Теория вероятностей и математическая статистика. Лекция 3. *

16 сентября 2015

Определение 1. События $A_1, \dots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для всех индексов $1 \leq i_1 \underset{k=2\dots n}{\leq \dots \leq} i_k \leq n$:

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_n}) \qquad (*)$$

Если (*) выполняется для $k = 2$, то события называются **независимыми попарно**.

Элементы теории надёжности.

Определение 2. Надёжностью системы называется вероятность её безотказной работы.

Определение 3. Схемой Испытаний Бернулли (СИБ) называется модель по проведению n испытаний, удовлетворяющих трём условиям:

1. В каждом испытании возможно 2 исхода: A и $\overline{A}$
2. Все испытания независимы.
3. Значение $P(A) = P$ не меняется во всех опытах.

Представим простой эксперимент в котором возможно два исхода: удача и неудача. Соответственно, вероятности удачи и неудачи обозначим за $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$.

Теперь рассмотрим новый эксперимент, который заключается в n-кратном повторении эксперимента предыдущего.

- Тогда пространство элементарных событий можно представить как $\Omega = (a_1, \dots, a_n)$, где каждое элементарное событие a_i может принимать значения 1 или 0, в зависимости от успеха.
- Пусть k - количество удачных опытов из n. Нетрудно заметить, что $k = \sum\limits_1^n a_i$.
- Теперь каждому событию (обозначим его просто за ω) сопоставим число — вероятность успеха: $p(\omega) = p^{\sum_1^n a_i} \cdot q^{n - \sum_1^n a_i} = p^k \cdot q^{n-k}$
- Пусть $A_k = \{\omega | \sum\limits_1^n a_i = k\}$. Тогда выполняется Теорема 1.

*Свёрстано Жуковым Иваном. Материал может содержать ошибки-хуешибки

Теорема 1. Формула Бернулли: $P(A_k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Доказательство.

- $A_k = \{$в n испытаниях k успехов$\} = \{\omega | \sum\limits_1^n a_i = k\}$;
- $P(\omega) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
- $A_k = \sum\limits_{\omega \in A_k} \omega \Rightarrow P(A_k) = P(\sum\limits_{\omega \in A_k} \omega) = |$события ω несовместны$| = \sum\limits_{\omega \in A_k} P(\omega) =$
  $= C_n^k \cdot p^n \cdot (1-p)^{n-k}$

■

Замечание 1. C_n^k — из n опытов выбираем k удачных.

Определение 4. Полиномиальная схема [1].

Обычная формула Бернули применима на случай, когда при каждом испытании возможно одно из двух событий. Формулу Бернулли можно обобщить на случай, когда при каждом испытании происходит одно и только одно из $k > 2$ событий с вероятностью $\underset{i=1,2,\ldots,k}{p_i}$, где $\sum\limits_1^k p_i = 1$. Вероятность появления m_1 раз первого события и m_2 - второго и m_k раз k-го находится по формуле

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} \cdot {p_1}^{m_1} \cdot {p_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{m_k}$$

, где $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Определение 5. Случайные события $H_1, \ldots, H_n \subset \Omega$ называются **полной группой событий**, если:

1. $\underbrace{H_i \cdot H_j}_{\text{несовместные}} = \varnothing$ при $i \neq j$
2. $\sum\limits_1^n H_i = \Omega$

Теорема 2. Пусть $H_1, \ldots, H_n$ - полная группа событий и $A \subset \Omega$. Тогда:

$$P(A) = \sum_1^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

Доказательство. $P(A) = P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot \sum\limits_1^n H_i) = P(\underset{\subseteq H_1}{AH_1} + \ldots + \underset{\subseteq H_n}{AH_n}) = \sum\limits_1^n P(AH_i) =$
$|$т.к. $H_1, \ldots, H_n$ несовместны$| = \sum\limits_1^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$ ■

[1]материал взят с Вики