

Lista 2 - Tópicos em ML

Luben M. C. Cabezas

Reinaldo C. Anacleto

Primeiramente, importando bibliotecas que serão utilizadas

```
# pacotes para transformacao dos dados e graficos
import pandas as pd
import numpy as np
import cdetools.cde_loss
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# pacote do sklearn para data splitting

# pacotes para o normalizing flows e flexcode
import normflows as nf
import flexcode
from flexcode.regression_models import RandomForest

from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

# importando o modulo de modelos de mistura
from mixture_models.blocks import MixtureDensityNetwork
from mixture_models.blocks import NoiseType

# importando modulos auxiliares do torch
import torch
from torch.utils.data import TensorDataset, DataLoader

# modulo para acompanhar progresso das redes neurais
from tqdm import tqdm

# modulos do sklearn para calibração e classificação
# modelos de classificação
```

```

from sklearn.linear_model import LogisticRegressionCV
from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier

# metricas
from sklearn.metrics import brier_score_loss, log_loss

# calibracao: platt scaling, reg isotonica e calibration plot
from sklearn.calibration import CalibratedClassifierCV, calibration_curve, CalibrationDisp

# histogram binning
from calibration_module.calibrator import HistogramCalibrator

```

Exercício 1

Para o Exercício 1, consideraremos o banco de dados de propriedade físico-químicas de Proteínas que pode ser encontrado no repositório de Machine Learning UCI [link](#):

```

# importando os dados
protein_data = pd.read_csv("data/CASP.csv")
# visualizando numero de variaveis, observações e tipo de cada variavel
protein_data.info()

```

```

<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 45730 entries, 0 to 45729
Data columns (total 10 columns):
#   Column  Non-Null Count  Dtype
---  -
0   RMSD    45730 non-null    float64
1   F1       45730 non-null    float64
2   F2       45730 non-null    float64
3   F3       45730 non-null    float64
4   F4       45730 non-null    float64
5   F5       45730 non-null    float64
6   F6       45730 non-null    float64
7   F7       45730 non-null    float64
8   F8       45730 non-null    int64
9   F9       45730 non-null    float64
dtypes: float64(9), int64(1)

```

memory usage: 3.5 MB

A variável resposta considerada nesse problema é a variável RMSD, que quantifica o tamanho dos resíduos. Assim, temos interesse em modelar a incerteza aleatória de RMSD em função das outras variáveis que nos dão diferentes características de cada proteína. Nota-se que todas as covariáveis consideradas são quantitativas, tendo apenas uma delas como discreta (F8). Como o conjunto de dados contém 45730 observações, separaremos o conjunto em 90% treino e validação e 10% para teste, já que assim conseguimos destinar uma parcela considerável dos dados para ajuste dos diferentes modelos ao passo que conseguimos boas estimativas para as perdas e PIT-values.

```
# separando os dados em treino+validação e teste
train_val_data, test_data = train_test_split(protein_data, test_size=0.1, random_state=42)
# tamanho do conjunto de treino
train_val_data.shape[0]
```

41157

Já, para o treinamento e validação, consideraremos uma divisão de 70% para treino e 30% para validação:

```
# separando os dados em treino+validação e teste
train_data, valid_data = train_test_split(train_val_data, test_size=0.3, random_state=125)
# tamanho do conjunto de treino
train_data.shape[0]
```

28809

```
torch.manual_seed(167)
# tamanho de batch para data loader
batch_size_t = 350
batch_size_val = 150
# separando dataframe do pandas em arrays do numpy
X_train, y_train = train_data.iloc[:, 1:].values, train_data.iloc[:, 0].values
X_valid, y_valid = valid_data.iloc[:, 1:].values, valid_data.iloc[:, 0].values
X_test, y_test = test_data.iloc[:, 1:].values, test_data.iloc[:, 0].values

# adicionando padronizacao para redes neurais
# criando o scaler
```

```

scaler = StandardScaler()

# ajustando o scaler aos dados de treino
scaler.fit(X_train)

# Padronizando a matriz de covariaveis para as redes neurais
X_train_scaled = scaler.transform(train_data.iloc[:, 1:])
X_valid_scaled = scaler.transform(valid_data.iloc[:, 1:])
X_test_scaled = scaler.transform(test_data.iloc[:, 1:])

# transformando os arrays em torch.tensor e depois em data-loaders para
# os metodos baseados em redes neurais
X_train_t, X_valid_t, X_test_t = (
    torch.tensor(X_train_scaled, dtype=torch.float32),
    torch.tensor(X_valid_scaled, dtype=torch.float32),
    torch.tensor(X_test_scaled, dtype=torch.float32),
)

y_train_t, y_valid_t, y_test_t = (
    torch.tensor(y_train, dtype=torch.float32).view(-1, 1),
    torch.tensor(y_valid, dtype=torch.float32).view(-1, 1),
    torch.tensor(y_test, dtype=torch.float32).view(-1, 1),
)

# Criando datasets de torch tensors e usando data loader
train_loader, valid_loader = (
    DataLoader(
        TensorDataset(X_train_t, y_train_t),
        shuffle=True,
        batch_size=batch_size_t,
    ),
    DataLoader(
        TensorDataset(X_valid_t, y_valid_t), shuffle=True, batch_size=batch_size_val
    ),
)

```

Item 1

Implementaremos a seguir os diversos métodos, avaliando também a curva de aprendizado de cada:

- Mistura de Normais via rede neural

Primeiro definiremos os parâmetros do modelo de mistura, a arquitetura e otimizador da rede. Fixaremos um total de 10 componentes de mistura e consideraremos um total de 50 neurônios nas duas camadas intermediárias da rede.

```
# ajustando a rede de misturas
n_epochs = 500
d = X_train_t.shape[1]
n_componentes = 10
hidden_dim = 50
# algumas variaveis para performar early stopping
best_loss = torch.inf
counter = 0
patience = 30

# definindo arquitetura do modelo
mx_model = MixtureDensityNetwork(
    d,
    1,
    n_components=n_componentes,
    hidden_dim=hidden_dim,
    noise_type=NoiseType.DIAGONAL,
)

# definindo otimizador da rede neural
optimizer = torch.optim.Adamax(
    mx_model.parameters(),
    weight_decay=4e-5,
    lr=0.002,
)

scheduler = torch.optim.lr_scheduler.CosineAnnealingLR(optimizer, n_epochs)
```

Ajustando a rede neural de mistura de normais:

```
# salvando erros do treinamento e da validacao
avg_loss_train_list, avg_loss_val_list = [], []
best_loss_history = []

# percorrendo cada epoca
# starting neural network loop
```

```

for it in tqdm(range(n_epochs),
desc="Ajustando o rede neural de mistura de normais"):
    loss_train_array, loss_valid_array = [], []

    for X_tr, y_tr in train_loader:
        optimizer.zero_grad()
        loss = mx_model.loss(X_tr, y_tr).mean()

        # salvando o valor da perda no treino
        loss_value = loss.data
        loss_train_array.append(loss_value)

        # fazendo backpropagation
        loss.backward()
        optimizer.step()
    scheduler.step()

    # validando agora no conjunto de validacao
    for X_val, y_val in valid_loader:
        with torch.no_grad():
            mx_model.eval()
            # computando perda
            loss = mx_model.loss(X_val, y_val).mean()

            # salvando perda
            loss_value = loss.data
            loss_valid_array.append(loss_value)

    # salvando o historico das perdas
    avg_loss_train = np.mean(np.array(loss_train_array))
    avg_loss_valid = np.mean(np.array(loss_valid_array))

    avg_loss_val_list.append(avg_loss_valid)
    avg_loss_train_list.append(avg_loss_train)

    # performando early stopping pelo conjunto de validação
    if avg_loss_valid < best_loss:
        best_loss = avg_loss_valid
        best_loss_history.append(best_loss)
        counter = 0
    else:

```

```

        counter += 1
    if counter >= patience:
        print(f"Early stopping na época {it}")
        break
    mx_model.train()

```

Early stopping na época 363

Podemos visualizar a curva de aprendizado da rede:

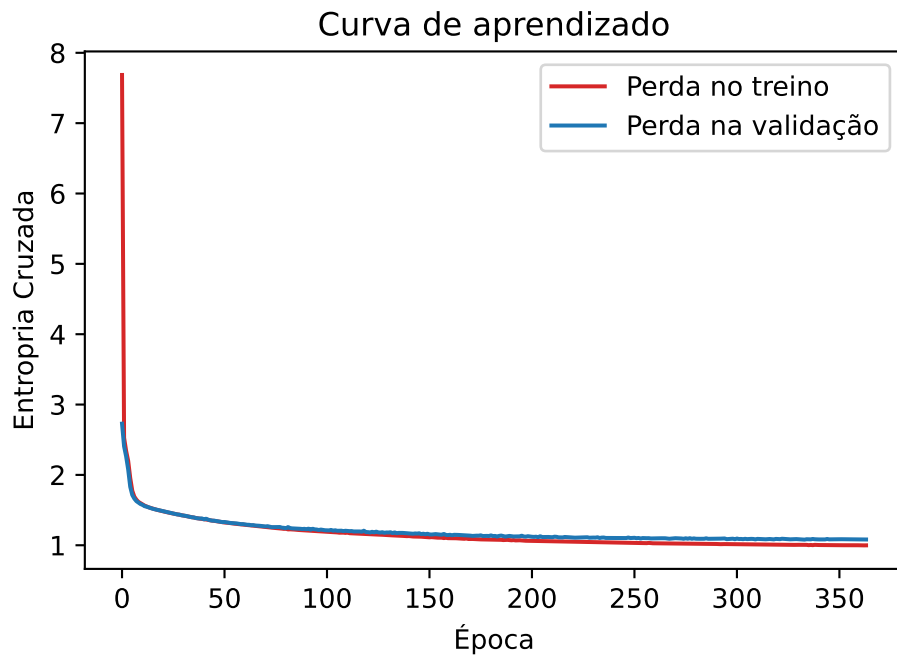


Figure 1: Curva de aprendizado do modelo de mistura de Normais

- Normalizing flows

Definindo primeiro a arquitetura do modelo:

```

# primeiramente, definindo a arquitetura do normalizing flows
# incluindo o numero de flows e o tipo de cada flow
# usaremos a spline quadratica como transformação bijetora
torch.manual_seed(190)
# numero de transformações a serem executadas
n_flows = 6

```

```

# numero de neuronios em cada camada
hidden_units=128
# numero de camadas
hidden_layers = 2
# numero para camada latente
latent_size = 1
# tamanho do contexto (numero de covariaveis)
context_size = X_train_t.shape[1]

flows = []
for i in range(n_flows):
    flows += [
        nf.flows.AutoregressiveRationalQuadraticSpline(
            latent_size,
            hidden_layers,
            hidden_units,
            num_context_channels=context_size,
            permute_mask=True,
            dropout_probability=True,
        )
    ]
    flows += [nf.flows.LULinearPermute(latent_size)]

# Estabelecendo a distribuição base da variável latente como uma normal(0,1)
q0 = nf.distributions.DiagGaussian(latent_size, trainable=False)

# Construindo a arquitetura do normalizing flow
nf_model = nf.ConditionalNormalizingFlow(q0, flows)

nf_optimizer = torch.optim.Adam(
    nf_model.parameters(),
    lr=3e-4,
    weight_decay=1e-5,
)

```

Logo em seguida, treinando o modelo e avaliando curva de aprendizado:

```

# salvando erros do treinamento e da validacao
nf_avg_loss_train_list, nf_avg_loss_val_list = [], []
nf_best_loss_history = []
counter = 0

```



```

patience = 30

# percorrendo cada epoca
# starting neural network loop
for it in tqdm(range(n_epochs), desc="Ajustando o estimador de densidade via normalizing f
    loss_train_array, loss_valid_array = [], []

    for X_tr, y_tr in train_loader:
        nf_optimizer.zero_grad()
        loss = nf_model.forward_kld(y_tr, X_tr)

        # calculando valor da perda no treino
        loss_value = loss.data.numpy()
        loss_train_array.append(loss_value)

        # fazendo backpropagation e atualização dos parametros
        if ~(torch.isnan(loss) | torch.isinf(loss)):
            loss.backward()
            nf_optimizer.step()

    # validando agora no conjunto de validacao
    for X_val, y_val in valid_loader:
        with torch.no_grad():
            nf_model.eval()
            # computando perda
            loss = nf_model.forward_kld(y_val, X_val)

            # salvando perda
            loss_value = loss.data.numpy()
            loss_valid_array.append(loss_value)

    # salvando o historico das perdas
    avg_loss_train = np.mean(np.array(loss_train_array))
    avg_loss_valid = np.mean(np.array(loss_valid_array))

    nf_avg_loss_val_list.append(avg_loss_valid)
    nf_avg_loss_train_list.append(avg_loss_train)

    # performando early stopping pelo conjunto de validação
    if avg_loss_valid < best_loss:
        best_loss = avg_loss_valid

```

```

        nf_best_loss_history.append(best_loss)
        counter = 0
    else:
        counter += 1
        if counter >= patience:
            print(f"Early stopping at epoch {it}")
            break
    nf_model.train()

```

Early stopping at epoch 29

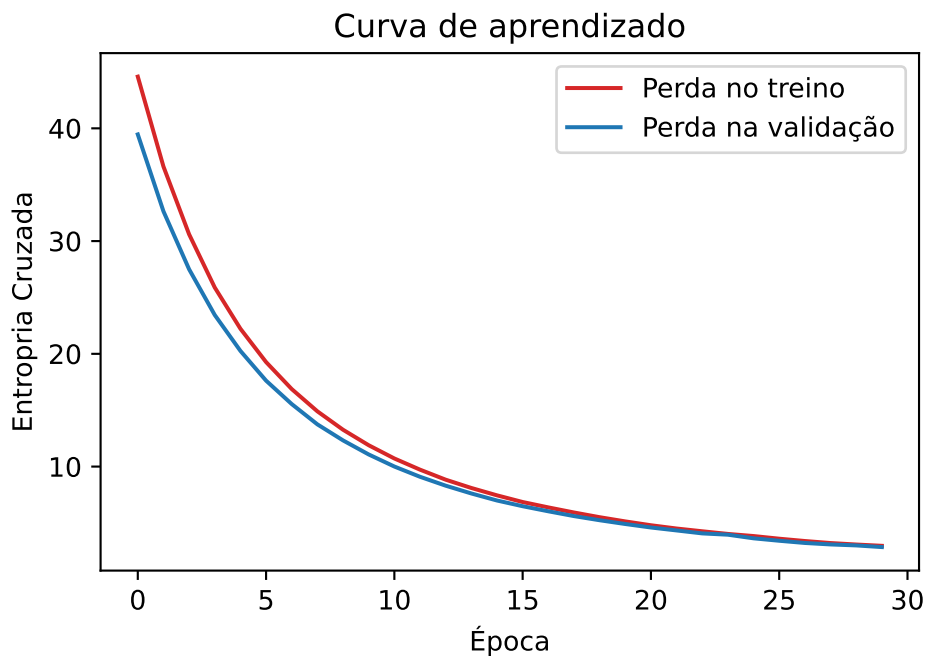


Figure 2: Curva de aprendizado do Normalizing Flows

- FlexCode Para o flexcode, consideraremos a floresta aleatória como algoritmo de regressão para o ajuste de cada coeficiente da combinação linear das funções de base. Além disso, fixaremos 5 como o máximo de funções base ortonormais, utilizando a base de cossenos:

```

fx_model = flexcode.FlexCodeModel(RandomForest, max_basis=5, basis_system="cosine")

# ajustando e tunando o modelo

```

```
fx_model.fit(X_train, y_train)
fx_model.tune(X_valid, y_valid)
```

Obteremos agora as estimativas de densidades condicionais para as observações do conjunto de teste, juntamente com a estimativa da log-verossimilhança negativa dos valores observados:

* Modelo de Mistura

```
# estimativa de densidade via Modelo de Mistura
# obtendo estimativas do vetor de probabilidade, vetor de medias e
# matriz de covariancias de cada grupo
mx_model.eval()
log_pi, mu, sigma = mx_model.forward(X_test_t)

log_pi=log_pi.detach().numpy()
mu_mat=mu.detach().numpy().reshape(mu.size()[0],mu.size()[1])
sigma_mat=sigma.detach().numpy().reshape(mu.size()[0],mu.size()[1])

y_grid = np.linspace(0, np.max(y_train), 1000)

results = np.empty((mu.size()[0], mu.size()[1], y_grid.size))
res_log_loss = np.zeros(X_test_t.shape[0])

# obtendo densidade para cada y no grid fino
for i in range(mu.size()[0]):
    # media de cada grupo
    aux_mu = mu_mat[i, :]
    # variancias associadas a cada grupo
    aux_sigma = sigma_mat[i, :]
    # probabilidade de cada grupo
    aux_log_pi = log_pi[i, :]

    # computando densidade da normal com tais parametros em cada grupo
    z_score = (y_grid - aux_mu[:, np.newaxis])/aux_sigma[:, np.newaxis]
    aux_log_pi=aux_log_pi[:, np.newaxis]
    loglik = aux_log_pi - (1/2)*z_score**2 - np.log(np.sqrt(np.pi*2)*aux_sigma[:, np.newaxis])

    # juntando tudo nos resultados
    results[i, :, :] = np.exp(loglik)

# computando densidade da normal para o valor de y_test
z_score = (y_test[i] - aux_mu)/aux_sigma
```

```

aux_log_pi = log_pi[i, :]
loglik_test = np.exp(
    aux_log_pi - (1/2)*z_score**2 -
    np.log(np.sqrt(np.pi*2)*aux_sigma)
)
res_log_loss[i] = np.log(np.sum(loglik_test))

# densidades associada a cada Y para cada amostra de teste
densities_mx = np.sum(results, axis=1)

# estimando log-loss
mx_log_loss = [
    -np.mean(res_log_loss),
    np.std(res_log_loss)/np.sqrt(X_test.shape[0])
]

```

- Normalizing flows

```

densities_nf = np.zeros((X_test_t.shape[0], 1000))
log_loss_nf = np.zeros(X_test.shape[0])
i = 0
for X in X_test_t:
    X_fixed = X.view(1, -1).repeat_interleave(1000, dim = 0)
    nf_model.eval()
    y_tensor = torch.tensor(y_grid, dtype = torch.float32).view(-1, 1)
    log_prob = nf_model.log_prob(y_tensor, X_fixed)
    nf_model.train()
    prob = torch.exp(log_prob)
    prob[torch.isnan(prob)] = 0
    densities_nf[i,:] = prob.detach().numpy()

    # log verossimilhança
    nf_model.eval()
    log_loss_nf[i] = nf_model.log_prob(
        y_test_t[i].view(1,-1),
        X.view(1, -1)
    ).detach().numpy()
    nf_model.train()
    i += 1

```

```
# estimando log verossimilhança e erro padrão desta
nf_log_loss = [
    -np.mean(log_loss_nf),
    np.std(log_loss_nf)/np.sqrt(X_test.shape[0])
]
```

- FlexCode

```
# densidades usadas para grafico e para computar perda L2
densities_fx, fx_y_grid = fx_model.predict(X_test, n_grid=1000)

# densidade em grid mais fino para computar log-loss mais precisamente
densities_fx_ll, fx_y_grid_ll = fx_model.predict(X_test, n_grid=5000)

# computando log-loss tambem para os pontos do grid mais proximos do teste
i = 0
fx_log_loss = np.zeros(X_test.shape[0])
for y in y_test:
    # encontrando valor do grid fino mais proximo do y no teste
    idx = (np.abs(fx_y_grid_ll.flatten() - y)).argmin()
    dens = densities_fx_ll[i, idx]
    # caso densidade seja nula, trocar por um epsilon
    if dens == 0.0:
        dens = 1e-8
    fx_log_loss[i] = np.log(dens)
    i += 1

# estimando log verossimilhança e erro padrão desta
fx_log_loss = [-np.mean(fx_log_loss), np.std(fx_log_loss) / np.sqrt(X_test.shape[0])]
```

Podemos então comparar cada uma das densidade estimadas dos métodos em termos da perda L2:

```
# instalando o cdetools para calcular a perda L2
# import sys
# sys.path.append('/content/cdetools/python/src')
# !pip install git+https://github.com/lee-group-cmu/cdetools.git#subdirectory=python
import cdetools as cdetools

# computando perda L2
# Mistura de normais
```

```

gm_loss = cdetools.cde_loss(densities_mx, fx_y_grid, y_test)
# Normalizing flow
nf_loss = cdetools.cde_loss(densities_nf, fx_y_grid, y_test)
# FlexCode
fx_loss = cdetools.cde_loss(densities_fx, fx_y_grid, y_test)

results = pd.DataFrame({
    'Mistura de gaussianas': [f"{gm_loss[0]:.4f} ({gm_loss[1]:.4f})",
    f"{mx_log_loss[0]:.4f} ({mx_log_loss[1]:.4f})"],
    'FlexCode': [f"{fx_loss[0]:.4f} ({fx_loss[1]:.4f})",
    f"{fx_log_loss[0]:.4f} ({fx_log_loss[1]:.4f})"],
    'NFlow': [f"{nf_loss[0]:.4f} ({nf_loss[1]:.4f})",
    f"{nf_log_loss[0]:.4f} ({nf_log_loss[1]:.4f})"]
})

# Transpose the DataFrame
results_transposed = results.T
results_transposed.columns = ['Perda L2 (Erro padrão)', 'Log-Verossimilhança (Erro padrão)']
results_transposed

```

	Perda L2 (Erro padrão)	Log-Verossimilhança (Erro padrão)
Mistura de gaussianas	-0.3499 (0.0165)	2.0583 (0.0218)
FlexCode	-0.1544 (0.0016)	2.4026 (0.0317)
NFlow	-0.1335 (0.0072)	2.9390 (0.0325)

Percebemos que, tanto em termos da perda L2 quanto da entropia cruzada, o modelo de misturas de normais parece ter a melhor performance, o que indica que tal modelo talvez seja o mais adequado para a modelagem da densidade condicional no banco de dados explorado.

Item 2

Fixaremos a seguir 5 valores de X do conjunto de teste e plotaremos cada estimativa de densidade condicional para tais valores:

Item 3

A seguir iremos computar os PIT values de cada metodologia e checar se para cada modelo, eles seguem uma distribuição uniforme. Essa checagem será feita tanto visualmente quanto a partir de um teste de KS. Primeiramente, calculamos os pit values:

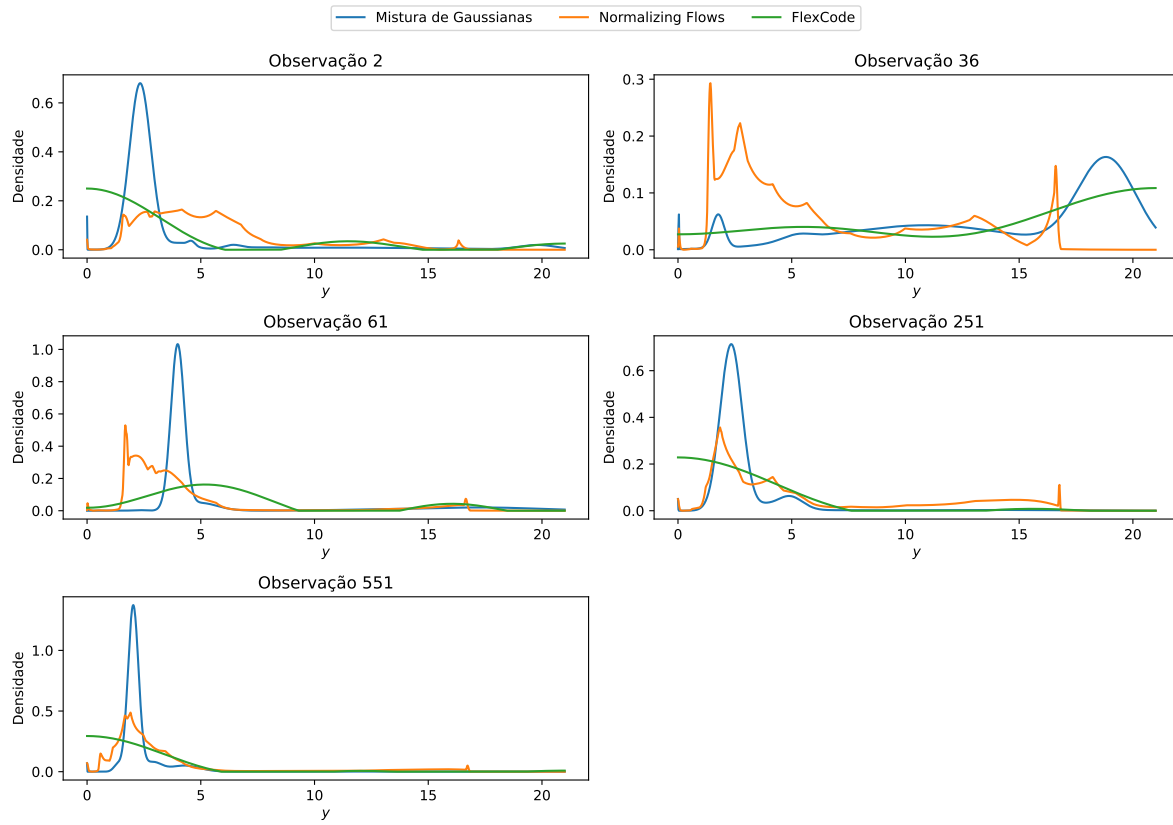


Figure 3: Densidades estimadas de cada método para 5 observações do conjunto de teste

```
# Mistura de normais
pit_mx = cdetools.cdf_coverage(densities_mx, fx_y_grid, y_test)
# FlexCode
pit_fx = cdetools.cdf_coverage(densities_fx, fx_y_grid, y_test)
# NFlow
pit_nf = cdetools.cdf_coverage(densities_nf, fx_y_grid, y_test)
```

Em seguida, podemos visualizar o histograma dos pit-values para cada metodologia através da Figura 4:

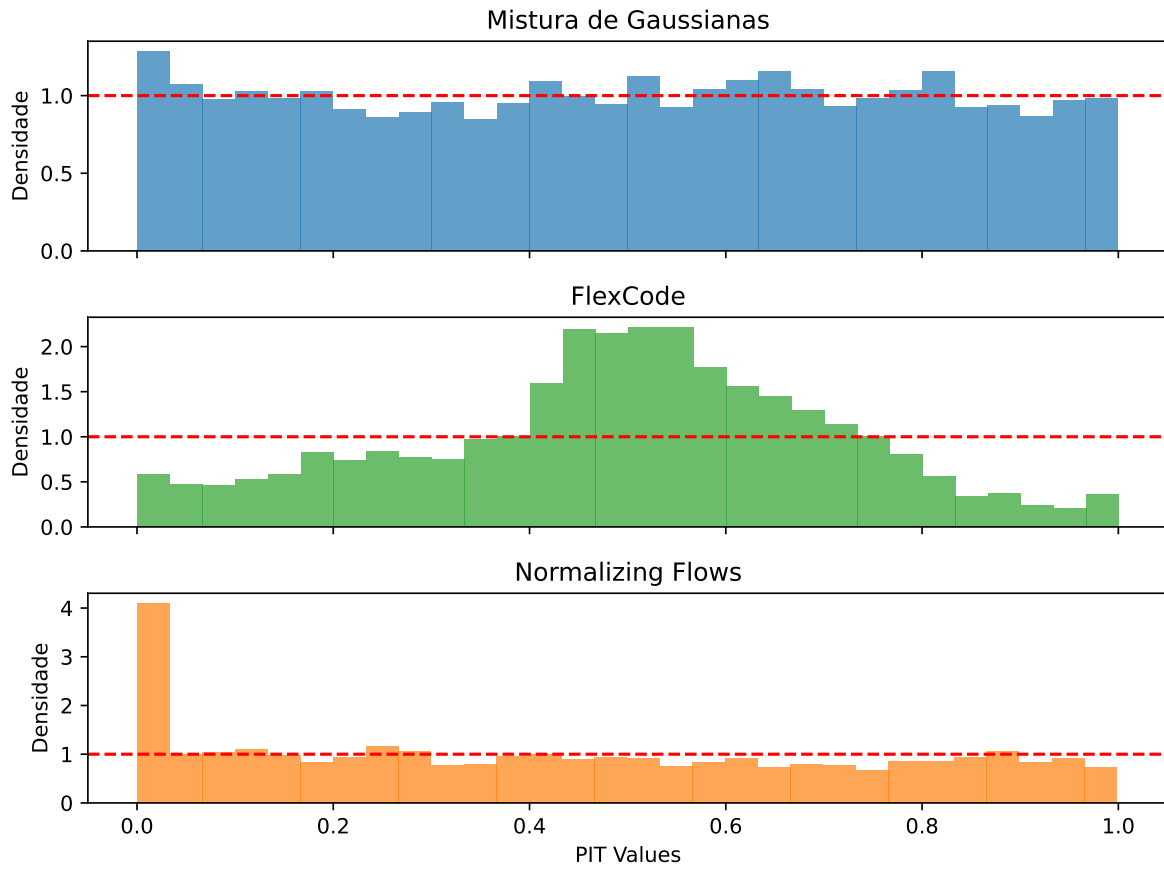


Figure 4: Histograma dos pit-values de cada método.

Percebe-se graficamente que a mistura de Gaussianas parece ser o método com pit-values mais próximos da distribuição uniforme, enquanto os pit-values do normalizing flows e do flexcode parecem ter certos desvios quanto a distribuição postulada sob H_0 , o que sugere que ambos os modelos podem não estar adequadamente calibrados. Para confirmar tais indícios, realizamos o teste KS dos pit-values, testando se a distribuição dos pit-values de fato segue uma $U(0, 1)$:


```

from scipy.stats import kstest

# Perform KS test for uniformity on each PIT dataset
ks_mx = kstest(pit_mx, 'uniform', args=(0, 1))
ks_fx = kstest(pit_fx, 'uniform', args=(0, 1))
ks_nf = kstest(pit_nf, 'uniform', args=(0, 1))

ks_df = pd.DataFrame({
    "Modelo": ["Mistura de normais", "FlexCode", "NFlow"],
    "Estatística KS": [ks_mx.statistic, ks_fx.statistic, ks_nf.statistic],
    "p-valor": [ks_mx.pvalue, ks_fx.pvalue, ks_nf.pvalue]
})
ks_df

```

	Modelo	Estatística KS	p-valor
0	Mistura de normais	0.014635	2.785128e-01
1	FlexCode	0.138324	8.669129e-77
2	NFlow	0.108051	5.986581e-47

Pelos p-valores apresentados na tabela acima, assim como também pelos valores das estatísticas KS, temos evidências de que o modelo de densidade condicional baseado em mistura de normais esteja bem calibrado, com seus respectivos pit-values seguindo de forma muito próxima uma distribuição uniforme. Já modelos obtidos via FlexCode e Normalizing Flows estão descalibrados, com ambas metodologias apresentando p-valores muito pequenos juntamente com uma estatística KS razoavelmente grande.

Exercício 2

Primeiramente, importaremos o banco de dados utilizado:

```

# importando os dados
credit_card_data = pd.read_excel("data/default_of_credit_card_clients.xls",
header = 1).drop("ID", axis = 1)
# visualizando numero de variaveis, observações e tipo de cada variavel
credit_card_data.info()

```

```

<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 30000 entries, 0 to 29999

```

Data columns (total 24 columns):

#	Column	Non-Null Count	Dtype
0	LIMIT_BAL	30000 non-null	int64
1	SEX	30000 non-null	int64
2	EDUCATION	30000 non-null	int64
3	MARRIAGE	30000 non-null	int64
4	AGE	30000 non-null	int64
5	PAY_0	30000 non-null	int64
6	PAY_2	30000 non-null	int64
7	PAY_3	30000 non-null	int64
8	PAY_4	30000 non-null	int64
9	PAY_5	30000 non-null	int64
10	PAY_6	30000 non-null	int64
11	BILL_AMT1	30000 non-null	int64
12	BILL_AMT2	30000 non-null	int64
13	BILL_AMT3	30000 non-null	int64
14	BILL_AMT4	30000 non-null	int64
15	BILL_AMT5	30000 non-null	int64
16	BILL_AMT6	30000 non-null	int64
17	PAY_AMT1	30000 non-null	int64
18	PAY_AMT2	30000 non-null	int64
19	PAY_AMT3	30000 non-null	int64
20	PAY_AMT4	30000 non-null	int64
21	PAY_AMT5	30000 non-null	int64
22	PAY_AMT6	30000 non-null	int64
23	default payment next month	30000 non-null	int64

dtypes: int64(24)

memory usage: 5.5 MB

A seguir, transformaremos as variáveis categóricas em dummies e separaremos a variável resposta y da matriz de covariáveis X :

```
# obtendo variavel resposta y
y = credit_card_data.loc[:, "default payment next month"].values

# covariaveis categoricas
# PAY strings
pay_str = [col for col in credit_card_data if (
    (col.startswith('PAY')) & ("AMT" not in col))]

cat_cols = ["SEX", "EDUCATION", "MARRIAGE"] + pay_str
```

```

# retirando ID e utilizando one-hot encoding em covariaveis categoricas
credit_card_filtered = pd.get_dummies(
    credit_card_data.drop(
        ["default payment next month"],
        axis = 1),
    columns = cat_cols,
    drop_first = True,
    dtype=float
)
# obtendo matriz de covariaveis
X = credit_card_filtered.values

```

Com isso feito, dividiremos o conjunto de dados em treino/calibragem e teste, utilizando-se 90% para treino e calibragem e 10% para teste:

```

# separando os dados em treino+calibragem e teste
X_train_val, X_test, y_train_val, y_test = (
    train_test_split(
        X,
        y,
        test_size=0.1,
        random_state=145)
)

```

A seguir, dividiremos o conjunto de treino e calibragem em 70% treino e 30% calibragem, tendo:

```

X_tr, X_cal, y_tr, y_cal = (
    train_test_split(
        X_train_val,
        y_train_val,
        test_size=0.3,
        random_state=75)
)

# padronizando os dados para o KNN
# criando o scaler
scaler = StandardScaler()

# ajustando o scaler aos dados de treino
scaler.fit(X_tr)

```

```
# Padronizando todas as matrizes de covariaveis
X_tr_scaled = scaler.transform(X_tr)
X_cal_scaled = scaler.transform(X_cal)
X_test_scaled = scaler.transform(X_test)
```

Com os dados divididos em conjuntos de treino, calibragem e teste, podemos primeiramente ajustar os diferentes modelos de classificação considerados e compara-los em termos do score de brier e log-loss:

Item 1

Ajustaremos a seguir os três modelos de classificação:

```
# logistica com penalizacao lasso escolhida via validacao cruzada
logistic_clf = LogisticRegressionCV(
    cv=5,
    random_state=19,
    solver="saga",
    penalty="l1",
    scoring="neg_log_loss",
    max_iter=500,
).fit(X_tr_scaled, y_tr)

# KNN com K = 30
knn_clf = KNeighborsClassifier(n_neighbors=30).fit(X_tr_scaled, y_tr)

# Random Forest com 300 arvores, criterio dado pela log-loss e
# profundidade maxima de 10
rf_clf = RandomForestClassifier(
    n_estimators=300, criterion="log_loss", max_depth=10, random_state=15
).fit(X_tr, y_tr)
```

Agora, computaremos o score de brier e a log-loss para cada método no conjunto de teste, tendo a tabela:

```
# calculando score de brier
logis_brier, knn_brier, rf_brier = (
    brier_score_loss(
        y_test,
        logistic_clf.predict_proba(X_test_scaled)[: , 1]
```

```

    ),
    brier_score_loss(
        y_test,
        knn_clf.predict_proba(X_test_scaled)[: , 1]
    ),
    brier_score_loss(
        y_test,
        rf_clf.predict_proba(X_test_scaled)[: , 1]
    )
)

# computando log-loss
logis_ll, knn_ll, rf_ll = (
    log_loss(
        y_test,
        logistic_clf.predict_proba(X_test_scaled)
    ),
    log_loss(
        y_test,
        knn_clf.predict_proba(X_test_scaled)
    ),
    log_loss(
        y_test,
        rf_clf.predict_proba(X_test_scaled)
    )
)

# tabela com cada risco
results = pd.DataFrame({
    'Logistica': [f"{logis_brier:.4f}",
                  f"{logis_ll:.4f}"],
    'KNN': [f"{knn_brier:.4f}",
            f"{knn_ll:.4f}"],
    'RF': [f"{rf_brier:.4f}",
           f"{rf_ll:.4f}"]
})

# Transpose the DataFrame
results_transposed = results.T
results_transposed.columns = ['Score de brier', 'Log-Verossimilhança']
results_transposed

```

	Score de brier	Log-Verossimilhança
Logística	0.1324	0.4285
KNN	0.1350	0.4921
RF	0.1592	0.5016

Item 2

A seguir, podemos analisar o calibration plot de cada metodologia através da Figura:

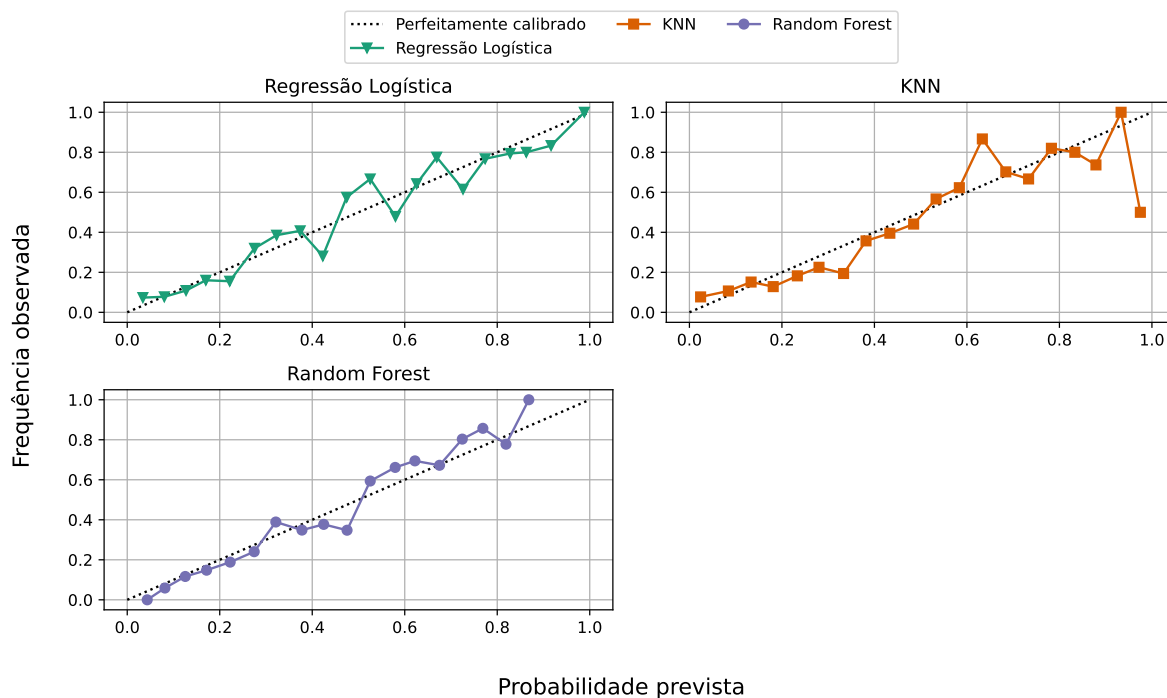


Figure 5: Calibration plot dos métodos de classificação ajustados

Item 3

Vamos a seguir recalibrar cada método via histogram binning. Para tal, ajustaremos cada método ao histogram binning no conjunto de calibragem separado inicialmente, tendo:

```
hist_logis, hist_knn, hist_rf = (
    HistogramCalibrator(n_bins=20),
    HistogramCalibrator(n_bins=20),
```

```

        HistogramCalibrator(n_bins=20),
    )

    # predicoes no conjunto de calibracao
    logis_cal, knn_cal, rf_cal = (
        logistic_clf.predict_proba(X_cal_scaled)[: , 1],
        knn_clf.predict_proba(X_cal_scaled)[: , 1],
        rf_clf.predict_proba(X_cal)[: , 1],
    )

    # ajustando via histogram binning e avaliando os calibration plots
    hist_logis.fit(logis_cal, y_cal)
    hist_knn.fit(knn_cal, y_cal)
    hist_rf.fit(rf_cal, y_cal)

```

HistogramCalibrator(n_bins=20)

Podemos então visualizar o calibration plot das probabilidades recalibradas no conjunto de teste a partir da Figura 6:

Percebemos que todos os métodos estão razoavelmente mais calibrados que as versões originais, havendo principal destaque para a regressão logística e random forest, que tem suas curvas de calibração muito próximas da reta do modelo perfeitamente calibrado.

Item 4

Recalcularemos com base nas recalibrações dos métodos as perdas do score de brier e log-loss, tendo:

```

# calculando score de brier para probabilidades recalibradas
logis_pred = logistic_clf.predict_proba(X_test_scaled)[: , 1]
cal_prob_logis = hist_logis.predict(logis_pred)

knn_pred = knn_clf.predict_proba(X_test_scaled)[: , 1]
cal_prob_knn = hist_knn.predict(knn_pred)

rf_pred = rf_clf.predict_proba(X_test)[: , 1]
cal_prob_rf = hist_rf.predict(rf_pred)

logis_brier_cal, knn_brier_cal, rf_brier_cal = (
    brier_score_loss(y_test, cal_prob_logis),

```

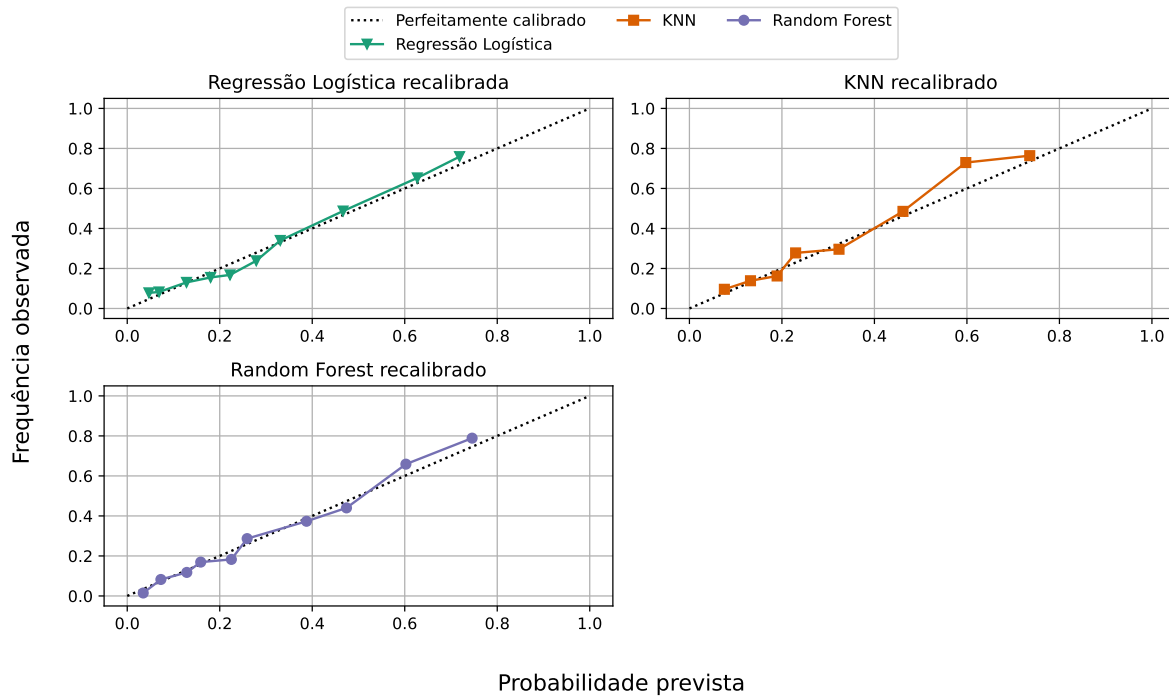


Figure 6: Calibration plot dos métodos de classificação recalibrados

```

    brier_score_loss(y_test, cal_prob_knn),
    brier_score_loss(y_test, cal_prob_rf),
)

# elaborando uma matriz de predicoes
neg_cal_prob_logis = 1 - cal_prob_logis
neg_cal_prob_knn = 1 - cal_prob_knn
neg_cal_prob_rf = 1 - cal_prob_rf

# concatenando ambas probs
logis_prob_cal, knn_prob_cal, rf_prob_cal = (
    np.stack((neg_cal_prob_logis, cal_prob_logis), axis=1),
    np.stack((neg_cal_prob_knn, cal_prob_knn), axis=1),
    np.stack((neg_cal_prob_rf, cal_prob_rf), axis=1),
)

# computando log-loss
logis_ll_cal, knn_ll_cal, rf_ll_cal = (

```



```

log_loss(y_test, logis_prob_cal),
log_loss(y_test, knn_prob_cal),
log_loss(y_test, rf_prob_cal),
)

# tabela com cada risco
results = pd.DataFrame(
    {
        "Logistica": [f"{logis_brier_cal:.4f}", f"{logis_ll_cal:.4f}"],
        "KNN": [f"{knn_brier_cal:.4f}", f"{knn_ll_cal:.4f}"],
        "RF": [f"{rf_brier_cal:.4f}", f"{rf_ll_cal:.4f}"],
    }
)

# Transpose the DataFrame
results_transposed = results.T
results_transposed.columns = ["Score de brier", "Log-Verossimilhança"]
results_transposed

```

	Score de brier	Log-Verossimilhança
Logistica	0.1337	0.4310
KNN	0.1348	0.4347
RF	0.1319	0.4241

Em geral, nota-se uma ligeira melhora de performance em todos os métodos, tendo tanto o score de brier quanto a log-loss menores valores considerando-se os desempenhos iniciais dos métodos pré-calibração.