Lista 2 - Medidas de Centralidade

Luben Miguel, Rodrigo Lassance

```r
# pacotes sendo usados
library(igraph)
library(tidyverse)
library(Matrix)
library(knitr)
library(scales)
```

Exercício 1

Primeiramente, importamos as seguintes redes:

```r
# pre-processamento e importacao dos dados

# dados direcionados
# lendo os dados dos tweets sobre israel
israel <- read.table("dados/rt_israel.edges", sep=",", header = FALSE) |>
  select(-3) |>
  as.matrix()

# lendo os dados da rede de aeroportos
airports <- read.table("dados/inf-openflights.edges", sep=" ", header = FALSE) |>
  select(-3) |>
  as.matrix()

# grafo das paginas web
web_hiperlink <- read.table("dados/web-EPA.edges", sep=" ", header = FALSE) |>
  as.matrix()

# grafo dos tweets de israel
```

```r
israel_graph <- israel |>
  graph_from_edgelist(directed=TRUE)

israel_adj <- israel_graph |>
  as_adj()

airports_graph <- airports |>
  graph_from_edgelist(directed=TRUE)

airports_adj <- airports_graph |>
  as_adj()

web_graph <- web_hiperlink |>
  graph_from_edgelist(directed=TRUE)

web_adj <- web_graph |>
  as_adj()

# nao direcionado
# dados dos ratos sem processamento
ratos_dados <- read.table("dados/mammalia-voles-bhp-trapping.edges", sep=" ", header = FAL
# rede de rato do mato sem pesos
ratos_rede <-  ratos_dados |>
  select(-c(3, 4)) |>
  group_by(V1, V2) |>
  summarise(n  = n()) |>
  select(-3) |>
  as.matrix()

# por causa do time stamp, algumas conexoes sao repetidas nos dados
# corrigindo isso na matriz de adjacencia
ratos_adj <- ratos_rede |>
  graph_from_edgelist(directed=FALSE) |>
  as_adj()

ratos_adj <- (ratos_adj >= 1) + 0

# corrigido isso
ratos_graph <- ratos_adj |> graph_from_adjacency_matrix(mode = "undirected")

# checando se sao simetricas ou nao simetricas
```

```r
c(isSymmetric(web_adj), isSymmetric(israel_adj), isSymmetric(airports_adj), isSymmetric(ra
```

```
[1] FALSE FALSE FALSE  TRUE
```

Para calcular e plotar os graus $P(k)$ e graus de entrada e saída $P(k_{in})$, $P(k_{out})$ elaboramos a seguinte função:

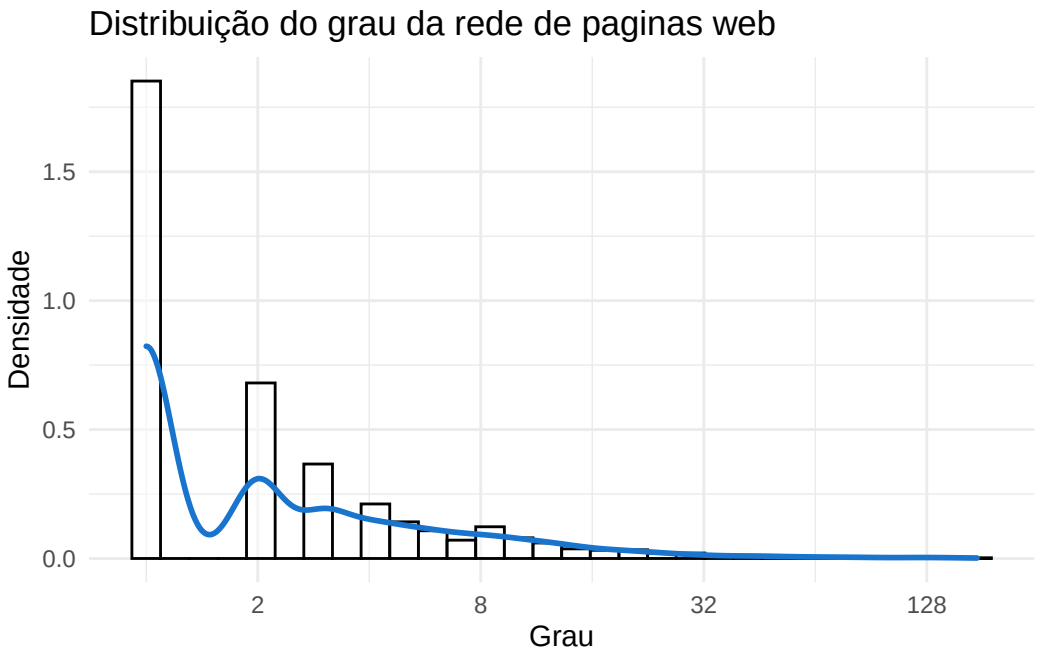
```r
# escala em loglog2
loglog_trans <- trans_new(
  name = 'log-log',
  transform = function(x) log(log(x)),
  inverse = function(x) exp(exp(x)),
  breaks = extended_breaks(),
  minor_breaks = regular_minor_breaks(),
  format = format_format(),
  domain = c(1, Inf)
)

plot_degree <- function(igraph_obj, rede_label, overall = TRUE){
  directed <- is_directed(igraph_obj)

  if(!directed){
  dados_grau <- igraph_obj |>
  degree() |>
  as.data.frame() |>
  rename(grau = "degree(igraph_obj)")

  p1 <- dados_grau |>
  ggplot(aes(x = grau))+
  geom_histogram(aes(y = ..density..),
  colour = "black", fill = "white",
  alpha = 0.5)+
  geom_density(colour = "dodgerblue3", size = 1)+
  theme_minimal()+
  scale_x_continuous(trans= "log2") +
  labs(x = "Grau",
  y = "Densidade")
  show(p1)
  }else{
    if(!overall){
    out_degree <- igraph_obj |>
```

```
    degree(mode = "out") |>
    as.data.frame() |>
    rename(grau = "degree(igraph_obj, mode = \"out\")") |>
    mutate(mode = "Out-degree")

      in_degree <- igraph_obj |>
    degree(mode = "in") |>
    as.data.frame() |>
    rename(grau = "degree(igraph_obj, mode = \"in\")") |>
    mutate(mode = "In-degree")

      dados_grau <- bind_rows(out_degree, in_degree)

    p1 <- dados_grau |>
    ggplot(aes(x = grau))+
    geom_histogram(aes(y = ..density..),
    colour = "black", fill = "white",
    alpha = 0.5)+
    geom_density(colour = "dodgerblue3", size = 1)+
    facet_wrap(~mode, nrow = 2)+
    theme_minimal()+
    scale_x_continuous(trans="log2")+
    labs(x = "Grau",
    y = "Densidade",
    title = rede_label)
    show(p1)
      }else{
        dados_grau <- igraph_obj |>
    degree(mode = "all") |>
    as.data.frame() |>
    rename(grau = "degree(igraph_obj, mode = \"all\")")

    p1 <- dados_grau |>
    ggplot(aes(x = grau))+
    geom_histogram(aes(y = ..density..),
    colour = "black", fill = "white",
    alpha = 0.5)+
    geom_density(colour = "dodgerblue3", size = 1)+
    theme_minimal()+
    scale_x_continuous(trans="log2") +
    labs(x = "Grau",
```

```
    y = "Densidade",
    title = rede_label)
    show(p1)
      }
    }
    return(dados_grau)
}
```

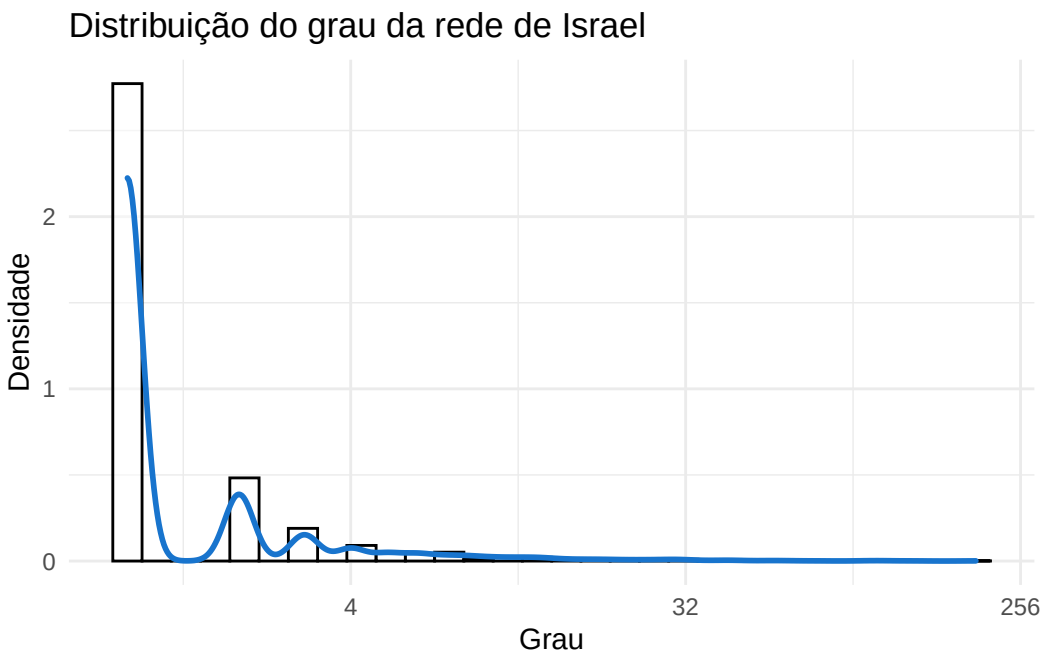
Plotamos o grau para todas as redes a seguir: * Rede de páginas web:

```
grau_web <- plot_degree(web_graph,
             rede_label = "Distribuição do grau da rede de paginas web")
```



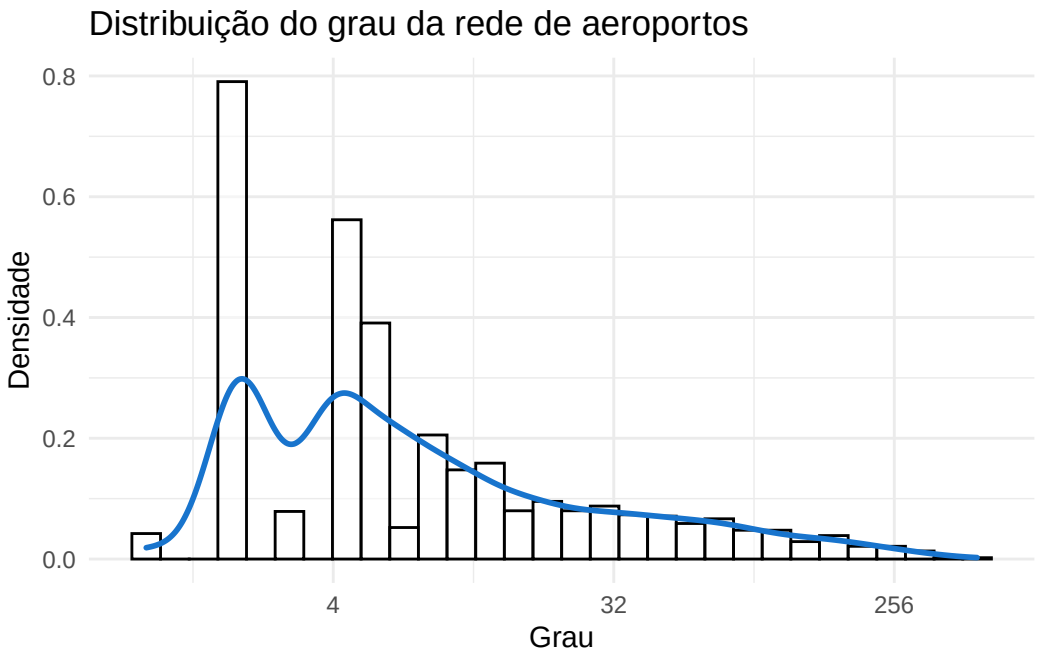
- Rede de retweets sobre Israel

```
grau_israel <- plot_degree(israel_graph,
             rede_label = "Distribuição do grau da rede de Israel")
```



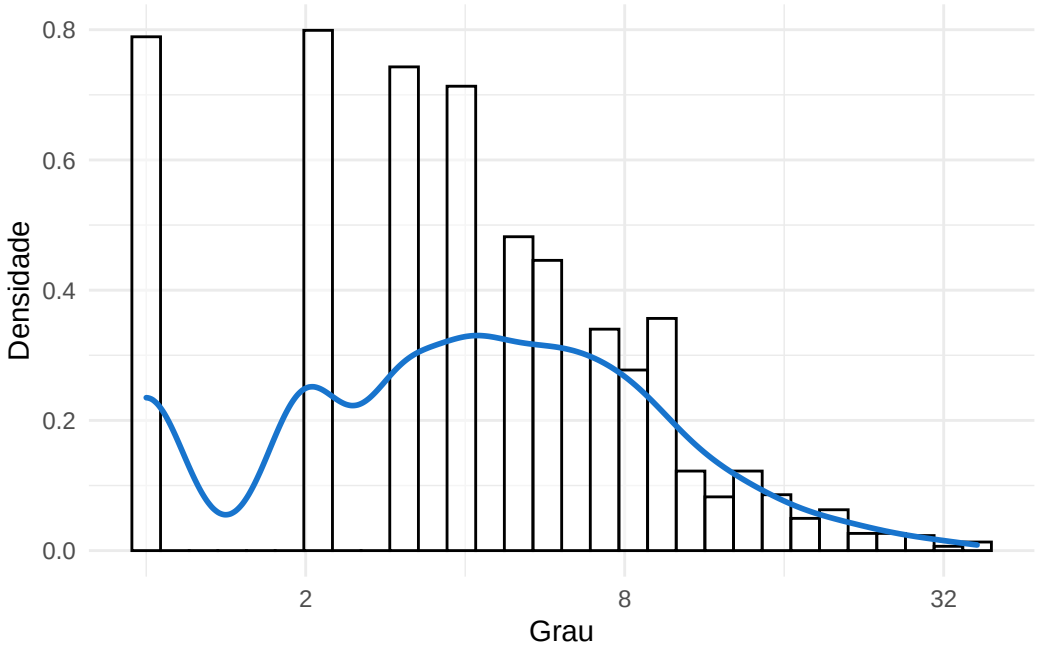
- Rede de aeroportos

```
grau_airports <- plot_degree(airports_graph,
                             rede_label = "Distribuição do grau da rede de aeroportos")
```



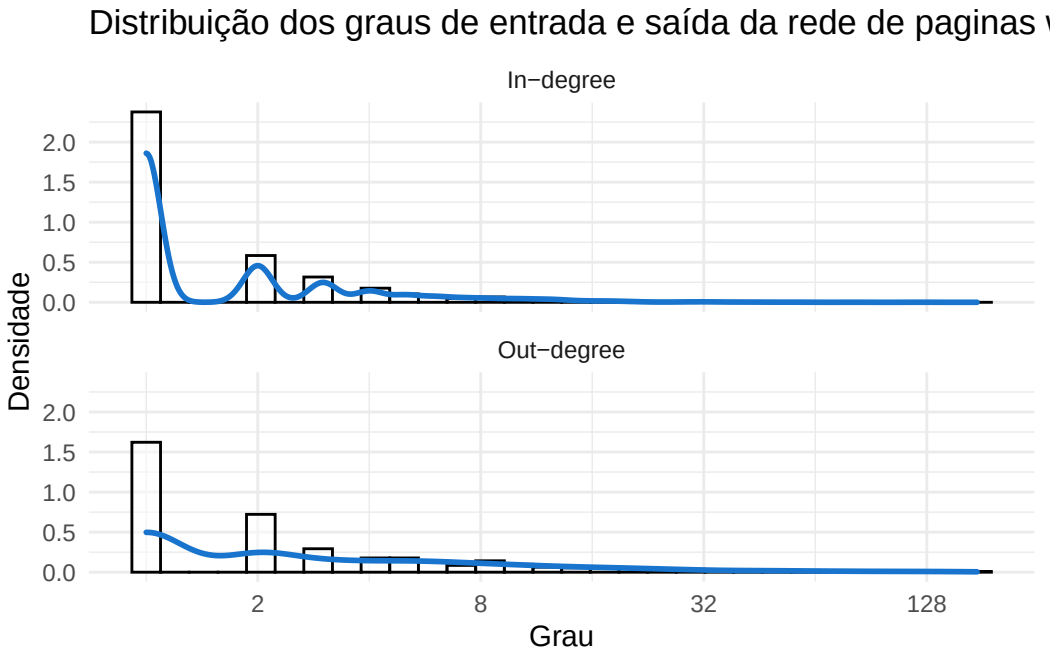
- Rede de ratos

```
ratos_grau <- plot_degree(ratos_graph, rede_label = "Distribuição do grau da rede de ratos
```



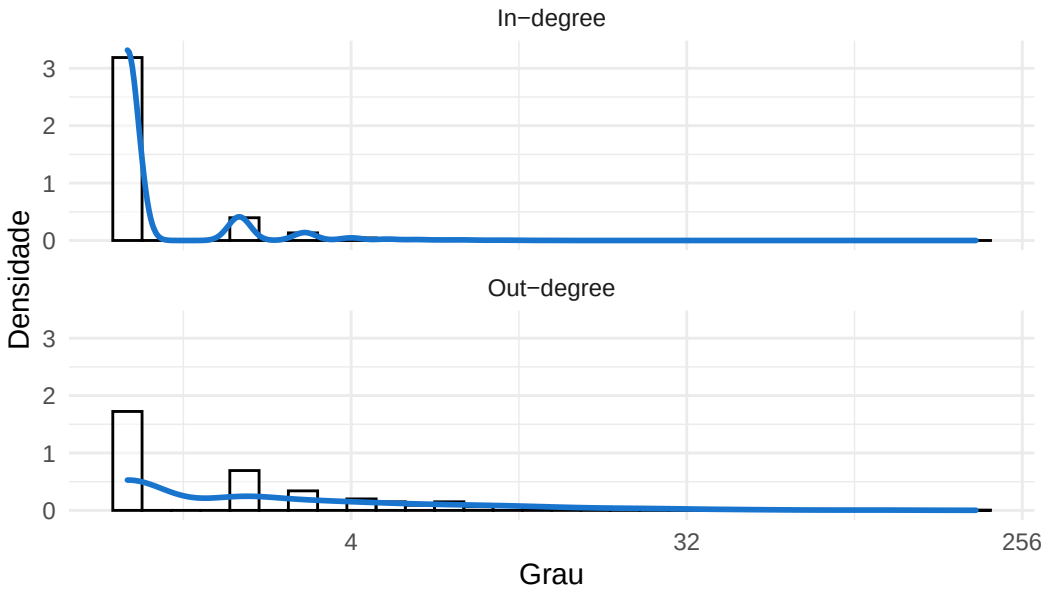
Agora, mostramos a distribuição dos graus de entrada e de saída para as redes direcionadas:
* Rede de páginas web:

```
in_out_grau_web <- plot_degree(web_graph,
             rede_label = "Distribuição dos graus de entrada e saída da rede de paginas web
             overall = FALSE)
```



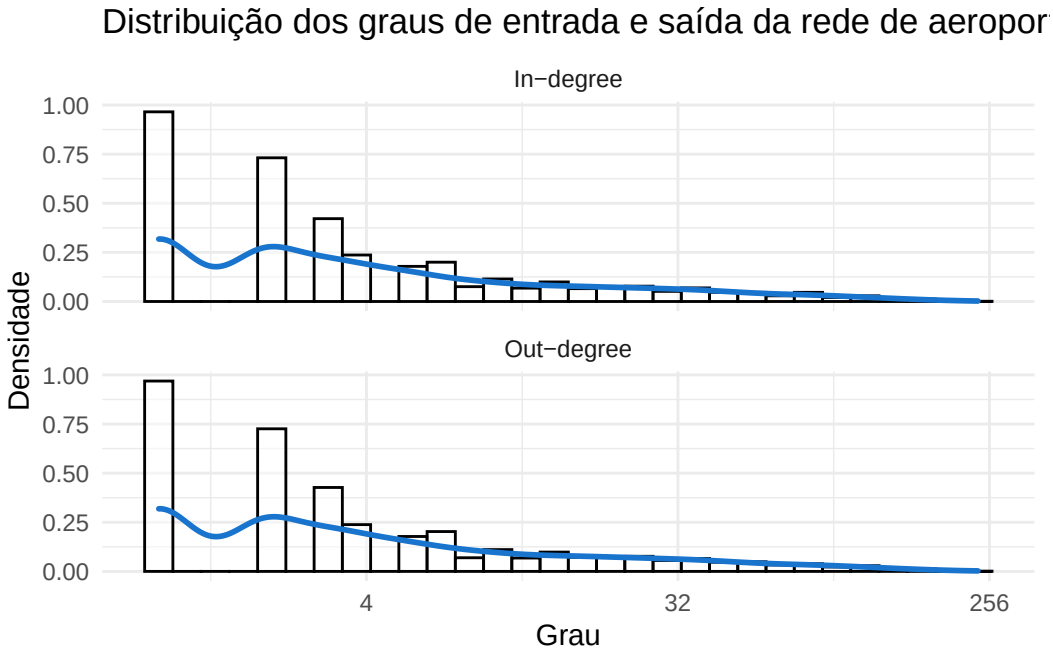
- Rede de retweets sobre Israel

```
in_out_grau_israel <- plot_degree(israel_graph,
             rede_label = "Distribuição dos graus de entrada e saída da rede de Israel",
             overall = FALSE)
```



- Rede de aeroportos

```
in_out_grau_airports <- plot_degree(airports_graph,
                                    rede_label = "Distribuição dos graus de entrada e saída da re
                                    overall = FALSE)
```



Exercício 2

A seguir, calculamos a centralidade de autovetor para cada rede:

```
get_eigen_centrality <- function(igraph_obj){
  if(is_directed(igraph_obj)){
    eigen_centrality(igraph_obj, directed = TRUE)$vector
  }else{
    eigen_centrality(igraph_obj)$vector
  }
}

# grafo de israel
israel_eigen <- israel_graph |> get_eigen_centrality()

# grafo da web
web_eigen <- web_graph |> get_eigen_centrality()

# grafo dos aeroportos
airport_eigen <- airports_graph |> get_eigen_centrality()

```

```r
# grafo dos ratos
ratos_eigen <- ratos_graph |> get_eigen_centrality()
```

Com essa centralidade calculada para todas as redes, obtemos a seguir a tabela com as correlações de pearson entre a medida de centralidade de autovetor e o grau:

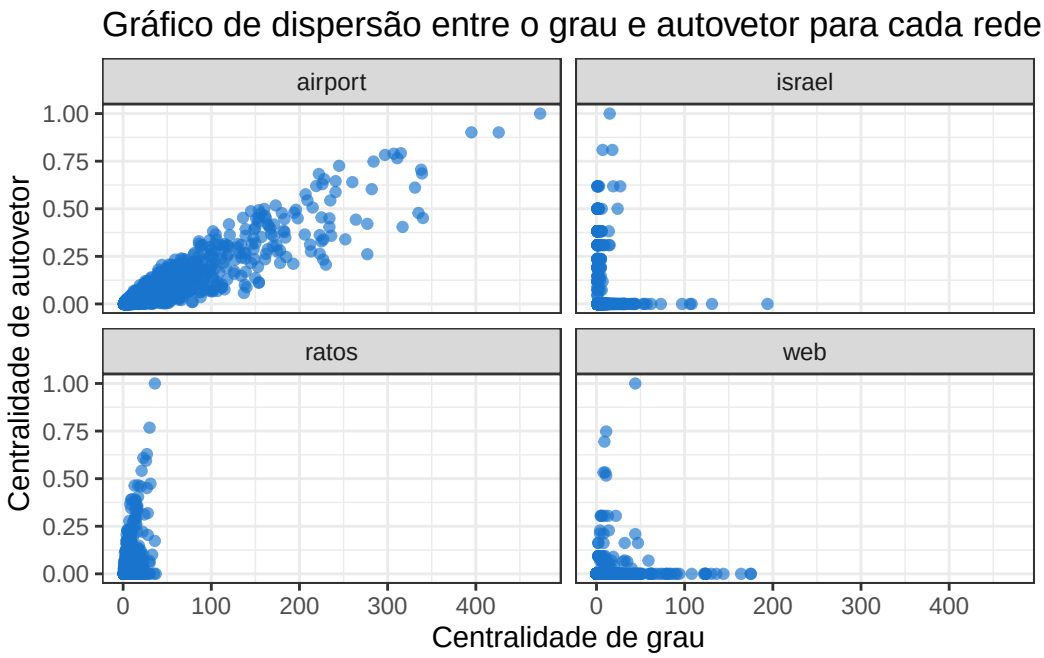
```r
eigen_list <- list("israel" = israel_eigen,
                   "web" = web_eigen,
                   "airport" = airport_eigen,
                   "ratos" = ratos_eigen)

grau_list <- list("israel" = grau_israel$grau,
                  "web" = grau_web$grau,
                  "airport" = grau_airports$grau,
                  "ratos" = ratos_grau$grau)

map2_dfr(eigen_list, grau_list, function(x, y){
  cor(x, y)
}) |> pivot_longer(1:4, values_to = "valor") |>
  mutate(valor = round(valor, 3)) |>
  knitr::kable(format = "latex",
               booktabs = TRUE,
               escape = FALSE,
               col.names = c("Rede",
                             "Valor da correlação"),
               caption = "Correlação de pearson entre centralidade de grau e autovetor par
  kableExtra::kable_styling(full_width = FALSE,
                            latex_options = "hold_position")
```

Tabela 1: Correlação de pearson entre centralidade de grau e autovetor para cada rede

Rede	Valor da correlação
israel	0.041
web	0.084
airport	0.931
ratos	0.469

```r
eigen_grau_df <- data.frame(name_rede = c(rep("israel", length(israel_eigen)),
                                          rep("airport", length(airport_eigen)),
                                          rep("ratos", length(ratos_eigen)),
```

```
                                        rep("web", length(web_eigen))),
                          eigen = c(israel_eigen, airport_eigen, ratos_eigen,
                                    web_eigen),
                          grau = c(grau_israel$grau, grau_airports$grau, ratos_grau$grau,
                                   grau_web$grau))

eigen_grau_df |>
  ggplot(aes(x = grau, y = eigen))+
  geom_point(colour = "dodgerblue3", alpha = 0.65)+
  facet_wrap(~name_rede, nrow = 2, ncol = 2)+
  theme_bw()+
  labs(x = "Centralidade de grau",
       y = "Centralidade de autovetor",
       title = "Gráfico de dispersão entre o grau e autovetor para cada rede")
```



Vemos principalmente nos scatterplots das redes de ratos, paginas web e retweets de israel muitos valores com centralidade de grau relativamente grande porém uma centralidade de autovetor igual a zero, tendo ambas centralidades uma correlação de pearson baixa para essas redes.

Exercício 3

Vemos pelo Exercício 2 que para valores elevados de grau se observam valores nulos de centralidade de autovalor. Verificaremos agora seguir quantos vértices tem centralidade de autovetor nula e graus de entrada não nulos para cada rede:

```
in_grau_airports <- in_out_grau_airports |> filter(mode == "In-degree") |> pull(grau)
in_grau_israel <- in_out_grau_israel |> filter(mode == "In-degree") |> pull(grau)
in_grau_web <- in_out_grau_web |> filter(mode == "In-degree") |> pull(grau)

eigen_grau_df <- data.frame(name_rede = c(rep("israel", length(israel_eigen)),
                                          rep("airport", length(airport_eigen)),
                                         rep("web", length(web_eigen))),
                            eigen = c(israel_eigen, airport_eigen,
                                      web_eigen),
                            grau = c(in_grau_israel, in_grau_airports,
                                     in_grau_web))

# funcao para detectar se existe pelo menos um vertice com centralidade nula
detecta_nula <- function(eigen_grau_df, rede){
  eigen_grau_df |>
    filter(name_rede == rede) |>
    filter(eigen == 0 & grau > 0) |>
    nrow()
}

c(detecta_nula(eigen_grau_df,"israel"),
detecta_nula(eigen_grau_df,"airport"),
detecta_nula(eigen_grau_df,"web"))
```

```
[1]  44  33 158
```

Ou seja, vemos que todas as redes direcionadas tem pelo menos um vértice com centralidade de autovetor nula mesmo tendo uma ou mais conexões de entrada.

Exercício 4

A rede de interação entre ratos do mato possui um peso ignorado que nos diz quantas vezes ambos os ratos conectados cairam na mesma armadilha em alguma timestamp específico. Assim, somaremos todos os pesos associados a cada timestamp e as relações de ida e volta:

```r
ratos_weighted_graph <- ratos_dados |>
  group_by(V1, V2) |>
  select(-4) |>
  summarise(V3 = sum(V3)) |>
  rename(weight = "V3") |>
  graph_from_data_frame(directed = FALSE)
```

```
`summarise()` has grouped output by 'V1'. You can override using the `.groups`
argument.
```

Para obter a acessibilidade, podemos acessar o peso no grafo e calcular a entropia nos pesos a partir da seguinte função:

```r
accessibility <- function(igraph_obj){
  vtx_list <- V(igraph_obj)
  access <- numeric(length(vtx_list))
  for(i in 1:length(vtx_list)){
    pesos <- incident_edges(igraph_obj, vtx_list[i])[[1]]$weight
    pesos <- pesos/sum(pesos)
    access[i] <- exp(-sum(pesos*log(pesos)))
  }
  access <- setNames(access, vtx_list$name)
  return(access)
}
```

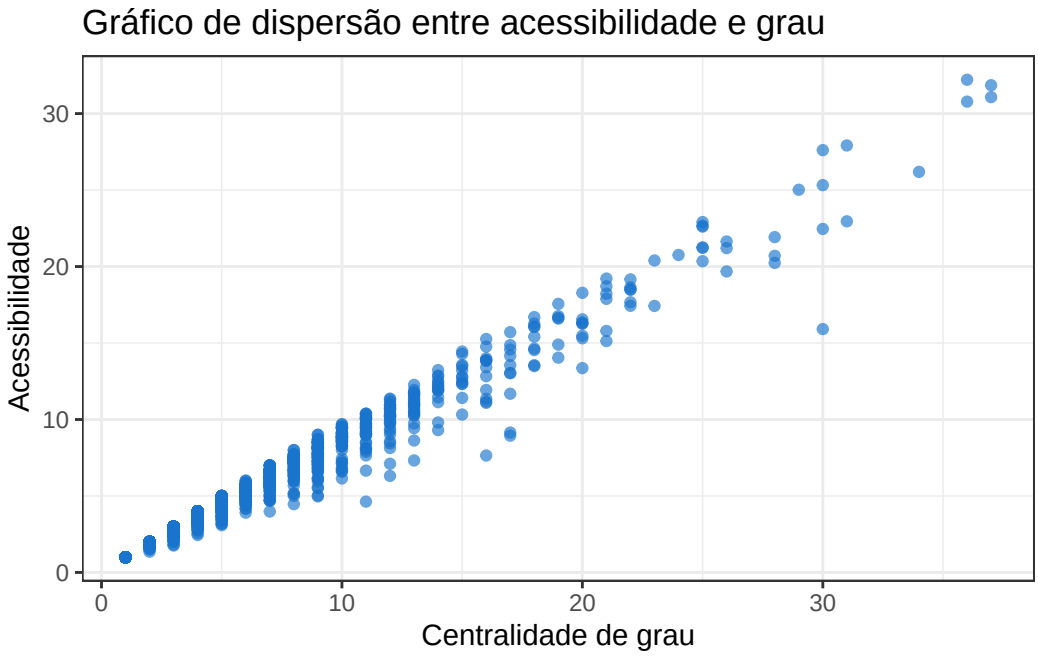
Tendo o vetor de acessibilidade:

```r
acesso_ratos <- accessibility(ratos_weighted_graph)
```

Desta maneira, podemos obter o gráfico de dispersão entre grau e acessibilidade como a seguir:

```r
grau_acess_data_frame <- data.frame(grau = degree(ratos_weighted_graph),
                                    acessib = acesso_ratos) |>
  rownames_to_column(var = "vertice")

grau_acess_data_frame |>
  ggplot(aes(x = grau, y = acessib))+
  geom_point(colour = "dodgerblue3", alpha = 0.65)+
  theme_bw()+
```

```
    labs(x = "Centralidade de grau",
         y = "Acessibilidade",
         title = "Gráfico de dispersão entre acessibilidade e grau")
```



Vemos uma tendência linear nesse gráfico, com a acessibilidade tendo em geral valores menores que o grau. Há casos porém, que vemos uma acessibilidade consideravelmente menor que o grau, tendo por exemplo acessibilidades menor que 10 em casos de grau maior que 10.

Exercício 5

Podemos ver os vértices que tem acessibilidade muito menor que 10 para casos de graus maiores que 10, como os vértices com acessibilidade menor que 8 e grau maior que 10:

```
grau_acess_data_frame |>
  filter(grau > 10 & acessib < 8) |>
  mutate(acessib = round(acessib, 3)) |>
  knitr::kable(format = "latex",
               booktabs = TRUE,
               escape = FALSE,
               col.names = c("Vértice",
```

```
                                "Grau",
                                "Acessibilidade"),
                caption = "Grau comparado a acessibilidade para diferentes vértices") |>
  kableExtra::kable_styling(full_width = FALSE,
                            latex_options = "hold_position")
```

Tabela 2: Grau comparado a acessibilidade para diferentes vértices

Vértice	Grau	Acessibilidade
689	11	6.657
812	16	7.645
829	11	4.630
1277	11	7.651
1489	12	7.107
1494	13	7.322
1575	12	6.314
1657	11	7.887

Ou seja, vemos alguns exemplos de vértice que a acessibilidade é bem menor que o grau, destacando principalmente o vértice 829, com acessibilidade 4.630 e grau 11.

Exercício 6

Tomando novamente a rede de interação entre ratos e armadilhas sem peso, podemos obter a centralidade de Katz, fixando $\alpha < \frac{1}{k_1}$. Nesse caso, o maior autovalor k_1 é dado por:

```
k_1 <- eigen(ratos_adj) |> pluck("values") |> max()
k_1
```

```
[1] 12.12621
```

Ou seja, devemos tomar α menor que:

```
1/k_1
```

```
[1] 0.08246599
```

Assim, tomando $\alpha = 0.05$, obtemos a centralidade de Katz através da função do pacote *centiserve*:

```
katz <- ratos_graph |> centiserve::katzcent(alpha = 0.05)
```

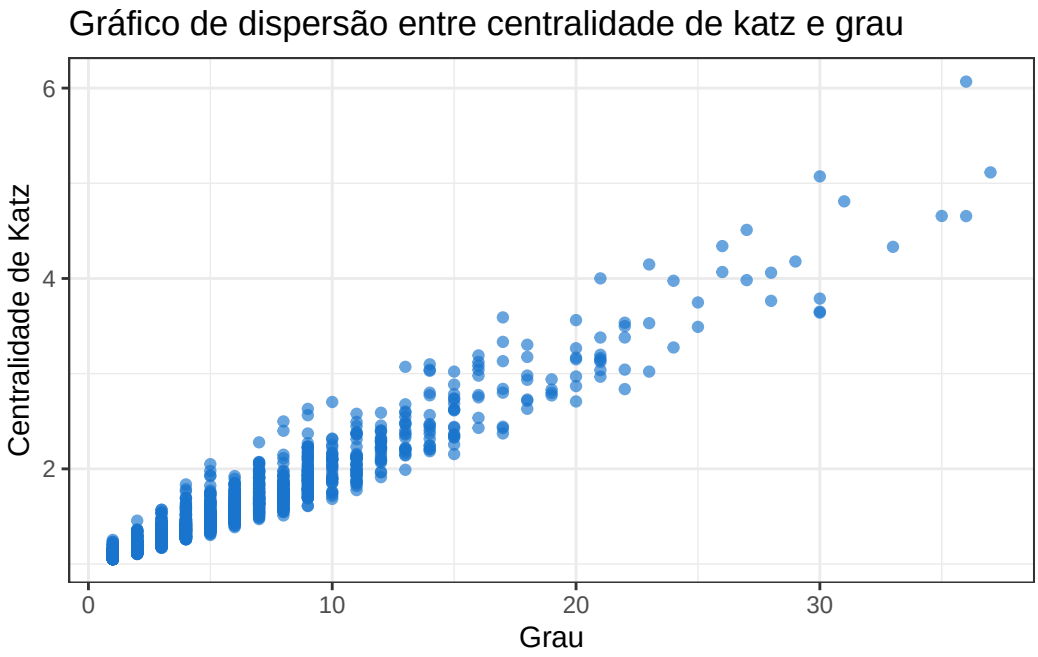
Assim, obtemos agora a correlação de spearman entre a centralidade de katz e o grau:

```
cor(katz, ratos_grau$grau, method = "spearman")
```

```
[1] 0.9606899
```

Tendo o gráfico de dispersão entre as centralidades:

```
grau_katz_data_frame <- data.frame(grau = ratos_grau$grau,
                                   katz = katz) |>
  rownames_to_column(var = "vertice")

grau_katz_data_frame |>
  ggplot(aes(x = grau, y = katz))+
  geom_point(colour = "dodgerblue3", alpha = 0.65)+
  theme_bw()+
  labs(x = "Grau",
       y = "Centralidade de Katz",
       title = "Gráfico de dispersão entre centralidade de katz e grau")
```



Ou seja, a centralidade de Katz tem uma relação mais positiva que o grau do que a centralidade de autovetor comum.