

Лекция по математическому анализу №3.

Чудинов Никита (группа 145)

11 сентября 2015

Определение 1 (Абсолютно сходящийся ряд). Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если сходится $\sum_1^{\infty} |a_n|$.

Свойства:

1. Абсолютно сходящийся ряд *сходится* (обратное *неверно!*)

Доказательство. Пусть $\sum_1^{\infty} |a_n|$ сходится. Следовательно, по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{n+1}^{n+p} |a_n| < \varepsilon;$$

$$\left| \sum_1^{\infty} a_n \right| \leq \sum_1^{\infty} |a_n|.$$

□

2. Если $\sum_1^{\infty} a_n, \sum_1^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся и $|b_n| \leq M \forall n$, то $\sum_1^{\infty} a_n b_n$ тоже абсолютно сходится.

Доказательство. $\left| \sum_1^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left| M \sum_1^{\infty} a_n \right|.$

□

3. Если $\sum_1^{\infty} a_n, \sum_1^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то $\sum_1^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$ тоже абсолютно сходится.
4. Если $\sum_1^{\infty} a_n$ абсолютно сходится и $\sum_1^{\infty} a_n = S$, то ряд, полученный при произвольной перестановке членов тоже сходится и его сумма равна S .
5. *Правило умножения:* Если $\sum_1^{\infty} a_n, \sum_1^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся и $\sum_1^{\infty} a_n = A, \sum_1^{\infty} b_n = B$, то ряд $\sum_1^{\infty} a_n \sum_1^{\infty} b_n = \sum_1^{\infty} c_n = C = A \cdot B$.

Определение 2 (Произведение по Коши). $\sum_1^{\infty} a_n \sum_1^{\infty} b_n = \sum_1^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^k a_s b_{k-s}.$

Определение 3 (Условно сходящиеся ряды). Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится, но $\sum_1^{\infty} |a_n|$ расходится

Теорема (Риман). Если ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ условно сходится, то для любого числа $S \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ существует такая перестановка этого ряда, что ряд начинает сходиться к этому числу S .

Функциональные последовательности и ряды

Здесь и в дальнейшем: $f_n(x)$ — некоторая функция, определённая над множеством D .

Определение 4 (Поточечная сходимость). $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на D : $f_n \xrightarrow{D} f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \rightarrow f(x); x \in D$, если $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > N$.

Определение 5. Ряд $\sum_1^{\infty} f(x)$ сходится на D , если $S_n(x) = \sum_1^n f_n(x)$ сходится к некоторой функции $S(x); \forall x \in D$.

Теорема. Последовательность $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$ если $\exists a_n \rightarrow 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \forall x, n \in D$.