Листок 2. Геометрия и алгебра

Тверской Денис*

Определение 1. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если:

$$\forall x, y \in X, \quad \Lambda x + (1 - \Lambda) y \in X, \quad \forall \Lambda \in [0, 1];$$

Определение 2. Вещественнозначная матрица A называется *неотрицательно определённой*, если скалярное произведение:

$$(x, Ax) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

Задача 1. Пусть A — симметричная, неотрицательно определённая матрица

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, Ax) \leq k\}; \quad k \in \mathbb{R}^1_+;$$

Докажите, что M — выпуклое.

Задача 2. Пусть $L \subset \mathbb{R}^4$ — пространство решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$$

Найдите ортогональную проекцию вектора $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ на подпространство L, а также ортогональную составляющую вектора x.

Задача 3. Пусть P — проектор, $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Верно ли, что матрица $(I + P)$ — невырожденная?

Задача 4. Пусть $P, Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — проекторы. Докажите, что $(P + Q)$ — проектор $\Leftrightarrow QP = PQ = 0$

В случае, когда $(P + Q)$ является проектором, выразите ядро $(P + Q)$ через ядра P и Q, образ $(P + Q)$ — через образы P и Q.

Задача 5. Пусть A — вещественнозначная ортогональная матрица порядка n, не имеющая действительных собственных чисел. Выберите все верные утверждения:

1. A^2 имеет собственное число (-1);
2. n — чётное;
3. $detA = 1$;
4. A имеет одномерное инвариантное подпространство;
5. A — симметричная.

*Сверстал Чудинов Никита

Задача 6. В $\mathbb{R}^4$ заданы три гиперплоскости

$$a_i x = 0, i = 1,2,3; a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Все три — инвариантные подпространства некоторой вещественной ортогональной матрицы $Q_{4\times 4}; Q \neq I, Q \neq -I$; Выберите все верные утверждения:

1. У Q бесконечно много инвариантных подпространств;
2. У Q есть набор собственных векторов, из которых можно составить базис $\mathbb{R}^4$;
3. Имеется ровно 2^{15} различных матриц Q, удовлетворяющих условию задачи;
4. Вектор $x = \big(1, 3, 4, 2\big)$ — собственный;
5. Q — симметричная;
6. Подпространство решений системы $x - Qx = 0$ трёхмерное;
7. Если сумма элементов Q больше нуля, то её характеристический многочлен убывает в окрестности нуля.