

Лекция по математическому анализу №1.

Чудинов Никита (группа 145)

02 сентября 2015

Определение 1. Числовой ряд — формула вида

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}.$$

Определение 2. n -той частичной суммой ряда называется конечная сумма вида:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Определение 3. Числовой предел *сходится*, если его частичные суммы имеют предел. Такой предел называется *суммой* ряда.

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n; \quad S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q};$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}; & |q| < 1; \\ \infty; & |q| \geq 1; \\ \nexists; & q = -1. \end{cases}$$

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}; \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k};$$
$$\frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1};$$
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Замечка. В дальнейшем, для простоты, $\sum_{n=1}^{\infty}$ может быть иногда записан как \sum_1^{∞} , или, реже, просто \sum .

Определение 4 (Необходимый признак сходимости). Если ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1};$$

$$\text{Т.к. } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S - S_n = 0.$$

□

Следствие. Если $a_n \not\rightarrow 0$, то ряд расходится.

Заметка. Обратное неверно! $a_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow$ сходимость ряда!

Пример.

$$\sum_1^\infty \left(\frac{n}{n+2}\right)^n; a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \rightarrow [1^\infty] = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e^2} \neq 0.$$

Пример.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}; a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty;$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow \infty.$$

Ряд не сходится.

Определение 5 (Критерий Коши). Ряд $\sum_1^\infty a_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

Следствие. Ряд \sum_1^∞ расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N, p : |S_{n+p} - S_n| > \varepsilon$.

Пример. $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ (гармонический ряд):

$$p = n = N; |S_{n+p} - S_n| = |S_{2N} - S_N| = \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Заметка (Свойства сходящихся рядов). 1. Если ряды $\sum_1^\infty a_n = A, \sum_1^\infty b_n = B$ сходятся,

$$\text{то } \sum_1^\infty \alpha a_n + \beta b_n = \alpha A + \beta B;$$

2. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный выбрасыванием любого конечного числа слагаемых;
3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из исходного произвольной группировкой членов.

Заметка. Обратное неверно! $\sum_1^\infty (-1)^n$ не сходится, но $(-1+1) + (-1+1) + \dots$ сходится!

Теорема. Ряд $\sum_1^\infty a_n \geq 0$ сходится $\Leftrightarrow S_n = \sum_1^n$ ограничена.

Доказательство. Необходимое условие: \sum_1^∞ сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow \{S_n\}$ — ограничена (из теории пределов);

Достаточное условие: $S_n \leq M \forall n$. S_n — монотонная ограниченная последовательность $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. \square

Определение 6 (Интегральный признак сходимости). Пусть $S(x)$ монотонна на $[1; +\infty)$. Тогда $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ сходится и расходится одновременно с $\int_1^\infty f(x)dx$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}; f(x) = \frac{1}{x^\alpha}; [1; +\infty)f(x) \geq 0;$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^n = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right);$$

$$\begin{cases} \infty & \text{if } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{if } \alpha > 1; \end{cases}$$

Определение 7 (Признак сравнения). Если $\sum_1^\infty a_n, a_n > 0; \sum_1^\infty b_n, b_n > 0 \forall n$ и $a_n \leq b_n \forall n$, то

- из сходимости $\sum_1^\infty b_n \Rightarrow \sum a_n$ тоже сходится;
- из расходимости $\sum a_n \Rightarrow \sum b_n$ тоже расходится.

Следствие (Признак сравнения в предельной форме).

$$\sum a_n, a_n > 0 \forall n$$

$$\sum b_n, b_n > 0 \forall n$$

Если $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\frac{a_n}{b_n} = \text{const}$), то $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.