Теория вероятностей и математическая статистика. Лекция 5. *

30 сентября 2015

Вычисление функции распределения по ряду.

Пусть есть $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_5\}$ и для $\{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ известны $p_i = \underset{\sum_1^n p_i = 1}{P(\xi = x_i)}$.

Тогда p_5 можно вычислить как $P(\Omega) - \sum\limits_1^4 p_i = 1 - \sum\limits_1^4 p_i$

Функция распределения $F_\xi(x) = P(\omega)$, $\omega : \xi(\omega) \le x$

Определение 1. Неотрицательная функция $f_\xi(x)$, т.ч. $F_\xi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, называется **плотностью распределения случайной величины** ξ

Свойства плотности распределения случайной величины:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = F_\xi(+\infty) = 1$
2. $f_\xi(x) \ge 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^1$
3. $\displaystyle\int_{a}^{b} f_\xi(x)dx = F_\xi(b) - F_\xi(a) = P(\xi)$, $a < \xi \le b$
4. В точке непрерывности функции $f_\xi : F'_\xi = f_\xi(x)$

   $f_x = F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(\xi + \Delta x) - P(\xi)}{\Delta x}$, $\xi \le x$

   $f(x) \cdot \Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\approx} P(\xi + \Delta x)$, $x < \xi \le x$

Примеры 1.

- Кантрова лестница:

$$F_\xi = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ \frac{1}{2} \cdot F(3x), 0 \le x \le \dfrac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot F(3x - 2), \frac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

*Свёрстано Жуковым Иваном. Материал может содержать ошибки-хуешибки

Пусть $\dfrac{1}{3} \le x \le \dfrac{2}{3} \Rightarrow F(3x) = \dfrac{1}{2}$

Лемма 1. $F_\xi(x) = \alpha_1 \cdot F_1(x) + \alpha_2 \cdot F_2(x) + \alpha_3 \cdot F_3(x)$, где $\alpha_i \ge 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

Замечание 1. Т.к. в нашем курсе не будет сингулярных величин, то *непрерывные величины* следует понимать как ***абсолютно*** *непрерывные величины.*

Числовые характеристики случайной величины.

Определение 2. Математическим ожиданием *дискретной* случайной величины ξ называется число

$$\underset{\text{или} M[\xi]}{E[\xi]} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Свойства $E[\xi]$:

1. $E(c) = c$, где c - constant.
2. $E(c\xi) = \sum_{1}^{n} cp_i x_i = c \cdot E[\xi]$
3. Пусть $a \le \xi \le b$, тогда $a \le E[\xi] \le b$

   $E[\xi] = \sum_{1}^{n} x_i p_i \le \sum_{1}^{n} bp_i = b \cdot \underbrace{\sum_{1}^{n} p_i}_{=1}$
4. $E[\xi_1 + \xi_2] = E[\xi_1] + E[\xi_2]$
5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, тогда

   $E[\eta] = \sum_{1}^{n} \varphi(x_i) p_i$

Определение 3. Дисперсией случайной величины ξ называется число
$D[\xi] = E[\xi - E[\xi]]^2$

Определение 4. Среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ есть число
$\sigma = \sqrt{D[\xi]}$

Свойства дисперсии случайной величины

1. $D[c] = 0$
2. $D[c\xi] = E[c\xi - E[c\xi]]^2$
3. $D[\xi] = E[\xi^2 - 2\xi E[\xi] + (E[\xi])^2] = E[\xi^2] - 2(E[\xi])^2 + (E[\xi])^2 = E[\xi^2] - (E[\xi])^2$
4. $D[\xi] \ge 0\ \forall \xi$
5. $D[\xi_1 + \xi_2] = E[\xi_1 + \xi_2]^2 - (E[\xi_1 + \xi_2])^2 = E[\xi_1]^2 + 2E[\xi_1\xi_2] + E[\xi_2]^2 - \big((E[\xi_1])^2 + 2E[\xi_1] \cdot E[\xi_2] + (E[\xi_2])^2\big) = D[\xi_1] + D[\xi_2] + 2(E[\xi_1\xi_2] - E[\xi_1] \cdot E[\xi_2]) = cov(\xi_1, \xi_2)$ - ковариация ξ_1 и ξ_2