Математический анализ 3.
Лекция 4.

Лепский Александр Евгеньевич*

1 октября 2015 г.

Определение 1. *Говорят, что посл-ть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится на множестве* D *к функции* $f(x)$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n > N(\varepsilon) \ \forall x \in D$$

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$$

Лемма 1. *Если* $\exists \ a_n \xrightarrow{D} 0$ *:*

$$|f_m(x) - f(x)| \le a_n \ \forall x \in D \ \forall n \ge m$$

, то $f_m \Rightarrow f$

Примеры 1.

1. $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n^2+x^2}, x \in [-1,1]$; $f_n \xrightarrow{D} 0 = f(x)$
   $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{n+1}{n^2+x^2} \le \dfrac{n+1}{n^2}$
2. $f_n(x) = x^n, x \in (0;1) = D$
   $f_n \xrightarrow{D} 0$
   $sup\,|f_n(x) - f(x)| = sup(x^n) = 1 \not\to 0$ *при* $n \to \infty$

Критерий равномерной сходимости

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \ \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$
2. Критерий Коши: $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N(\varepsilon) \ \forall n \ge N(\varepsilon)$ и
   $\forall p : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in D$

Доказательство. 1) Необходимость.
Пусть $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in D$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \forall x \in D \ \forall n > N(\varepsilon)$$

$f_n \ \overset{D}{\rightrightarrows} f \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n \ge N(\varepsilon)$ и $\ \forall p : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in D(1)$

*лекция записана Жуковым Иваном (группа 145)

2) Достаточность: пусть верно (1)
$\forall$ фиксированного $x \in D$ из (1) $\Rightarrow \{f_n(x)\}$ - фундаментальная посл-ть вещ. чисел $\Rightarrow$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
Покажем, что $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$
Из (1) при $p \to \infty$:
$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in D \Rightarrow f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $\square$

Следствие 1. $f_n \overset{D}{\not\rightrightarrows} f \ \Leftrightarrow$
$\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall N(\varepsilon)\ \exists\ n \geq N(\varepsilon)\ \ \exists\ p\ \exists\ x_0 \in D : |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon_0$

$$\sum_1^\infty u_n(x), u_n(x) \text{ - функции на D. (2)}$$

Определение 2. *Ряд (2) сх-ся на D **поточечно**, если*
$\exists\ S(x)$ *на D:* $S_n \xrightarrow{D} S \Leftrightarrow\ \forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon, x) : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon\ \forall n > N(\varepsilon, x)$

Определение 3. *Ряд (2) сх-ся на D **равномерно**, если он сх-ся к $S(x),\ x \in D$ и*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)\ \forall n > N : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sup_{x \in D} |r_n(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$
$S_n(x) - S(x) = r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^\infty u_k(x)$ *- остаток ряда*

Примеры 2.

1. $\sum\limits_{n=0}^\infty x^n, D = [0;\alpha], \alpha \in (0;1)$
   $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^n x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow{D} \dfrac{1}{1-x} = S(x)$
   $$\left|\underset{0 \leqslant x < 1}{sup} |r_n(x)| = sup \left|\sum_{k=n+1}^\infty x^k\right|\right| = sup \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty \Rightarrow$$
   не является равном. сх-ся на D

Критерий равномерной сходимости функции ряда

Критерий Коши: ряд (2) равн. сх-ся на D $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) :\ \forall n > N(\varepsilon)\ \forall p : |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D$$

Следствие 2. *Ряд (2) не явл. сход. на D* $\Leftrightarrow$

$$\exists\ \varepsilon_0\ \forall\ N :\ \exists\ n \geq N, p, x_0 \in D : |S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Признаки равномерной сходимости функций рядов

1. **Необходимый признак**

   Если ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сх-ся на D, то $u_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$

   Доказательство. Пусть ряд равномерно сх-ся $\Leftrightarrow S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S$
   $|u_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| \leq \varepsilon \; \forall x \in D$ □

2. **Признак Вейерштрасса**

   Пусть $\sup\limits_{x \in D} |u_n(x)| \leq a_m \; \forall m \geqslant n$.
   $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n(x)$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к D

   Доказательство. $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \; \forall x \in D \Rightarrow$
   $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \; \forall x \in D \; \forall p \; \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow$ по критерию Коши ряд равномерно сходится. □

   Примеры 3. $\sum\limits_{1}^{\infty} n sin(nx) \cdot (ln(n^3+1) - 3ln(n)) = \sum\limits_{1}^{\infty} n sin(nx) \cdot ln(1 + \frac{1}{n^3})$

3. Признаки равн. сх-ти Дирихле и Абеля

   Определение 4. *Посл-ть* $\left\{ f_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ *наз-ся* ***равномерно ограниченной на D***, *если* $\exists \; c > 0 : \sup\limits_{x \in D} |f_n(x)| \leq c \; \forall n$

   - Признак Дирихле:
     $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится, если:
     1) $\{a_n(x)\} \overset{D}{\rightrightarrows} 0$ и $\{a_n(x)\}$ монотон. $\forall x \in D$
     2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равн. огр. на D
     $\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ равн. сх-ся на D
   - Признак Абеля:
     $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится, если:
     1) $\{a_n(x)\}$ равномерно огр. на D и $\{a_n(x)\}$ монотон. $\forall x \in D$
     2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равн. сх-ся на D
     $\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ равн. сх-ся на D