

Математический анализ 3.

Лекция 4.

Лепский Александр Евгеньевич *

14 сентября 2015 г.

Определение 1. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве D к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \forall x \in D$$
$$f_n \xrightarrow{D} f$$

Лемма 1. Если $\exists a_n \xrightarrow{D} 0$:

$$|f_m(x) - f(x)| \leq a_n \quad \forall x \in D \quad \forall n \geq m$$

, то $f_m \Rightarrow f$

Примеры 1.

1. $f_n(x) = \frac{n+1}{n^2+x^2}, x \in [-1, 1]; f_n \xrightarrow{D} 0 = f(x)$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{n+1}{n^2+x^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$$

2. $f_n(x) = x^n, x \in (0; 1) = D$

$$f_n \xrightarrow{D} 0$$

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = \sup(x^n) = 1 \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Критерий равномерной сходимости

1. $f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$

2. Критерий Коши: $f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$

Доказательство. 1) Необходимость.

Пусть $f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in D \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$$f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D(1)$$

* лекция записана Жуковым Иваном (группа 145)

2) Достаточность: пусть верно (1)

\forall фиксированного $x \in D$ из (1) $\Rightarrow \{f_n(x)\}$ - фундаментальная посл-ть вещ. чисел \Rightarrow

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Покажем, что $f_n \xrightarrow{D} f$

Из (1) при $p \rightarrow \infty$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$$

□

Следствие 1. $f_n \not\xrightarrow{D} f \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N(\varepsilon) \quad \exists n \geq N(\varepsilon) \quad \exists p \quad \exists x_0 \in D : |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

$$\sum_1^\infty u_n(x), u_n(x) - \text{функции на } D. \quad (2)$$

Определение 2. Ряд (2) *сх-ся на D поточечно*, если

$$\exists S(x) \text{ на } D: S_n \xrightarrow{D} S \Leftrightarrow \forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, x) : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon, x)$$

Определение 3. Ряд (2) *сх-ся на D равномерно*, если он сх-ся к $S(x)$, $x \in D$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sup_{x \in D} |r_n(x)| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow 0$

$$S_n(x) - S(x) = r_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty u_k(x) - \text{остаток ряда}$$

Примеры 2.

$$1. \sum_{n=0}^\infty x^n, D = [0; \alpha], \alpha \in (0; 1)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow{D} \frac{1}{1 - x} = S(x)$$

$$\left| \sup_{0 < x < 1} |r_n(x)| = \sup \left| \sum_{k=n+1}^\infty x^k \right| \right| = \sup \frac{x^{n+1}}{1 - x} = \infty \Rightarrow$$

не является равном. сх-ся на D

Критерий равномерной сходимости функции ряда

Критерий Коши: ряд (2) равн. сх-ся на D \Rightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \quad \forall p : |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$$

Следствие 2. Ряд (2) не явл. сход. на D \Leftrightarrow

$$\exists \varepsilon_0 \quad \forall N : \exists n \geq N, p, x_0 \in D : |S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

1. Необходимый признак

Если ряд $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ равномерно сх-ся на D, то $u_n(x) \xrightarrow{D} 0$ при $n \rightarrow \infty$

Доказательство. Пусть ряд равномерно сх-ся $\Leftrightarrow S_n \xrightarrow{D} S$
 $|u_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D$ □

2. Признак Вейерштрасса

Пусть $\sup_{x \in D} |u_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \geq m$.

$\sum_1^{\infty} u_n(x)$ сходится $\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n$ сходится равномерно к D

Доказательство. $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad \forall x \in D \Rightarrow$
 $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \quad \forall p \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow$ по критерию Коши ряд равномерно сходится. □

Примеры 3. $\sum_1^{\infty} n \sin(nx) \cdot (\ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n)) = \sum_1^{\infty} n \sin(nx) \cdot \ln(1 + \frac{1}{n^3})$

3. Признаки равн. сх-ти Дирихле и Абеля

Определение 4. Послед-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ наз-ся **равн. ограниченной на D**, если $\exists c > 0 : \sup_{x \in D} |f_n(x)| \leq c \quad \forall n$

- Признак Дирихле:

$\sum_1^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится, если:

1) $\{a_n(x)\} \xrightarrow{D} 0$ и $\{a_n(x)\}$ монотон. $\forall x \in D$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равн. огр. на D

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ равн. сх-ся на D

- Признак Абеля:

$\sum_1^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится, если:

1) $\{a_n(x)\}$ равномерно огр. на D и $\{a_n(x)\}$ монотон. $\forall x \in D$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равн. сх-ся на D

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ равн. сх-ся на D