

# Лекция по математическому анализу №1.

Чудинов Никита (группа 145)

02 сентября 2015

**Определение 1.** Числовой ряд — формула вида

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}.$$

**Определение 2.**  $n$ -той частичной суммой ряда называется конечная сумма вида:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

**Определение 3.** Числовой предел *сходится*, если его частичные суммы имеют предел. Такой предел называется *суммой* ряда.

*Пример.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n; \quad S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q};$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}; & |q| < 1; \\ \infty; & |q| \geq 1; \\ \nexists; & q = -1. \end{cases}$$

*Пример.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}; \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k};$$
$$\frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1};$$
$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

*Замечка.* В дальнейшем, для простоты,  $\sum_{n=1}^{\infty}$  может быть иногда записан как  $\sum_1^{\infty}$ , или, реже, просто  $\sum$ .

**Определение 4** (Необходимый признак сходимости). Если ряд  $\sum_1^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1};$$

$$\text{Т.к. } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S - S_n = 0.$$

□

**Следствие.** Если  $a_n \not\rightarrow 0$ , то ряд расходится.

*Заметка.* Обратное неверно!  $a_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow$  сходимость ряда!

*Пример.*

$$\sum_1^\infty \left(\frac{n}{n+2}\right)^n; a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \rightarrow [1^\infty] = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e^2} \neq 0.$$

*Пример.*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}; a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty;$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow \infty.$$

Ряд не сходится.

**Определение 5** (Критерий Коши). Ряд  $\sum_1^\infty a_n$  сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ .

**Следствие.** Ряд  $\sum_1^\infty$  расходится  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N, p : |S_{n+p} - S_n| > \varepsilon$ .

*Пример.*  $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$  (гармонический ряд):

$$p = n = N; |S_{n+p} - S_n| = |S_{2N} - S_N| = \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

*Заметка* (Свойства сходящихся рядов). 1. Если ряды  $\sum_1^\infty a_n = A, \sum_1^\infty b_n = B$  сходятся,

$$\text{то } \sum_1^\infty \alpha a_n + \beta b_n = \alpha A + \beta B;$$

2. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный выбрасыванием любого конечного числа слагаемых;

3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из исходного произвольной группировкой членов.

*Заметка.* Обратное неверно!  $\sum_1^\infty (-1)^n$  не сходится, но  $(-1+1) + (-1+1) + \dots$  сходится!

**Теорема.** Ряд  $\sum_1^\infty; a_n \geq 0$  сходится  $\Leftrightarrow S_n = \sum_1^n$  ограничена.

*Доказательство. Необходимое условие:*  $\sum_1^\infty$  сходится  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow \{S_n\}$  — ограничена (из теории пределов);

*Достаточное условие:*  $S_n \leq M \forall n$ .  $S_n$  — монотонная ограниченная последовательность  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .  $\square$

**Определение 6** (Интегральный признак сходимости). Пусть  $S(x)$  монотонна на  $[1; +\infty)$ . Тогда  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  сходится и расходится одновременно с  $\int_1^\infty f(x)dx$ .

*Пример.*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}; f(x) = \frac{1}{x^\alpha}; [1; +\infty) f(x) \geq 0;$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^n = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{\frac{1}{\alpha-1}-1} \right);$$

$$\begin{cases} \infty & \text{if } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{if } \alpha > 1; \end{cases}$$

**Определение 7** (Признак сравнения). Если  $\sum_1^\infty a_n, a_n > 0$ ;  $\sum_1^\infty b_n, b_n > 0 \forall n$  и  $a_n \leq b_n \forall n$ , то

- из сходимости  $\sum_1^\infty b_n \Rightarrow \sum a_n$  тоже сходится;
- из расходимости  $\sum a_n \Rightarrow \sum b_n$  тоже расходится.

**Следствие** (Признак сравнения в предельной форме).

$$\sum a_n, a_n > 0 \forall n$$

$$\sum b_n, b_n > 0 \forall n$$

Если  $a_n \sim b_n$  при  $n \rightarrow \infty$  (т.е.  $\frac{a_n}{b_n} = 1$ ), то  $\sum a_n, \sum b_n$  сходятся или расходятся одновременно.