Лекция по математическому анализу №2.

Чудинов Никита (группа 145)

7 сентября 2015

Определение 1 (Признак д'Аламбера)**.** Если для ряда $\sum\limits_{1}^{\infty}$ существует такое число $q, 0 < q < 1$, что, начиная с некоторого момента $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q$, то данный ряд абсолютно сходится. Если же, начиная с некоторого номера $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, то ряд расходится.

Следствие. Пусть $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$; $a_n > 0\ \forall n$. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, то:

1. при $\lambda < 1$ ряд сходится;
2. при $\lambda > 1$ ряд расходится;
3. при $\lambda = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};\ a_n = 2^n n!;\ a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)n!};$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Ряд сходится.

Пример.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n};\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 = \lambda.$$

Ряд, по этому признаку, может как сходиться, так и расходиться.

Определение 2 (Признак Коши)**.** Пусть для ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$; $a_n \geqslant 0\ \forall n\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Тогда:

1. при $\lambda < 1$ ряд сходится;
2. при $\lambda > 1$ ряд расходится;
3. при $\lambda = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример.

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2};$$
$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^2} < 1.$$

Теорема. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, *то* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$.

Определение 3 (Признак Гаусса)**.** Пусть дан ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n;\ a_n > 0\ \forall n$. Если можно выразить

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \dots + \frac{\gamma_n}{n^\lambda};\ \lambda > 1;\ |\gamma_n| < M\ \forall n;$$

Тогда:

1. При $\alpha > 1$ ряд сходится;
2. При $\alpha < 1$ ряд расходится;
3. При $\alpha = 1$:
   (a) При $\beta > 1$ ряд сходится;
   (b) При $\beta \leqslant 1$ ряд расходится.

Пример.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n};\ \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow\ 3(\text{б})\ \Rightarrow \text{ряд расходится.}$$

Определение 4 (Знакочередующиеся ряды)**.** *Знакочередующимися* называются ряды вида:

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n;\ a_n > 0\ \forall n.$$

Теорема (Лейбниц)**.** *Если у знакочередующегося ряда* $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n;\ a_n > 0\ \forall n;\ a_n$ *монотонно стремится к* 0 $(a_n \searrow 0)$, *то ряд сходится.*

Следствие. Если $S = \sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n;\ a_n > 0\ \forall n$, то $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}\ \forall n$.

Определение 5 (Признак Дирихле)**.** Рассмотрим ряд вида $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n b_n$. Если:

1. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant M\ \forall k, n$ — частная сумма ограничена;
2. a_n монотонно стремится к 0;

то ряд сходится.

Следствие (Признак Абеля)**.** Рассмотрим ряд вида $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n b_n$. Если:

1. $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ сходится;
2. a_n — монотонная ограниченная последовательность;

то ряд сходится.