1 Geometrie Der Zahlen

Geometrie der Zahlen habe ich diese Schrift betitelt, weil ich zu den Methoden, die in ihr arithmetische Sätze liefern, durch räumliche Anschauung geführt bin. Doch ist ie Darstellung durchweg analytisch, wie die schon durch den Umstand geboten war, dass ich von Anfang an eine Mannigfaltigkeit belieiger Ordnung betrachte.

- Von den (A) nirgends [nowhere] concaven Flächen [surfaces / shapes]
- Vom Volumen der (G) Körper [bodies / solid shapes]
- Körper, die infolge ihres Volumens mehr als einen Punkt mit ganzzahligen Coordinaten enthalten
- Andwendngen der vorhergehended Untersuchung
- Eiener weitere analytisch-arithmetische Ungleichung

1.1 Eine (F) Functional+un+gleichung

Es bedeute n irgene eine Anzahl, und die n Zeichen $x_1, \dots, x_n$ sollen, ein jedes unabhängig [independently] von den anderen, jeden reelen Werth vorstellen dürfen. Ein einzelnes [each] System von Werthen dieser Zeichen heisse ein Punkt, die Werthe selbst die Coordinaten des Punktes.

#1 Let n be a number in $\mathbf{N}$ and let n numbers $x_1, \dots, x_n$ be chosen independently of one another. A single system of values ... is called a **Point**, whose value is the coordinates of these points.

#2 Let $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ be a point.

Man denke sic eiene Function von zwei PUnken - sie möge, wenn der esrste Punke a, der zweite b eisst, mit $S(a, b)$ bezeichnet werden - von folgender Art; Es soll $S(a, b)$ für einen beliebigen Punkt a und einen belibigen Punkt b stets einen bestimmten Werth aben; dieser Werth soll immer positiv sein, wenn b von a verschieden ist, und immer Null, wenn b mit a identisch ist. Ferner soll diese Function folgende Functionalgleichung erfüllen:

#2 Let $||b-a||$ be the "distance" between two points... it is always positive and it's 0 for two identical points $a = b$. Observe that:

- if $d - c = t(b-a)$ then $||d-c|| = t||b-a||$
- $||a-c|| < ||a-b|| + ||b-c||$

This is called the **Strahldistanz**...

1.2 Distanzcoefficienten

#2 I should not have said $||a-b||$ is the **distance** since we don't know what it means to "subtract" two points or which distance measure to refer to. We can define a box:

$$\{x : -t \leq x_k - a_k \leq t\}$$

where a is called the "mid-point" or "center" of the box of size $2t$. Let:

$$|a-b|_E = \max_k |a_k - b_k|$$

Then $|\cdot|_E$ also satisfies the triangle functional inequality in Section 1.1 – Minkowski calls this the **span** We could consider the ratio between our two distance measures over all lines:

$$\frac{||\cdot||_S}{||\cdot||_E} : S^n \to \mathbf{R}$$

This measure takes points on the sphere to real numbers. It's not 100% fair to identify lines and pairs of points and points of the sphere. These coincidences happen in Euclidean space.

1.3 Obere Grenze für einhellige Distanzcoefficienten

Let $[-1,1]^n$ be the unit box centered around the origin 0. Let $0_1, \dots, 0_n$ be the vectors $0_1 = (1, 0, \dots, 0)$, etc. Let

$$G = n \times \max \Big\{ S(0, 0_1), \dots, S(0, 0_n), S(0_1, 0), \dots, S(0_n, 0) \Big\}$$

Oddly, we don't even assume $S(0, 0_1) = S(0_1, 0)$ – we have no idea what these distance measure behave like. The result is

$$\max_{\ell \in \mathbf{R}^2} \frac{||\cdot||_S}{||\cdot||_E} \leq G = \max_n \Big\{ S(0, 0_n), S(0_n, 0) \Big\}$$

1.4 Stetigkeit [uniform continuity] Einhelliger (G) Strahl+distanzen (G)

Minkowski's S is a **beam-distance** function on *line segments* $\ell = \overline{AB} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$. This section argues[1] S is uniformly continuous in ℓ.

[1] the modern standard of proof is a little stricter