Математический анализ 3.
Лекция 5.

Лепский Александр Евгеньевич *

1 октября 2015 г.

Примеры 1.

1. $\sum\limits_{0}^{\infty} x^n, D = [-\alpha; \alpha]; 0 < \alpha < 1$

   По признаку Вейерштрасса:

   $sup|x^n| \leqslant \alpha^n\ \forall n, \sum\limits_{1}^{\infty} \alpha^n$ *сходится* $\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} x^n$ *на* $D = [-\alpha; \alpha]$

2. $\sum\limits_{0}^{\infty} x^n, D = [0; 1]$

   $\sup\limits_{x \in D} |r_n(x)| = \sup\limits_{0 \leqslant x < 1} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k = \sup \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \infty \nrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$

   Поэтому ряд расходится на D.

3. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{sin(nx)}{n^\alpha}$

   $D = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \varepsilon \in (0, \pi)$

   По признаку Дирихле:

   $a_n(x) = sin(nx), \left|\sum\limits_{1}^{n} a_k(x)\right| = \left|\sum\limits_{1}^{n} sin(kx)\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|sin(\frac{1}{2})\right|}$

   $\sup\limits_{\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon} \left|\sum\limits_{1}^{n} a_k(x)\right| \leq \sup\limits_{\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon} \dfrac{1}{\left|sin(\frac{x}{2})\right|} = \dfrac{1}{sin(\frac{\varepsilon}{2})}\ \forall n \Rightarrow$ *равномерная ограниченность частичных сумм.*

   По признаку Дирихле ряд равномерно сходится на D.

4. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{sin(nx)}{n^\alpha}, D = [0, 2\pi]$

   $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

   $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |r_n(x)| = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{sin(kx)}{k^\alpha}\right| \geqslant \lim\limits_{x_k = \frac{\pi}{2k} \to 0} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{sin(x_k)}{k^\alpha}\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *т.к* $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ *расходится.*

*лекция записана Жуковым Иваном (группа 145)

Аналитические свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

1. *Непрерывность:*

Определение 1. $\varphi(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** x_0 *на множестве* D, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma(\varepsilon) : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in D \cap \{x : |x - x_0| < \sigma\}$

Теорема 1. *Пусть есть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. *Если* $f_n(x)$ *непрерывна в* $D\ \ \forall n$ *и* $f_n \xrightarrow{D} f$, *то* f *непрерывна в* D.

Доказательство. $\forall x_0 \in D\, |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$
$\leqslant \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}(\text{т.к.} f_n \xrightarrow{D} f)} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}(\text{т.к.} f_n \xrightarrow{D} f)}$ ■

Замечание 1. *При выполнении условий*

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

$\Rightarrow f$ *— непрерывна на* D.

Следствие 1. *Если* $u_k(x)$ *— непрерывна в* D *и* $\sum\limits_{1}^{\infty} u_k(x)$ *равномерно сходится в* D, *то* $S(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} u_k(x)$ *— непрерывна в* D.

2. *Интегрируемость:*

Теорема 2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, f_n(x)$ *— непр. в* $D = [a; b]$ *и* $f_n \xrightarrow{D} f$. *Тогда*

$$\underbrace{\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t}_{=\Phi_n(x)} \xrightarrow{[a;b]} \underbrace{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}_{=\Phi(x)}$$

Доказательство. Т.к. f_n — непрерывна в D и $f_n \xrightarrow{D} f$, то по предыдущей теореме $\Rightarrow f$ — непрерывна в D $\Rightarrow f$ — интегрируема на $D = [a; b]$

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \int_a^x \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{<\varepsilon}\mathrm{d}t \leqslant (b - a) \cdot \varepsilon$$ ■

Следствие 2. $u_k(x)$ *— непрерывна в* $D = [a; b]\ \forall k$ *и ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty} u_k(x)$ *равномерно сходится на* D.

Тогда

$$\int_a^x \sum_{1}^{\infty} u_k(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\,dt.$$

Замечание 2. *Результат теоремы и её следствие можно усилить, если непрерывность заменить на интегрируемость. (С сохранением условий равномерной сходимости.)*

Примеры 2.

(a) $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{x^{k-1}}{k}, x\in(-1;1); [-\alpha;\alpha]; 0<\alpha<1;$

$\sum\limits_{0}^{\infty} x^k$ *— равномерно сходится на* $[-\alpha;\alpha]$*;*

$\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{x^{k-1}}{k} = \dfrac{ln(1-x)}{x} - ln(1-x) = \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \int_a^x (\sum_{k=0}^{\infty} tk)\mathrm{d}t \underset{\textit{теорема}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(\int_0^x t^k \mathrm{d}t) =$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\Big|_0^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{k+1}}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{k} = x\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{k=1}}{l}$ *непрывна в* D*.*

3. *Дифференциируемость:*

Теорема 3. *Пусть*

(a) $f_n(x)$ *— непрерывная дифференцируемая функция в* $D=[a;b]$*;*

(b) $f'_n \xrightarrow{D} \varphi$*;*

(c) $\exists c\in[a;b]: \sum\limits_{1}^{\infty} f_n(c)$ *— сходится, т.е.* $\Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$*;*

Тогда

$$f' = \varphi \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Доказательство.

$$f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f'_n(t)\mathrm{d}t \underset{\text{теорема}}{\xrightarrow{D}} \int_c^x \varphi(t)\mathrm{d}t \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f. \tag{1}$$

В пределе в (1) при $n\to\infty$:
$f(x)-f(c) = \displaystyle\int_c^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ — дифференцируемая функция $\Rightarrow\ f'(x)=\varphi(x)$. ∎