Математический анализ 3.
Лекция 5.

Лепский Александр Евгеньевич *

19 сентября 2015 г.

Примеры 1.

1. $\sum\limits_{0}^{\infty} x^n, D = [-\alpha; \alpha]; 0 < \alpha < 1$

   По пр. Вейерштрасса

   $sup\, |x^n| \le \alpha^n\ \forall n, \sum\limits_{1}^{\infty} \alpha^n$ *сходится* $\Rightarrow \sum\limits_{0}^{\infty} x^n$ *на* $D = [-\alpha; \alpha]$

2. $\sum\limits_{0}^{\infty} x^n, D = [0; 1]$

   $\sup\limits_{x \in D} |r_n(x)| = \sup\limits_{0 \le x < 1} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k = \sup \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \infty \not\to 0$ *при* $n \to \infty$

   Поэтому ряд рас-ся на D неравномерно.

3. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{sin(nx)}{n^\alpha}$

   $D = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \varepsilon \in (0, \pi)$

   По признаку Дирихле:

   $a_n(x) = sin(nx), \left|\sum\limits_{1}^{n} a_k(x)\right| = \left|\sum\limits_{1}^{n} sin(kx)\right| \le \dfrac{1}{\left|sin(\frac{1}{2})\right|}$

   $\sup\limits_{\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon} \left|\sum\limits_{1}^{n} a_k(x)\right| \le \sup\limits_{\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon} \dfrac{1}{\left|sin(\frac{x}{2})\right|} = \dfrac{1}{sin(\frac{\varepsilon}{2})}\ \forall n \Rightarrow$ *равномерная ограниченность частичных сумм*

   По пр. Дирихле ряд равн. сх-ся на D

4. $\sum\limits_{0 \le \alpha \le 1}^{\infty} 1 \dfrac{sin(nx)}{n^\alpha}, D = [0, 2\pi]$

   $\sup\limits_{0 \le x \le 2\pi} |r_n(x)| = \sup\limits_{0 \le x \le 2\pi} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{sin(kx)}{k^\alpha}\right| \ge \lim\limits_{x_k = \frac{\pi}{2k} \to 0} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{sin(x_k)}{k^\alpha}\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *т.к* $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ *расх.*

*лекция записана Жуковым Иваном (группа 145)

1. *Непрерывность:*

Определение 1. $\varphi(x)$ *наз-ся* ***непр. в точке*** x_0 *на множестве* D*, если* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\sigma(\varepsilon) : |\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in D \cap \{x : |x-x_0| < \sigma\}$

Теорема 1. *Пусть есть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$*. Если* $f_n(x)$ *непр. в* D $\forall n$ *и* $f_n \xrightarrow{D} f$*, то* f *непр. в* D*.*

Доказательство. $\forall x_0 \in D\, |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$
$\leq \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}('cause f_n \xrightarrow{D} f)} + |f_n(x)-f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}('cause f_n \xrightarrow{D} f)}$ ∎

Замечание 1. *При выполнении условий*

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

$\Rightarrow f$ *- непр. на* D*.*

Следствие 1. *Если* $u_k(x)$ *- непр. в* D *и* $\sum\limits_{1}^{\infty} u_k(x)$ *равн. сх-ся в* D*, то* $S(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} u_k(x)$ *- непр. в* D

2. *Интегрируемость:*

Теорема 2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, f_n(x)$ *- непр. в* $D=[a;b]$ *и* $f_n \xrightarrow{D} f$*.Тогда*

$$\underbrace{\int_a^x f_n(t)dt}_{=\Phi_n(x)} \xrightarrow{[a;b]} \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{=\Phi(x)}$$

Доказательство. Т.к. f_n - непр в D и $f_n \xrightarrow{D} f$, то по пред. теор. $\Rightarrow f$ - непр. в D $\Rightarrow f$ - интегр. на $D=[a;b]$

$|\Phi_n(x)-\Phi(x)| \leq \int_a^x \underbrace{|f_n(t)-f(t)|}_{<\varepsilon}dt \leq (b-a)\cdot\varepsilon$ ∎

Следствие 2. $u_k(x)$ *- непр. в* $D=[a;b]$ $\forall k$ *и ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty} u_k(x)$ *равн. сх-ся на* D*.*

Тогда

$$\int_a^x \sum_{1}^{\infty} u_k(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x u_k(t)dt$$

Замечание 2. *Результат теоремы и её следствие можно усилить, если непрерывность заменить на интегрируемость. (С сохранением условий равномерной сходимости)*

Примеры 2.

(a) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k}, x\in(-1;1); [-\alpha;\alpha]; 0<\alpha<1$

$\sum\limits_{0}^{\infty}x^k$ - *равн. сх-ся на* $[-\alpha;\alpha]$

$\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k} = \frac{ln(1-x)}{x} - ln(1-x) = \int_a^x \frac{dt}{1-t} = \int_a^x (\sum\limits_{k=0}^{\infty} tk)dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(\int_0^x t^k dt) =$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{k+1}\Big|_0^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = x\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k=1}}{l}$ *непр. в* D

3. *Дифференцируемость:*

Теорема 3. *Пусть*

(a) $f_n(x)$ - *непр. диф. в* $D=[a;b]$

(b) $f_n' \xrightarrow{D} \varphi$

(c) $\exists c\in[a;b]: \sum\limits_{1}^{\infty} f_n(c)$ - *сход. т.е.* $\Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$

Тогда

$$f' = \varphi \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Доказательство.

$$f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f_n'(t)dt \underset{theorem}{\xrightarrow{D}} \int_c^x \varphi(t)dt \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f \quad (1)$$

В пределе в (1) при $n\to\infty$:
$f(x) - f(c) = \int_c^x \varphi(t)dt$ - диф. ф-я $\Rightarrow$ $f'(x) = \varphi(x)$ ∎