Лекция по математическому анализу №7.

Чудинов Никита (группа 145)

25 сентября 2015

Определение 1 (аналитическая функция)**.** Функция $f(z)$; $z \in \mathbb{C}$ называется *аналитической в точке*, если она представима степенным рядом с центром в этой точке

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \tag{1}$$

которая абсолютно сходится в некоторой ε-окрестности, $\varepsilon > 0$.

Пример.

- многочлены;
- отношения многочленов везде, кроме нулей знаменателя;
- $\sin(x), \cos(x)$.

Теорема. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в точке z_0. Тогда её представление в виде* (**??**) *единственно и*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Доказательство.

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow f'(z) = \sum_{0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

$$z = z_0 : f''(z_0) = z \cdot 1 \cdot c_2 \ldots$$

$$f^{(k)}(z_0) = k! c_k \; \forall k.$$

□

Ряды Тейлора

Определение 2. Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируема в точке x_0, тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

При каких условиях ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится хотя бы в некоторой непустой окрестности x_0?

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Свойства:

- $f(0) = 0$;
- $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{e^{t^2}} = 0$;
- $f^{(n)}(0) = 0$;

Ряд Тейлора для $f(x) = 0$, что не равно $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + r_n(x).$$

Теорема. *Если $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то функция $f(x)$ представима в этой точке в виде ряда Тейлора.*

Следствие. Если $f(x)$ бесконечно дифференцируема и все её производные равномерно ограничены в некоторой окрестности $v_2(x_0)$, то функция представима рядом Тейлора в этой окрестности.

Ряды Тейлора основных элементарных функций

1. $e^x: \; c_n = \dfrac{1}{k!}$;
2. $\sin(x): \; x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$;
3. $\cos(x): \; 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots$;
4. $\operatorname{sh}(x): \; x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots$;
5. $\operatorname{ch}(x): \; 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$;

Интегральная форма остатка

Следующий материал взят с сайта ИТМО и может отличаться от действительных лекций.

Теорема. *Пусть в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ дифференцируема $n + 1$ раз и её $(n + 1)$-я производная интегрируема. Тогда в окрестности точки x_0 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dfrac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$. Эта формула называется формулой Тейлора с записью остатка в интегральной форме.*