Лекция по математическому анализу №6.

Чудинов Никита (группа 145)

21 сентября 2015

Пример.

$$\sum_{1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{1}^{\infty} (x^n)' =$$

Ряд равномерно сходится в $|x| \leqslant r < 1$ по принципу Вейерштрасса. $|n \cdot x^{n-1}| \leqslant n \cdot r^{n-1}$. $\sum\limits_{1}^{\infty} nr^{n-1}$ сходится по признаку Коши.

$$= \left(\sum_{1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Степенные ряды

Определение 1. *Степенным рядом* с центром в точке z_0 называется выражение:

$$\sum_{1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

Где $c_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ называются коэффициентами степенного ряда.

Теорема. *Абель*

- *Если степенной ряд сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится в области $D_1 = \{z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$;*
- *Если степенной ряд расходится в точке z_2, то он расходится в области $D_2 = \{z : |z - z_0| > |z_2 - z_0|\}$.*

Доказательство.

- Пусть ряд сходится в z_1 и $z \in D_1$. Тогда:

$$\sum_{0}^{\infty} |c_n (z - z_0)^n| = \sum_{0}^{\infty} |c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \cdot \underbrace{\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n}_{q<1}; \tag{1}$$

  Так как ряд сходится в точке z_1, то $c_n (z_1 - z_0)^n \leqslant M \ \forall n$ (ограниченны).

- Доказывается аналогично.

□

Теорема. $\exists\, R \in [0; +\infty]$*:*

1. *если $R = 0$, то ряд (1) сходится только в точке z_0;*
2. *если $R = \infty$, то ряд (1) сходится в любой точке плоскости;*

3. *иначе: Ряд (1) сходится абсолютно в круге $\{z : |z-z_0| < R\}$, где R — радиус сходимости и расходится в $\{z : |z-z_0| > R\}$. На самой окружности ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство.

1. просто;

2. просто;

3. Пусть D — множество z, при которых ряд сходится.

   (a) Если D не ограничено:
   для $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists z_1 \in D : |z-z_0| < |z_1-z_0| \Rightarrow$ по теореме Абеля ряд сходится в $\mathbb{C}$.

   (b) Если D — ограниченно:
   Пусть $R = \sup\limits_{z\in D} |z-z_0| \Rightarrow R \neq \infty$:

      i. если $R = 0$, то (1) сходится только в z_0.

      ii. если $R > 0$, то $\forall z : |z-z_0| < R\ \exists\ z_1 \in D : |z-z_0| < |z_1-z_0| \Rightarrow$ по теореме Абеля.

   Ряд (1) сходится в точке z.

□

Следствие.

1. ряд (1) сходится абсолютно;

2. ряд (1) равномерно сходится в круге $D_r = \{z : |z-z_0| \leqslant r\} : r < R$.

   Доказательство.

   $$|c_n(z-z_0)^n| = |c_n(z_1-z_0)^n| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n;$$
   $$z_1 : r < |z_1-z_0| < R.$$

   □

3. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в круге сходимости.

Пример. $\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$; $R = 1$ — на окружности сходится.

Пример. $\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n}$; $R = 1$ — на окружности может как сходиться, так и нет.

Пример. $\sum\limits_0^\infty \frac{z^n}{n!}$; $R = \infty$.

Следствие. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Следствие. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$, то $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$.

Теорема (формула Коши-Адамара)**.**

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Теорема. *Если ряд сходится в круге, то его можно почленно интегрировать и дифференцировать и радиус круга сходимости не изменится.*