

Математический анализ 3.

Лекция 5.

Лепский Александр Евгеньевич *

19 сентября 2015 г.

Примеры 1.

1. $\sum_0^\infty x^n, D = [-\alpha; \alpha]; 0 < \alpha < 1$

По признаку Вейерштрасса:

$$\sup |x^n| \leq \alpha^n \quad \forall n, \sum_1^\infty \alpha^n \text{ сходится} \Rightarrow \sum_0^\infty x^n \text{ на } D = [-\alpha; \alpha]$$

2. $\sum_0^\infty x^n, D = [0; 1]$

$$\sup_{x \in D} |r_n(x)| = \sup_{0 \leq x < 1} \sum_{k=n+1}^\infty x^k = \sup \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Поэтому ряд расходится на D неравномерно.

3. $\sum_1^\infty \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$

$$D = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \varepsilon \in (0, \pi)$$

По признаку Дирихле:

$$a_n(x) = \sin(nx), \left| \sum_1^n a_k(x) \right| = \left| \sum_1^n \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin(\frac{1}{2}) \right|}$$

$$\sup_{\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon} \left| \sum_1^n a_k(x) \right| \leq \sup_{\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon} \frac{1}{\left| \sin(\frac{x}{2}) \right|} = \frac{1}{\sin(\frac{\varepsilon}{2})} \quad \forall n \Rightarrow \text{равномерная ограниченность частичных сумм.}$$

По признаку Дирихле ряд равномерно сходится на D .

4. $\sum_{0 \leq \alpha \leq 1}^\infty 1 \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}, D = [0, 2\pi]$

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |r_n(x)| = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} \right| \geq \lim_{x_k = \frac{\pi}{2k} \rightarrow 0} \left| \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\sin(x_k)}{k^\alpha} \right| = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \sum_1^\infty \frac{1}{k^\alpha} \text{ расходится.}$$

* лекция записана Жуковым Иваном (группа 145)

Аналитические свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

1. Непрерывность:

Определение 1. $\varphi(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 на множестве D , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma(\varepsilon) : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \forall x \in D \cap \{x : |x - x_0| < \sigma\}$

Теорема 1. Пусть есть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$. Если $f_n(x)$ непрерывна в $D \forall n$ и $f_n \xrightarrow{D} f$, то f непрерывна в D .

Доказательство. $\forall x_0 \in D |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
 $\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$ ■
 $< \frac{\varepsilon}{3} (\text{cause } f_n \xrightarrow{D} f) < \frac{\varepsilon}{3} (\text{cause } f_n \xrightarrow{D} f)$

Замечание 1. При выполнении условий

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

$\Rightarrow f$ — непрерывна на D .

Следствие 1. Если $u_k(x)$ — непрерывна в D и $\sum_1^\infty u_k(x)$ равномерно сходится в D , то $S(x) = \sum_1^\infty u_k(x)$ — непрерывна в D .

2. Интегрируемость:

Теорема 2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty, f_n(x)$ — непр. в $D = [a; b]$ и $f_n \xrightarrow{D} f$. Тогда

$$\int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{[a; b]} \int_a^x f(t) dt$$

$= \Phi_n(x) \qquad \qquad \qquad = \Phi(x)$

Доказательство. Т.к. f_n — непрерывна в D и $f_n \xrightarrow{D} f$, то по предыдущей теореме $\Rightarrow f$ — непрерывна в $D \Rightarrow f$ — интегрируема на $D = [a; b]$

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b-a) \cdot \varepsilon$$

■

Следствие 2. $u_k(x)$ — непрерывна в $D = [a; b] \forall k$ и ряд $\sum_1^\infty u_k(x)$ равномерно сходится на D .

Тогда

$$\int_a^x \sum_1^\infty u_k(t) dt = \sum_{k=1}^\infty \int_a^x u_k(t) dt$$

Замечание 2. Результат теоремы и её следствие можно усилить, если непрерывность заменить на интегрируемость. (С сохранением условий равномерной сходимости).

Примеры 2.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k}, x \in (-1; 1); [-\alpha; \alpha]; 0 < \alpha < 1 \\
 & \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \text{равномерно сходится на } [-\alpha; \alpha] \\
 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) = \int_a^x \frac{dt}{1-t} = \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} tk \right) dt \stackrel{\text{теорема}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^k dt \right) = \\
 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} \Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} \text{ непрерывна в } D
 \end{aligned}$$

3. Дифференцируемость:

Теорема 3. Пусть

- (a) $f_n(x)$ — непрерывная дифференцируемая функция в $D = [a; b]$
- (b) $f'_n \xrightarrow{D} \varphi$
- (c) $\exists c \in [a; b] : \sum_1^{\infty} f_n(c) - \text{сходится, т.е.} \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$

Тогда

$$f' = \varphi \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

Доказательство.

$$f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f'_n(t) dt \stackrel{\text{theorem}}{\xrightarrow{D}} \int_c^x \varphi(t) dt \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$$

В пределе в (1) при $n \rightarrow \infty$:

$$f(x) - f(c) = \int_c^x \varphi(t) dt - \text{дифференцируемая функция} \Rightarrow f'(x) = \varphi(x). \quad \blacksquare$$