Лекция по теории вероятности №2.

Чудинов Никита (группа 145)

7 сентября 2015

Заметка. Список свойств $P(A)$:

1. $\forall A \in \Omega P(A) \geqslant 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Если $A \cdot B = \varnothing$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Определение 1. Если $A \cdot B = \varnothing$, то события A и B *несовместны.*

Определение 2 (Геометрическое определение вероятности)**.** Пусть мы имеем n-мерное пространство конечной меры Ω. Тогда область A в ней будет показывать событие, а площадь его по отношению к площади пространства будет вероятностью:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Определение 3 (Частота)**.** Пусть опыт повторён n раз, из которых событие A произошло m_A раз. Тогда величина $\dfrac{m_A}{N}$ называется *частотой* события.

Определение 4 (Частотное определение (определение фон Мизеса))**.** Пусть m_A — число наступлений события A. Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{m_A}{N} \to P(A),$$

является вероятностью события A.

Определение 5 (Аксиоматическое определение Колмогорова)**.** Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий на пространстве Ω. Тогда числовая функция $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая условиям

1. $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \geqslant 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$ попарно несовместны, то $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$;

называется вероятностью.

Определение 6. Тройка $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ называется вероятностным пространством.

Заметка. Свойства $P(A)$:

1. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
4. $\forall A \subseteq \Omega : 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

5. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

Определение 7. Пусть $P(B) > 0$. Тогда $P(A)$, вычисленная в предположении того, что событие B уже произошло, называется *условной вероятностью* события A при условии B:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{|A \cdot B|}{|B|}.$$

Определение 8. События A и B называются *независимыми*, если $P(A/B) = P(A)$.