

# Математический анализ 3.

## Лекция 4.

Лепский Александр Евгеньевич\*

14 сентября 2015 г.

**Определение 1.** Говорят, что посл-ть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится на множестве  $D$  к функции  $f(x)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > N(\varepsilon) \forall x \in D$$
$$f_n \xrightarrow{D} f$$

**Лемма 1.** Если  $\exists a_n \xrightarrow{D} 0$  :

$$|f_m(x) - f(x)| \leq a_n \forall x \in D \forall n \geq m$$

, то  $f_m \Rightarrow f$

**Примеры 1.**

1.  $f_n(x) = \frac{n+1}{n^2+x^2}, x \in [-1, 1]; f_n \xrightarrow{D} 0 = f(x)$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{n+1}{n^2+x^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$$

2.  $f_n(x) = x^n, x \in (0; 1) = D$

$$f_n \xrightarrow{D} 0$$

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = \sup(x^n) = 1 \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Критерий равномерной сходимости

1.  $f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$

2. Критерий Коши:  $f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \forall x \in D$

*Доказательство.* 1) Необходимость.

Пусть  $f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in D$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall x \in D \forall n > N(\varepsilon)$$

$$f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \forall x \in D(1)$$

2) Достаточность: пусть верно (1)

$\forall$  фиксированного  $x \in D$  из (1)  $\Rightarrow \{f_n(x)\}$  - фундаментальная посл-ть вещ. чисел  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

Покажем, что  $f_n \xrightarrow{D} f$

Из (1) при  $p \rightarrow \infty$  :

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \forall x \in D \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$$

□

---

\* лекция записана Жуковым Иваном (группа 145)

**Следствие 1.**  $f_n \not\stackrel{D}{\rightarrow} f \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall N(\varepsilon) \exists n \geq N(\varepsilon) \exists p \exists x_0 \in D : |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

$$\sum_1^\infty u_n(x), u_n(x) - \text{функции на } D. \quad (2)$$

**Определение 2.** Ряд (2) сх-ся на  $D$  **поточечно**, если

$$\exists S(x) \text{ на } D: S_n \stackrel{D}{\rightarrow} S \Leftrightarrow \forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x) : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \forall n > N(\varepsilon, x)$$

**Определение 3.** Ряд (2) сх-ся на  $D$  **равномерно**, если он сх-ся к  $S(x)$ ,  $x \in D$  и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sup_{x \in D} |r_n(x)| \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$

$$S_n(x) - S(x) = r_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty u_k(x) - \text{остаток ряда}$$

**Примеры 2.**

$$1. \sum_{n=0}^\infty x^n, D = [0; \alpha], \alpha \in (0; 1)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \stackrel{D}{\rightarrow} \frac{1}{1 - x} = S(x)$$

$$\left| \sup_{0 < x < 1} |r_n(x)| = \sup \left| \sum_{k=n+1}^\infty x^k \right| \right| = \sup \frac{x^{n+1}}{1 - x} = \infty \Rightarrow$$

не является равномер. сх-ся на  $D$

Критерий равномерной сходимости функции ряда

**Критерий Коши:** ряд (2) равн. сх-ся на  $D \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \forall p : |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \forall x \in D$$

**Следствие 2.** Ряд (2) не явл. сход. на  $D \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon_0 \forall N : \exists n \geq N, p, x_0 \in D : |S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

### 1. Необходимый признак

Если ряд  $\sum_1^{\infty} u_n(x)$  равномерно сх-ся на D, то  $u_n(x) \xrightarrow{D} 0$  при  $n \rightarrow \infty$

*Доказательство.* Пусть ряд равномерно сх-ся  $\Leftrightarrow S_n \xrightarrow{D} S$   
 $|u_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D$  □

### 2. Признак Вейерштрасса

Пусть  $\sup_{x \in D} |u_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \geq m$ .

$\sum_1^{\infty} u_n(x)$  сходится  $\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n$  сходится равномерно к D

*Доказательство.*  $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad \forall x \in D \Rightarrow$   
 $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \quad \forall p \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow$  по критерию Коши ряд равномерно сходится. □

**Примеры 3.**  $\sum_1^{\infty} n \sin(nx) \cdot (\ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n)) = \sum_1^{\infty} n \sin(nx) \cdot \ln(1 + \frac{1}{n^3})$

### 3. Признаки равн. сх-ти Дирихле и Абеля

**Определение 4.** Послед-ть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  наз-ся **равн. ограниченной на D**, если  $\exists c > 0 : \sup_{x \in D} |f_n(x)| \leq c \quad \forall n$

- Признак Дирихле:

$\sum_1^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$  сходится, если:

1)  $\{a_n(x)\} \xrightarrow{D} 0$  и  $\{a_n(x)\}$  монотон.  $\forall x \in D$

2)  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$  равн. огр. на D

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$  равн. сх-ся на D

- Признак Абеля:

$\sum_1^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$  сходится, если:

1)  $\{a_n(x)\}$  равномерно огр. на D и  $\{a_n(x)\}$  монотон.  $\forall x \in D$

2)  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$  равн. сх-ся на D

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$  равн. сх-ся на D