Лекция по математическому анализу №3.

Чудинов Никита (группа 145)

11 сентября 2015

Определение 1 (Абсолютно сходящийся ряд)**.** Ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ *абсолютно сходится*, если сходится $\sum\limits_1^\infty |a_n|$.

Свойства:

1. Абсолютно сходящийся ряд *сходится* (обратное *неверно!*)

   Доказательство. Пусть $\sum\limits_1^\infty |a_n|$ сходится. Следовательно, по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0, p\ \exists n : \sum_{n+1}^{n+p} |a_n| < \varepsilon;$$

$$\left|\sum_1^\infty a_n\right| \leqslant \sum_1^\infty |a_n|.$$

$\square$

2. Если $\sum\limits_1^\infty a_n$, $\sum\limits_1^\infty b_n$ абсолютно сходятся и $|b_n| \leqslant M \forall n$, то $\sum\limits_1^\infty a_n b_n$ тоже абсолютно сходится.

   Доказательство. $\left|\sum\limits_1^\infty a_n b_n\right| \leqslant \left|M \sum\limits_1^\infty a_n\right|$. $\square$

3. Если $\sum\limits_1^\infty a_n$, $\sum\limits_1^\infty b_n$ абсолютно сходятся, то $\sum\limits_1^\infty \lambda a_n + \mu b_n$ тоже абсолютно сходится.

4. Если $\sum\limits_1^\infty a_n$ абсолютно сходится и $\sum\limits_1^\infty a_n = S$, то ряд, полученный при произвольной перестановке членов тоже сходится и его сумма равна S.

5. *Правило умножения:* Если $\sum\limits_1^\infty a_n$, $\sum\limits_1^\infty b_n$ абсолютно сходятся и $\sum\limits_1^\infty a_n = A$, $\sum\limits_1^\infty b_n = B$, то ряд $\sum\limits_1^\infty a_n \sum\limits_1^\infty b_n = \sum\limits_1^\infty c_n = C = A \cdot B$.

   Определение 2 (Произведение по Коши)**.** $\sum\limits_1^\infty a_n \sum\limits_1^\infty b_n = \sum\limits_1^\infty c_n = \sum\limits_{k=0}^\infty \sum\limits_{s=0}^k a_s b_{k-s}$.

Определение 3 (Условно сходящиеся ряды)**.** Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сходится, но $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ расходится

Теорема (Риман)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ *условно сходится, то для любого числа* $S \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *существует такая перестановка этого ряда, что ряд начинает сходиться к этому числу* S*.*

Функциональные последовательности и ряды

Здесь и в дальнейшем: $f_n(x)$ — некоторая функция, определённая над множеством D.

Определение 4 (Поточечная сходимость)**.** $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на D : $f_n \xrightarrow{D} f$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x); x \in D$, если $\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, x): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall n > N$.

Определение 5. Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} f(x)$ сходится на D, если $S_n(x) = \sum\limits_{1}^{n} f_n(x)$ сходится к некоторой функции $S(x)$; $\forall x \in D$.

Теорема. *Последовательность* $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$ *если* $\exists a_n \to 0: |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n\ \forall x, n \in D$.