

# Краткая теория к экзамену по высшей алгебре 19-20 июня 2015

Чудинов Никита (группа 14-4)

## 1 Лекция 1

**Определение 1.1.** Множество с бинарной операцией — это множество  $M$  с заданным отображением

$$M \times M \rightarrow M, \quad (a, b) \mapsto a \circ b.$$

**Определение 1.2.** Множество с бинарной операцией  $(M, \circ)$  называется *полугруппой*, если данная бинарная операция ассоциативна, то есть

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \quad \forall a, b, c \in M.$$

**Определение 1.3.** Полугруппа  $(S, \circ)$  называется *моноидом*, если в ней есть *нейтральный элемент*  $e \in S$ , такой, что

$$\forall a \in S: \quad e \circ a = a \circ e = a.$$

**Определение 1.4.** Моноид называется *группой*, если для каждого элемента  $a \in S$  найдётся *обратный элемент*  $a^{-1}$ , такой, что

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

**Определение 1.5.** Группа  $G$  называется *коммутативной* или *абелевой*, если групповая операция коммутативна, то есть

$$a \circ b = b \circ a, \quad \forall a, b \in G.$$

**Определение 1.6.** *Порядок* группы  $G$  — это количество элементов в  $G$ . Группа называется *конечной*, если её порядок конечен, и *бесконечной* иначе. Обозначается  $|G|$ .

**Определение 1.7.** Подмножество  $H$  группы  $G$  называется *подгруппой*, если

$$|H| > 0, \quad a \circ b^{-1} \in H, \quad \forall a, b \in H.$$

**Предложение 1.1.** Всякая подгруппа в  $(\mathbb{Z}, +)$  имеет вид  $k\mathbb{Z}$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$

**Определение 1.8.** Пусть  $G$  — группа и  $g \in G$ . *Циклической подгруппой*, порождённой элементом  $g$  называется подмножество

$$\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \in G.$$

Элемент  $g$  называется *порождающим* или *образующим* для этой группы  $\langle g \rangle$ .

**Определение 1.9.** Пусть  $G$  — группа и  $g \in G$ . *Порядком* элемента  $g$  называется такое наименьшее натуральное число  $m$ , что  $g^m = e$ . Если такого натурального числа не существует, то говорят, что порядок  $g$  равен бесконечности. Обозначение:  $\text{ord}(g)$ .

**Предложение 1.2.** Пусть  $G$  — группа и  $g \in G$ . Тогда  $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$ .

**Определение 1.10.** Группа  $G$  называется *циклической*, если

$$\exists g \in G, \quad G = \langle g \rangle.$$

**Определение 1.11.** Пусть  $G$  — группа,  $H \subseteq G$  — подгруппа и  $g \in G$ . *Левым смежным классом* элемента  $g$  группы  $G$  по подгруппе  $H$  называется подмножество

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

**Определение 1.12.** Пусть  $G$  — группа,  $H \subseteq G$  — подгруппа. *Индексом* подгруппы  $H$  в группе  $G$  называется число левых смежных классов  $G$  по  $H$ . Обозначается  $[G : H]$ .

**Теорема (Лагранж).** Пусть  $G$  — конечная группа и  $H \subseteq G$  — подгруппа. Тогда

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

## 2 Лекция 2

**Определение 2.1.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *нормальной*, если

$$gH = Hg, \quad \forall g \in G.$$

**Предложение 2.1.** Для подгруппы  $H \subseteq G$  следующие условия эквивалентны:

1.  $H$  нормальна;
2.  $gHg^{-1} \subseteq H, \quad \forall g \in G;$
3.  $gHg^{-1} = H, \quad \forall g \in G;$

**Определение 2.2.** Множество  $G/H$  с указанной операцией называется *факторгруппой* группы  $G$  по нормальной подгруппе  $H$ .

**Определение 2.3.** Пусть  $G$  и  $F$  — группы. Отображение  $\varphi : G \rightarrow F$  называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \forall a, b \in G.$$

**Определение 2.4.** Гомоморфизм групп  $\varphi : G \rightarrow F$  называется *изоморфизмом*, если отображение  $\varphi$  биективно.

**Определение 2.5.** Группы  $G$  и  $F$  называют *изоморфными*, если между ними есть изоморфизм. Обозначение:  $G \cong F$ .

**Теорема.** Всякая бесконечная циклическая группа  $G$  изоморфна группе  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Теорема.** Всякая циклическая группа порядка  $n$  изоморфна группе  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .

**Определение 2.6.** С каждым гомоморфизмом групп  $\varphi : G \rightarrow F$  связаны его *ядро*

$$\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_F\}$$

и *образ*

$$\operatorname{im}(\varphi) = \{a \in F \mid \exists g \in G : \varphi(g) = a\}.$$

**Предложение 2.2.** Пусть  $\varphi : G \rightarrow F$  — гомоморфизм групп. Тогда подгруппа  $\ker(\varphi)$  нормальна в  $G$ .

**Теорема (о гомоморфизме).** Пусть  $\varphi : G \rightarrow F$  — гомоморфизм групп. Тогда группа  $\operatorname{im}(\varphi)$  изоморфна факторгруппе  $G/\ker(\varphi)$ .

**Определение 2.7.** Центр группы  $G$  — это подмножество

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba, \quad \forall b \in G\}.$$

**Предложение 2.3.** Центр  $Z(G)$  является нормальной подгруппой группы  $G$ .

**Определение 2.8.** Прямым произведением групп  $G_1, \dots, G_m$  называется множество

$$G_1 \times \dots \times G_m = \{(g_1, \dots, g_m) \mid g_1 \in G_1, \dots, g_m \in G_m\}.$$

**Теорема (о факторизации и сомножителях).** Пусть  $H_1, \dots, H_m$  — нормальные подгруппы в группах  $G_1, \dots, G_m$  соответственно. Тогда  $H_1 \times \dots \times H_m$  — нормальная подгруппа в  $G_1 \times \dots \times G_m$  и имеет место изоморфизм групп

$$(G_1 \times \dots \times G_m) / (H_1 \times \dots \times H_m) \cong G_1/H_1 \times \dots \times G_m/H_m$$

**Теорема.** Пусть  $n = ml$  — разложение натурального числа  $n$  на два взаимно простых множителя. Тогда имеет место изоморфизм групп

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l.$$

### 3 Лекция 3

**Определение 3.1.** Абелева группа  $A$  называется *конечно порождённой*, если найдутся такие элементы  $a_1, \dots, a_n \in A$ , что всякий элемент  $a \in A$  представим в виде  $a = s_1 a_1 + \dots + s_n a_n$  для некоторых целых чисел  $s_1, \dots, s_n$ . При этом элементы  $a_1, \dots, a_n$  называются *порождающими* или *образующими* группы  $A$ .

**Определение 3.2.** Конечно порождённая абелева группа  $A$  называется *свободной*, если в ней существует *базис*, то есть такой набор элементов  $a_1, \dots, a_n$ , что каждый элемент  $a \in A$  единственным образом представим в виде  $a = s_1 a_1 + \dots + s_n a_n$ , где  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}$ . При этом число  $n$  называется рангом свободной абелевой группы  $A$  и обозначается  $\text{rk} A$ .

**Предложение 3.1.** Любые два базиса свободной группы содержат одинаковое число элементов.

**Предложение 3.2.** Всякая свободная абелева группа ранга  $n$  изоморфна группе  $\mathbb{Z}^n$ .

**Теорема.** Всякая подгруппа  $N$  свободной абелевой группы  $L$  ранга  $n$  является свободной абелевой группой ранга  $\leq n$ .

**Теорема** (о согласованных базисах). Для всякой подгруппы  $N$  свободной абелевой группы  $L$  ранга  $n$  найдётся такой базис  $e_1, \dots, e_n$  группы  $L$  и такие натуральные числа  $u_1, \dots, u_m$ ,  $m \leq n$ , что  $u_1 e_1, \dots, u_m e_m$  — базис группы  $N$  и  $u_i | u_{i+1}$  при  $i = 1, \dots, m-1$ .

**Предложение 3.3.** Пусть  $e'_1, \dots, e'_n$  — некоторый набор элементов из  $\mathbb{Z}^n$ . Выразив эти элементы через стандартный базис  $e_1, \dots, e_n$ , мы можем записать

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C,$$

где  $C$  — целочисленная квадратная матрица порядка  $n$ .

Элементы  $e'_1, \dots, e'_n$  составляют базис группы  $\mathbb{Z}^n$  тогда и только тогда, когда  $\det C = \pm 1$ .

**Определение 3.3.** Целочисленными элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования следующих трёх типов:

1. Прибавление к одной строке другой, умноженной на целое число;
2. Перестановка двух строк;
3. Умножение одной строки на  $-1$ .

Аналогично определяются целочисленные элементарные преобразования столбцов матрицы.

**Предложение 3.4.** Всякую прямоугольную матрицу  $C = (c_{ij})$  размера  $n \times m$  назовём *диагональной* и обозначим  $\text{diag}(u_1, \dots, u_p)$ , если  $c_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $c_{ii} = u_i$  при  $i = 1, \dots, p$ , где  $p = \min(n, m)$ .

### 4 Лекция 4

**Определение 4.1.** Конечная абелева группа называется *примарной*, если её порядок равен  $p^k$  для некоторого простого числа  $p$ .

**Теорема.** Всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  разлагается в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп, то есть

$$A \cong \bigoplus_{p_1} \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

где  $p_1, \dots, p_s$  — простые числа (необязательно попарно различные), а  $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ . Кроме того, число бесконечных циклических слагаемых, а также число и порядки примарных циклических слагаемых определено однозначно.

**Предложение 4.1.** Всякая конечная абелева группа разлагается в прямую сумму примарных циклических подгрупп, причем число и порядки примарных циклических слагаемых определено однозначно.

**Определение 4.2.** Экспонентой конечной абелевой группы  $A$  называется число  $\text{exp} A$ , равное наименьшему общему кратному порядков элементов из  $A$ .

**Предложение 4.2.** Конечная абелева группа  $A$  является циклической тогда и только тогда, когда  $\text{exp} A = |A|$ .

## 5 Лекция 5

**Определение 5.1.** Действием группы  $G$  на множестве  $X$  называется отображение  $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$ , удовлетворяющее следующим условиям:

1.  $ex = x, \quad \forall x \in X$  ( $e$  — нейтральный элемент группы  $G$ );
2.  $g(hx) = (gh)x, \quad \forall g, h \in G, x \in X$ .

**Определение 5.2.** Орбитой точки  $x \in X$  называется подмножество

$$Gx = \{x' \in X \mid x' = gx \text{ для некоторого } g \in G\} = \{gx \mid g \in G\}$$

**Определение 5.3.** Стабилизатором (стационарной подгруппой) точки  $x \in X$  называется подгруппа  $\text{St}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ .

**Определение 5.4.** Действие  $G$  на  $X$  называется *транзитивным*, если для любых  $x, x' \in X$  найдётся такой элемент  $g \in G$ , что  $x' = gx$ . Иными словами, все точки множества  $X$  образуют одну орбиту.

**Определение 5.5.** Действие  $G$  на  $X$  называется *свободным*, если для любой точки  $x \in X$  условие  $gx = x$  влечёт  $g = e$ . Иными словами,  $\text{St}(x) = \{e\}$  для всех  $x \in X$ .

**Определение 5.6.** Действие  $G$  на  $X$  называется *эффективным*, если условие  $gx = x$  для всех  $x \in X$  влечёт  $g = e$ . Иными словами,  $\bigcup_{x \in X} \text{St}(x) = \{e\}$ .

**Определение 5.7.** Ядром неэффективности действия группы  $G$  на множестве  $X$  называется подгруппа  $K = \{g \in G \mid gx = x, \forall x \in X\}$ .

**Определение 5.8.** Два действия группы  $G$  на множествах  $X$  и  $Y$  называются *изоморфными*, если существует такая биекция  $\varphi : X \rightarrow Y$ , что

$$\varphi(gx) = g\varphi(x), \quad \forall g \in G, x \in X.$$

**Предложение 5.1.** Всякое свободное транзитивное действие группы  $G$  на множестве  $X$  изоморфно действию группы  $G$  на себе левыми сдвигами.

**Предложение 5.2.** Действия группы  $G$  на себе правыми и левыми сдвигами изоморфны.

**Теорема (Кэли).** Всякая конечная группа  $G$  порядка  $n$  изоморфна подгруппе симметрической группы  $S_n$ .

## 6 Лекция 6

**Определение 6.1.** Кольцом называется множество  $R$  с двумя бинарными операциями «+» (сложение) и « $\times$ » (умножение), обладающими следующими свойствами:

1.  $(R, +)$  является абелевой группой (называемой *аддитивной группой* кольца  $R$ );
2. выполнены левая и правая дистрибутивности, то есть

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca, \quad \forall a, b, c \in R;$$

3.  $a(bc) = (ab)c, \quad \forall a, b, c \in R$  (ассоциативность умножения);

4.  $\exists 1 \in R$  (называемый единицей), что

$$a1 = 1a = a, \quad \forall a \in R.$$

**Определение 6.2.** Кольцо  $R$  называется *коммутативным*, если  $ab = ba, \quad \forall a, b \in R$ .

**Определение 6.3.** Элемент  $a \in R$  называется *обратимым*, если  $\exists b \in R, ab = ba = 1$ .

**Определение 6.4.** Элемент  $a \in R$  называется *левым* (соответственно *правым*) *делителем нуля*, если  $a \neq 0$  и  $\exists b \in R, b \neq 0, ab = 0$  (соответственно,  $ba = 0$ ).

**Определение 6.5.** Элемент  $a \in R$  называется *нильпотентом*, если  $a \neq 0$ , и  $\exists m \in \mathbb{N}$ , что  $a^m = 0$ .

**Определение 6.6.** Элемент  $a \in R$  называется *идемпотентом*, если  $a^2 = a$ .

**Определение 6.7.** *Поле* называется коммутативное кольцо ассоциативное кольцо  $K$  с единицей, в котором всякий ненулевой элемент обратим.

**Предложение 6.1.** *Кольцо вычетов  $\mathbb{Z}_n$  является полем тогда и только тогда, когда  $n$  — простое число.*

**Определение 6.8.** *Алгеброй над полем  $K$  (или, кратко,  $K$ -алгеброй) называется множество  $A$  с операциями сложения, умножения и умножения на элементы поля  $K$ , обладающими следующими свойствами:*

1. относительно сложения и умножения на элементы из  $K$  множество  $A$  есть векторное пространство;
2. относительно сложения и умножения  $A$  есть кольцо;
3.  $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$ ,  $\forall \lambda \in K; a, b \in A$ .

*Размерностью* алгебры  $A$  называется её размерность как векторного пространства над  $K$ . Обозначение:  $\dim_K A$ .

**Определение 6.9.** *Подкольцом* кольца  $R$  называется всякое подмножество  $R' \subset R$ , замкнутое относительно операций сложения и умножения (то есть  $a + b \in R', ab \in R', \forall a, b \in R'$ ) и являющееся кольцом относительно этих операций. *Подполем* называется всякое подкольцо, являющееся полем.

**Определение 6.10.** *Подалгеброй* алгебры  $A$  (над полем  $K$ ) называется всякое подмножество  $A' \subset A$ , замкнутое относительно всех трёх имеющихся в  $A$  операций (сложения, умножения и умножения на элементы из  $K$ ) и являющееся алгеброй (над  $K$ ) относительно этих операций.

**Определение 6.11.** *Изоморфизмом* колец, алгебр называется всякий гомоморфизм, являющийся биекцией.

**Определение 6.12.** Подмножество  $I$  кольца  $R$  называется (*двусторонним*) *идеалом*, если оно является подгруппой по сложению и  $ra \in I, ar \in I, \forall a \in I, r \in R$ .

**Определение 6.13.** Идеал  $I$  называется *главным*, если существует такой элемент  $a \in R, I = (a)$ . В таком случае говорят, что  $I$  порождён элементом  $a$ .

**Определение 6.14.** Кольцо  $R/I$  называется *факторкольцом* кольца  $R$  по идеалу  $I$ .

**Теорема** (о гомоморфизме для колец). Пусть  $\varphi : R \rightarrow R'$  — гомоморфизм колец. Тогда имеет место изоморфизм

$$R/\ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi$$

**Определение 6.15.** Кольцо  $R$  называется *простым*, если в нём нет собственных (двусторонних) идеалов.

**Определение 6.16.** *Центром* алгебры  $A$  над полем  $K$  называется её подмножество

$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba, \quad \forall b \in A\}.$$

**Теорема.** Пусть  $K$  — поле,  $n$  — натуральное число и  $A = \operatorname{Mat}(n \times n, K)$  — алгебра квадратных матриц порядка  $n$  над полем  $K$ .

1.  $Z(A) = \{\lambda E \mid \lambda \in K\}$ , где  $E$  — единичная матрица (в частности,  $Z(A)$  — одномерное подпространство в  $A$ );
2. алгебра  $A$  проста (как кольцо).