вектор  $v_2 = v - \text{rg}_W v$  называется ортогональной составляющей вектора  $v$  относительно подпространства  $W$  и обозначается  $\text{ort}_W v$ .

**Вопрос 67** (Матрица Грама данной системы векторов в евклидовом или эрмитовом пространстве<sup>1</sup>). Матрицей Грама системы векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  называется следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

**Вопрос 71** (Оператор, сопряжённый к данному). Оператор  $\psi$  называется сопряжённым к  $\varphi$  и обозначается как  $\psi = \varphi^*$ , если

$$\langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \psi(x), y \rangle$$

**Вопрос 72** (Самосопряжённый оператор). Оператор  $\varphi$  называется самосопряжённым, если он сопряжён сам себе, то есть  $\varphi^* = \varphi$ .

*Заметка* (Самосопряжённая матрица). Эрмитова, или самосопряжённая матрица — квадратная матрица в поле комплексных чисел, такая, что  $A^T = \bar{A}$ .

**Вопрос 73** (Какими свойствами характеризуется матрица самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе?). В ортонормированном базисе матрица самосопряжённого оператора самосопряжена.

To be continued...