

Master 2 de Mathématiques Fondamentales et Appliquées
de l'Université Pierre et Marie Curie

Rapport de stage:

Dynamique des espaces-temps spatialement homogènes

Tom DUTILLEUL

stage effectué au sein du LAGA - Université Paris 13 Nord
du 9 mars 2015 au 25 septembre 2015
sous la direction de François BÉGUIN



Remerciements

Je me dois de remercier sincèrement et chaleureusement mon directeur de mémoire, François Béguin. La première chose qui me vient à l'esprit est sa spontanéité et la convivialité de nos conversations, qu'elles aient été d'ordre mathématique ou non. C'est d'ailleurs grâce à nos nombreuses discussions que les petits et gros problèmes rencontrés ont finis par s'évanouir pour me permettre d'avancer dans mon travail ; ou parfois de reculer, quand je m'étais engouffré dans une impasse. Des problèmes, il y en a eu un certain nombre, et c'est ce qui a fait le charme de mon mémoire à mes yeux. J'ai pu découvrir ce qu'était la recherche, à un niveau humble certes, mais toutefois suffisamment pertinent pour que ce soit une toute nouvelle expérience. Il va sans dire que cette expérience m'a plu. J'ai également pris conscience que la manière de rédiger et de présenter un travail est au moins aussi importante que le travail en lui-même. Tout cela grâce à François Béguin, qui m'a proposé un très beau sujet de mémoire et qui m'a bien encadré tout au long du stage. Je suis ravi que l'on approfondisse ensemble ce travail pendant ma thèse.

J'aimerais également remercier le LAGA et l'université de Paris XIII Villetaneuse pour m'avoir accueilli, plus particulièrement en la personne d'Isabelle Barbotin, qui a toujours été disponible pour m'aider et qui l'a d'ailleurs fait à maintes reprises. Je ne crois pas l'avoir déjà vu de mauvaise humeur et c'est un véritable plaisir d'aller lui soutirer les informations précieuses dont elle dispose.

Merci aussi à l'université de Paris VI de m'avoir laissé suffisamment de temps. J'ai terminé ce mémoire plus tard que prévu. Il était cependant important à mes yeux de travailler dessus jusqu'à en être suffisamment satisfait.

Merci à Raphaël Krikorian d'avoir bien voulu prendre de son temps pour m'écouter parler lors de ma soutenance de mémoire.

Pour terminer, merci à tous ceux qui m'ont aidé lorsque je cherchais un directeur de thèse (et donc de mémoire), vos conseils ont été très utiles.

Table des matières

Remerciements	2
1 Préambule	4
2 L'équation d'Einstein pour les espaces-temps de Bianchi	6
2.1 Espaces-temps spatialement homogènes	6
2.2 Algèbres de Lie de dimension 3	8
2.3 Champs de repères orthonormaux parallèles	9
2.4 Coordonnées de Ellis-MacCallum-Wainwright-Hsu et équations de Wainwright-Hsu .	15
3 Du champ de Wainwright-Hsu à l'application de Kasner	19
3.1 Le champ de Wainwright-Hsu	19
3.2 Stratification de l'espace des phases en six ensembles invariants par le flot	20
3.3 Calcul de la différentielle du champ au voisinage du cercle de Kasner	21
3.4 Orbites de type II et application de Kasner	23
3.5 Le paramètre de Kasner	28
4 Etude locale au voisinage du cercle de Kasner	30
4.1 Choix de coordonnées locales adaptées	30
4.2 Changement de paramétrage	33
4.3 Application de passage local	40
4.3.1 Passage d'une orbite entre deux sections locales au voisinage du cercle	40
4.3.2 Définition de l'application de passage local	47
4.3.3 Comparaison de deux orbites entre deux sections locales au voisinage du cercle	49
5 Etude globale des orbites de type VIII et IX	61
5.1 Définition des sections locales et de l'application de retour	62
5.2 Constante d'expansivité pour l'application de Kasner	65
5.3 Hyperbolicité de l'application de retour (existence des cônes invariants)	66
5.4 Existence des variétés stables pour l'application de retour	71
5.5 Orbites de type VIII et IX qui pistent une chaîne hétérocline	77

1 Préambule

En Relativité Générale, l'espace-temps est courbe et est modélisé par une variété lorentzienne (M, g) de dimension 4 vérifiant l'équation d'Einstein $\text{Ric}_g + (\Lambda - \frac{1}{2} \text{Scal}_g) g = T$. Cette équation relie géométrie de l'espace-temps (la courbure de la métrique g) à son « contenu physique » (les champs non gravitationnels). En un certain sens, comprendre les espace-temps revient à résoudre l'équation d'Einstein. Malheureusement, l'étude de cette équation s'est révélée être extrêmement délicate (il s'agit d'une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique, non linéaire, en grande dimension, avec un groupe de jauge de dimension infinie) et nous sommes encore très loin d'avoir des résultats généraux dessus. On peut cependant faire des hypothèses de symétrie sur la variété (M, g) pour simplifier l'équation.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons spécifiquement aux espaces-temps spatialement homogènes (aussi appelés espaces-temps de Bianchi) et vides. Informellement, ce sont les espaces-temps pour lesquels « la géométrie change avec le temps, mais pas quand on se déplace d'un point à un autre de l'espace ». Un peu plus précisément, ces espaces-temps ont deux particularités. D'une part, ils sont feuilletés par des hypersurfaces spatiales qui ont une structure de groupe de Lie de dimension 3 et, d'autre part, la restriction de la métrique à ces hypersurfaces est homogène, c'est-à-dire invariante par les translations à gauche du groupe de Lie.

L'intérêt de cette classe particulière d'espaces-temps est que l'équation d'Einstein se transforme alors en un système d'équations différentielles ordinaires autonome (voir le système (2.10), page 17). Suite à cette simplification, les espaces-temps spatialement homogènes peuvent être vus comme les orbites d'un champ de vecteurs X_{WH} (dit *champ de Wainwright-Hsu*) sur une variété de dimension 4. L'histoire n'est pas pour autant terminée... il est de fait impossible d'intégrer explicitement le champ de vecteurs X_{WH} bien qu'il possède une expression polynomiale relativement simple dans un système de coordonnées adaptées.

Il existe une classification complète des groupes de Lie unimodulaires de dimension 3 en fonction de leurs constantes de structures (voir le tableau de la figure 1, page 8) et cette classification a une conséquence très importante. En effet, elle induit une stratification de l'espace des phases en six ensembles invariants par le flot. On note ces strates $\mathcal{K} = \mathcal{B}_I, \mathcal{B}_{II}, \mathcal{B}_{VI_0}, \mathcal{B}_{VII_0}, \mathcal{B}_{VIII}$ et \mathcal{B}_{IX} . La strate \mathcal{K} est un cercle constitué uniquement de points fixes pour X_{WH} , elle est donc en particulier de dimension 1. La strate \mathcal{B}_{II} est constitué de six demi-ellipsoïdes de dimension 2 s'appuyant tous sur \mathcal{K} . Les strates \mathcal{B}_{VI_0} et \mathcal{B}_{VII_0} sont de dimension 3 et les strates \mathcal{B}_{VIII} et \mathcal{B}_{IX} sont de dimension 4. Les orbites de X_{WH} situées dans les strates \mathcal{K} et \mathcal{B}_{II} (on parle alors d'orbites de type I et II) sont explicitement connues mais ce sont essentiellement les seules. La stratégie d'étude de la dynamique du champ X_{WH} repose intensément sur cette stratification. On utilise la connaissance des orbites contenues dans les strates de petites dimensions (\mathcal{K} et \mathcal{B}_{II}) pour en déduire des propriétés sur les orbites contenues dans les strates de plus grandes dimensions. Dans ce mémoire, nous nous préoccupons des orbites de type VIII et IX : ce sont les orbites génériques.

Les orbites de type II induisent une application continue $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, appelée *application de Kasner*, qui possède trois points fixes appelés *points de Taub* et dont la dynamique est fortement chaotique, mais bien comprise. Cette application possède une description géométrique explicite et élégante. De plus, elle permet de construire, pour tout point de \mathcal{K} , une chaîne hétérocline d'orbites de type I et II. Une relativement vieille conjecture de Belinski, Khalatnikov et Lifschitz (dite *conjecture BKL*) affirme que les orbites « génériques » (en particulier situées dans les strates \mathcal{B}_{VIII} et \mathcal{B}_{IX}) devraient « pister », dans le passé, ces chaînes hétéroclines.

Dans l'article [1] de Liebscher et al., les auteurs étudient le système dynamique défini par le

champ de Wainwright-Hsu et montrent que pour toute chaîne hétérocline H périodique ne passant pas par les points de Taub, il existe un ensemble d'orbites de type VIII et IX qui pistent, dans le passé, la chaîne H . De plus, cet ensemble a une structure de variété lipschitzienne de dimension 3.

Le point de départ de ce mémoire a été d'étudier l'article [1] et d'en comprendre la méthode pour ensuite généraliser le résultat à des chaînes hétéroclines plus complexes. D'autres travaux ont déjà été menés, avec succès, dans cette direction : F. Béguin montre dans [2] que certaines orbites pistent des chaînes non périodiques uniformément éloignées des points de Taub tandis que M. Reiterer et E. Trubowitz montrent dans [3] un résultat similaire pour des chaînes passant arbitrairement proche des points de Taub.

La partie 2 consiste à expliquer comment on passe de l'équation d'Einstein (2.1) au système d'équations différentielles de Wainwright-Hsu (2.10) pour les espaces-temps de Bianchi types I, II, VI₀ et VII₀. Il n'est pas nécessaire de lire cette partie pour comprendre la suite, à l'exception des équations (2.10), (2.11) et (2.12) qui se trouvent à la fin.

Dans la partie 3, nous énonçons un certain nombre de notions classiques et absolument cruciales sur la dynamique des espaces-temps de Bianchi. Nous commençons par introduire le champ de Wainwright-Hsu X_{WH} . Ensuite, nous décrivons en détails la stratification de l'espace des phases et nous explicitons les orbites de type II. La connaissance de la différentielle du champ X_{WH} permet de déterminer avec précision leur sens de parcours, ce qui nous permet de définir l'application de Kasner, les chaînes hétéroclines et la notion de pistage, et enfin d'énoncer le résultat principal de ce mémoire. Le paramètre de Kasner est introduit à la fin, il permet de paramétrer le cercle de Kasner et de décrire les valeurs propres de la différentielle du champ avec beaucoup de précision.

Le but de la partie 4 est d'étudier le passage des orbites de types VIII et IX au voisinage d'un point du cercle de Kasner. Nous y reprenons intégralement les calculs effectués dans la partie « Local map » de l'article [1]. Notre stratégie pour généraliser leur résultat a été d'explicitier la manière dont leurs constantes dépendent du paramètre de Kasner et explosent lorsqu'on se rapproche des points de Taub. Dans leur cas, la chaîne hétéroclinique était périodique et il n'y avait pas lieu d'étudier cette dépendance. On y trouvera en particulier des inégalités contrôlant l'écart entre deux orbites passant à proximité du cercle de Kasner.

Dans la partie 5, nous généralisons le résultat de l'article [1] à des chaînes hétéroclines non nécessairement périodiques mais qui restent uniformément éloignées des points de Taub. Sur le plan formel, c'est effectivement une généralisation. Cependant, nous n'utilisons pour le démontrer aucun ingrédient véritablement nouveau par rapport à ce qui est fait dans l'article original. En particulier, les améliorations faites dans la partie 4 n'y sont pas utilisées.

Le travail effectué dans ce mémoire sera poursuivi en thèse et nous permettra, nous l'espérons, de démontrer, avec la même stratégie, que le résultat reste vrai pour des chaînes hétéroclines passant arbitrairement proches des points de Taub, au moins sur un ensemble de mesure strictement positive, puis sur un ensemble de mesure pleine (si tant est que ce résultat soit vrai). La géométrie et la mesure des ensembles d'orbites de type VIII et IX obtenus sera également étudiée de près.

2 L'équation d'Einstein pour les espaces-temps de Bianchi

Nous allons définir rigoureusement l'objet principal du mémoire : les espaces-temps de Bianchi. Ensuite, nous allons faire quelques rappels sur les groupes de Lie. Ceci en tête, nous pourrions montrer qu'un espace-temps de Bianchi qui vérifie l'équation d'Einstein dans le vide admet un champ de repères particulier, que l'on nomme champ de repères orthonormal parallèle. L'équation d'Einstein sera alors essentiellement équivalente à un système d'équations différentielles portant sur les constantes de structure et la seconde forme fondamentale écrites dans ces coordonnées particulières. Plus précisément, nous allons montrer que, pour les espaces-temps de Bianchi, l'équation d'Einstein dans le vide (et sans constante cosmologique) se ramène au système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \Sigma'_1 &= (2 - q)\Sigma_1 + S_1 \\ \Sigma'_2 &= (2 - q)\Sigma_2 + S_2 \\ \Sigma'_3 &= (2 - q)\Sigma_3 + S_3 \\ N'_1 &= -(q + 2\Sigma_1)N_1 \\ N'_2 &= -(q + 2\Sigma_2)N_2 \\ N'_3 &= -(q + 2\Sigma_3)N_3 \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} S_1 &= \frac{1}{3}(2N_1^2 - N_2^2 - N_3^2 + 2N_2N_3 - N_1N_3 - N_1N_2) \\ S_2 &= \frac{1}{3}(2N_2^2 - N_3^2 - N_1^2 + 2N_3N_1 - N_2N_1 - N_2N_3) \\ S_3 &= \frac{1}{3}(2N_3^2 - N_1^2 - N_2^2 + 2N_1N_2 - N_3N_2 - N_3N_1) \end{cases}$$

et

$$q = \frac{1}{3}(\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2)$$

sur « l'espace des phases » :

$$\mathcal{B} = \{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^6 \mid \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0, \Omega = 0\}$$

où

$$\Omega = 6 - (\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2) - \frac{1}{2}(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) + (N_1N_2 + N_2N_3 + N_3N_1)$$

Autrement dit, (à cas particuliers près) un espace-temps de Bianchi pourra être vu comme une solution du système d'équations différentielles ci-dessus.

2.1 Espaces-temps spatialement homogènes

En relativité générale, l'espace-temps est modélisé par une variété lorentzienne (M, g) de dimension 4 satisfaisant l'équation d'Einstein :

$$\text{Ric}_g + \left(\Lambda - \frac{1}{2} \text{Scal}_g \right) g = T \quad (2.1)$$

où

- Λ est une constante (dite *cosmologique*).
- T est un tenseur (dit *énergie-impulsion*), qui représente le « contenu physique » (la répartition de matière et les champs non gravitationnels) de l'espace temps.

On ne sait pas dire grand choses des solutions de cette équation aux dérivées partielles dans le cas général mais on peut faire plusieurs hypothèses simplificatrices. On peut tout d'abord décider de s'intéresser aux espaces temps *vides* (physiquement, cela revient à supposer qu'il n'y a pas d'autres champs que le champ gravitationnel et, bien sur, qu'il n'y a pas de matière), on est alors ramené à résoudre l'équation (sans constante cosmologique) :

$$\text{Ric}_g = 0$$

On peut ensuite faire des hypothèses de symétries sur la variété (M, g) . De manière informelle, nous allons nous intéresser aux espaces-temps ayant des « tranches spatiales homogènes ». Les espaces-temps ayant cette propriété de symétrie (pour l'instant décrite informellement) sont appelés *espaces-temps de Bianchi*. Donnons maintenant deux définitions équivalentes des espaces-temps de Bianchi :

Définition 2.1. Un *espace-temps de Bianchi* est une variété lorentzienne (M, g) globalement hyperbolique qui admet une action libre proprement discontinue isométrique d'un groupe de Lie G réel de dimension 3 dont les orbites sont des hypersurfaces spatiales.

Définition 2.2. Un *espace-temps de Bianchi* est une variété lorentzienne de la forme

$$(M, g) = (I \times G, -dt^2 + h_t)$$

où

- I est un intervalle ouvert de la droite réelle.
- G est un groupe de Lie réel de dimension 3.
- t désigne une coordonnée sur l'intervalle I .
- pour tout $t \in I$, h_t est une métrique riemannienne sur l'hypersurface $\{t\} \times G \simeq G$ invariante sous l'action de G par translations à gauche.

Il est important de remarquer que la donnée d'un espace-temps de Bianchi $(M, g) = (I \times G, -dt^2 + h_t)$ est équivalente à la donnée de la famille (h_t) , c'est-à-dire d'une famille à 1-paramètre de métriques riemanniennes sur G . De plus, connaître h_t en un point est équivalent à la connaître partout par homogénéité donc la donnée de h_t est équivalente à la donnée d'une forme quadratique. La donnée de la métrique g est, dans ce cadre, équivalente à la donnée d'une application lisse $I \rightarrow \text{Quad}(\mathfrak{g})$ (où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie du groupe G et $\text{Quad}(\mathfrak{g})$ est l'ensemble des formes quadratiques de \mathfrak{g}). C'est pour cette raison que l'équation d'Einstein dans le vide $\text{Ric}_g = 0$ pour les espaces-temps de Bianchi est une équation différentielle ordinaire, comme nous le verrons dans la suite.

Concluons cette partie par quelques faits généraux sur les groupes de Lie.

Définition 2.3. Un groupe de Lie est dit *unimodulaire* si ses mesures de Haar à gauche et à droite coïncident.

Une algèbre de Lie est dite *unimodulaire* si les groupes de Lie connexes associés le sont.

Un espace-temps de Bianchi $(M, g) = (I \times G, -dt^2 + h_t)$ est dit *de type A* si le groupe G est *unimodulaire*.

Proposition 2.4. Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors G est unimodulaire si et seulement si, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la trace de l'application $\text{ad}(x) : y \mapsto [x, y]$ est nulle.

Démonstration. C'est facile, on renvoie par exemple à la partie 6 de l'article de Milnor [4]. □

2.2 Algèbres de Lie de dimension 3

Proposition 2.5. *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle unimodulaire de dimension 3, et si h est une forme quadratique définie positive sur \mathfrak{g} , alors il existe une base B de \mathfrak{g} , orthonormale pour h , telle que le crochet de Lie de deux vecteurs distincts de B soit proportionnel au troisième vecteur de B .*

Démonstration. On fixe une orientation sur \mathfrak{g} . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à h . Comme \mathfrak{g} est de dimension 3 et orientée, on peut considérer le produit vectoriel $(u, v) \mapsto u \times v$ sur \mathfrak{g} associé au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Fixons (f_1, f_2, f_3) une base orthonormée directe de \mathfrak{g} et définissons une application linéaire $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ par $L(f_i) = [f_{i+1}, f_{i+2}]$ (où l'indice i est pris modulo 3). Comme $f_i = f_{i+1} \times f_{i+2}$, on a, par bilinéarité, $L(u \times v) = [u, v]$ pour tout $u, v \in \mathfrak{g}$. L'existence de la base recherchée est donc équivalente à l'existence d'une base orthonormée directe qui diagonalise L . On conclut en remarquant que, d'après la proposition 2.4, on a $\text{tr}(\text{ad}(f_i)) = 0$ pour tout i et que cela implique que L est autoadjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. \square

Dans le cadre de la proposition 2.5, on a une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ et des réels n_1, n_2, n_3 tels que

$$[e_1, e_2] = n_3 e_3, [e_2, e_3] = n_1 e_1 \text{ et } [e_3, e_1] = n_2 e_2$$

Les nombres n_1, n_2, n_3 sont appelés *constantes de structure* de \mathfrak{g} . Quitte à changer e_1, e_2, e_3 en leurs opposés, on peut supposer qu'au plus un des entiers n_1, n_2, n_3 est négatif. Les signes des entiers n_1, n_2, n_3 , avec cette convention et considérés à permutation près, ne dépendent pas du choix de B , et classent les algèbres de Lie unimodulaires de dimension 3 à isomorphisme près. On résume cette classification dans le tableau ci-dessous.

Type	Signes de n_1, n_2, n_3	Groupe de Lie associé
I	0, 0, 0	\mathbb{R}^3
II	+, 0, 0	Groupe d'Heisenberg
VI ₀	+, -, 0	$\text{Isom}(\text{Min}_2) \simeq \text{O}(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^2$
VII ₀	+, +, 0	$\text{Isom}(\mathbb{R}^2) \simeq \text{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$
VIII	+, +, -	$\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ou $\text{O}(1, 2)$
IX	+, +, +	$\text{SO}(3, \mathbb{R})$ ou $\text{SU}(2)$

FIGURE 1 – Classification des groupes de Lie unimodulaires

Dans la suite, lorsque l'on parlera d'un espace temps de Bianchi de type IX par exemple, cela voudra dire que son groupe de Lie sous-jacent est de type IX au sens du tableau de la figure 1. Il deviendra clair après avoir démontré la proposition 2.7 que le type d'un espace-temps de Bianchi ne peut pas changer au cours du temps. Une orbite de type IX sera quant à elle une solution des équations de Wainwright-Hsu représentant un espace-temps de Bianchi de type IX.

2.3 Champs de repères orthonormaux parallèles

Soit $(M, g) = (I \times G, -dt^2 + h_t)$ un espace-temps de Bianchi de type A . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le pseudo-produit scalaire associé à g , et ∇ la connexion de Levi-Civita de g . On définit la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $\{t\} \times G$ par $\Pi_t(x, y) := \langle \nabla_x \frac{\partial}{\partial t}, y \rangle$. Comme annoncé précédemment, nous allons choisir un système de coordonnées sur $M = I \times G$ dans lequel nous expliciterons l'équation d'Einstein $\text{Ric}_g = 0$. Ceci revient à choisir un champ de repères.

Définition 2.6. On appelle *champ de repères orthonormal parallèle* sur $(I \times G, -dt^2 + h_t)$ tout champ de repère (e_0, e_1, e_2, e_3) qui satisfait les propriétés (a), (b), (c), (d) suivantes :

- (a) Le champ de vecteurs e_0 est égal à $\frac{\partial}{\partial t}$. Les champs de vecteurs e_1, e_2, e_3 sont tangents à l'hypersurface spatiale $\{t\} \times G$ pour tout t , et invariants à gauche.
- (b) Pour tout $(t, x) \in I \times G$, la base $(e_1, e_2, e_3)(t, x)$ est orthonormale pour la métrique h_t . De plus, on a $\nabla_{e_0} e_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.
- (c) Il existe des réels $n_1(t), n_2(t), n_3(t)$ tels que $[e_1, e_2] = n_3(t)e_3$, $[e_2, e_3] = n_1(t)e_1$ et $[e_3, e_1] = n_2(t)e_2$.
- (d) La seconde forme fondamentale Π_t de l'hypersurface spatiale $\{t\} \times G$ est diagonale dans la base (e_1, e_2, e_3) pour tout t .

Nous allons démontrer l'existence d'un tel champ de repères pour un espace-temps de Bianchi vide de type A et l'équation d'Einstein aura une expression agréable dans ces coordonnées. Plus précisément, nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.7. *Soit $(M, g) = (I \times G, -dt^2 + h_t)$ un espace-temps de Bianchi de type A . Si la métrique $g = -dt^2 + h_t$ satisfait l'équation d'Einstein $\text{Ric}_g = 0$, alors il existe un champ de repères orthonormal parallèle (e_0, e_1, e_2, e_3) sur $M = I \times G$.*

Il est important de noter que nous utiliserons l'équation d'Einstein au cours de la preuve pour construire le champ de repères. Nous aurons aussi besoin d'une expression de la courbure en fonction des constantes de structure, ce qui est fait ci dessous.

Proposition 2.8. *Soit g une métrique riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie G unimodulaire de dimension 3. D'après la proposition 2.5, soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de champs de vecteurs invariants à gauche sur G , orthonormale pour g , telle que le crochet de deux vecteurs quelconques de cette base soit proportionnel au troisième. Soient n_1, n_2, n_3 les réels tels que $[e_1, e_2] = n_3 e_3$, $[e_2, e_3] = n_1 e_1$ et $[e_3, e_1] = n_2 e_2$. On a alors*

$$\text{Ric}_h(e_i, e_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad (2.2)$$

$$\text{Ric}_h(e_i, e_i) = \frac{1}{2}(n_i^2 - n_j^2 - n_k^2) + n_j n_k \quad \text{où } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \quad (2.3)$$

$$\text{Scal}_h = -\frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1. \quad (2.4)$$

Démonstration. D'après la formule de Koszul, la connexion de Levi-Civita ∇ vérifie

$$2\langle \nabla_x y, z \rangle = L_x \langle y, z \rangle + L_y \langle x, z \rangle - L_z \langle x, y \rangle - \langle x, [y, z] \rangle - \langle y, [x, z] \rangle + \langle z, [x, y] \rangle$$

pour tous champs de vecteurs x, y, z . On se donne maintenant trois champs de vecteurs invariants à gauche x, y, z . La formule de Koszul se simplifie en :

$$\langle \nabla_x y, z \rangle = \frac{1}{2} (-\langle x, [y, z] \rangle - \langle y, [x, z] \rangle + \langle z, [x, y] \rangle)$$

et ceci permet d'exprimer l'action de la connexion ∇ sur les champs de vecteurs e_1, e_2, e_3 à partir des réels n_1, n_2, n_3 . On pose, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3) - n_i$$

on a alors

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} e_2 &= \alpha_1 e_3 \\ \nabla_{e_2} e_3 &= \alpha_2 e_1 \\ \nabla_{e_3} e_1 &= \alpha_3 e_2\end{aligned}$$

et on peut déduire facilement de ces formules l'expression de $\nabla_{e_i} e_j$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$. En effet, ∇ est sans torsion et on a donc

$$\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]$$

pour tous champs de vecteurs x et y . On utilise ensuite la formule

$$\text{Ric}_g(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^3 \langle R_{e_k, e_i}^g e_j, e_k \rangle$$

pour terminer les calculs (où R^g est le tenseur de courbure). \square

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer l'existence d'un champ de repères orthonormal pour les espaces qui nous intéressent.

Preuve de la proposition 2.7. On note $e_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ et on fixe $t_0 \in I$. L'idée de la preuve est de commencer par construire les champs de vecteurs e_1, e_2, e_3 en restriction à l'hypersurface spatiale $\{t_0\} \times G$ puis de les étendre sur $I \times G$ par transport parallèle et enfin de vérifier que le champ de repère obtenu est orthonormal parallèle.

1. (Construction des champs de vecteurs e_1, e_2, e_3 en restriction à l'hypersurface spatiale $\{t_0\} \times G$)
On fixe une base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ de champs de vecteurs invariants à gauche sur $\{t_0\} \times G$, orthonormale pour la métrique h_{t_0} . On note $(\hat{\theta}_{i,j})$ la matrice de la seconde forme fondamentale de $\{t_0\} \times G$ dans la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, autrement dit :

$$\hat{\theta}_{i,j} = \langle \nabla_{\hat{e}_i} e_0, \hat{e}_j \rangle$$

On introduit maintenant la matrice $(\hat{n}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ définie par :

$$\hat{n}_{i,j} := \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon(j, k, \ell) \hat{C}_{k,\ell}^i + \epsilon(i, k, \ell) \hat{C}_{k,\ell}^j$$

où $\hat{C}_{i,j}^k := \langle [\hat{e}_i, \hat{e}_j], \hat{e}_k \rangle$, où $\epsilon(j, k, \ell)$ est la signature de la permutation $(1, 2, 3) \mapsto (j, k, \ell)$ si $\{j, k, \ell\} = \{1, 2, 3\}$ et est nul si deux des indices j, k, ℓ coïncident. La matrice $(\hat{n}_{i,j})$ est clairement symétrique. Il est facile de voir que si le crochet de deux vecteurs quelconques de la base est proportionnel au troisième, alors $(\hat{n}_{i,j})$ est diagonale. Nous allons expliquer pourquoi la réciproque est vraie.

Supposons $(\hat{n}_{i,j})$ diagonale. Le crochet de deux vecteurs quelconques de la base est proportionnel au troisième si et seulement si $\hat{C}_{i,j}^k = 0$ dès que $k = i$ ou $k = j$. Montrons par exemple que $\hat{C}_{1,3}^1 = \hat{C}_{2,3}^2 = 0$ (les autres coefficients se traitent de la même manière). L'égalité $\hat{n}_{1,2} = 0$ s'explique en $\hat{C}_{1,3}^1 = \hat{C}_{2,3}^2$. D'après la proposition 2.4, $\text{tr}(\text{ad}(\hat{e}_i)) = 0$ pour tout i . Cette égalité pour $i = 3$, s'explique en $\hat{C}_{1,3}^1 + \hat{C}_{2,3}^2 + \hat{C}_{3,3}^3 = 0$, c'est-à-dire $\hat{C}_{1,3}^1 + \hat{C}_{2,3}^2 = 0$ puisque $\hat{C}_{3,3}^3 = 0$. D'où le résultat.

Or, par hypothèse, $\text{Ric}_g(e_0, \hat{e}_l) = 0$ pour tout $l \in \{1, 2, 3\}$ et ces équations impliquent que les matrices $(\hat{n}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ et $(\theta_{i,j})$ commutent, en effet

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g(e_0, \hat{e}_l) &= -\langle R_{e_0, e_0}^g \hat{e}_l, e_0 \rangle + \sum_{k=1}^3 \langle R_{\hat{e}_k, e_0}^g \hat{e}_l, \hat{e}_k \rangle \\ &= \langle R_{e_0, e_0}^g e_0, \hat{e}_l \rangle - \sum_{k=1}^3 \langle R_{\hat{e}_l, \hat{e}_k}^g e_0, \hat{e}_k \rangle \\ &= -\sum_{k=1}^3 \langle \nabla_{\hat{e}_l} \nabla_{\hat{e}_k} e_0 - \nabla_{\hat{e}_k} \nabla_{\hat{e}_l} e_0 - \nabla_{[\hat{e}_l, \hat{e}_k]} e_0, \hat{e}_k \rangle \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la deuxième ligne les symétries du tenseur de courbure et à la troisième ligne le fait que $\nabla_{e_0} e_0 = 0$ (on peut par exemple voir cela en utilisant la formule de Koszul et en se rappelant que la métrique g est de la forme $-dt^2 + h_t$), on a ensuite, par définition de la seconde forme fondamentale et des coefficients $\hat{C}_{l,k}^m$,

$$\text{Ric}_g(e_0, \hat{e}_l) = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left(-\theta_{k,m} \langle \nabla_{\hat{e}_l} \hat{e}_m, \hat{e}_k \rangle + \theta_{l,m} \langle \nabla_{\hat{e}_k} \hat{e}_m, \hat{e}_k \rangle + \hat{C}_{l,k}^m \theta_{m,k} \right)$$

et comme la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ est orthonormale, la formule de Koszul donne

$$2\langle \nabla_{\hat{e}_l} \hat{e}_m, \hat{e}_k \rangle = \hat{C}_{l,m}^k - \hat{C}_{m,k}^l - \hat{C}_{l,k}^m$$

il est ensuite facile de terminer les calculs puisque tout est exprimé en fonction des coefficients $\hat{C}_{l,k}^m$ et $\theta_{m,k}$.

Ces deux matrices sont donc codiagonalisables dans une base orthonormale pour h_{t_0} : il existe une base (e_1, e_2, e_3) de champs de vecteurs invariants à gauche sur $\{t_0\} \times G$, orthonormale pour la métrique h_{t_0} , dans laquelle la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $\{t_0\} \times G$ est diagonale, et telle que le crochet de deux quelconques des champs de vecteurs e_1, e_2, e_3 est proportionnel au troisième.

2. (Prolongement des champs de vecteurs)

On prolonge ces champs de vecteurs sur $M = I \times G$, par transport parallèle le long des orbites du champ e_0 , autrement dit le long des courbes $c_x : t \mapsto (t, x)$ où $x \in G$. Le champ de repères (e_0, e_1, e_2, e_3) sur M ainsi obtenu vérifie les hypothèses (a) et (b), et vérifie les hypothèses (c) et (d) en restriction à l'hypersurface $\{t_0\} \times G$ (on utilise essentiellement que le produit scalaire est conservé par transport parallèle).

3. (Vérification)

Il reste à montrer que les propriétés (c) et (d) sont vérifiées partout sur M . Pour faire cela, on généralise les deux matrices précédentes. On note $(\theta_{i,j}(t))$ la matrice de la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $\{t\} \times G$ dans la base (e_1, e_2, e_3) , et on considère la matrice $(n_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq 3}$ définie par $n_{i,j}(t) := \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon(j, k, \ell) C_{k,\ell}^i(t) + \epsilon(i, k, \ell) C_{k,\ell}^j(t)$, où $C_{i,j}^k(t) := \langle [e_i, e_j], e_k \rangle|_{\{t\} \times G}$, et où $\epsilon(j, k, \ell)$ est défini comme ci-dessus. On a alors, pour $1 \leq i, j \leq 3$, :

$$\frac{dn_{i,j}}{dt} = -\theta n_{i,j} + \sum_{l=1}^3 \theta_{i,l} n_{l,j} + \theta_{l,j} n_{i,l} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\theta_{i,j}}{dt} = -\text{Ric}_{h_t}(e_i, e_j) - \theta_{i,j} \theta \quad (2.6)$$

où $\theta = \text{tr}(\Pi_t) = \theta_{1,1} + \theta_{2,2} + \theta_{3,3}$. Nous allons maintenant détailler un peu les calculs permettant d'obtenir les équations (2.5) et (2.6) (on pourra ne pas les lire en première lecture) :

(a) (Dérivées des coefficients $n_{i,j}$)

On va commencer par dériver les coefficients $C_{k,l}^i$. C'est essentiellement l'identité de Jacobi qui permet d'obtenir une expression agréable. Une fois ces formules établies, on trouve l'équation (2.5) avec un peu de patience.

$$\begin{aligned} \frac{dC_{k,l}^i}{dt} &= \frac{d}{dt} \langle [e_k, e_l], e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_0} [e_k, e_l], e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{[e_k, e_l]} e_0, e_i \rangle + \langle [e_0, [e_k, e_l]], e_i \rangle \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la deuxième ligne que $\nabla_{e_0} e_i = 0$ par transport parallèle et à la troisième ligne que ∇ est sans torsion. Occupons nous des deux termes séparément.

Premier terme :

$$[e_k, e_l] = \sum_{m=1}^3 \langle [e_k, e_l], e_m \rangle e_m$$

donc, par C^∞ linéarité de la connexion ∇ ,

$$\nabla_{[e_k, e_l]} e_0 = \sum_{m=1}^3 \langle [e_k, e_l], e_m \rangle \nabla_{e_m} e_0 = \sum_{m=1}^3 C_{k,l}^m \nabla_{e_m} e_0$$

d'où, par définition de la deuxième forme fondamentale,

$$\langle \nabla_{[e_k, e_l]} e_0, e_i \rangle = \sum_{m=1}^3 C_{k,l}^m \theta_{m,i}$$

Deuxième terme : D'après l'identité de Jacobi, on a

$$[e_0, [e_k, e_l]] + [e_k, [e_l, e_0]] + [e_l, [e_0, e_k]] = 0$$

et comme ∇ est sans torsion et que les champs de vecteurs e_k pour $k \geq 1$ sont construits par transport parallèle le long des lignes orbites de e_0 , on a

$$\forall k \geq 1, \nabla_{e_k} e_0 = [e_k, e_0]$$

d'où, en remplaçant dans l'identité de Jacobi,

$$[e_0, [e_k, e_l]] = [e_l, \nabla_{e_k} e_0] - [e_k, \nabla_{e_l} e_0]$$

et par définition de la seconde forme fondamentale, on a une décomposition

$$\forall k \geq 1, \nabla_{e_k} e_0 = \sum_{m=1}^3 \langle \nabla_{e_k} e_0, e_m \rangle e_m = \sum_{m=1}^3 \theta_{k,m} e_m$$

d'où, en utilisant le fait que la seconde forme fondamentale est spatialement constante, c'est-à-dire $d\theta_{k,m}(e_l) = 0$ pour tout k, l, m , on a

$$[e_0, [e_k, e_l]] = \sum_{m=1}^3 (\theta_{k,m} [e_l, e_m] - \theta_{l,m} [e_k, e_m])$$

d'où

$$\langle [e_0, [e_k, e_l]], e_i \rangle = \sum_{m=1}^3 (\theta_{k,m} C_{l,m}^i - \theta_{l,m} C_{k,m}^i)$$

Finalement, on a

$$\frac{dC_{k,l}^i}{dt} = \sum_{m=1}^3 (C_{k,l}^m \theta_{m,i} + C_{l,m}^i \theta_{k,m} - C_{k,m}^i \theta_{l,m})$$

On montre ensuite que

$$\begin{aligned} \frac{dn_{i,j}}{dt} &= \sum_{m=1}^3 (n_{j,m} \theta_{m,i} + n_{i,m} \theta_{m,j}) \\ &+ \sum_{k,l,m=1}^3 \left(\epsilon(j, k, l) C_{l,m}^i \theta_{k,m} - \epsilon(j, k, l) C_{k,m}^i \theta_{l,m} - \epsilon(m, k, l) C_{k,l}^j \theta_{m,i} \right) \\ &+ \sum_{k,l,m=1}^3 \left(\epsilon(i, k, l) C_{l,m}^j \theta_{k,m} - \epsilon(i, k, l) C_{k,m}^j \theta_{l,m} - \epsilon(m, k, l) C_{k,l}^i \theta_{m,j} \right) \end{aligned}$$

et il reste alors à prouver que

$$\begin{aligned} -\theta n_{i,j} &= \sum_{k,l,m=1}^3 \left(\epsilon(j, k, l) C_{l,m}^i \theta_{k,m} - \epsilon(j, k, l) C_{k,m}^i \theta_{l,m} - \epsilon(m, k, l) C_{k,l}^j \theta_{m,i} \right) \\ &+ \sum_{k,l,m=1}^3 \left(\epsilon(i, k, l) C_{l,m}^j \theta_{k,m} - \epsilon(i, k, l) C_{k,m}^j \theta_{l,m} - \epsilon(m, k, l) C_{k,l}^i \theta_{m,j} \right) \end{aligned}$$

ce qui est laissé au bon vouloir du lecteur (ou de la lectrice).

(b) (Dérivées des coefficients $\theta_{i,j}$)

L'idée principale dans les calculs qui suivent est d'utiliser la nullité de $\text{Ric}_g(e_i, e_j)$ pour exprimer $\langle R_{e_0, e_i}^g e_0, e_j \rangle$ en fonction des $\langle R_{e_k, e_i}^g e_k, e_j \rangle$ pour $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{i,j}}{dt} &= \frac{d}{dt} \langle \nabla_{e_i} e_0, e_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_0} \nabla_{e_i} e_0, e_j \rangle \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la deuxième ligne que $\nabla_{e_0} e_j = 0$ par transport parallèle. On a ensuite par définition du tenseur de courbure

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{i,j}}{dt} &= \langle R_{e_0, e_i}^g e_0, e_j \rangle + \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_0} e_0, e_j \rangle + \langle \nabla_{[e_0, e_i]} e_0, e_j \rangle \\ &= \langle R_{e_0, e_i}^g e_0, e_j \rangle + \langle \nabla_{[e_0, e_i]} e_0, e_j \rangle \\ &= \langle R_{e_0, e_i}^g e_0, e_j \rangle - \sum_{m=1}^3 \theta_{i,m} \theta_{m,j} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la deuxième ligne que $\nabla_{e_0} e_0 = 0$ et à la troisième ligne que $[e_0, e_i] = -\nabla_{e_i} e_0 = -\sum_{m=1}^3 \theta_{i,m} e_m$ comme on l'a déjà vu précédemment. Par nullité de $\text{Ric}_g(e_i, e_j)$, on a

$$-\langle R_{e_0, e_i}^g e_j, e_0 \rangle + \sum_{k=1}^3 \langle R_{e_k, e_i}^g e_j, e_k \rangle = 0$$

ce qui peut se réécrire, en utilisant la symétrie du tenseur de courbure,

$$\langle R_{e_0, e_i}^g e_0, e_j \rangle = - \sum_{k=1}^3 \langle R_{e_k, e_i}^g e_j, e_k \rangle$$

on utilise maintenant la formule de Gauss¹ pour obtenir

$$\forall k \geq 1, \langle R_{e_k, e_i}^g e_j, e_k \rangle = \langle R_{e_k, e_i}^{h_t} e_j, e_k \rangle - \theta_{k,j} \theta_{i,k} + \theta_{k,k} \theta_{i,j}$$

on peut alors terminer le calcul et obtenir (2.6) :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{i,j}}{dt} &= - \sum_{k=1}^3 (\langle R_{e_k, e_i}^{h_t} e_j, e_k \rangle - \theta_{k,j} \theta_{i,k} + \theta_{k,k} \theta_{i,j}) - \sum_{m=1}^3 \theta_{i,m} \theta_{m,j} \\ &= - \text{Ric}_{h_t}(e_i, e_j) - \theta \theta_{i,j} \end{aligned}$$

Les équations (2.5) et (2.6) permettent d'affirmer que les propriétés vérifiées par (e_1, e_2, e_3) en $t = t_0$ se propagent pour tout t . On sait en effet que $n_{i,j}(t_0) = 0 = \theta_{i,j}(t_0)$ pour tout $i \neq j$. De plus, $\text{Ric}_{h_t}(e_i, e_j)$ s'exprime en fonction des coefficients de la matrice $(n_{i,j})$ et s'annule lorsque celle-ci est diagonale (voir le lemme 19.11 de [5]). On est donc en présence d'une EDO d'ordre 1, qui admet comme solution : $\forall i \neq j, n_{i,j} \equiv \theta_{i,j} \equiv 0$. Par l'unicité dans Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $n_{i,j}(t) = 0 = \theta_{i,j}(t)$ pour tout t et pour tout $i \neq j$, ce qui veut exactement dire que le champ de repères (e_0, e_1, e_2, e_3) vérifie les hypothèses (c) et (d).

1. Rappelons que cette formule exprime la courbure de la métrique lorentzienne g en un point de l'hypersurface $\{t\} \times G$ en fonction de la courbure de la métrique riemannienne h_t en ce point et de la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $\{t\} \times G$.

□

2.4 Coordonnées de Ellis-MacCallum-Wainwright-Hsu et équations de Wainwright-Hsu

Dans la partie précédente, nous avons montré que l'on peut munir un espace temps de Bianchi vide de type A d'un champ de repère orthonormal parallèle. Ce champ de repères trivialise en particulier la métrique h_t pour tout t mais ce n'est pas tout. Les équations différentielles vérifiées par les constantes de structure n_i et les coefficients de la seconde forme fondamentale (alors diagonale) θ_i sont très simples dans ces coordonnées. Ce sont ces variables qui nous intéressent dorénavant. En effet, si (M, g) vérifie l'équation d'Einstein, alors (M, g) est entièrement déterminée par la donnée des n_i et des θ_i .

Nous allons commencer par rappeler les formules montrées dans la partie précédente qui permettent d'écrire l'équation d'Einstein dans les variables n_i, θ_i . Après avoir fait cela, nous normaliserons ces variables. Pour diverses raisons physiques, il est pratique de considérer la courbure moyenne θ des tranches spatiales comme nouvelle variable de temps et de normaliser les variables n_i, θ_i par cette courbure moyenne. Cela va donner l'équation d'Einstein dans les variables N_i, Σ_i , dites de G.F.R. Ellis, M.A.H. MacCallum, J. Wainwright et L. Hsu. L'équation d'Einstein $\text{Ric}_g = 0$ apparaîtra alors comme une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par l'application $t \mapsto (\Sigma_1(t), \Sigma_2(t), \Sigma_3(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t))$ où $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ sont essentiellement les constantes de structure du groupe de Lie $\{t\} \times G \simeq G$ dans une certaine base (dépendant de t), et où $\Sigma_1(t), \Sigma_2(t), \Sigma_3(t)$ sont essentiellement les coefficients de la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $\{t\} \times G$ dans cette même base.

Equations en n_i et θ_i : Fixons un espace-temps de Bianchi vide de type A : $M = I \times G$, et un champ de repères orthonormal parallèle (e_0, e_1, e_2, e_3) sur M (ce qui est possible d'après la proposition 2.7). On note $\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)$ les coefficients diagonaux de la seconde forme fondamentale et on note θ la courbure moyenne, définie par

$$\theta = \text{tr}(\Pi_t) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

On note $n_1(t), n_2(t), n_3(t)$ les réels tels que

$$[e_1, e_2] = n_3(t)e_3, [e_2, e_3] = n_1(t)e_1, [e_3, e_1] = n_2(t)e_2$$

On note aussi

$$r_i(t) = \text{Ric}_{h_t}(e_i, e_i)$$

et, d'après la proposition 2.8, on a

$$r_i = \frac{1}{2}(n_i^2 - n_j^2 - n_k^2) + n_j n_k$$

D'après les équations (2.5) et (2.6), les quantités $n_1, n_2, n_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ vérifient les équations différentielles :

$$\frac{dn_i}{dt} = (\theta_i - \theta_j - \theta_k)n_i \quad \text{où} \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \quad (2.7)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -r_i - \theta_i \theta \quad (2.8)$$

Ces équations traduisent presque l'équation d'Einstein $\text{Ric}_g = 0$. On a utilisé les informations $\text{Ric}_g(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j, i \geq 1, j \geq 1$ et $\text{Ric}_g(e_0, e_l) = 0$ pour $l \geq 1$ pour les obtenir mais on a pas encore utilisé $\text{Ric}_g(e_0, e_0) = 0$. La formule de Gauss permet d'exprimer la nullité de $\text{Ric}_g(e_0, e_0)$ sous la forme

$$\text{Scal}_{h_t} + (\text{tr } \Pi_t)^2 - \text{tr}(\Pi_t^2) = 0$$

(ici Π_t^2 est un abus de notation pour la forme quadratique associée dont la matrice dans une base est le carré de la matrice de la forme quadratique Π_t dans cette base). En combinant cela avec l'expression de Scal_{h_t} donnée par la formule (2.4), on obtient :

Proposition 2.9. *Les quantités $n_1, n_2, n_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ satisfont la contrainte*

$$\frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) - (n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3) - \theta^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 0 \quad (2.9)$$

Le système formé des équations (2.7), (2.8) et (2.9) est équivalent à l'équation d'Einstein $\text{Ric}_g = 0$.

Normalisation des variables : On note $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t)$ les coefficients diagonaux de la seconde forme fondamentale *sans trace*, c'est-à-dire

$$\sigma_i = \theta_i - \frac{1}{3}\theta$$

On a par construction $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. De même, on note $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$ les coefficients du tenseur de Ricci *sans trace* :

$$s_i = r_i - \frac{1}{3}\text{Scal}_{h_t}$$

c'est-à-dire, pour $\{1, 2, 3\} = \{i, j, k\}$:

$$s_i = \frac{1}{3}(2n_i^2 - n_j^2 - n_k^2 + 2n_jn_k - n_in_j - n_in_k)$$

On pose ensuite

$$N_i = \frac{3n_i}{\theta}, \quad \Sigma_i = \frac{3\sigma_i}{\theta} \quad \text{et} \quad S_i = \frac{9s_i}{\theta^2}$$

et par construction on a

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$$

et

$$\begin{cases} S_1 &= \frac{1}{3}(2N_1^2 - N_2^2 - N_3^2 + 2N_2N_3 - N_1N_3 - N_1N_2) \\ S_2 &= \frac{1}{3}(2N_2^2 - N_3^2 - N_1^2 + 2N_3N_1 - N_2N_1 - N_2N_3) \\ S_3 &= \frac{1}{3}(2N_3^2 - N_1^2 - N_2^2 + 2N_1N_2 - N_3N_2 - N_3N_1) \end{cases}$$

Les variables $N_1, N_2, N_3, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sont appelées « variables de Wainwright-Hsu » . On considère le temps τ défini par

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\theta}{3}$$

la courbure moyenne vérifie alors l'équation

$$\frac{d\theta}{d\tau} = (1 + q)\theta$$

où

$$q = \frac{1}{3}(\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2)$$

est parfois appelé le « paramètre de décélération ». En traduisant les équations (2.7) et (2.8) dans ces variables *normalisées*, on obtient le système (2.10) ci-dessous (ce sont les équations de Wainwright-Hsu)

$$\begin{cases} \Sigma'_1 &= (2 - q)\Sigma_1 + S_1 \\ \Sigma'_2 &= (2 - q)\Sigma_2 + S_2 \\ \Sigma'_3 &= (2 - q)\Sigma_3 + S_3 \\ N'_1 &= -(q + 2\Sigma_1)N_1 \\ N'_2 &= -(q + 2\Sigma_2)N_2 \\ N'_3 &= -(q + 2\Sigma_3)N_3 \end{cases} \quad (2.10)$$

où la notation h' désigne $\frac{dh}{d\tau}$ et la contrainte (2.9) devient :

$$6 - (\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2) - \frac{1}{2}(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) + (N_1N_2 + N_2N_3 + N_3N_1) = 0 \quad (2.11)$$

Rappelons pour terminer la deuxième contrainte importante :

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0 \quad (2.12)$$

Remarque 2.10. Le choix d'expliciter l'équation d'Einstein dans un repère orthonormal parallèle implique en particulier que les coefficients de la métrique sont constants, ce ne sont donc pas eux qui interviennent dans l'équation différentielle (2.10). Les nombres $N_i(t)$ sont, à une normalisation près, les constantes de structure du groupe de Lie $\{t\} \times G$ dans la base fixée et les nombres $\Sigma_i(t)$ sont, toujours à une normalisation près, les coefficients de la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $\{t\} \times G$.

Remarque 2.11 (sur le choix de la fonction temps). La variable θ s'appelle la *variable de Hubble*. Elle apparait naturellement quand on étudie l'équation d'Einstein pour les espaces-temps spatialement homogènes et isotropes. En effet, dans ce cas, l'équation d'Einstein devient essentiellement une équation différentielle d'ordre 1 sur θ . Si l'on pense les espaces-temps spatialement homogènes comme des perturbations du modèle spatialement homogène et isotrope, alors il est naturel d'utiliser θ pour construire la fonction temps car θ possède les propriétés voulues dans le cas spatialement homogène et isotrope.

Remarque 2.12 (sur le choix des variables). En divisant les variables n_i et σ_i par la courbure moyenne θ et en décidant d'utiliser un temps τ tel que $d\tau/dt = -\theta/3$, on perd de l'information. Plus précisément, on « néglige » les hypersurfaces spatiales homogènes $\{t\} \times G$ de l'espace-temps de Bianchi $(I \times G, -dt^2 + h_t)$ qui sont de courbure moyenne nulle. Cependant, une rapide analyse montre que ceci ne recouvre que deux cas :

- l'espace de Minkowski : toutes les hypersurfaces spatiales homogènes sont de courbure moyenne nulle.
- pour chaque espace-temps de Bianchi $(I \times G, -dt^2 + h_t)$ de type IX (*i.e.* pour lequel $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$), il existe une valeur t_0 de t et une seule telle que la courbure moyenne de l'hypersurface $\{t\} \times G$ est nulle ; l'hypersurface $\{t_0\} \times G$ découpe l'espace-temps $(I \times G, -dt^2 + h_t)$ en deux espaces-temps de Bianchi, l'un où la courbure moyenne des hypersurfaces spatiales homogènes est strictement négative, l'autre où elle est strictement positive.

Ainsi, les solutions (maximales) du système de Wainwright-Hsu correspondent aux espace-temps de Bianchi (maximaux) unimodulaires vides aux nuances suivantes près.

- L'espace de Minkowski ne correspond à aucune solution du système de Wainwright-Hsu.
- Chaque orbite du système de Wainwright-Hsu qui n'est pas de type IX correspond en fait à deux espaces-temps de Bianchi qui se déduisent l'un de l'autre par un renversement de l'orientation du temps. Dans l'un de ces espaces-temps, la courbure moyenne des tranches spatiales homogènes est positive et décroissante; dans l'autre, elle est négative et croissante. L'un de ces espace-temps présentera un Big-bang (et pas de Big-Crunch), l'autre présentera Big-Crunch (et pas de Big-Bang).
- Chaque espace-temps de Bianchi maximal de type IX est découpé en deux le long de son hypersurface spatiale de courbure moyenne nulle; chacune des deux moitié correspond à une orbite du système de Wainwright-Hsu (pour la moitié future, il faut renverser le temps).

Remarque 2.13 (sur le choix d'orientation du temps). On aurait pu choisir $\frac{d\tau}{dt} = \frac{\theta}{3}$ au lieu de $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\theta}{3}$. Ceci correspond à un choix d'orientation du temps dans les espace-temps de Bianchi. Le choix que nous avons fait est « anti-physique » : les solutions orientées du système de Wainwright-Hsu correspondent à des espaces-temps en contraction, qui aboutiront à un Big-Crunch, et qui n'ont pas de Big-Bang dans le passé (ce qui est bien sûr le contraire de l'univers physique). En raison de ce choix, le système de Wainwright-Hsu présentera un attracteur. La plupart des auteurs font le choix contraire.

3 Du champ de Wainwright-Hsu à l'application de Kasner

Dans la partie précédente, on a montré que l'équation d'Einstein dans le cas des espaces-temps de Bianchi vides de type A se réduit essentiellement au système d'équations différentielles ordinaires de Wainwright-Hsu, et ce grâce à l'existence d'un champ de repères orthonormal parallèle. Comme il est impossible de les résoudre explicitement, on se cantonne à une étude qualitative du système dynamique induit par ces équations. Dans cette partie, on introduit (enfin!) le champ de Wainwright-Hsu dont on a déjà tant parlé. Il est défini sur une variété \mathcal{B} de dimension 4, qui est également appelée espace des phases. Il est très important de comprendre, et ce sera expliqué en détails dans cette partie, que l'espace des phases contient tous les espaces-temps de Bianchi vides de type A (ceux de types I, II, VI_0 , etc), aux quelques exceptions près dont on a parlé à la fin de la partie 2. C'est l'un des gros intérêts de la méthode employée : on peut étudier tous les espaces-temps avec le même système de coordonnées et avec un même système d'équations. Comme annoncé dans le préambule, la classification des algèbres de Lie unimodulaires de dimension 3 induit une stratification de l'espace des phases en six ensembles invariants par le flot et la stratégie d'étude du système dynamique consiste à commencer par regarder les strates de petites dimension afin d'en déduire des informations sur les strates de plus grandes dimensions. On étudiera dans cette partie les orbites de type I et II. Les orbites de type I forment un cercle, appelé le cercle de Kasner. Les orbites de type II joignent chacune deux points du cercle (on parle de connexion hétérocline). Après avoir étudié ces orbites, on pourra définir l'application de Kasner qui joue un rôle fondamental dans la conjecture BKL. On terminera cette partie en introduisant le paramètre de Kasner, qui permet de voir l'application de Kasner comme une fonction réelle, ou encore de donner une expression simple des valeurs propres du champ aux différents points du cercle.

3.1 Le champ de Wainwright-Hsu

On introduit « l'espace des phases » :

$$\mathcal{B} = \{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^6 \mid \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0, \Omega = 0\}$$

où

$$\Omega = 6 - (\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2) - \frac{1}{2}(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) + (N_1N_2 + N_2N_3 + N_3N_1)$$

On peut penser à Ω comme à une énergie. \mathcal{B} est l'intersection d'un hyperplan et d'une quadrique dans \mathbb{R}^6 et il est facile de voir que c'est une sous-variété lisse de dimension 4.

Définition 3.1. Le champ de vecteurs de Wainwright-Hsu est noté X et est défini au point $x = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^6$ par

$$X(x) = \begin{pmatrix} (2-q)\Sigma_1 + S_1 \\ (2-q)\Sigma_2 + S_2 \\ (2-q)\Sigma_3 + S_3 \\ -(q+2\Sigma_1)N_1 \\ -(q+2\Sigma_2)N_2 \\ -(q+2\Sigma_3)N_3 \end{pmatrix}$$

Bien entendu, les solutions du système d'équations de Wainwright-Hsu sont les orbites du flot de ce champ de vecteurs. De plus, X se restreint en un champ de vecteurs sur \mathcal{B} , que l'on note

encore X . On ne s'intéressera évidemment qu'à la restriction dans toute la suite, puisque c'est elle qui respecte les contraintes (2.11) et (2.12).

Définition 3.2 (Flot et orbites). On note X^t le *flot* de X au temps t . On note $\mathcal{O}_X(x)$ l'*orbite géométrique* de x pour le flot du champ X , c'est-à-dire

$$\mathcal{O}_X(x) = \{X^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Symétries On remarque que l'action du groupe de permutations \mathcal{S}_3 sur les variables (donnée par $\sigma.(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) = (\Sigma_{\sigma(1)}, \Sigma_{\sigma(2)}, \Sigma_{\sigma(3)}, N_{\sigma(1)}, N_{\sigma(2)}, N_{\sigma(3)})$) laisse invariante le champ X . Cette symétrie sera utilisée en particulier lorsqu'on introduira le paramètre de Kasner. On pourra essentiellement découper le cercle de Kasner en six parties symétriques et ne travailler que sur une de ces parties. De même, l'action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur les variables (donnée par $\bar{1}.(N_1, N_2, N_3) = (-N_1, -N_2, -N_3)$) laisse invariante le champ X .

Points critiques La proposition suivante donne une description de l'ensemble des points critiques de X , c'est-à-dire de l'ensemble

$$\{x \in \mathcal{B} \mid X(x) = 0\}$$

Elle se déduit facilement de l'expression explicite de X donnée dans la définition 3.1.

Proposition 3.3. *L'ensemble des points critiques de X se décompose en la réunion des ensembles suivants :*

1. *Le cercle de Kasner* $\mathcal{K} = \{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, 0, 0, 0) \mid \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0, \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 = 6\}$.
2. *Les droites de Taub NUT*

$$L_1 = \{(2, -1, -1, 0, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{(-1, 2, -1, x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$L_3 = \{(-1, -1, 2, x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

De plus, chaque droite L_i intersecte \mathcal{K} en un unique point noté T_i . Les points T_1, T_2, T_3 sont appelés *points de Taub*.

3.2 Stratification de l'espace des phases en six ensembles invariants par le flot

Commençons par réécrire les équations de Wainwright-Hsu (2.10) :

$$\begin{cases} \Sigma'_1 &= (2 - q)\Sigma_1 + S_1 \\ \Sigma'_2 &= (2 - q)\Sigma_2 + S_2 \\ \Sigma'_3 &= (2 - q)\Sigma_3 + S_3 \\ N'_1 &= -(q + 2\Sigma_1)N_1 \\ N'_2 &= -(q + 2\Sigma_2)N_2 \\ N'_3 &= -(q + 2\Sigma_3)N_3 \end{cases}$$

On peut remarquer, par simple application du théorème de Cauchy-Lipschitz, que le signe (strictement positif, nul ou strictement négatif) des variables N_l , $l \in \{1, 2, 3\}$, ne change pas le long d'une orbite. On obtient alors une stratification naturelle de l'espace des phases en six ensembles invariants par le flot en fonction de ces signes. Évidemment cette stratification n'a (presque) rien de surprenant car elle reflète la classification des algèbres de Lie unimodulaires de dimension 3 vue à la partie 2.2. En effet, les équations de Wainwright-Hsu montrent que le « type » d'un espace-temps de Bianchi ne change pas le long d'une orbite du flot.

Le plus simple de ces ensembles est un cercle euclidien, on le note \mathcal{B}_I ou encore \mathcal{K} et on l'appelle *cercle de Kasner*.

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) \in \mathcal{B} \mid N_1 = N_2 = N_3 = 0\} \\ &= \{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^6 \mid N_1 = N_2 = N_3 = 0, \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0, \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 = 6\}\end{aligned}$$

Comme on l'a vu à la proposition 3.3, \mathcal{K} est uniquement constitué de points critiques (*i.e.* les orbites de type I sont constantes). Cette strate est de dimension 1.

On note, pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{B}_{II}^i = \{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) \in \mathcal{B} \mid N_i \neq 0, N_j = N_k = 0\}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{II}^i &= \{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^6 \mid N_i \neq 0, N_j = N_k = 0, \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0, \\ &\quad \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 + \frac{1}{2}N_i^2 = 6\}\end{aligned}$$

et on pose $\mathcal{B}_{II} = \mathcal{B}_{II}^1 \cup \mathcal{B}_{II}^2 \cup \mathcal{B}_{II}^3$.

Chaque \mathcal{B}_{II}^i est un ellipsoïde de dimension 2 auquel on a retiré le cercle de Kasner. Ainsi, \mathcal{B}_{II} peut être vu comme la réunion de six demi-ellipsoïdes qui ont tous le cercle de Kasner comme bord. Cette strate est de dimension 2. On étudiera les orbites de type II en détails dans la partie 3.4. Ces orbites sont très importantes et elles permettent de définir l'application de Kasner.

On définit de la même manière les ensembles \mathcal{B}_{VI_0} , \mathcal{B}_{VII_0} , \mathcal{B}_{VIII} et \mathcal{B}_{IX} . Les strates \mathcal{B}_{VI_0} et \mathcal{B}_{VII_0} sont de dimension 3 et les strates \mathcal{B}_{VIII} et \mathcal{B}_{IX} sont de dimension 4.

Le comportement asymptotique des orbites de type VI_0 et VII_0 est connu : chaque orbite converge vers une singularité du cercle de Kasner. Le comportement des orbites de type VIII et IX est nettement moins bien compris et c'est l'objet d'étude de ce mémoire. On étudiera leur comportement au voisinage du cercle de Kasner (sur un temps court) dans la partie 4 et leur comportement global (sur un temps long) dans la partie 5.

Définition 3.4. On introduit la notation suivante : si J est un chiffre romain et x est un point de \mathcal{B} se situant dans la strate \mathcal{B}_J , alors on note $\mathcal{O}_J(x)$ l'orbite de x sous l'action du flot du champ X , au lieu de $\mathcal{O}_X(x)$.

3.3 Calcul de la différentielle du champ au voisinage du cercle de Kasner

Dans la partie 4, nous étudierons le comportement des orbites de type VIII et IX au voisinage du cercle de Kasner. La première étape de cette étude est de différencier le champ de Wainwright-Hsu et de déterminer les directions propres de la différentielle. Localement, le comportement des orbites est déterminé, au premier ordre, par la différentielle.

Soit $p = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, 0, 0, 0) \in \mathcal{K}$.

On note J_p la matrice de $d_p X$ (non restreint à \mathcal{B}) dans la base $(\partial_{\Sigma_1}, \partial_{\Sigma_2}, \partial_{\Sigma_3}, \partial_{N_1}, \partial_{N_2}, \partial_{N_3})$ et on note $a = \frac{2}{3}$, on a alors

$$-J_p = \begin{pmatrix} a\Sigma_1^2 & a\Sigma_1\Sigma_2 & a\Sigma_1\Sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ a\Sigma_1\Sigma_2 & a\Sigma_2^2 & a\Sigma_2\Sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ a\Sigma_1\Sigma_3 & a\Sigma_2\Sigma_3 & a\Sigma_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 + 2\Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 + 2\Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 + 2\Sigma_3 \end{pmatrix}$$

Maintenant, remarquons que $(\partial_{N_1}, \partial_{N_2}, \partial_{N_3}, (\Sigma_3 - \Sigma_2)\partial_{\Sigma_1} + (\Sigma_1 - \Sigma_3)\partial_{\Sigma_2} + (\Sigma_2 - \Sigma_1)\partial_{\Sigma_3})$ est une base de $T_p \mathcal{B}$. Dans cette base, la matrice de $d_p X$ (restreint à \mathcal{B}) est

$$\begin{pmatrix} -(2 + 2\Sigma_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(2 + 2\Sigma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2 + 2\Sigma_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note, pour $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\mu_i = -(2 + 2\Sigma_i)$$

de telle sorte que les valeurs propres de $d_p X$ sont μ_1, μ_2, μ_3 et 0.

Si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, on a

$$\mu_i = 0 \iff \Sigma_i = -1 \text{ et } \{\Sigma_j, \Sigma_k\} = \{-1, 2\}$$

Il y a donc trois points spéciaux (que l'on a déjà rencontrés à la proposition 3.3), appelés *points de Taub* et notés T_1, T_2, T_3 :

$$T_1 = (2, -1, -1)$$

$$T_2 = (-1, 2, -1)$$

$$T_3 = (-1, -1, 2)$$

Sur $\mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$, les trois valeurs propres μ_1, μ_2, μ_3 sont non nulles tandis qu'aux points de Taub, deux des trois valeurs propres μ_1, μ_2, μ_3 s'annulent.

Remarque 3.5. On a fait un abus de notation pour écrire les coordonnées des points de Taub, on voit ces points comme appartenant à l'espace vectoriel de dimension 3 défini par $N_1 = N_2 = N_3 = 0$.

On note $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ les trois composantes connexes de $\mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$, indexées de manière à ce que T_i ne soit pas une extrémité de \mathcal{K}_i .

On résume les propriétés élémentaires des valeurs propres dans la proposition 3.6.

Proposition 3.6. *Si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, alors*

1. *En tout point de $\mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$, les valeurs propres μ_1, μ_2 et μ_3 sont non nulles.*
2. *La valeur propre μ_i est nulle exactement aux points T_j et T_k . Elle est strictement positive (resp. strictement négative) sur \mathcal{K}_i (resp. \mathcal{K}_j et \mathcal{K}_k). En particulier, elle change de signe exactement aux points T_j et T_k .*

3. Sur \mathcal{K}_k , on a $\mu_i < 0$, $\mu_j < 0$ et $\mu_k > 0$. De plus, la valeur propre dilatante μ_k est plus « faible » que les valeurs propres contractantes μ_i et μ_j au sens suivant : $\mu_k < |\mu_i|$ et $\mu_k < |\mu_j|$.

Ainsi, les trois points de Taub ont une variété stable de dimension 1 et une variété centrale de dimension 3. Tous les autres points de \mathcal{K} ont une variété stable de dimension 2, une variété centrale de dimension 1 et une variété instable de dimension 1.

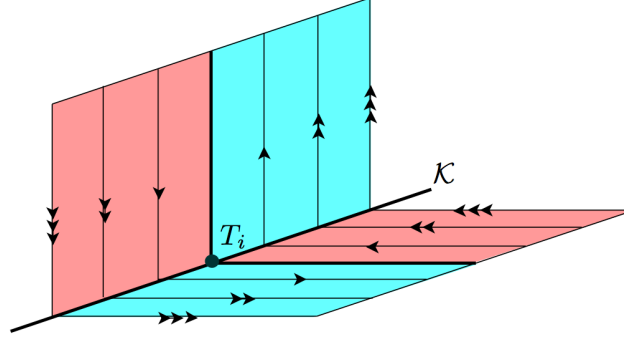


FIGURE 2 – Les directions stable faible et instable « s'échangent » au point de Taub (pour les besoins de la figure, on n'a pas représenté la direction stable forte)

3.4 Orbites de type II et application de Kasner

Orbites de type II : Dans cette partie, on décrit explicitement les orbites de type II. Ce sont celles qui sont contenues dans un demi-ellipsoïde de \mathcal{B}_{II} (voir figure 5, page 5). Pour les décrire, on en donne une construction élémentaire et purement géométrique. Pour faire cela, on utilise la projection de \mathcal{B}_{II} sur le plan bi-dimensionnel $\mathcal{P} = (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0, N_1 = N_2 = N_3 = 0)$. Plus précisément, notons $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$ la projection :

$$\pi : (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, N_1, N_2, N_3) \mapsto (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$$

où l'on pense \mathcal{P} comme un plan de \mathbb{R}^3 . On va décrire $\pi(\mathcal{O}_{\text{II}})$ pour toute orbite \mathcal{O}_{II} de type II.

Pour fixer les idées, travaillons dans la strate $\mathcal{B}_{\text{II}}^1$. On a alors $S_1 = \frac{2}{3}N_1^2$, $S_2 = S_3 = -\frac{1}{3}N_1^2$ et $2 - q = \frac{1}{6}N_1^2$ et les équations de Wainwright-Hsu deviennent

$$\begin{cases} \Sigma'_1 &= \frac{1}{6}N_1^2(\Sigma_1 + 4) \\ \Sigma'_2 &= \frac{1}{6}N_1^2(\Sigma_2 - 2) \\ \Sigma'_3 &= \frac{1}{6}N_1^2(\Sigma_3 - 2) \\ N'_1 &= -(q + 2\Sigma_1)N_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Par simple application de Cauchy-Lipschitz, les fonctions $\Sigma_1 + 4$, $\Sigma_2 - 2$ et $\Sigma_3 - 2$ ne s'annulent pas ou sont identiquement nulles. De plus, la contrainte $\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 + \frac{1}{2}N_1^2 = 6$ implique que $\Sigma_1 + 4$ ne s'annule pas et que $\Sigma_2 - 2$ et $\Sigma_3 - 2$ ne s'annulent pas simultanément. Fixons une condition initiale

pour l'orbite : $q(0) = (\Sigma_1(0), \Sigma_2(0), \Sigma_3(0), N_1(0), N_2(0) = 0, N_3(0) = 0)$. On peut par exemple supposer que $\Sigma_2(0) \neq 2$. On intègre alors l'égalité

$$\frac{\Sigma'_1}{\Sigma_1 + 4} = \frac{\Sigma'_2}{\Sigma_2 - 2}$$

pour obtenir

$$\frac{|\Sigma_1 + 4|}{|\Sigma_1(0) + 4|} = \frac{|\Sigma_2 - 2|}{|\Sigma_2(0) - 2|}$$

et comme les fonctions $\Sigma_1 + 4$ et $\Sigma_2 - 2$ ne s'annulent pas, elles ne changent pas de signe. On peut enlever les valeurs absolues et on obtient le système

$$\begin{cases} (\Sigma_1 + 4)(\Sigma_2(0) - 2) - (\Sigma_2 - 2)(\Sigma_1(0) + 4) & = 0 \\ \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 & = 0 \end{cases}$$

On reconnait une équation de droite et il est clair que le point de coordonnées

$$(\Sigma_1 = -4, \Sigma_2 = 2, \Sigma_3 = 2)$$

appartient à cette droite. Il est alors naturel d'introduire les trois points de \mathcal{P} suivants :

$$\begin{aligned} M_1 &= (-4, 2, 2) \\ M_2 &= (2, -4, 2) \\ M_3 &= (2, 2, -4) \end{aligned}$$

L'orbite $\mathcal{O}_{\text{II}}(q(0))$ de type II qui a pour condition initiale $q(0)$ est, en projection sur le plan \mathcal{P} , l'intersection du disque intérieur au cercle de Kasner et de la droite reliant les points $\pi(q(0))$ et M_1 (voir la figure 3 page 25 et la figure 4 page 25). Une inclusion est triviale. Pour l'autre, il suffit de remarquer que l'orbite de type II, contenue dans un ensemble borné, doit converger vers un point critique de X .

Connaissant explicitement les projections sur le plan \mathcal{P} des orbites de type II, on en déduit facilement l'allure de ces orbites sur les six demi-ellipsoïdes constituant la strate \mathcal{B}_{II} (voir figure 5, page 5).

Évidemment, comme il y a deux demi-ellipsoïdes de part et d'autre du cercle de Kasner ($N_1 > 0$ ou $N_1 < 0$), il y a exactement deux orbites de type II qui, en projection sur le plan \mathcal{P} , donnent le même segment de droite. Autrement dit, elles ont la même projection. Pour passer de l'une à l'autre, on change le signe de la variable N_1 en son opposé. Dans la suite, on identifiera toujours les deux orbites qui sont symétriques l'une de l'autre (*i.e.* qui ont la même projection sur \mathcal{P}). En fait, il n'y a pas lieu de les différencier puisqu'on les pense en projection sur \mathcal{P} . D'après les signes des valeurs propres (voir le point 3 de la proposition 3.6), en tout point $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$, il y a deux orbites de type II qui « arrivent » en p (p est leur ω limite) et une orbite qui « part » de p (p est son α limite).

Définition 3.7 (Orbite de type II partant d'un point p). Soit $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$. On note $\mathcal{O}_{\text{II}}^u(p)$ l'unique orbite de type II partant de p , de sorte que p soit le point α -limite de l'orbite $\mathcal{O}_{\text{II}}^u(p)$. Ainsi, à chaque point $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ est associée trois orbites de type II, une pour chaque ellipsoïde $\mathcal{B}_{\text{II}}^i$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

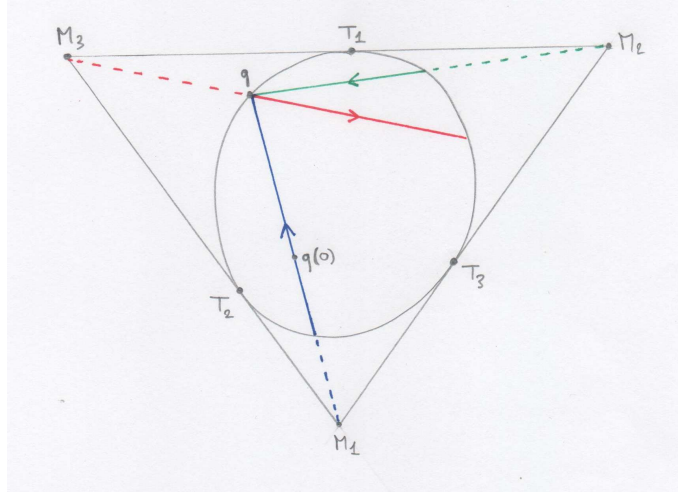


FIGURE 3 – Description géométrique de l'orbite de type II

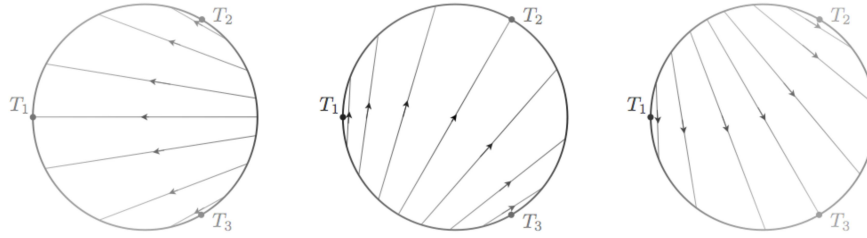


FIGURE 4 – Les orbites de type II, vues en projection sur \mathcal{P}

Application de Kasner :

Définition 3.8 (Application de Kasner). Pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$, on note $f(p)$ le point ω -limite de l'unique orbite de type II admettant p comme α -limite. On pose de plus $f(T_i) = T_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, ce qui définit une application continue $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$. On l'appelle *l'application de Kasner*.

Définition 3.9. Soit $x \in \mathcal{K}$. On note $\mathcal{O}_f(x)$ l'orbite de x pour f , c'est-à-dire

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Définition 3.10 (Orbite passée complète). Soit $x \in \mathcal{K}$. On note $\mathcal{O}_f^-(x)$ l'orbite passée complète de x par f , c'est-à-dire

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{y \in \mathcal{K} \mid x \in \mathcal{O}_f(y)\}$$

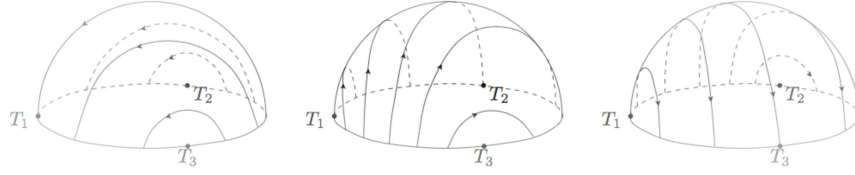


FIGURE 5 – Les orbites de type II

Construction géométrique de $f(p)$ à partir de p : Le cercle de Kasner est inscrit dans le triangle équilatéral M_1, M_2, M_3 . Pour $p \in K$, on choisit le point M_i parmi M_1, M_2, M_3 le plus proche de p et on trace la droite $(M_i p)$. Cette droite coupe le cercle en p et en un autre point, cet autre point est l'image $f(p)$ par l'application de Kasner. On pourra se référer à la figure 6, page 26 (où $S_i = M_i$).

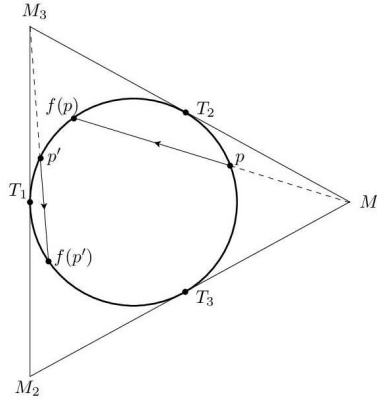


FIGURE 6 – Image d'un point par l'application de Kasner

Dynamique de l'application de Kasner : La dynamique de l'application de Kasner sur le cercle est chaotique. En effet, d'après la définition précédente, on vérifie facilement que c'est une application C^∞ de degré -2, non-uniformément dilatante (la dérivée est, en module, strictement plus grande que 1 sauf aux trois points de Taub T_1, T_2, T_3 où elle est de module 1). Par un résultat bien connu, on en déduit qu'elle est topologiquement conjuguée à l'application $\theta \mapsto -2\theta$ (sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z}) dont on connaît parfaitement la dynamique. En particulier, f a les propriétés suivantes :

- les orbites périodiques de f sont denses dans K .
- il existe des points de K dont l'orbite future par f est dense dans K . Ces points forment même un G_δ dense.
- pour tout point x de K , l'orbite passée complète de x par f est dense dans K .
- l'entropie topologique de f est strictement positive (elle vaut $\log(2)$).

On peut aussi noter que le comportement ergodique de f est un peu moins clair : en effet, f ne possède pas de mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Pistage d'une chaîne hétérocline :

Définition 3.11 (Chaîne hétérocline). Soit $x \in \mathcal{K}$. On appelle *chaîne hétérocline* (associée à x) et on note $H_f(x)$ la suite, *finie* ou *infinie*,

$$H_f(x) = (x, \mathcal{O}_\Pi^u(x), f(x), \mathcal{O}_\Pi^u(f(x)), f^2(x), \dots)$$

On dit que cette chaîne est *finie* lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) \in \{T_1, T_2, T_3\}$ et, dans ce cas, on s'arrêtera d'écrire les termes de la suite à la première apparition d'un des trois points de Taub. On dit que la chaîne est *infinie* dans le cas contraire.

La figure 7, page 26, permet de mieux visualiser la notion introduite à l'instant.

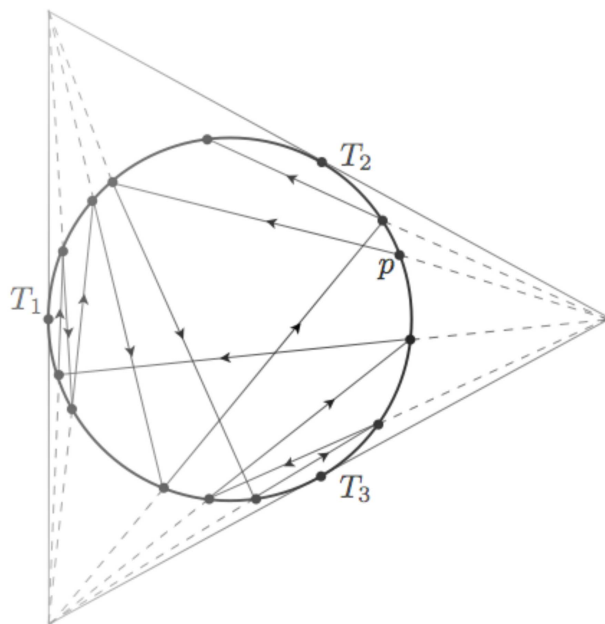


FIGURE 7 – Début de la chaîne hétérocline $H(p)$

Il y a plus de 40 ans, Beliinski, Khalatnikov et Lifschitz d'une part, et Misner d'autre part, ont expliqué à l'aide d'arguments heuristiques que les orbites génériques du champ X devraient « pister » les chaînes hétéroclines $H_f(x)$ associées à des points génériques de \mathcal{K} , et, donc, que la dynamique du champ X devrait être « calquée » sur celle de f . Pour donner un sens précis à ces affirmations, on introduit la définition suivante :

Définition 3.12 (Pistage d'une chaîne hétérocline). Soient $x \in \mathcal{K}$ et $y \in \mathcal{B}_{\text{VIII}} \cup \mathcal{B}_{\text{IX}}$. On dit que $\mathcal{O}_X(y)$ *piste* $H_f(x)$ si il existe une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ qui tend vers $+\infty$ et telle que

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X^{t_n}(y), f^n(x)) = 0$
2. La distance de Hausdorff entre le morceau d'orbite $\{X^t(y) \mid t_n < t < t_{n+1}\}$ et l'orbite $\mathcal{O}_{\text{II}}^u(f^n(x))$ (ou, si l'on préfère, l'une des deux orbites de type II identifiées à $\mathcal{O}_{\text{II}}^u(f^n(x))$) tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Remarque 3.13. Attention, la définition précédente n'est pas vraiment usuelle. On trouvera dans d'autres références des définitions plus faibles de la notion de pistage.

La figure 8, page 28, donne une vision schématique de la définition 3.12.

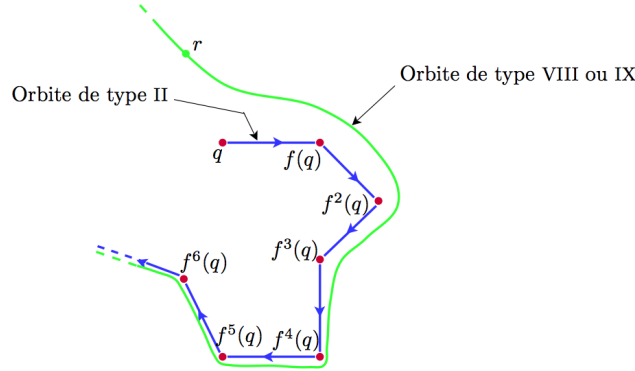


FIGURE 8 – Pistage de la chaîne hétérocline $H(q)$

Définition 3.14. Soit $x \in \mathcal{K}$. On note $P(x)$ l'ensemble des points $y \in \mathcal{B}_{\text{VIII}} \cup \mathcal{B}_{\text{IX}}$ tels que $\mathcal{O}_X(y)$ piste $H_f(x)$.

On peut maintenant donner un énoncé formel du résultat principal de ce mémoire. Ce résultat montre que les affirmations de Belinski, Khalatnikov, Lifschitz et Misner sont, au moins en partie, vraies. Rappelons que ce théorème est presque entièrement dû au travail de Liebscher et al. . Dans l'article [1], ils le prouvent pour une chaîne hétérocline périodique de période 3.

Théorème principal. Soit F un compact du cercle de Kasner \mathcal{K} privé des trois points de Taub T_1, T_2, T_3 , que l'on suppose positivement invariant par l'application de Kasner f . Pour tout $x \in F$, l'ensemble $P(x)$ est une variété lipschitzienne de dimension 3, injectivement immergée dans \mathcal{B} et qui dépend continûment de x .

En particulier, pour tout point x de \mathcal{K} dont l'orbite positive par f ne s'accumule pas sur les points de Taub, il existe des orbites de type VIII et IX qui pistent la chaîne hétérocline $H_f(x)$.

3.5 Le paramètre de Kasner

Nous avons vu à la partie 3.3 que tout point de $\mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ possède trois valeurs propres non nulles μ_1, μ_2, μ_3 et qu'on a $\mu_i = -(2 + 2\Sigma_i)$. Soit $p = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, 0, 0, 0) \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$. Le

paramètre de Kasner est l'unique réel $u = u(p) \in [1, +\infty[$ qui vérifie

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = -(2 + 2\Sigma_1)(2 + 2\Sigma_2)(2 + 2\Sigma_3) = \frac{216u^2(1+u)^2}{(1+u+u^2)^3}$$

On pose $u(T_i) = +\infty$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. L'application $p \mapsto u(p)$ n'est pas injective sur \mathcal{K} mais est injective modulo permutation de Σ_1, Σ_2 et Σ_3 , *i.e.* est injective sur $\mathcal{K}/\mathcal{S}_3$. Plus précisément, à permutation près des variables $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, on a

$$(2 + 2\Sigma_1, 2 + 2\Sigma_2, 2 + 2\Sigma_3) = \left(\frac{-6u}{1+u+u^2}, \frac{6(1+u)}{1+u+u^2}, \frac{6u(1+u)}{1+u+u^2} \right)$$

On note

$$\begin{aligned}\mu_u(u) &= \frac{6u}{1+u+u^2} \\ \mu_s(u) &= \frac{6(1+u)}{1+u+u^2} \\ \mu_{ss}(u) &= \frac{6u(1+u)}{1+u+u^2}\end{aligned}$$

les valeurs absolues des trois valeurs propres non triviales de $d_p X$. Plus précisément, μ_u est l'unique valeur propre positive, μ_s est la valeur absolue de la valeur propre négative de plus petit module et μ_{ss} est la valeur absolue de la valeur propre négative de plus grand module. On a alors

$$\begin{aligned}0 < \mu_u < \mu_s < \mu_{ss} & \text{ si } u \in]1, +\infty[, \\ \mu_s = \mu_{ss} & \text{ si } u = 1, \\ \mu_s = \mu_u = 0 & \text{ si } u = +\infty.\end{aligned}$$

On définit l'application « de Gauss » $\bar{f} : [1, +\infty] \rightarrow [1, +\infty]$ par

$$\bar{f}(u) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u = 1 \text{ ou } u = +\infty \\ u - 1 & \text{si } u \geq 2 \\ \frac{1}{u-1} & \text{si } 1 < u \leq 2 \end{cases}$$

On a alors, pour tout $p \in \mathcal{K}$, $u(f(p)) = \bar{f}(u(p))$. Autrement dit, l'application $p \mapsto u(p)$ conjugue l'application de Kasner f à l'application « de Gauss » \bar{f} .

La proposition suivante s'obtient facilement :

Proposition 3.15. *La distance euclidienne $d(u)$ du point courant de paramètre u au point de Taub de paramètre $u = +\infty$ possède une expression simple en fonction de u :*

$$d(u) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{1+u+u^2}} \tag{3.2}$$

4 Etude locale au voisinage du cercle de Kasner

Dans cette partie, nous souhaitons étudier le comportement des orbites de type VIII et IX qui passent à proximité du cercle de Kasner. Nous connaissons les valeurs propres de la différentielle du champ X en tout point de \mathcal{K} (cf. la proposition 3.6) et nous avons déterminé les dimensions des variétés stable, centrale et instable. On fixe arbitrairement une boîte U_p autour d'un point $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$. Une orbite de type VIII ou IX qui passe près du point p doit entrer dans la boîte U_p en longeant la variété stable de p et ressortir de U_p en longeant la variété instable de p . Ceci donnera lieu à la définition d'une application de passage local dans la boîte U_p , notée ψ (cf. partie 4.3), qui conservera l'information d'entrée et de sortie, mais pas de ce qui se passe à l'intérieur de la boîte.

Pour utiliser cette description de l'espace prenant en compte les directions privilégiées, il nous faut commencer par choisir des coordonnées locales (x_u, x_s, x_{ss}, x_c) qui relèvent les directions propres de X . Ensuite, nous ferons un changement de paramétrage pour rendre la dynamique triviale selon la direction instable. Une fois cette dynamique rendue triviale, il sera possible de calculer le temps de trajet entre l'entrée et la sortie de la boîte. Cette information sera cruciale car elle nous permettra d'utiliser pleinement les estimées de Gronwall que l'on fera pour comparer deux orbites traversant la boîte U_p .

En anticipant sur la suite et en simplifiant grossièrement, le but de cette partie est de montrer que :

en coordonnées locales et pour ϵ choisi suffisamment « petit », les orbites qui rentrent dans la boîte $\|x - p\|_\infty < \epsilon$ par la face $x_{ss} = \epsilon$ ou la face $x_s = \epsilon$ sortent par la face $x_u = \epsilon$ et que la contraction éventuelle dans la direction de $\frac{\partial}{\partial x_c}$ est faible, très largement dominée par la contraction dans la direction transverse.

Remarque 4.1. Dans toute cette partie, $\|x\|$ désigne la norme 1 du vecteur x et $\|x\|_\infty$ désigne la norme ∞ du vecteur x .

4.1 Choix de coordonnées locales adaptées

Pour tout système de coordonnées locales (x_u, x_s, x_{ss}, x_c) au voisinage d'un point du cercle de Kasner, on notera (a_u, a_s, a_{ss}, a_c) les coordonnées d'un point a .

Variétés stables et instables : En tout point a de $\mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$, le champ X a quatre directions propres associées à quatre valeurs propres distinctes : deux directions stables associées aux valeurs propres μ_s et μ_{ss} (strictement) négatives, une direction centrale (celle du cercle) associée à la valeur propre nulle et une direction instable associée à la valeur propre μ_u (strictement) positive. Ceci implique l'existence de plusieurs variétés (où U est un voisinage de a) :

- $W^u(\mathcal{K} \cap U)$ la variété instable locale de $\mathcal{K} \cap U$.
- $W^u(a)$ la variété instable du point $a \in \mathcal{K}$.
- $W^s(\mathcal{K} \cap U)$ la variété stable locale de $\mathcal{K} \cap U$.
- $W^s(a)$ la variété stable du point $a \in \mathcal{K}$.

dont on peut dire un certain nombre de choses :

- $W^u(\mathcal{K} \cap U)$ est une sous-variété C^∞ de dimension 2, tangente à \mathcal{K} et à la direction propre associée à μ_u .
- $W^u(a)$ est une sous-variété C^∞ de dimension 1, tangente à la direction propre associée à μ_u , qui dépend C^∞ de a .

- $W^u(\mathcal{K} \cap U)$ est feuilletée par les $W^u(a)$ pour $a \in \mathcal{K} \cap U$.
- $W^s(\mathcal{K} \cap U)$ est une sous-variété C^∞ de dimension 3, tangente à \mathcal{K} et aux directions propres associées à μ_s et μ_{ss} .
- $W^s(a)$ est une sous-variété C^∞ de dimension 2, tangente aux directions propres associées à μ_s et μ_{ss} , qui dépend C^∞ de a .
- $W^s(\mathcal{K} \cap U)$ est feuilletée par les $W^s(a)$ pour $a \in \mathcal{K} \cap U$.

Redressement des variétés stables et instables : On fixe $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$. Soit U un voisinage de p et (x_u, x_s, x_{ss}, x_c) des coordonnées locales dans U qui redressent les variétés ci-dessus, c'est-à-dire telles que :

1. Le cercle de Kasner a pour équation locale

$$x_u = x_s = x_{ss} = 0$$

On note alors $U_c = \{x_c \mid (0, 0, 0, x_c) \in U \cap \mathcal{K}\}$ et on identifie U_c avec $U \cap \mathcal{K}$.

2. Les variétés stables et instables ont pour équations locales, pour tout $a \in \mathcal{K} \cap U$:

$$\begin{aligned} W^u(\mathcal{K} \cap U) &= \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid x_s = x_{ss} = 0, x_c \in U_c\} \\ W^u(a) &= \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid x_s = x_{ss} = 0, x_c = a_c\} \\ W^s(\mathcal{K} \cap U) &= \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid x_u = 0, x_c \in U_c\} \\ W^s(a) &= \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid x_u = 0, x_c = a_c\} \end{aligned}$$

Si on redresse seulement les variétés ci-dessus, alors la distinction entre x_s et x_{ss} n'a aucune pertinence. Dans ce cas, la seule chose que l'on sait est que le 2-plan dirigé par $\frac{\partial}{\partial x_s} \oplus \frac{\partial}{\partial x_{ss}}$ est invariant pour la différentielle et que le bloc 2×2 correspondant a une norme d'opérateur μ_s . Pour simplifier l'expression de la différentielle, on peut choisir de prendre $\frac{\partial}{\partial x_s}$ tangent à la direction associée à μ_s et $\frac{\partial}{\partial x_{ss}}$ tangent à la direction associée à μ_{ss} . Avec ce choix, la différentielle est diagonale. Plus précisément, on a

$$A(x_c) = d_{(0,0,0,x_c)}X = \begin{pmatrix} \mu_u(u(x_c)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_s(u(x_c)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_{ss}(u(x_c)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en tout point $x_c \in U_c$.

Développement limité du champ X au voisinage d'un point du cercle : Ecrivons le développement limité de X :

$$X(x) = A(x_c)x + g(x)$$

Nous allons montrer, en utilisant l'invariance des variétés stables et instables, que l'on peut écrire g sous la forme

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_u g_u(x) \\ g_{s1}(x)x_s + g_{s2}(x)x_{ss} \\ g_{ss1}(x)x_s + g_{ss2}(x)x_{ss} \\ x_u(g_{c1}(x)x_s + g_{c2}(x)x_{ss}) \end{pmatrix}$$

On définit les notations suivantes :

$$x_{u,s,ss} = (x_u, x_s, x_{ss})$$

$$\|x_{u,s,ss}\|_\infty = \max(|x_u|, |x_s|, |x_{ss}|)$$

On note X_u la coordonnée de X dans la direction $\frac{\partial}{\partial x_u}$ et idem pour les autres coordonnées. Comme $X_u(0, 0, 0, a) \equiv 0$ et X_u est C^∞ , on a, par le lemme d'Hadamard,

$$X_u = x_u h_u(x) + x_s h_s(x) + x_{ss} h_{ss}(x)$$

où h_u, h_s, h_{ss} sont C^∞ . De plus, comme la variété $W^s(U \cap \mathcal{K})$ est invariante, on a nécessairement $h_s = h_{ss} = 0$. Maintenant, si on écrit $h_u = \mu_u + g_u(x)$, alors $g_u(0, 0, 0, a) \equiv 0$ par définition de la différentielle et g_u est C^∞ donc $|g_u| < M\|x_{u,s,ss}\|_\infty$ où M est une constante.

L'expression de X_s et X_{ss} se démontre de même, en remplaçant « $x_u = 0$ » par « $x_s = x_{ss} = 0$ ». Notons encore une fois qu'en toute logique on ne devrait pas vraiment distinguer X_s et X_{ss} , mais simplement parler de la projection de X dans la direction $\frac{\partial}{\partial x_s} \oplus \frac{\partial}{\partial x_{ss}}$. On fait cette distinction uniquement pour simplifier certains calculs.

Pour l'expression de X_c , on procède comme suit. Puisque X_c et sa différentielle sont nulles en tout point $(0, 0, 0, a)$, on a

$$X_c = x_u x_u g_{u,u}(x) + x_s x_s g_{s,s}(x) + \dots$$

(où l'on trouve tous les couples de variables parmi x_u, x_s, x_{ss}). Plaçons-nous à $x_s = x_{ss} = 0$, c'est-à-dire dans $W^u(U)$. Dans cette sous-variété, on a $X_c = x_u x_u g_{u,u}(x)$. Mais comme le feuilletage de $W^u(U)$ en $W^u(a)$ est invariant, on a $X_c = 0$ dans cette sous-variété. Par conséquent $g_{u,u} \equiv 0$. En se plaçant maintenant dans $W^s(U)$ et en utilisant l'invariance du feuilletage en $W^s(a)$, on en déduit $g_{s,s} = g_{s,ss} = g_{ss,ss} = 0$. Finalement, il ne reste plus que les termes en $x_u x_s$ et $x_u x_{ss}$ comme souhaité.

On introduit les notations suivantes :

$$g_{s,ss}(x) = \begin{pmatrix} g_{s1}(x) & g_{s2}(x) \\ g_{ss1}(x) & g_{ss2}(x) \end{pmatrix}, \quad g_c(x) = \begin{pmatrix} g_{c1}(x) & g_{c2}(x) \end{pmatrix}$$

$$\mu_{s,ss} = \begin{pmatrix} \mu_s & 0 \\ 0 & \mu_{ss} \end{pmatrix}, \quad x_{s,ss} = \begin{pmatrix} x_s \\ x_{ss} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_u g_u(x) \\ g_{s,ss}(x) x_{s,ss} \\ x_u g_c(x) x_{s,ss} \end{pmatrix}$$

Remarquons maintenant que la forme du DL de X reste la même si on compose x_c (au but) par un difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On choisira pour la suite de prendre x_c comme étant l'abscisse curviligne sur le cercle.

Contrôle local du champ X : Il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner u_0 , il existe U un voisinage de p (ne contenant aucun point de Taub) et (x_u, x_s, x_{ss}, x_c) des coordonnées locales qui redressent les variétés introduites précédemment dans U , il existe un réel $M(u_0) \geq \max(1, A)$ et un réel $\eta_{u_0} > 0$ tels que

1. $B(p, \eta_{u_0}) \subset U$ où

$$B(p, \eta_{u_0}) = \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid \|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \eta_{u_0}, |x_c - p_c| \leq \eta_{u_0}\}$$

2. Pour tout $x, \tilde{x} \in B(p, \eta_{u_0})$, on a

$$|g_{c1}(x)|, |g_{c2}(x)| \leq M(u_0) \quad (4.1)$$

$$|g_u(x)|, |g_{s1}(x)|, |g_{s2}(x)|, |g_{ss1}(x)|, |g_{ss2}(x)| \leq M(u_0) \|x_{u,s,ss}\|_\infty \quad (4.2)$$

$$\|g_c(x) - g_c(\tilde{x})\|, \|g_u(x) - g_u(\tilde{x})\|, \|g_{s,ss}(x) - g_{s,ss}(\tilde{x})\| \leq M(u_0) \|x - \tilde{x}\| \quad (4.3)$$

$$\|d_x g_u\|, \|d_x^2 g_u\|, \|d_x^3 g_u\| \leq M(u_0) \quad (4.4)$$

$$\|d_x X\|, \|d_x^2 X\|, \|d_x^3 X\| \leq M(u_0) \quad (4.5)$$

3. Pour tout $(0, 0, 0, x_c), (0, 0, 0, \tilde{x}_c) \in B(p, \eta_{u_0}) \cap \mathcal{K}$, on a

$$|u(x_c) - u(\tilde{x}_c)| \leq A u_0^2 |x_c - \tilde{x}_c| \quad (4.6)$$

4.2 Changement de paramétrage

Nous allons multiplier localement le champ de vecteurs X par une fonction réelle bien choisie, notée γ , ce qui nous permettra de rendre la dynamique triviale pour la coordonnée x_u et donc de calculer explicitement des temps de trajet ne faisant intervenir que cette coordonnée. Cette opération n'est pas totalement innocente, elle va changer le paramétrage des orbites (et c'est là tout son intérêt). Toutefois, nous ne nous intéressons qu'à la **géométrie** des orbites et cette géométrie est invariante par la transformation que nous effectuons.

Contrôle des valeurs propres : Pour faire le changement de paramétrage, nous aurons besoin d'un résultat sur les valeurs propres. La proposition suivante donne un voisinage explicite sur lequel les valeurs propres ne varient « pas trop ».

Pour tout $u_0 \in]1, +\infty[$ et pour tout $\alpha \in]0, 1[$ fixés, on introduit les notations suivantes :

$$\bar{\alpha} = 1 - \alpha \quad (4.7)$$

$$\alpha' = \frac{1 + \alpha}{2} \quad (4.8)$$

$$\alpha'' = \frac{(1 - \alpha')\mu_u(u_0) + \alpha'\mu_s(u_0)}{\mu_s(u_0)} \quad (4.9)$$

et on remarque que

$$\alpha < \alpha' < \alpha'' \quad (4.10)$$

Proposition 4.2 (Contrôle des valeurs propres, version 1). *Pour tout $u_0 \in [1, +\infty[$, $\alpha \in]0, 1[$ et $u \in [1, +\infty[$, si*

$$|u - u_0| \leq \frac{\bar{\alpha}}{3u_0}$$

alors

$$\alpha \leq \frac{\mu_u(u)}{\mu_u(u_0)}, \frac{\mu_s(u)}{\mu_s(u_0)}, \frac{\mu_{ss}(u)}{\mu_{ss}(u_0)} \leq \alpha^{-1}$$

Démonstration. Les trois calculs sont analogues, on ne fait la preuve que pour $\mu_u(u) = \frac{6u}{1+u+u^2}$. Il est facile de voir que

$$|\mu_u(u) - \mu_u(u_0)| \leq \min(1 - \alpha, \alpha^{-1} - 1)\mu_u(u_0) \implies \alpha \leq \frac{\mu_u(u)}{\mu_u(u_0)} \leq \alpha^{-1}$$

que

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \min(1 - \alpha, \alpha^{-1} - 1) = 1 - \alpha = \bar{\alpha}$$

et enfin que

$$\|\mu'_u\|_\infty \leq 6$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$|\mu_u(u) - \mu_u(u_0)| \leq 6|u - u_0| \leq 6\frac{\bar{\alpha}}{3u_0} \leq 6\frac{\bar{\alpha}u_0}{1 + u_0 + u_0^2} = \bar{\alpha}\mu_u(u_0)$$

□

La fonction γ_p : Soit $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner u_0 . On va définir une fonction de normalisation locale du champ de Wainwright-Hsu au voisinage de p . Posons, pour $x = (x_u, x_s, x_{ss}, x_c)$,

$$\gamma_p(x) = \frac{\mu_u(u_0)}{\mu_u(u(x_c)) + g_u(x)} \quad (4.11)$$

où l'on identifie le réel x_c avec le point $(0, 0, 0, x_c) \in \mathcal{K} \cap B(p, \eta_{u_0})$. La proposition suivante donne un voisinage de p sur lequel γ_p est bien définie.

Proposition 4.3 (Domaine de définition de γ_p). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, pour tout $x \in B(p, \eta_{u_0})$ tel que*

$$|x_c - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{3Au_0^3}$$

$$\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{\alpha}{Cu_0M(u_0)}$$

on a

$$\mu_u(u(x_c)) + g_u(x) > 0$$

En particulier, $\gamma_p(x)$ est bien défini.

Remarque 4.4. C'est la première fois que l'on utilise la formule « Pour tout C assez grand », il faut la comprendre de la manière suivante : il existe \tilde{C} tel que pour tout $C \geq \tilde{C}$, on a ...

Démonstration. On se donne p , u_0 , α et x comme dans l'énoncé. D'après la proposition 4.2 et l'inégalité (4.6), on a

$$\alpha\mu_u(u_0) \leq \mu_u(u(x_c))$$

Supposons de plus que

$$\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{\alpha\mu_u(u_0)}{2M(u_0)}$$

alors, d'après (4.2),

$$|g_u(x)| \leq M(u_0)\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{\alpha\mu_u(u_0)}{2} < \mu_u(u(x_c))$$

ce qui implique

$$\mu_u(u(x_c)) + g_u(x) > 0$$

On conclut en remarquant qu'il existe \tilde{C} tel que pour tout $C \geq \tilde{C}$, on a

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\mu_u(u_0)u_0}{2}$$

□

Proposition 4.5 (Contrôle de γ_p et de ses dérivées). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $x \in B(p, \eta_{u_0})$ tel que*

$$\begin{aligned} |x_c - p_c| &\leq \frac{\bar{\alpha}}{3Au_0^3} \\ \|x_{u,s,ss}\|_\infty &\leq \frac{1}{Cu_0M(u_0)} \end{aligned}$$

on a

$$\frac{1}{2} \leq \gamma_p(x) \leq \frac{3}{2} \tag{4.12}$$

et

$$\|d_x \gamma_p\| \leq Cu_0M(u_0), \|d_x^2 \gamma_p\| \leq Cu_0^2M(u_0), \|d_x^3 \gamma_p\| \leq Cu_0^3M(u_0) \tag{4.13}$$

Démonstration. Commençons par prouver l'encadrement $\frac{1}{2} \leq \gamma_p(x) \leq \frac{3}{2}$. On rappelle que $M(u_0)$ est tel que :

$$\forall x \in B(p, \eta_{u_0}), |g_u(x)| \leq M(u_0)\|x_{u,s,ss}\|_\infty$$

Choisissons maintenant C assez grand pour pouvoir appliquer la proposition 4.3. Il est clair qu'il existe $C' > C$ tel que pour tout $C'' > C'$, pour tout $u_0 \in [1, +\infty[$ et pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, on a

$$\frac{1}{C''u_0} \leq \frac{\alpha}{Cu_0}$$

Autrement dit, pour tout C assez grand, si x vérifie les hypothèses de la proposition 4.5, alors il vérifie aussi les hypothèses de la proposition 4.3. Fixons C assez grand et x vérifiant les hypothèses

de la proposition 4.5. Il vient $\mu_u(u(x_c)) + g_u(x) > 0$ et on en déduit l'équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \gamma_p(x) \leq \frac{3}{2} &\iff \mu_u(u(x_c)) + g_u(x) \leq 2\mu_u(u_0) \leq 3(\mu_u(u(x_c)) + g_u(x)) \\ &\iff \begin{cases} g_u(x) \leq 2\mu_u(u_0) - \mu_u(u(x_c)) \\ 2\mu_u(u_0) - 3\mu_u(u(x_c)) \leq 3g_u(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Traisons les deux inégalités séparément et dans l'ordre.

Première inégalité : Comme $\alpha > \frac{3}{4}$, on vérifie aisément que $(2 - \alpha^{-1}) > \frac{2}{3}$. D'après la proposition 4.2, on a la minoration

$$\frac{2}{3}\mu_u(u_0) < (2 - \alpha^{-1})\mu_u(u_0) \leq 2\mu_u(u_0) - \mu_u(u(x_c))$$

et on a alors

$$\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{2}{3M(u_0)}\mu_u(u_0) \implies g_u(x) \leq 2\mu_u(u_0) - \mu_u(u(x_c))$$

Remarquons qu'il existe une constante $\tilde{C} > 1$ telle que pour tout $u_0 \geq 1$, on ait

$$\frac{1}{\tilde{C}u_0} \leq \mu_u(u_0)$$

on en déduit que

$$\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{2}{3M(u_0)\tilde{C}u_0} \implies g_u(x) \leq 2\mu_u(u_0) - \mu_u(u(x_c))$$

Seconde inégalité : Comme $\alpha > \frac{3}{4}$, on vérifie aisément que $2 - 3\alpha < -\frac{1}{4}$. D'après la proposition 4.2, on a la majoration

$$2\mu_u(u_0) - 3\mu_u(u(x_c)) \leq (2 - 3\alpha)\mu_u(u_0) < -\frac{1}{4}\mu_u(u_0)$$

De plus

$$\begin{aligned} \|x_{u,s,ss}\|_\infty &\leq \frac{1}{12M(u_0)\tilde{C}u_0} \implies 3M(u_0)\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{1}{4\tilde{C}u_0} \\ &\implies 3M(u_0)\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{1}{4}\mu_u(u_0) \\ &\implies 3|g_u(x)| \leq \frac{1}{4}\mu_u(u_0) \\ &\implies -\frac{1}{4}\mu_u(u_0) \leq 3g_u(x) \\ &\implies 2\mu_u(u_0) - 3\mu_u(u(x_c)) \leq 3g_u(x) \end{aligned}$$

D'où l'encadrement voulu $\frac{1}{2} \leq \gamma_p(x) \leq \frac{3}{2}$, pour tout x vérifiant les inégalités de la proposition avec C assez grand.

Démontrons maintenant que $\|d_x \gamma_p\| \leq C u_0$ pour C assez grand indépendamment de u_0 . On ne fera que cette inégalité, les suivantes étant très similaires.

On note $h : x \mapsto \mu_u(u(x_c))$ de telle sorte que

$$\gamma_p(x) = \frac{\mu_u(u_0)}{h(x) + g_u(x)}$$

et

$$d_x \gamma_p = \frac{-\gamma_p(x)^2}{\mu_u(u_0)} (d_x h + d_x g_u)$$

On peut ensuite écrire la majoration

$$\|d_x \gamma_p\| \leq \frac{9}{4\mu_u(u_0)} (\|d_x h\| + \|d_x g_u\|)$$

et on a $\|d_x g_u\| \leq M(u_0)$ par (4.4) donc il reste à majorer $\|d_x h\|$. On rappelle que, localement, il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que, au signe près, on ait

$$\mu_u(u(x_c)) = h(x) = 2 + 2\Sigma_i$$

de plus, Σ_i varie moins vite que l'abscisse curviligne donc

$$\|d_x h\| \leq 2$$

Quitte à prendre $M(u_0)$ plus grand, on a $2 \leq M(u_0)$ pour tout u_0 . D'où, pour tout C assez grand,

$$\|d_x \gamma_p\| \leq C u_0 M(u_0)$$

□

Le champ de vecteurs Y_p : Soit $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner u_0 . Posons, pour x suffisamment proche de p ,

$$Y_p(x) = \gamma_p(x) X(x) \tag{4.14}$$

On s'empresse d'écrire le développement limité du champ Y :

$$Y_p(x) = B(x_c)x + h(x)$$

où

$$B(x_c) = d_{(0,0,0,x_c)} Y = \begin{pmatrix} \lambda_u(u(x_c)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_s(u(x_c)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{ss}(u(x_c)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\lambda_u(u(x_c)) = \frac{\mu_u(u_0)}{\mu_u(u(x_c))} \mu_u(u(x_c)) = \mu_u(u_0)$$

$$\lambda_s(u(x_c)) = \frac{\mu_u(u_0)}{\mu_u(u(x_c))} \mu_s(u(x_c))$$

$$\lambda_{ss}(u(x_c)) = \frac{\mu_u(u_0)}{\mu_u(u(x_c))} \mu_{ss}(x_c)$$

(notons dès à présent que $\lambda_u(u(x_c)) = \mu_u(u_0)$, $\lambda_s(u_0) = \mu_s(u_0)$, $\lambda_{ss}(u_0) = \mu_{ss}(u_0)$)
et

$$h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_{s1}(x)x_s + h_{s2}(x)x_{ss} \\ h_{ss1}(x)x_s + h_{ss2}(x)x_{ss} \\ x_u(h_{c1}(x)x_s + h_{c2}(x)x_{ss}) \end{pmatrix}$$

On transpose toutes les notations de la partie 4.2 à λ et h .

La dynamique induite par Y est donc

$$\begin{cases} x'_u &= \lambda_u x_u \\ x'_s &= -\lambda_s x_s + h_{s1}(x)x_s + h_{s2}(x)x_{ss} \\ x'_{ss} &= -\lambda_{ss} x_{ss} + h_{ss1}(x)x_s + h_{ss2}(x)x_{ss} \\ x'_c &= x_u(h_{c1}(x)x_s + h_{c2}(x)x_{ss}) \end{cases} \quad (4.15)$$

ou, sous une forme plus condensée,

$$\begin{cases} x'_u &= \lambda_u x_u \\ x'_{s,ss} &= -\lambda_{s,ss} x_{s,ss} + h_{s,ss}(x)x_{s,ss} \\ x'_c &= x_u h_c(x)x_{s,ss} \end{cases} \quad (4.16)$$

Comme annoncé en introduction, l'équation d'évolution de la variable x_u a été découplée du système d'équations et est maintenant explicitement intégrable.

Contrôle de λ et du développement limité de Y_p :

Proposition 4.6 (Contrôle des valeurs propres, version 2). *Pour tout $u_0 \in [1, +\infty[$, $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$ et $u \in [1, +\infty[$, si*

$$|u - u_0| \leq \frac{\bar{\alpha}}{6u_0}$$

alors

$$\alpha \leq \frac{\lambda_s(u)}{\mu_s(u_0)}, \frac{\lambda_{ss}(u)}{\mu_{ss}(u_0)} \leq \alpha^{-1} \quad (4.17)$$

Démonstration. Traitons le cas de λ_s , l'autre cas étant similaire. Soit u tel que $|u - u_0| \leq \frac{\bar{\alpha}}{6u_0}$. D'après l'inégalité élémentaire

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{1-x}{2} \leq 1 - \sqrt{x}$$

on a $|u - u_0| \leq \frac{1-\sqrt{\alpha}}{3u_0}$ et on peut alors appliquer la proposition 4.2 : $\sqrt{\alpha} \leq \frac{\mu_u(u)}{\mu_u(u_0)} \leq \sqrt{\alpha}^{-1}$ et $\sqrt{\alpha} \leq \frac{\mu_s(u)}{\mu_s(u_0)} \leq \sqrt{\alpha}^{-1}$. D'où l'inégalité voulue puisque $\frac{\lambda_s(u)}{\lambda_s(u_0)} = \frac{\mu_u(u_0)}{\mu_u(u)} \frac{\mu_s(u)}{\mu_s(u_0)}$. \square

On donne maintenant une variation de la proposition 4.6.

Proposition 4.7 (Contrôle des valeurs propres, version 3). *Pour tout $u_0 \in [1, +\infty[$, $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$ et $u \in [1, +\infty[$, si*

$$|u - u_0| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24u_0^2}$$

alors

$$\alpha'' \leq \frac{\lambda_s(u)}{\mu_s(u_0)}, \frac{\lambda_{ss}(u)}{\mu_{ss}(u_0)} \leq (\alpha'')^{-1} \quad (4.18)$$

Démonstration. Il est facile de voir que

$$\frac{1 - \alpha}{24u_0^2} \leq \frac{1 - \alpha''}{6u_0}$$

ce qui, en conjonction avec la proposition 4.6, fournit le résultat voulu. \square

Proposition 4.8 (Contrôle des dérivées de Y). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $x \in B(p, \eta_{u_0})$ tel que*

$$|x_c - u_0| \leq \frac{\bar{\alpha}}{3Au_0^3}$$

$$\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{1}{Cu_0M(u_0)}$$

on a

$$\|d_x^2 Y\| \leq Cu_0M(u_0)^2, \|d_x^3 Y\| \leq Cu_0^2M(u_0)^2 \quad (4.19)$$

Démonstration. Cela découle immédiatement de la proposition 4.5, du fait que X s'annule sur le cercle de Kasner et de (4.5). \square

La proposition suivante est essentielle car elle permet d'avoir un certain contrôle sur les applications apparaissant dans le développement limité de Y , ce sont d'ailleurs les seules propriétés qu'on utilisera sur ces applications.

Proposition 4.9 (Contrôle des termes du développement limité de Y). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $x, \tilde{x} \in B(p, \eta_{u_0})$ tel que*

$$|x_c - u_0|, |\tilde{x}_c - u_0| \leq \frac{\bar{\alpha}}{3Au_0^3}$$

$$\|x_{u,s,ss}\|_\infty, \|\tilde{x}_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{1}{Cu_0M(u_0)}$$

on a

$$|h_{c1}(x)|, |h_{c2}(x)| \leq Cu_0M(u_0)^2 \quad (4.20)$$

$$|h_{s1}(x)|, |h_{s2}(x)|, |h_{ss1}(x)|, |h_{ss2}(x)| \leq Cu_0M(u_0)^2 \|x_{u,s,ss}\|_\infty \quad (4.21)$$

$$\|h_{s,ss}(x) - h_{s,ss}(\tilde{x})\| \leq Cu_0M(u_0)^2 \|x - \tilde{x}\| \quad (4.22)$$

$$\|h_c(x) - h_c(\tilde{x})\| \leq Cu_0^2M(u_0)^2 \|x - \tilde{x}\| \quad (4.23)$$

Démonstration. Cette proposition est une conséquence de la proposition 4.8. Les fonctions h s'expriment explicitement en fonction des dérivées partielles secondes de Y , les estimées sur Y fournissent alors les estimées voulues sur les fonctions h . \square

4.3 Application de passage local

Soit $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$ et soit $\epsilon > 0$.

On définit trois ensembles que l'on doit penser comme différentes faces d'une certaine « boîte » U_p autour de p , incluse dans $B(p, \eta_{u_0})$:

Les deux faces d'entrée :

$$\Sigma_{p,\epsilon}^s = \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid 0 \leq x_u \leq \epsilon, |x_c - p_c| \leq \epsilon, |x_{ss}| \leq \epsilon, x_s = \epsilon\}$$

$$\Sigma_{p,\epsilon}^{ss} = \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid 0 \leq x_u \leq \epsilon, |x_c - p_c| \leq \epsilon, |x_s| \leq \epsilon, x_{ss} = \epsilon\}$$

La face de sortie :

$$\Sigma_{p,\epsilon}^u = \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid x_u = \epsilon, \|x_{s,ss}\| \leq 2\epsilon, |x_c - p_c| \leq 2\epsilon\}$$

Nous allons définir dans cette partie deux applications de passage local (données par le flot) :

$$\psi_{p,\epsilon}^s : \Sigma_{p,\epsilon}^s \rightarrow \Sigma_{p,\epsilon}^u$$

et

$$\psi_{p,\epsilon}^{ss} : \Sigma_{p,\epsilon}^{ss} \rightarrow \Sigma_{p,\epsilon}^u$$

Il faudra en particulier veiller à ce que ϵ soit suffisamment petit pour que ces applications soient bien définies et nous donnerons une borne sur ϵ en fonction de u_0 .

Il est utile de différencier les deux faces d'entrées pour la partie 5 mais les résultats de cette partie seront symétriques par rapport au choix de la face d'entrée, il serait donc artificiel de ne considérer qu'une face. C'est pourquoi on pose

$$\Sigma_{p,\epsilon} = \Sigma_{p,\epsilon}^s \cup \Sigma_{p,\epsilon}^{ss}$$

pour donner des énoncés symétriques.

Remarque 4.10. On ne perd pas en généralité en se restreignant au cas où $x_u \geq 0$.

Remarque 4.11. Par symétrie, on ne parlera que de $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ dans la suite. Évidemment tous les résultats se réécrivent en un énoncé analogue sur $\Sigma_{p,\epsilon}$.

4.3.1 Passage d'une orbite entre deux sections locales au voisinage du cercle

La forme de l'équation régissant l'évolution de x_c dans (4.16) nous pousse à introduire la fonction

$$\chi = |x_u| \|x_{s,ss}\| = |x_u| (|x_s| + |x_{ss}|)$$

et nous allons voir que cette fonction décroît exponentiellement vite le long d'une orbite qui passe proche d'un point de $\mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 4.12 (Contrôle de la croissance de χ). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout temps $t \geq 0$ et pour toute orbite x qui vérifie les trois conditions suivantes sur $[0, t]$:*

$$\begin{cases} x \in B(p, \eta_{u_0}) \\ |x_c - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24Au_0^4} \\ \|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{\bar{\alpha}}{Cu_0^3 M(u_0)^2} \end{cases}$$

on a la majoration

$$\chi(t) \leq e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t} \chi(0) \quad (4.24)$$

Démonstration. La preuve consiste à obtenir une inéquation différentielle sur χ puis à utiliser le lemme de Gronwall. On commence par dériver χ :

$$\chi' = \frac{x_u}{|x_u|} x'_u |x_s| + \frac{x_s}{|x_s|} x'_s |x_u| + \frac{x_u}{|x_u|} x'_u |x_{ss}| + \frac{x_{ss}}{|x_{ss}|} x'_{ss} |x_u|$$

puis on remplace les dérivées de x_u , x_s et x_{ss} par leurs expressions dans l'équation (4.16)

$$\begin{aligned} \chi' &= \lambda_u(u(x_c)) |x_u| |x_s| + \lambda_u(u(x_c)) |x_u| |x_{ss}| + \frac{x_s}{|x_s|} |x_u| (-\lambda_s(u(x_c)) x_s + h_{s1}(x) x_s + h_{s2}(x) x_{ss}) \\ &\quad + \frac{x_{ss}}{|x_{ss}|} |x_u| (-\lambda_{ss}(u(x_c)) x_{ss} + h_{ss1}(x) x_s + h_{ss2}(x) x_{s,ss}) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\chi' \leq (\lambda_u(u(x_c)) - \lambda_s(u(x_c))) \chi + |x_u| (|h_{s1}(x)| |x_s| + |h_{s2}(x)| |x_{ss}|) + |x_u| (|h_{ss1}(x)| |x_s| + |h_{ss2}(x)| |x_{s,ss}|)$$

En utilisant la proposition 4.9, on obtient la majoration

$$\chi' \leq (\lambda_u(u(x_c)) - \lambda_s(u(x_c))) \chi + 2Cu_0 M(u_0)^2 \chi \|x_{u,s,ss}\|_\infty \quad (4.25)$$

On rappelle que $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$ et $\alpha'' = \frac{(1-\alpha')\mu_u(u_0) + \alpha'\mu_s(u_0)}{\mu_s(u_0)}$. D'après la proposition 4.7 et l'inégalité (4.6), on a le contrôle suivant sur λ_s :

$$\alpha'' \leq \frac{\lambda_s(u(x_c))}{\mu_s(u_0)} \leq (\alpha'')^{-1}$$

d'où

$$-\lambda_s(u(x_c)) \chi \leq -\alpha'' \mu_s(u_0) \chi \quad (4.26)$$

On injecte l'inégalité (4.26) dans l'inégalité (4.25) :

$$\begin{aligned} \chi' &\leq (\lambda_u(u(x_c)) - \alpha'' \mu_s(u_0)) \chi + 2Cu_0 M(u_0)^2 \chi \|x_{u,s,ss}\|_\infty \\ &\leq (\mu_u(u_0) - ((1-\alpha')\mu_u(u_0) + \alpha'\mu_s(u_0))) \chi + 2Cu_0 M(u_0)^2 \chi \|x_{u,s,ss}\|_\infty \\ &\leq \alpha'(\mu_u(u_0) - \mu_s(u_0)) \chi + 2Cu_0 M(u_0)^2 \chi \|x_{u,s,ss}\|_\infty \end{aligned}$$

Supposons maintenant que x vérifie

$$\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{1-\alpha}{2} \frac{\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0)}{2Cu_0 M(u_0)^2}$$

alors

$$\alpha'(\mu_u(u_0) - \mu_s(u_0)) + 2Cu_0 M(u_0)^2 \|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \alpha(\mu_u(u_0) - \mu_s(u_0))$$

d'où

$$\chi' \leq \alpha(\mu_u(u_0) - \mu_s(u_0)) \chi$$

ce qui est l'inéquation différentielle désirée.

Pour terminer la démonstration, il reste à prouver que

$$\frac{\bar{\alpha}}{C'u_0^3 M(u_0)^2} \leq \frac{1-\alpha}{2} \frac{\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0)}{2Cu_0 M(u_0)^2}$$

pour tout C' assez grand. Or, il est facile de voir que

$$\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0) \sim_{u_0 \rightarrow +\infty} \frac{6}{u_0^2}$$

donc il suffit de prendre C' tel que

$$\frac{1}{C'} \leq \frac{u_0^2(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))}{4C}$$

□

La proposition suivante nous donne un premier contrôle du comportement des différentes coordonnées le long d'un segment orbite près d'un point du cercle de Kasner. Elle nous apprend que la coordonnée x_u croît exponentiellement vite (si elle est non nulle), que les coordonnées x_s et x_{ss} décroissent exponentiellement vite et que la variation de la coordonnée x_c est contrôlée par une quantité qui ne dépend que du point de départ de l'orbite.

Proposition 4.13 (Contrôle d'un segment d'orbite proche du cercle). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout temps $t \geq 0$ et pour toute orbite x qui vérifie les trois conditions suivantes sur $[0, t]$:*

$$\begin{cases} x \in B(p, \eta_{u_0}) \\ |x_c - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24Au_0^4} \\ \|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{\bar{\alpha}}{Cu_0^3M(u_0)^2} \end{cases}$$

on a les contrôles

$$x_u(t) = e^{\mu_u(u_0)t} x_u(0) \tag{4.27}$$

$$\|x_{s,ss}(t)\| \leq e^{-\alpha\mu_s(u_0)t} \|x_{s,ss}(0)\| \tag{4.28}$$

$$|x_c(t) - x_c^{in}| \leq Cu_0^3M(u_0)^2\chi(0)(1 - e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t}) \tag{4.29}$$

Démonstration. Les trois résultats se montrent indépendamment.

Coordonnée x_u : $x'_u = \mu_u(u_0)x_u$ d'où le résultat.

Coordonnée $x_{s,ss}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(|x_s| + |x_{ss}|) &= \frac{x_s}{|x_s|}(-\lambda_s(u(x_c))x_s + h_{s1}(x)x_s + h_{s2}(x)x_{ss}) \\ &\quad + \frac{x_{ss}}{|x_{ss}|}(-\lambda_{ss}(u(x_c))x_{ss} + h_{ss1}(x)x_s + h_{ss2}(x)x_{ss}) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(|x_s| + |x_{ss}|) \leq (-\lambda_s(u(x_c)) + Cu_0M(u_0)^2\|x_{u,s,ss}\|_\infty)(|x_s| + |x_{ss}|)$$

On rappelle encore que $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$ et $\alpha'' = \frac{(1-\alpha')\mu_u(u_0) + \alpha'\mu_s(u_0)}{\mu_s(u_0)}$. Par hypothèse,

$$|u(x_c) - u_0| \leq Au_0^2|x_c - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24u_0^2}$$

donc, d'après la proposition 4.7, ceci implique le contrôle

$$-\lambda_s(u(x_c)) \leq -\alpha'' \mu_s(u_0)$$

or, $\alpha' < \alpha''$ donc

$$-\lambda_s(u(x_c)) \leq -\alpha' \mu_s(u_0)$$

il vient alors

$$\frac{d}{dt}(|x_s| + |x_{ss}|) \leq (-\alpha' \mu_s(u_0) + C u_0 M(u_0)^2 \|x_{u,s,ss}\|_\infty)(|x_s| + |x_{ss}|)$$

Si x vérifie la condition $\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{(1-\alpha)\mu_s(u_0)}{2C u_0 M(u_0)^2}$, alors

$$\frac{d}{dt}(|x_s| + |x_{ss}|) \leq -\alpha \mu_s(u_0)(|x_s| + |x_{ss}|)$$

et le lemme de Gronwall fournit le contrôle voulu sur $\|x_{s,ss}(t)\|$.

De plus, il existe une constante C' telle que, pour tout u_0 et tout α , on a

$$\frac{1-\alpha}{C' u_0^3 M(u_0)^2} \leq \frac{(1-\alpha)\mu_s(u_0)}{2C u_0 M(u_0)^2}$$

d'où le contrôle annoncé sur $\|x_{s,ss}(t)\|$ dès lors que x vérifie $\|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{\bar{\alpha}}{C u_0^3 M(u_0)^2}$ avec C assez grand.

Coordonnée x_c : On a

$$|x_c(t) - x_c^{in}| = \left| \int_0^t x'_c \right| \leq \int_0^t |x'_c|$$

Or

$$|x'_c| = |x_u h_c(x) x_{s,ss}| \leq 2C u_0 M(u_0)^2 \chi$$

d'où, en utilisant l'inégalité (4.24) de la proposition 4.12,

$$\begin{aligned} |x_c(t) - x_c^{in}| &\leq 2C u_0 M(u_0)^2 \int_0^t e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))z} \chi(0) dz \\ &\leq 2C u_0 M(u_0)^2 \chi(0) \left[\frac{e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))z}}{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))} \right]_0^t \\ &\leq 2C u_0 M(u_0)^2 \chi(0) \frac{1 - e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t}}{\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))} \end{aligned}$$

Comme $\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0) \sim_{u_0 \rightarrow +\infty} \frac{6}{u_0^2}$ et $\frac{1}{\alpha}$ est borné, on obtient le résultat pour C assez grand. \square

La proposition suivante montre que, quitte à prendre une boîte suffisamment « petite », et donc une condition initiale suffisamment proche du cercle, une orbite générique qui rentre dans la boîte par $\Sigma_{p,\epsilon}$ en ressort par $\Sigma_{p,\epsilon}^u$ et doit vérifier les contrôles de la proposition 4.13 tant qu'elle reste dans la boîte.

Proposition 4.14 (Temps de première sortie de la boîte). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{\bar{\alpha}}{4Cu_0^3M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{50Au_0^4}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$, pour toute orbite x ayant pour condition initiale $x(0) = x^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}$ avec $x_u^{in} \neq 0$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *l'orbite x est (au moins) définie sur $[0, t^{loc}]$ où*

$$t^{loc} = \frac{1}{\mu_u(u_0)} \ln \frac{\epsilon}{x_u^{in}} \quad (4.30)$$

2. *pour tout $t \in [0, t^{loc}]$,*

$$\begin{cases} x(t) \in B(p, \eta_{u_0}) \\ |x_c(t) - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24Au_0^4} \\ \|x(t)\|_{\infty, u, s, ss} \leq \frac{\bar{\alpha}}{Cu_0^3M(u_0)^2} \end{cases}$$

3. *t^{loc} est le premier temps de « sortie de la boîte », i.e.*

$$\begin{cases} x(t^{loc}) \in \Sigma_{p,\epsilon}^u \\ \forall t \in [0, t^{loc}], x(t^{loc}) \notin \Sigma_{p,\epsilon}^u \end{cases}$$

Démonstration. On va utiliser la technique des majorations a priori. Posons $t^{loc} = \frac{1}{\mu_u(u_0)} \ln \frac{\epsilon}{x_u^{in}}$ et notons $]t_-, t_+[$ l'intervalle d'existence de x (on a alors $t_- < 0$ et $t_+ > 0$).

1. Supposons que $t_+ \leq t^{loc}$.

Au temps $t = 0$, on a par hypothèse

$$\begin{cases} x(0) \in \text{int } B(p, \eta_{u_0}) \\ |x_c(0) - p_c| < \frac{\bar{\alpha}}{24Au_0^4} \\ \|x(0)\|_{\infty, u, s, ss} < \frac{\bar{\alpha}}{Cu_0^3M(u_0)^2} \end{cases}$$

où $\text{int } B(p, \eta_{u_0})$ désigne l'intérieur de la boule $B(p, \eta_{u_0})$. Par continuité de x , cela reste vrai sur un intervalle de temps non trivial $[0, t_0]$ ($0 < t_0 < t_+$). Posons t_{\max} la borne supérieure de tous les temps $t_0 \in]0, t_+[$ vérifiant

$$\forall t \in [0, t_0], \begin{cases} x(t) \in B(p, \eta_{u_0}) \\ |x_c(t) - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24Au_0^4} \\ \|x(t)\|_{\infty, u, s, ss} \leq \frac{\bar{\alpha}}{Cu_0^3M(u_0)^2} \end{cases}$$

Premier cas : $t_{\max} = t_+$. Alors x est bornée sur $[0, t_+[$ et cela contredit le théorème d'explosion en temps fini. C'est donc absurde.

Deuxième cas : $t_{\max} < t_+$. Par continuité de x , on a

$$\forall t \in [0, t_{\max}], \begin{cases} x(t) \in B(p, \eta_{u_0}) \\ |x_c(t) - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24Au_0^4} \\ \|x(t)\|_{\infty, u, s, ss} \leq \frac{\bar{\alpha}}{Cu_0^3M(u_0)^2} \end{cases}$$

On peut donc appliquer l'inégalité (4.29) de la proposition 4.13 entre 0 et t_{\max} . On a, pour tout $t \in [0, t_{\max}]$,

$$\begin{aligned} |x_c(t) - p_c| &\leq |x_c(t) - x_c^{in}| + |x_c^{in} - p_c| \\ &\leq 2\epsilon^2 C u_0^3 M(u_0)^2 + \epsilon \\ &\leq \epsilon(1 + 2\epsilon C u_0^3 M(u_0)^2) \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la deuxième ligne que $\chi(0)(1 - e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t}) \leq 2\epsilon^2$ et à la dernière ligne que $\epsilon \leq \frac{1}{2C u_0^3 M(u_0)^2}$. D'où, pour tout $t \in [0, t_{\max}]$:

$$|x_c(t) - p_c| \leq \frac{\eta_{u_0}}{2} < \eta_{u_0}$$

et

$$|x_c(t) - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{25A u_0^4} < \frac{\bar{\alpha}}{24A u_0^4}$$

D'autre part, l'inégalité (4.28) de la proposition 4.13 implique que pour tout $t \in [0, t_{\max}]$,

$$\|x_{s,ss}(t)\| \leq \|x_{s,ss}(0)\| \leq 2\epsilon$$

donc

$$\|x_{s,ss}(t)\| \leq \frac{\eta_{u_0}}{2} < \eta_{u_0}$$

et

$$\|x_{s,ss}(t)\| \leq \frac{\bar{\alpha}}{2C u_0^3 M(u_0)^2} < \frac{\bar{\alpha}}{C u_0^3 M(u_0)^2}$$

Enfin, $t_{\max} < t_+ \leq t^{loc}$ implique

$$x_u(t_{\max}) = e^{\mu_u(u_0)t_{\max}} x_u(0) < e^{\mu_u(u_0)t^{loc}} x_u(0) = \epsilon < \frac{\bar{\alpha}}{C u_0^3 M(u_0)^2}$$

et

$$0 \leq x_u(t_{\max}) < \eta_{u_0}$$

En particulier, pour $t = t_{\max}$, on obtient

$$\begin{cases} x(t_{\max}) \in \text{int } B(p, \eta_{u_0}) \\ |x_c(t_{\max}) - p_c| < \frac{\bar{\alpha}}{24A u_0^4} \\ \|x(t_{\max})\|_{\infty, u, s, ss} < \frac{\bar{\alpha}}{C u_0^3 M(u_0)^2} \end{cases}$$

ce qui contredit la maximalité de t_{\max} par continuité de x . C'est donc absurde.

On en déduit que $t_+ > t^{loc}$, ce qui prouve le premier point de la proposition.

2. La preuve est presque identique à ce que l'on vient de faire. Cette fois-ci, on note t_{\max} la borne supérieure de tous les temps $t_0 \in]0, t^{loc}]$ vérifiant

$$\forall t \in [0, t_0], \begin{cases} |x_c(t) - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24A u_0^4} \\ \|x(t)\|_{\infty, u, s, ss} \leq \frac{\bar{\alpha}}{C u_0^3 M(u_0)^2} \end{cases}$$

on obtient les mêmes inégalités et on montre que l'hypothèse $t_{\max} < t^{loc}$ est absurde. Ceci prouve le deuxième point.

3. Il est clair, d'après l'expression explicite de x_u , que

$$\begin{cases} x_u(t^{loc}) = \epsilon \\ \forall t \in [0, t^{loc}[, 0 < x_u(t^{loc}) < \epsilon \end{cases}$$

de plus, les inégalités calculées précédemment prouvent que $x(t^{loc}) \in \Sigma_{p,\epsilon}^u$. D'où le troisième et dernier point. \square

Le corollaire qui suit explicite les contrôles que l'on a sur une orbite au moment de sa sortie de la boîte, c'est-à-dire au moment où elle traverse la section locale $\Sigma_{p,\epsilon}^u$.

Corollaire 4.15 (Contrôles à la sortie de la boîte). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{\bar{\alpha}}{4Cu_0^3M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{50Au_0^4}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$, pour toute orbite x ayant pour condition initiale $x(0) = x^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}$ avec $x_u^{in} \neq 0$, on note $x^{out} = x(t^{loc}) \in \Sigma_{p,\epsilon}^u$ et on a alors*

$$\|x_{s,ss}^{out}\| \leq 2x_u^{in} \left(\frac{x_u^{in}}{\epsilon}\right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1} \quad (4.31)$$

$$|x_c^{out} - x_c^{in}| \leq x_u^{in} C \epsilon u_0^3 M(u_0)^2 \left(1 - \left(\frac{x_u^{in}}{\epsilon}\right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0)}{\mu_u(u_0)}}\right) \quad (4.32)$$

Démonstration. On applique la proposition 4.13 avec $t = t^{loc}$ et on utilise les majorations

$$\|x_{s,ss}(0)\| \leq 2\epsilon$$

$$\chi(0) \leq 2x_u^{in} \epsilon$$

\square

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 4.14 dans le cas où $x_u^{in} = 0$. Dans ce cas, l'orbite reste dans la variété stable de \mathcal{K} et donc s'écrase asymptotiquement sur le cercle de Kasner.

Proposition 4.16 (Comportement des orbites de coordonnée x_u nulle). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{\bar{\alpha}}{4Cu_0^3M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{50Au_0^4}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$, pour toute orbite x ayant pour condition initiale $x(0) = x^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}$ avec $x_u^{in} = 0$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *l'orbite x est définie en tout temps positif et reste pour toujours dans le voisinage de p*

$$\begin{cases} x \in B(p, \eta_{u_0}) \\ |x_c - p_c| \leq \frac{\bar{\alpha}}{24Au_0^4} \\ \|x_{u,s,ss}\|_\infty \leq \frac{\bar{\alpha}}{Cu_0^3M(u_0)^2} \end{cases}$$

2. l'orbite x converge vers le point du cercle de Kasner qui a la même coordonnée x_c :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = (0, 0, 0, x_c^{in})$$

Démonstration. La preuve est très similaire à celle de la proposition 4.14, tout en étant plus facile. Au vu des équations (4.16), l'hypothèse $x_u^{in} = 0$ implique que x_u et x_c sont constantes. On montre ensuite que x est bornée en temps positif donc qu'elle doit être définie jusqu'en $+\infty$. On trouve les mêmes inégalités que dans la preuve de la proposition 4.14, ce qui assure qu'on peut appliquer la proposition 4.13 sur $[0, t]$ pour tout $t > 0$. Par décroissance exponentielle, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_{s,ss}(t)\| = 0$$

□

4.3.2 Définition de l'application de passage local

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires afin de définir l'application de passage local $\psi_{p,\epsilon}^{ss} : \Sigma_{p,\epsilon}^{ss} \rightarrow \Sigma_{p,\epsilon}^u$. Nous allons commettre un abus d'écriture. Les coordonnées fixées (x_{ss} dans $\Sigma_{p,\epsilon}^{ss}$ et x_u dans $\Sigma_{p,\epsilon}^u$) seront « oubliées » dans la définition de $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$. Ceci parce qu'on souhaite avoir deux points de vue :

Point de vue géométrique : $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ « va » d'une tranche tri-dimensionnelle $\Sigma_{p,\epsilon}^{ss}$ de l'espace des phases « dans » une autre tranche tri-dimensionnelle $\Sigma_{p,\epsilon}^u$, en suivant les orbites (voir la figure 9, page 48, qui représente schématiquement, en oubliant la coordonnée x_s et en trois dimensions, la géométrie de cette application).

Point de vue analytique : $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ est définie sur une partie de \mathbb{R}^3 , à valeurs dans une partie de \mathbb{R}^3 . Le point de vue géométrique est le point de vue naturel. Le point de vue analytique est le bon point de vue technique pour montrer l'hyperbolicité de l'application de retour dans la partie 5.3.

Définition 4.17 (de l'application de passage local $\psi_{p,\epsilon}^{ss} : \Sigma_{p,\epsilon}^{ss} \rightarrow \Sigma_{p,\epsilon}^u$). Soient C suffisamment grand, $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{\bar{\alpha}}{4Cu_0^3 M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{50Au_0^4}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$ et $x^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}^{ss}$. On distingue deux cas :

Cas $x_u^{in} \neq 0$: soit x l'orbite ayant pour condition initiale $x(0) = x^{in}$, on note $x^{out} = x(t^{loc})$ et on pose

$$\psi_{p,\epsilon}^{ss}(x_u^{in}, x_s^{in}, x_c^{in}) = (x_s^{out}, x_{ss}^{out}, x_c^{out})$$

Cas $x_u^{in} = 0$: on pose

$$\psi_{p,\epsilon}^{ss}(x_u^{in} = 0, x_s^{in}, x_c^{in}) = (0, 0, x_c^{in})$$

La proposition 4.14 prouve que l'on a bien défini une application

$$\psi_{p,\epsilon}^{ss} : \Sigma_{p,\epsilon}^{ss} \rightarrow \Sigma_{p,\epsilon}^u$$

Remarque 4.18. D'un point de vue géométrique, dans le cas $x_u^{in} = 0$, $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ renvoie l'intersection de l'orbite $\mathcal{O}_{\Pi}^u(0, 0, 0, x_c^{in})$ avec la tranche spatiale $\Sigma_{p,\epsilon}^u$. Il faut voir la ligne $x_u = 0$ comme une ligne singulière pour l'application $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$, d'ailleurs on aura toujours $x_u^{in} \neq 0$ pour les orbites de type VIII ou IX.

La proposition suivante montre que l'application de passage local est continue si ϵ est pris suffisamment petit.

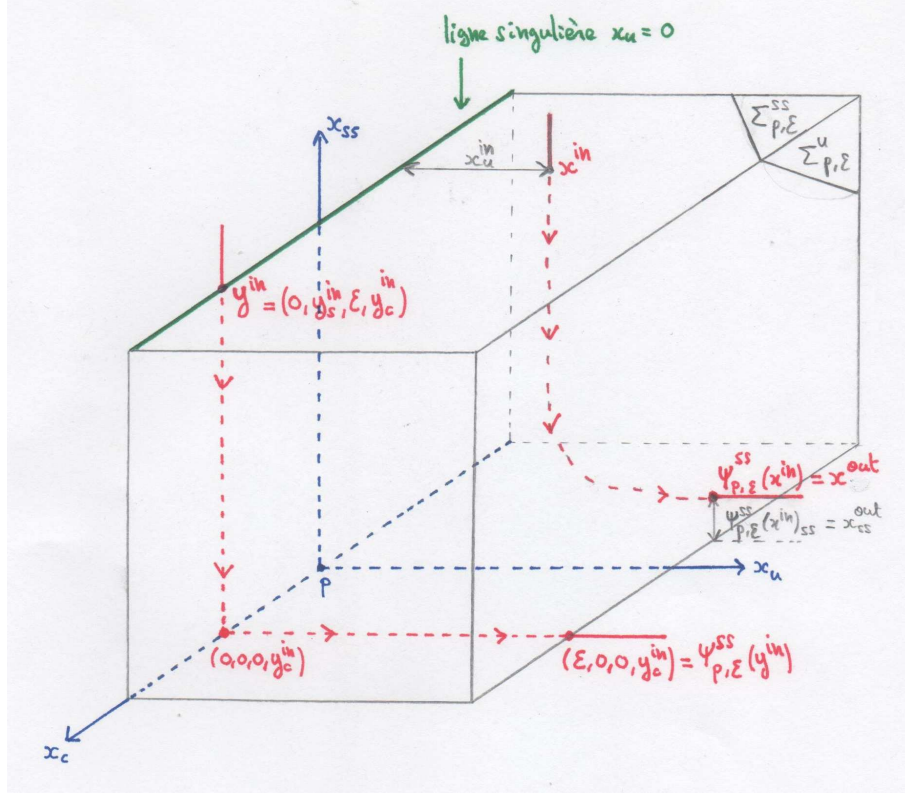


FIGURE 9 – L'application de passage local $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ « suit » les orbites

Proposition 4.19 (Continuité de l'application de passage local). *Soient C suffisamment grand, $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{1}{100Cu_0^4M(u_0)^2}, \frac{1}{100Au_0^5}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$. Alors $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ est continue.*

Démonstration. Le corollaire 4.15 montre que $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ est continue si ϵ est pris suffisamment petit. Plus précisément, on veut avoir

$$\lim_{x_u^{in} \rightarrow 0} \|x_{s,ss}^{out}\| = 0$$

et

$$\lim_{x_u^{in} \rightarrow 0} |x_c^{out} - x_c^{in}| = 0$$

Pour la deuxième limite, il suffit d'utiliser l'inégalité (4.32) du corollaire 4.15 sous la forme

$$|x_c^{out} - x_c^{in}| \leq x_u^{in} C \epsilon u_0^3 M(u_0)^2$$

qui est valable dans les conditions du corollaire 4.15 et donne la limite souhaitée.

Pour la première limite, l'inégalité (4.31) du corollaire 4.15 ne permet pas de conclure immédiatement. Il faut aussi choisir α suffisamment proche de 1. En effet, il faut que

$$\alpha \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1 > 0$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha > 1 - \frac{1}{1 + u_0}$$

ou encore

$$\bar{\alpha} < \frac{1}{1 + u_0}$$

Il est alors facile de voir que pour tout C suffisamment grand (indépendamment de u_0) et pour tout $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{1}{100Cu_0^4M(u_0)^2}, \frac{1}{100Au_0^5}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$, un tel choix de α est possible et cela prouve que l'application de passage local $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ est continue. \square

4.3.3 Comparaison de deux orbites entre deux sections locales au voisinage du cercle

Nous voulons maintenant comparer deux orbites traversant la boîte. En particulier, il nous intéresse de savoir à quelle distance elles sont l'une de l'autre (dans la direction stable et dans la direction centrale) au moment de leur sortie de la boîte (c'est-à-dire au moment où elles traversent la tranche $\Sigma_{p,\epsilon}^u$) et, ce, en fonction de leurs positions initiales.

On considère donc deux orbites x et \tilde{x} ayant pour conditions initiales respectives $x^{in}, \tilde{x}^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}$. Par symétrie des rôles, on peut supposer que $\tilde{x}_u^{in} \leq x_u^{in}$ (ceci revient à supposer que l'orbite \tilde{x} passera plus de temps dans la boîte que l'orbite x). Les propositions qui suivent ne s'intéressent qu'au cas où $\tilde{x}_u^{in} \neq 0$. En effet, le cas $\tilde{x}_u^{in} = 0$ est beaucoup plus simple. On n'en parlera qu'au corollaire 4.22, lorsqu'on démontrera que l'application $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ est lipschitzienne.

Insistons sur le fait que nous allons faire une comparaison géométrique des deux orbites et que cette étude est indépendante du choix des paramétrages de chacune des orbites. Cependant, un choix astucieux rendra les calculs plus simples. C'est pourquoi nous posons

$$\tilde{t}^{loc} = \frac{1}{\mu_u(u_0)} \ln \frac{x_u^{in}}{\tilde{x}_u^{in}} \quad (4.33)$$

et nous choisissons $-\tilde{t}^{loc}$ comme l'origine des temps pour \tilde{x} , c'est-à-dire

$$\tilde{x}^{in} = \tilde{x}(-\tilde{t}^{loc})$$

Ce choix implique que

$$\tilde{x}_u(0) = x_u^{in}$$

et pour tout temps $t \geq 0$, on a

$$\tilde{x}_u(t) = x_u(t)$$

En particulier, les deux orbites x et \tilde{x} traversent la tranche $\Sigma_{p,\epsilon}^u$ au même instant $t = \tilde{t}^{loc}$.

On a alors, avec ces conventions, la proposition suivante, qui contrôle l'évolution de \tilde{x} sur $[-\tilde{t}^{loc}, 0]$:

Proposition 4.20 (Contrôle de l'orbite \tilde{x} sur la première partie du trajet). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{\bar{\alpha}}{4Cu_0^3M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{50Au_0^4}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$, pour toutes orbites x, \tilde{x} ayant pour conditions initiales respectives $x(0) = x^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}$ et $\tilde{x}(-\tilde{t}^{loc}) = \tilde{x}^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}$ telles que $0 < \tilde{x}_u^{in} \leq x_u^{in}$, on a les contrôles*

$$\|\tilde{x}_{s,ss}(0) - \tilde{x}_{s,ss}^{in}\| \leq C\epsilon u_0 \frac{1}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| \quad (4.34)$$

$$|\tilde{x}_c(0) - \tilde{x}_c^{in}| \leq C\epsilon u_0^3 M(u_0)^2 \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| \quad (4.35)$$

Démonstration. Les deux inégalités se traitent séparément :

Coordonnée \tilde{x}_c :

D'après l'inégalité (4.29) de la proposition 4.13 appliquée à \tilde{x} sur $[-\tilde{t}^{loc}, 0]$, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_c(0) - \tilde{x}_c^{in}| &\leq 2\tilde{x}_u^{in} \epsilon C u_0^3 M(u_0)^2 (1 - e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))\tilde{t}^{loc}}) \\ &\leq 2\tilde{x}_u^{in} \epsilon C u_0^3 M(u_0)^2 \left(1 - \left(\frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}}\right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0)}{\mu_u(u_0)}}\right) \end{aligned}$$

De plus,

$$\alpha \frac{\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0)}{\mu_u(u_0)} = \frac{\alpha}{u_0} < 1$$

donc

$$\left(1 - \left(\frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}}\right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0)}{\mu_u(u_0)}}\right) \leq \left(1 - \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}}\right)$$

d'où

$$|\tilde{x}_c(0) - \tilde{x}_c^{in}| \leq 2\epsilon C u_0^3 M(u_0)^2 \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}|$$

Coordonnée $\tilde{x}_{s,ss}$:

On considère l'équation différentielle du premier ordre et de dimension 2 suivante :

$$y' = -\lambda_{s,ss}(\tilde{x}_c)y + h_{s,ss}(\tilde{x})\tilde{x}_{s,ss}$$

Il est clair que $\tilde{x}_{s,ss}$ en est une solution, la variation de la constante nous donne donc une expression implicite de $\tilde{x}_{s,ss}$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{s,ss}(0) - \tilde{x}_{s,ss}^{in} &= \begin{pmatrix} e^{\int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 -\lambda_s(\tilde{x}_c(s))ds} - 1 & 0 \\ 0 & e^{\int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 -\lambda_{ss}(\tilde{x}_c(s))ds} - 1 \end{pmatrix} \tilde{x}_{s,ss}^{in} \\ &\quad + \int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 \begin{pmatrix} e^{\int_s^0 -\lambda_s(\tilde{x}_c(\sigma))d\sigma} & 0 \\ 0 & e^{\int_s^0 -\lambda_{ss}(\tilde{x}_c(\sigma))d\sigma} \end{pmatrix} h_{s,ss}(\tilde{x}(s))\tilde{x}_{s,ss}(s)ds \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Majoration du terme A_1 :

Pour $i = s$ ou $i = ss$, on a, d'après la proposition 4.6 :

$$\begin{aligned} \left| e^{\int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 -\lambda_s(\tilde{x}_c(s))ds} - 1 \right| &= 1 - e^{\int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 -\lambda_s(\tilde{x}_c(s))ds} \\ &\leq 1 - e^{-\frac{\mu_{ss}(u_0)}{\alpha} \tilde{t}^{loc}} \\ &= 1 - \left(\frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} \right)^{\frac{\mu_{ss}(u_0)}{\alpha \mu_u(u_0)}} \end{aligned}$$

D'où

$$\|A_1\|_\infty \leq 2\epsilon \left(1 - \left(\frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} \right)^{\frac{\mu_{ss}(u_0)}{\alpha \mu_u(u_0)}} \right)$$

où $\|A_1\|_\infty$ désigne la norme infinie du vecteur A_1 .

De plus, pour tout $0 < x < 1$ et tout $v > 0$, on a l'inégalité suivante :

$$1 - x^v \leq \max(1, v)(1 - x)$$

qui, appliquée à $x = \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}}$ et $v = \frac{\mu_{ss}(u_0)}{\alpha \mu_u(u_0)} = \frac{1+u_0}{\alpha} \geq 1$, donne :

$$\begin{aligned} \|A_1\|_\infty &\leq 2\epsilon \frac{1+u_0}{\alpha} \left(1 - \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} \right) \\ &\leq 6\epsilon u_0 \left(1 - \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|A_1\|_\infty \leq 6\epsilon u_0 \frac{1}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| \quad (4.36)$$

Majoration du terme A_2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} \int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 \left(e^{\int_s^0 -\lambda_s(\tilde{x}_c(\sigma))d\sigma} \right) (h_{s1}(\tilde{x}(s))\tilde{x}_s(s) + h_{s2}(\tilde{x}(s))\tilde{x}_{ss}(s))ds \\ \int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 \left(e^{\int_s^0 -\lambda_{ss}(\tilde{x}_c(\sigma))d\sigma} \right) (h_{ss1}(\tilde{x}(s))\tilde{x}_s(s) + h_{ss2}(\tilde{x}(s))\tilde{x}_{ss}(s))ds \end{pmatrix}$$

et, pour $i = s$ ou $i = ss$, on a

$$e^{\int_s^0 -\lambda_i(\tilde{x}_c(\sigma))d\sigma} \leq e^{\alpha \mu_s(u_0)s}$$

donc, en majorant brutalement $|\tilde{x}_s(s)|$, $|\tilde{x}_{ss}(s)|$ et $\|\tilde{x}(s)\|_{\infty, u, s, ss}$ par 2ϵ , on obtient

$$\begin{aligned}
\|A_2\|_\infty &\leq \int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 e^{\alpha\mu_s(u_0)s} (Cu_0\|\tilde{x}(s)\|_{\infty, u, s, ss}|\tilde{x}_s(s)| + Cu_0\|\tilde{x}(s)\|_{\infty, u, s, ss}|\tilde{x}_{ss}(s)|)ds \\
&\leq 8\epsilon^2 Cu_0 \int_{-\tilde{t}^{loc}}^0 e^{\alpha\mu_s(u_0)s} ds \\
&\leq 8\epsilon^2 Cu_0 \int_0^{\tilde{t}^{loc}} e^{-\alpha\mu_s(u_0)\sigma} d\sigma \\
&\leq 8\epsilon^2 Cu_0 \frac{1 - e^{-\alpha\mu_s(u_0)\tilde{t}^{loc}}}{\alpha\mu_s(u_0)} \\
&\leq \frac{8\epsilon^2 Cu_0}{\alpha\mu_s(u_0)} \left(1 - \left(\frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}}\right)^{\frac{\alpha\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)}}\right)
\end{aligned}$$

On applique encore une fois l'inégalité

$$1 - x^v \leq \max(1, v)(1 - x)$$

avec $x = \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}}$ et $v = \frac{\alpha\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} = \alpha \frac{1+u_0}{u_0} > \frac{4}{3} \geq 1$, ce qui donne, pour tout C assez grand

$$\|A_2\|_\infty \leq C\epsilon^2 u_0^2 \frac{1}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}|$$

pour terminer, on remarque que $\epsilon u_0 \leq 1$ donc

$$\|A_2\|_\infty \leq C\epsilon u_0 \frac{1}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| \quad (4.37)$$

La synthèse de ces deux majorations donne

$$\|\tilde{x}_{s,ss}(0) - \tilde{x}_{s,ss}^{in}\| \leq 2(C+6)\epsilon u_0 \frac{1}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}|$$

d'où les majorations annoncées, pour tout C assez grand. \square

Nous allons maintenant prouver le gros résultat de cette partie. La proposition suivante donne un contrôle de type Lipschitz sur la distance entre deux orbites au moment où elles traversent la section locale $\Sigma_{p,\epsilon}^u$, c'est-à-dire au moment où elles sortent de la boîte. On montre essentiellement que cette distance est contrôlée par la distance initiale, c'est-à-dire la distance entre les deux orbites au moment où elles traversent la section locale d'entrée $\Sigma_{p,\epsilon}$.

Proposition 4.21 (Comparaison de deux orbites à leur sortie de la boîte). *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in [\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{\bar{\alpha}}{100Cu_0^4 M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{100Au_0^5}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$, pour toutes orbites x, \tilde{x} ayant pour conditions initiales respectives $x(0) = x^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}$ et $\tilde{x}(-\tilde{t}^{loc}) = \tilde{x}^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}$ telles que $0 < \tilde{x}_u^{in} \leq x_u^{in}$, on a les contrôles*

$$\|x_{s,ss}^{out} - \tilde{x}_{s,ss}^{out}\| \leq Cu_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u^{in}}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \quad (4.38)$$

$$|(\tilde{x}_c^{out} - x_c^{out}) - (\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in})| \leq C\epsilon u_0^4 M(u_0)^2 \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \quad (4.39)$$

où

$$\beta(u_0, \alpha) = \alpha \left(\frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1 \right) > 0$$

La preuve qui suit est assez longue et très technique, on pourra la sauter en première lecture.

Démonstration. On peut supposer que $\|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \neq 0$.

Étape 1 : introduction des notations.

On pose

$$\begin{aligned} d_c(t) &= \int_0^t |\tilde{x}'_c(s) - x'_c(s)| ds \\ d_s(t) &= \|\tilde{x}_{s,ss}(t) - x_{s,ss}(t)\| \\ \alpha_1 &= \frac{(1 - \alpha)\mu_u(u_0) + \alpha\mu_s(u_0)}{\mu_s(u_0)} \\ \alpha'_1 &= \frac{1 + \alpha_1}{2} \\ \alpha''_1 &= \frac{(1 - \alpha'_1)\mu_u(u_0) + \alpha'_1\mu_s(u_0)}{\mu_s(u_0)} \\ \epsilon_1 &= \min \left(\frac{1 - \alpha_1}{50Cu_0^3M(u_0)^2}, \frac{1 - \alpha_1}{50Au_0^4} \right) \end{aligned}$$

et il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \beta(u_0, \alpha) &= \alpha_1 \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1 \\ \min \left(\frac{\bar{\alpha}}{100Cu_0^4M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{100Au_0^5} \right) &\leq \epsilon_1 \\ \alpha_1 &< \alpha'_1 < \alpha''_1 \end{aligned}$$

Étape 2 : idée de la preuve.

On souhaite majorer $d_c(t^{loc})$ et $d_s(t^{loc})$. L'idée est de contrôler ce qui se passe en deux étapes, d'abord entre $t = -t^{loc}$ et $t = 0$ puis entre $t = 0$ et $t = t^{loc}$. On majorera d'abord les dérivées puis on intégrera les inégalités ainsi obtenues. On aura également recours au lemme de Gronwall.

Étape 3 : majoration de $d_s(0)$.

$$\begin{aligned} d_s(0) &= \|\tilde{x}_{s,ss}(0) - x_{s,ss}(0)\| \\ &= \|\tilde{x}_{s,ss}(0) - x_{s,ss}^{in}\| \\ &\leq \|\tilde{x}_{s,ss}(0) - \tilde{x}_{s,ss}^{in}\| + \|\tilde{x}_{s,ss}^{in} - x_{s,ss}^{in}\| \\ &\leq C\epsilon u_0 \frac{1}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| + \|\tilde{x}_{s,ss}^{in} - x_{s,ss}^{in}\| \\ &\leq C\epsilon u_0 \frac{1}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| + \|\tilde{x}_{s,ss}^{in} - x_{s,ss}^{in}\| + |\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in}| \\ &\leq \epsilon \frac{1}{x_u^{in}} (Cu_0 |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| + \frac{x_u^{in}}{\epsilon} \|\tilde{x}_{s,ss}^{in} - x_{s,ss}^{in}\| + \frac{x_u^{in}}{\epsilon} |\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in}|) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la troisième ligne l'inégalité (4.34) de la proposition 4.20. Pour tout C assez grand et pour tout $u_0 > 1$, on a $\frac{x_u^{in}}{\epsilon} \leq 1 \leq Cu_0$, ce qui permet de conclure que :

$$d_s(0) \leq C\epsilon u_0 \frac{1}{x_u^{in}} \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \quad (4.40)$$

Étape 4 : majoration de $|\tilde{x}_c(t) - x_c(t)|$ pour $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_c(t) - x_c(t)| &\leq d_c(t) + |\tilde{x}_c(0) - x_c(0)| \\ &\leq d_c(t) + |\tilde{x}_c(0) - \tilde{x}_c^{in}| + |\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in}| \\ &\leq d_c(t) + C\epsilon u_0^3 M(u_0)^2 \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| + |\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in}| \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la dernière ligne l'inégalité (4.35) de la proposition 4.20. De plus, $C\epsilon u_0^3 M(u_0)^2 \leq 1$ et $\frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} \leq 1$ donc

$$|\tilde{x}_c(t) - x_c(t)| \leq d_c(t) + \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \quad (4.41)$$

Étape 5 : première majoration de $d_s(t)$ pour $t \geq 0$.

Par définition, on a

$$d'_s = \frac{\tilde{x}_s - x_s}{|\tilde{x}_s - x_s|} (\tilde{x}'_s - x'_s) + \frac{\tilde{x}_{ss} - x_{ss}}{|\tilde{x}_{ss} - x_{ss}|} (\tilde{x}'_{ss} - x'_{ss})$$

il est alors facile de voir, en utilisant les équations (4.16), que

$$\begin{aligned} d'_s &= -\lambda_s(u(\tilde{x}_c)) |\tilde{x}_s - x_s| + \frac{\tilde{x}_s - x_s}{|\tilde{x}_s - x_s|} [(\lambda_s(u(x_c)) - \lambda_s(u(\tilde{x}_c))) x_s \\ &\quad + h_{s1}(\tilde{x})(\tilde{x}_s - x_s) + (h_{s1}(\tilde{x}) - h_{s1}(x)) x_s + h_{s2}(\tilde{x})(\tilde{x}_{ss} - x_{ss}) + (h_{s2}(\tilde{x}) - h_{s2}(x)) x_{ss}] \\ &\quad - \lambda_{ss}(u(\tilde{x}_c)) |\tilde{x}_{ss} - x_{ss}| + \frac{\tilde{x}_{ss} - x_{ss}}{|\tilde{x}_{ss} - x_{ss}|} [(\lambda_{ss}(u(x_c)) - \lambda_{ss}(u(\tilde{x}_c))) x_{ss} \\ &\quad + h_{ss1}(\tilde{x})(\tilde{x}_s - x_s) + (h_{ss1}(\tilde{x}) - h_{ss1}(x)) x_s + h_{ss2}(\tilde{x})(\tilde{x}_{ss} - x_{ss}) + (h_{ss2}(\tilde{x}) - h_{ss2}(x)) x_{ss}] \end{aligned} \quad (4.42)$$

Afin de majorer d'_s , nous allons nous occuper séparément des différents termes intervenant dans l'expression (4.42).

1. Par définition :

$$\lambda_s(z) = \mu_u(u_0) \frac{\mu_s(z)}{\mu_u(z)} = \mu_u(u_0) \frac{1+z}{z}$$

d'où, pour tout C assez grand,

$$\|\lambda'_s\|_\infty \leq \mu_u(u_0) \leq \frac{C}{u_0}$$

et d'après le théorème des accroissements finis :

$$|\lambda_s(z) - \lambda_s(z')| \leq \frac{C}{u_0} |x_c - \tilde{x}_c|$$

d'où

$$|\lambda_s(u(x_c)) - \lambda_s(u(\tilde{x}_c))| \leq CAu_0 |x_c - \tilde{x}_c|$$

2. Par définition :

$$\lambda_{ss}(z) = \mu_u(u_0) \frac{\mu_{ss}(z)}{\mu_u(z)} = \mu_u(u_0)(1+z)$$

d'où, pour tout C assez grand,

$$\|\lambda'_{ss}\|_\infty \leq \mu_u(u_0) \leq \frac{C}{u_0}$$

et d'après le théorème des accroissements finis :

$$|\lambda_{ss}(z) - \lambda_{ss}(z')| \leq \frac{C}{u_0} |x_c - \tilde{x}_c|$$

d'où

$$|\lambda_{ss}(u(x_c)) - \lambda_{ss}(u(\tilde{x}_c))| \leq CAu_0 |x_c - \tilde{x}_c|$$

3. Les termes faisant intervenir les fonctions h_{s1}, h_{s2}, \dots sont contrôlés par la proposition 4.9.

On en déduit que

$$\begin{aligned} d'_s &\leq -\lambda_s(\tilde{x}_c) |\tilde{x}_s - x_s| + \frac{C}{u_0} |x_c - \tilde{x}_c| |x_s| + Cu_0 \|\tilde{x}_{u,s,ss}\|_\infty |\tilde{x}_s - x_s| + Cu_0 \|\tilde{x} - x\| |x_s| \\ &\quad + Cu_0 \|\tilde{x}_{u,s,ss}\|_\infty |\tilde{x}_{ss} - x_{ss}| + Cu_0 \|\tilde{x} - x\| |x_{ss}| \\ &\quad - \lambda_{ss}(\tilde{x}_c) |\tilde{x}_{ss} - x_{ss}| + \frac{C}{u_0} |x_c - \tilde{x}_c| |x_{ss}| + Cu_0 \|\tilde{x}_{u,s,ss}\|_\infty |\tilde{x}_s - x_s| + Cu_0 \|\tilde{x} - x\| |x_s| \\ &\quad + Cu_0 \|\tilde{x}_{u,s,ss}\|_\infty |\tilde{x}_{ss} - x_{ss}| + Cu_0 \|\tilde{x} - x\| |x_{ss}| \end{aligned}$$

Par hypothèse, $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{1-\alpha_1}{4Cu_0^3 M(u_0)^2}, \frac{1-\alpha_1}{50Au_0^4}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$, donc d'après la proposition 4.14 on a

$$|\tilde{x}_c(t) - u_0| \leq \frac{1-\alpha_1}{24Au_0^4}$$

On utilise alors les inégalités (4.18) de la proposition 4.7 avec α_1 pour obtenir la majoration

$$\begin{aligned} d'_s &\leq -\alpha'_1 \mu_s(u_0) \|\tilde{x}_{s,ss} - x_{s,ss}\| + CAu_0 |x_c - \tilde{x}_c| \|x_{s,ss}\| \\ &\quad + 2Cu_0 M(u_0)^2 \|\tilde{x}_{u,s,ss}\|_\infty \|\tilde{x}_{s,ss} - x_{s,ss}\| + 2Cu_0 M(u_0)^2 \|\tilde{x} - x\| \|x_{s,ss}\| \end{aligned}$$

Entre $t = 0$ et $t = t^{loc}$, on a $x_u = \tilde{x}_u$, donc

$$\|\tilde{x} - x\| = \|\tilde{x}_{s,ss} - x_{s,ss}\| + |\tilde{x}_c - x_c|$$

et, après simplifications (on utilise le fait que $A \leq M(u_0)^2$), on obtient l'inéquation différentielle :

$$d'_s \leq -\alpha'_1 \mu_s(u_0) d_s + 8C\epsilon u_0 M(u_0)^2 d_s + 3Cu_0 M(u_0)^2 |\tilde{x}_c - x_c| \|x_{s,ss}\|$$

Par hypothèse, $\epsilon \leq \frac{1-\alpha_1}{50Cu_0^3 M(u_0)^2}$ et il n'est pas difficile de voir que cela implique

$$\epsilon \leq \frac{(\alpha'_1 - \alpha_1) \mu_s(u_0)}{8Cu_0 M(u_0)^2}$$

i.e.

$$-\alpha'_1 \mu_s(u_0) + 8C\epsilon u_0 M(u_0)^2 \leq -\alpha_1 \mu_s(u_0)$$

d'où

$$d'_s \leq -\alpha_1 \mu_s(u_0) d_s + 3Cu_0 M(u_0)^2 |\tilde{x}_c - x_c| \|x_{s,ss}\| \quad (4.43)$$

D'après les propositions 4.14 et 4.13 appliquées avec α_1 , on obtient le contrôle suivant sur $\|x_{s,ss}\|$:

$$\|x_{s,ss}\| \leq e^{-\alpha_1 \mu_s(u_0)t} \|x_{s,ss}(0)\| \quad (4.44)$$

Injectons maintenant les majorations (4.41) et (4.44) dans l'inégalité (4.43), on obtient

$$d'_s(t) \leq -\alpha_1 \mu_s(u_0) d_s(t) + 6C\epsilon u_0 M(u_0)^2 e^{-\alpha_1 \mu_s(u_0)t} (d_c(t) + \|\tilde{x}^{in} - x^{in}\|)$$

ce qui peut se réécrire sous la forme

$$e^{\alpha_1 \mu_s(u_0)t} d'_s(t) + \alpha_1 \mu_s(u_0) e^{\alpha_1 \mu_s(u_0)t} d_s(t) \leq 6C\epsilon u_0 M(u_0)^2 (d_c(t) + \|\tilde{x}^{in} - x^{in}\|)$$

On reconnait la dérivée de $e^{\alpha_1 \mu_s(u_0)t} d_s(t)$. En intégrant entre 0 et t , on trouve :

$$d_s(t) \leq e^{-\alpha_1 \mu_s(u_0)t} d_s(0) + 6C\epsilon u_0 M(u_0)^2 e^{-\alpha_1 \mu_s(u_0)t} \left(\int_0^t d_c(s) ds + t \|\tilde{x}^{in} - x^{in}\| \right) \quad (4.45)$$

Étape 6 : majoration de $d'_c(t)$, pour $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} d'_c &= |\tilde{x}'_c - x'_c| \\ &= |\tilde{x}_u h_c(\tilde{x}) \tilde{x}_{s,ss} - x_u h_c(x) x_{s,ss}| \\ &= |x_u| |h_c(\tilde{x}) \tilde{x}_{s,ss} - h_c(x) x_{s,ss}| \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la dernière ligne que $x_u = \tilde{x}_u$ pour $t \geq 0$. Ainsi, d'après la proposition 4.9,

$$\begin{aligned} d'_c &= |x_u| |h_c(\tilde{x})(\tilde{x}_{s,ss} - x_{s,ss}) + (h_c(\tilde{x}) - h_c(x))x_{s,ss}| \\ &\leq |x_u| (Cu_0 M(u_0)^2 \|\tilde{x}_{s,ss} - x_{s,ss}\| + Cu_0^2 M(u_0)^2 \|\tilde{x} - x\| \|x_{s,ss}\|) \\ &\leq Cu_0 M(u_0)^2 |x_u| (\|\tilde{x}_{s,ss} - x_{s,ss}\| + u_0 \|\tilde{x}_{s,ss} - x_{s,ss}\| \|x_{s,ss}\| + u_0 |\tilde{x}_c - x_c| \|x_{s,ss}\|) \end{aligned}$$

Or $\|x_{s,ss}\| \leq 2\epsilon$ donc $u_0 \|x_{s,ss}\| \leq 1$ et

$$d'_c \leq Cu_0 M(u_0)^2 |x_u| (2d_s + u_0 |\tilde{x}_c - x_c| \|x_{s,ss}\|)$$

et, d'après l'expression de x_u donnée par (4.27), il vient

$$d'_c(t) \leq C u_0 M(u_0)^2 e^{\mu_u(u_0)t} |x_u^{in}| (2d_s(t) + u_0 |\tilde{x}_c - x_c| \|x_{s,ss}\|) \quad (4.46)$$

Injectons maintenant les majorations (4.41) et (4.44) dans l'inégalité (4.46), on obtient

$$\begin{aligned} d'_c(t) &\leq 2C u_0 M(u_0)^2 e^{\mu_u(u_0)t} |x_u^{in}| d_s(t) \\ &\quad + 2C \epsilon u_0^2 M(u_0)^2 e^{(\mu_u(u_0) - \alpha_1 \mu_s(u_0))t} |x_u^{in}| (d_c(t) + \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|) \end{aligned} \quad (4.47)$$

puis on injecte la majoration (4.45) dans l'inégalité (4.47) :

$$\begin{aligned} d'_c(t) &\leq 2C u_0 M(u_0)^2 e^{(\mu_u(u_0) - \alpha_1 \mu_s(u_0))t} |x_u^{in}| (d_s(0) + \epsilon u_0 d_c(t)) \\ &\quad + 2C u_0 M(u_0)^2 e^{(\mu_u(u_0) - \alpha_1 \mu_s(u_0))t} |x_u^{in}| 6C \epsilon u_0 M(u_0)^2 \int_0^t d_c(s) ds \\ &\quad + 2C u_0 M(u_0)^2 e^{(\mu_u(u_0) - \alpha_1 \mu_s(u_0))t} |x_u^{in}| 6C \epsilon u_0 M(u_0)^2 t \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \\ &\quad + 2C u_0 M(u_0)^2 e^{(\mu_u(u_0) - \alpha_1 \mu_s(u_0))t} |x_u^{in}| \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \end{aligned}$$

On suppose que pour tout $s \in [0, t^{loc}]$, on a

$$d_c(s) \leq \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|$$

et on vérifiera à la fin que cette hypothèse se trouve être vérifiée (encore la technique des majorations a priori). On a donc

$$\begin{aligned} d'_c(t) &\leq 2C \epsilon u_0^2 M(u_0)^2 e^{(\mu_u(u_0) - \alpha_1 \mu_s(u_0))t} |x_u^{in}| d_c(t) \\ &\quad + 2C u_0 M(u_0)^2 e^{(\mu_u(u_0) - \alpha_1 \mu_s(u_0))t} |x_u^{in}| (d_s(0) + \epsilon u_0 (1 + 12CtM(u_0)^2) \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|) \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que

$$\mu_u(u_0) - \alpha_1 \mu_s(u_0) = -\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))$$

on obtient

$$\begin{aligned} d'_c(t) &\leq 2C \epsilon u_0^2 M(u_0)^2 e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t} |x_u^{in}| d_c(t) \\ &\quad + 2C u_0 M(u_0)^2 e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t} |x_u^{in}| (d_s(0) + \epsilon u_0 (1 + 12CtM(u_0)^2) \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Etape 7 : première majoration de $d_c(t)$ pour $t \geq 0$.

On intègre l'inégalité (4.48) entre 0 et t et on utilise le fait que $d_c(0) = 0$:

$$d_c(t) \leq \gamma_1(t) + \int_0^t \gamma_2(s) d_c(s) ds$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= 2C u_0 M(u_0)^2 |x_u^{in}| (d_s(0) + \epsilon u_0 \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|) \int_0^t e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))\sigma} d\sigma \\ &\quad + 24C^2 \epsilon u_0^2 M(u_0)^4 |x_u^{in}| \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \int_0^t \sigma e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))\sigma} d\sigma \end{aligned}$$

et

$$\gamma_2(t) = 2C\epsilon u_0^2 M(u_0)^2 |x_u^{in}| e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t}$$

D'après le lemme de Gronwall :

$$d_c(t) \leq \gamma_1(t) + \int_0^t \gamma_1(s) \gamma_2(s) e^{\int_s^t \gamma_2(\sigma) d\sigma} ds \quad (4.49)$$

Etape 8 : contrôles de γ_1 et γ_2 .

En majorant $|x_u^{in}|$ par ϵ , on obtient

$$\gamma_2(t) \leq 2C\epsilon^2 u_0^2 M(u_0)^2 e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t} \quad (4.50)$$

donc, pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned} \int_s^t \gamma_2(\sigma) d\sigma &\leq \frac{2C\epsilon^2 u_0^2 M(u_0)^2}{\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))} \left(e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))s} - e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))t} \right) \\ &\leq \frac{2C\epsilon^2 u_0^2 M(u_0)^2}{\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))} \end{aligned}$$

de plus, pour tout C assez grand, on a

$$\frac{1}{\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0)} \leq C u_0^2$$

d'où, en majorant α^{-1} par $3/2$:

$$\int_s^t \gamma_2(\sigma) d\sigma \leq 3C^2 \epsilon^2 u_0^4 M(u_0)^2 \quad (4.51)$$

D'autre part

$$\int_0^t e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))\sigma} d\sigma \leq \frac{1}{\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))} \leq \frac{3}{2} C u_0^2$$

et

$$\int_0^t \sigma e^{-\alpha(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))\sigma} d\sigma \leq \frac{1}{\alpha^2(\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0))^2} \leq \frac{9}{4} C^2 u_0^4$$

d'où

$$\gamma_1(t) \leq 3C^2 u_0^3 M(u_0)^2 |x_u^{in}| (d_s(0) + \epsilon u_0 \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|) + 54C^4 \epsilon u_0^6 M(u_0)^4 |x_u^{in}| \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \quad (4.52)$$

On injecte la majoration (4.40) dans l'inégalité (4.52) :

$$\gamma_1(t) \leq C^2 \epsilon u_0^4 M(u_0)^2 (3C + 3|x_u^{in}| + 54C^2 u_0^2 M(u_0)^2 |x_u^{in}|) \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|$$

Or $x_u^{in} \leq C$ et $x_u^{in} \leq \epsilon \leq \frac{1}{100C u_0^3 M(u_0)^2} \leq \frac{1}{C u_0^2 M(u_0)^2}$ donc

$$\gamma_1(t) \leq 60C^3 \epsilon u_0^4 \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \quad (4.53)$$

Étape 9 : majoration de d_c et preuve de l'inégalité (4.39).

On injecte les estimées (4.50), (4.51) et (4.53) dans l'inégalité (4.49), ce qui donne

$$d_c(t) \leq \epsilon u_0^4 M(u_0)^2 \left(60C^3 + 180C^5 \epsilon^2 u_0^4 M(u_0)^2 e^{3C^2 \epsilon^2 u_0^4 M(u_0)^2} \right) \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|$$

Or, $\epsilon^2 u_0^4 M(u_0)^2 \leq 1$, donc

$$d_c(t) \leq \epsilon u_0^4 M(u_0)^2 \left(60C^3 + 180C^5 e^{3C^2} \right) \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \quad (4.54)$$

La majoration (4.54), couplée au fait que $d_c(0) = 0$ et à l'inégalité $0 < \epsilon \leq \frac{\bar{\alpha}}{100C u_0^4 M(u_0)^2}$ (attention ce n'est pas le même C), démontre que l'hypothèse

$$\forall s \in [0, t^{loc}], d_c(s) \leq \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|$$

que l'on a faites au cours de cette preuve était justifiée pour tout C assez grand (raisonnement par l'absurde classique). L'inégalité triangulaire, la majoration (4.54) et la majoration (4.35) de la proposition 4.20 permettent de conclure que :

$$\begin{aligned} |(\tilde{x}_c^{out} - x_c^{out}) - (\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in})| &= |(\tilde{x}_c(t^{loc}) - x_c(t^{loc})) - (\tilde{x}_c(0) - x_c(0)) + (\tilde{x}_c(0) - \tilde{x}_c^{in})| \\ &\leq d_c(t^{loc}) + |\tilde{x}_c(0) - \tilde{x}_c^{in}| \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |(\tilde{x}_c^{out} - x_c^{out}) - (\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in})| &\leq \epsilon u_0^4 M(u_0)^2 \left(60C^3 + 180C^5 e^{3C^2} \right) \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \\ &\quad + C \epsilon u_0^3 M(u_0)^2 \frac{\tilde{x}_u^{in}}{x_u^{in}} |x_u^{in} - \tilde{x}_u^{in}| \end{aligned}$$

et enfin

$$|(\tilde{x}_c^{out} - x_c^{out}) - (\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in})| \leq \epsilon u_0^4 M(u_0)^2 \left(C + 60C^3 + 180C^5 e^{3C^2} \right) \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|$$

On a alors, pour tout C assez grand,

$$|(\tilde{x}_c^{out} - x_c^{out}) - (\tilde{x}_c^{in} - x_c^{in})| \leq C \epsilon u_0^4 M(u_0)^2 \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|$$

Étape 10 : majoration de d_s et preuve de l'inégalité (4.38).

$$\forall s \in [0, t^{loc}], d_c(s) \leq \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|$$

On peut donc améliorer l'inégalité (4.45) et obtenir

$$d_s(t) \leq e^{-\alpha_1 \mu_s(u_0)t} d_s(0) + 12C \epsilon u_0 M(u_0)^2 t e^{-\alpha_1 \mu_s(u_0)t} \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \quad (4.55)$$

On injecte maintenant la majoration (4.40) dans l'inégalité (4.55) :

$$\begin{aligned} d_s(t) &\leq C \epsilon u_0 e^{-\alpha_1 \mu_s(u_0)t} \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \left(\frac{1}{x_u^{in}} + 12t M(u_0)^2 \right) \\ &\leq C \epsilon u_0 M(u_0)^2 e^{-\alpha_1 \mu_s(u_0)t} \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \left(\frac{1}{x_u^{in}} + 12t \right) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la deuxième ligne que $1 \leq M(u_0)$. Il reste à évaluer cette inégalité en $t = t^{loc}$:

$$\begin{aligned} \|x_{s,ss}^{out} - \tilde{x}_{s,ss}^{out}\| &\leq C\epsilon u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u^{in}}{\epsilon}\right)^{\alpha_1 \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)}} \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \left(\frac{1}{x_u^{in}} + 12 \frac{1}{\mu_u(u_0)} \ln \frac{\epsilon}{x_u^{in}}\right) \\ &\leq C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u^{in}}{\epsilon}\right)^{\alpha_1 \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1} \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\| \left(1 - \frac{12\epsilon}{\mu_u(u_0)} \frac{x_u^{in}}{\epsilon} \ln \frac{x_u^{in}}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

or, $z \mapsto z \ln z$ est bornée sur $[0, 1]$ et $\frac{12\epsilon}{\mu_u(u_0)} \leq 1$ pour tout C assez grand. On en déduit que, pour tout C assez grand,

$$\|x_{s,ss}^{out} - \tilde{x}_{s,ss}^{out}\| \leq C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u^{in}}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} \|x^{in} - \tilde{x}^{in}\|$$

□

Corollaire 4.22. *Pour tout C assez grand, pour tout $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, pour tout $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, pour tout $0 < \epsilon \leq \min\left(\frac{\bar{\alpha}}{100C u_0^2 M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{100A u_0^5}, \frac{\eta_{u_0}}{4}\right)$, l'application $\psi_{p,\epsilon}^{ss}$ est lipschitzienne.*

Démonstration. On applique la proposition 4.21 pour le cas $0 < \tilde{x}_u^{in} \leq x_u^{in}$. On applique le corollaire 4.15 pour le cas $0 = \tilde{x}_u^{in} < x_u^{in}$. Le cas $0 = \tilde{x}_u^{in} = x_u^{in}$ est quand à lui évident. □

5 Etude globale des orbites de type VIII et IX

Dans cette partie, nous allons définir une application de retour des orbites sur une section locale Σ (qui est essentiellement une réunion finie de sections $\Sigma_{p,\epsilon}$ de la partie 4) puis nous montrerons que cette application est hyperbolique. On en déduira l'existence de variétés stables pour cette application et ceci nous permettra de prouver le théorème principal du mémoire.

Avant de faire cela, essayons d'expliquer en quoi les résultats de la partie 4 sont liés aux orbites de type II et aux chaînes hétéroclines. Nous avons déjà vu qu'en tout point $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ de paramètre de Kasner $u_0 \in [1, +\infty[$, il existe exactement² une (resp. deux) orbite de type II qui part de p (resp. arrivent en p). Avec le choix de coordonnées locales que l'on a fait, ces orbites sont assez simples à décrire. En effet, les coordonnées redressent les directions principales du champ X et les orbites de type II suivent ces directions principales.

- L'orbite qui part de p (en suivant la direction $\frac{\partial}{\partial x_u}$) a pour équation locale

$$x_s = x_{ss} = 0, \quad x_c = p_c$$

Elle est notée $\mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$.

- L'orbite qui arrive en p par la direction $\frac{\partial}{\partial x_s}$ a pour équation

$$x_u = x_{ss} = 0, \quad x_c = p$$

Elle est notée $\mathcal{O}_{\Pi}^s(p)$.

- L'orbite qui arrive en p par la direction $\frac{\partial}{\partial x_{ss}}$ a pour équation

$$x_u = x_s = 0, \quad x_c = p$$

Elle est notée $\mathcal{O}_{\Pi}^{ss}(p)$.

Considérons une orbite x de type VIII ou IX qui arrive à proximité du point p en « suivant » l'orbite $\mathcal{O}_{\Pi}^{ss}(p)$. Typiquement, cela revient à considérer une condition initiale $x^{in} \in \Sigma_{p,\epsilon}^{ss}$ avec ϵ suffisamment petit. En effet, x^{in} est alors proche du point $(x_u = 0, x_s = 0, x_{ss} = \epsilon, x_c = p_c)$, qui n'est rien d'autre que l'intersection de $\mathcal{O}_{\Pi}^{ss}(p)$ avec $\Sigma_{p,\epsilon}^{ss}$. D'après le corollaire 4.15, à la sortie de la boîte l'orbite x vérifie les contrôles suivants :

$$\begin{aligned} x_u &= \epsilon \\ \|x_{s,ss}^{out}\| &\leq 2x_u^{in} \left(\frac{x_u^{in}}{\epsilon} \right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1} \\ |x_c^{out} - p_c| &\leq x_u^{in} C \epsilon u_0^3 \left(1 - \left(\frac{x_u^{in}}{\epsilon} \right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0) - \mu_u(u_0)}{\mu_u(u_0)}} \right) + |x_c^{in} - p_c| \end{aligned}$$

où α est arbitrairement proche de 1, quitte à prendre ϵ suffisamment petit.

Ceci nous dit essentiellement que plus x_u^{in} est « petit », plus l'orbite x ressort proche de l'orbite $\mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$ au niveau de $\Sigma_{p,\epsilon}^u$. On peut donc espérer que x « colle » à $\mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$ jusqu'à arriver proche du point $f(p)$. Si x reste suffisamment proche de $\mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$ tout au long du trajet, alors elle rentrera dans la boîte (au voisinage de $f(p)$) avec une condition initiale x_u^{in} petite et elle ressortira de la boîte en

2. Rappelons qu'on a identifié les deux orbites de type II symétriques l'une de l'autre.

étant proche de l'orbite $\mathcal{O}_{\Pi}^u(f(p))$. On voit apparaître un processus « récursif ». Toute la question est de savoir si on peut choisir la condition initiale x^{in} de telle sorte que l'orbite x se rapproche de plus en plus (ou au moins ne s'éloigne pas) de la chaîne hétérocline qu'elle suivait initialement, de sorte qu'on puisse appliquer les inégalités du corollaire 4.15 à chaque fois que x passe près du cercle de Kasner. On aurait alors une chance de montrer que $\mathcal{O}_X(x^{in})$ piste la chaîne hétérocline $H(u_0)$. Répondre à cette question va nous occuper dans les parties 5.1 et 5.3.

Remarque 5.1. Il est intéressant de remarquer qu'une orbite de type II met un temps infini pour se rapprocher du cercle de Kasner (dans le passé et dans le futur), ainsi plus ϵ est petit, plus l'orbite $\mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$ met du temps pour rejoindre l'autre côté du cercle de Kasner depuis $\Sigma_{p,\epsilon}^u$ et il en est donc de même de l'orbite x qui la suit. On en déduit que plus ϵ est petit, plus l'orbite x devra se trouver proche de $\mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$ dans la tranche $\Sigma_{p,\epsilon}^u$ pour être certain qu'elle restera proche d'elle jusqu'au voisinage de $f(p)$, de l'autre côté du cercle de Kasner.

5.1 Définition des sections locales et de l'application de retour

Remarque 5.2. Dans toute cette partie, dès qu'on définira un objet en faisant référence au symbole « s », on définira également (et implicitement) l'objet symétrique en intervertissant les rôles de « s » et « ss ».

Remarque 5.3. Cette partie est assez indigeste à lire. Malheureusement, il est difficile de la court-circuiter ...

On fixe un compact $F \subset \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ positivement invariant par l'application de Kasner f . On peut faire deux remarques utiles :

- F ne contient aucun point de paramètre de Kasner $u = 1$ puisque ces points sont envoyés sur les points de Taub par f .
- F est totalement discontinu car l'ensemble des points p de \mathcal{K} tels que $\mathcal{O}_f(p)$ est stationnaire à partir d'un certain rang en un des points de Taub est dense dans \mathcal{K} . On peut donc recouvrir F par un nombre fini d'ouverts de coordonnées deux à deux disjoints, que l'on note U_1, \dots, U_N . On notera toujours (x_u, x_s, x_{ss}, x_c) les coordonnées, sans faire explicitement référence au voisinage dans lequel on se trouve, bien que les systèmes de coordonnées soient différents.

Taille uniforme des voisinages de cartes locales : Par compacité de F , on a, pour C et α fixés,

$$\min_{u_0 \in F} \min \left(\frac{\bar{\alpha}}{100C u_0^4 M(u_0)^2}, \frac{\bar{\alpha}}{100A u_0^5}, \frac{\eta_{u_0}}{4} \right) > 0$$

et on baptise ce nombre ϵ'_F . On pose $\epsilon_F = \frac{1}{4}\epsilon'_F$.

Pour C suffisamment grand et $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, ϵ_F est essentiellement une taille uniforme de voisinages sur lesquels on peut appliquer les résultats de la partie 4. Quitte à réduire à la fois ϵ_F et la taille des voisinages U_i , on peut supposer que pour tout i :

$$U_i =] -\epsilon_F, \epsilon_F[\times] -\epsilon_F, \epsilon_F[\times] -\epsilon_F, \epsilon_F[\times] c_i^{min}, c_i^{max}[$$

où

$$|c_i^{min} - c_i^{max}| \leq \epsilon_F$$

et on peut supposer qu'aucun des ouverts U_i ne contient un point de paramètre de Kasner $u = 1$ dans son adhérence.

Nous voulons étudier toutes les chaînes hétéroclines des points de F . Pour faire cela, il est intéressant de ne plus faire référence à des points particuliers (le point p dans $\Sigma_{p,\epsilon}$ par exemple). Il nous faut donc changer notre point de vue pour avoir une vision plus globale. On va introduire des tranches Σ qui ne font plus référence à p mais qui font référence au voisinage U_i .

Tranches spatiales en entrée : On pose, pour tout i , pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_F$ et pour tout $0 < \delta \leq \frac{1}{4}\epsilon$,

$$\Sigma_{i,\delta,\epsilon}^s := \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \in U_i \mid 0 \leq x_u \leq \delta, x_s = \epsilon, |x_{ss}| \leq \delta, d((0, 0, 0, x_c), U_i \cap F) \leq \delta\}$$

Remarque 5.4. La distance d utilisée ici est la distance induite par la norme infinie.

Remarque 5.5. L'introduction du paramètre δ a pour fonction de permettre une contraction aussi forte que l'on veut à la sortie de la boîte, tout en fixant la position des tranches spatiales avec le paramètre ϵ (cf. la remarque 5.1).

Remarque 5.6. Soit $x \in \Sigma_{i,\delta,\epsilon}^s$. Par choix de δ , il existe $p \in U_i \cap F$ tel que $x \in \Sigma_{p,\epsilon}^s$. On pourra en particulier appliquer les résultats de la partie 4.

Remarque 5.7. On notera Σ_i^s à la place de $\Sigma_{i,\delta,\epsilon}^s$ lorsque le contexte sera clair et on fera de même avec toutes les notations, c'est-à-dire qu'on rendra implicite les paramètres δ et ϵ quand on le pourra.

On pose ensuite

$$\begin{aligned}\Sigma^s &= \bigcup_i \Sigma_i^s \\ \Sigma_i &= \Sigma_i^s \bigcup \Sigma_i^{ss} \\ \Sigma &= \Sigma^s \bigcup \Sigma^{ss}\end{aligned}$$

Σ est la section locale pour F .

Tranches spatiales en sortie : On procède de manière similaire pour Σ^u (ici, il n'y a pas lieu de différencier la direction ∂_s et la direction ∂_{ss} puisque toutes les orbites sortent par la direction ∂_u) :

$$\Sigma_i^u := \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \in U_i \mid x_u = \epsilon, \|x_{s,ss}\| \leq 2\delta, d((0, 0, 0, x_c), U_i \cap F) \leq 2\delta\}$$

$$\Sigma^u = \bigcup_i \Sigma_i^u$$

Applications de passage local : Les applications de passage local « suivent » les orbites au voisinage du cercle de Kasner.

Définition 5.8 (de l'application de passage local $\psi_i^s : \Sigma_i^s \rightarrow \Sigma_i^u$). Soit $x^{in} = (x_u^{in}, x_s^{in} = \epsilon, x_{ss}^{in}, x_c^{in}) \in \Sigma_i^s$. Soit $p \in U_i \cap F$ tel que $x \in \Sigma_{p,\epsilon}^s$. Alors $\psi_{p,\epsilon}^s(x_u^{in}, x_{ss}^{in}, x_c^{in})$ ne dépend pas du choix de p et ceci permet de définir ψ_i^s en posant

$$\psi_i^s(x_u^{in}, x_{ss}^{in}, x_c^{in}) := \psi_{p,\epsilon}^s(x_u^{in}, x_{ss}^{in}, x_c^{in})$$

En particulier, ceci définit une application lipschitzienne comme on l'a vu au corollaire 4.22.

Décomposition de Σ_i^u en sous-tranches : On pose

$$\Sigma_i^u = \left(\bigcup_j \Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow s} \right) \cup \left(\bigcup_j \Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow ss} \right)$$

où $x \in \Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow s}$ si et seulement si la première intersection de l'orbite $\mathcal{O}_X(x)$ avec $\Sigma_{\epsilon,\epsilon}$ se fait dans la tranche $\Sigma_{j,\epsilon,\epsilon}^s$. Cette décomposition n'a de sens qu'après avoir fixé ϵ et avoir pris δ suffisamment petit.

Remarque 5.9. En fait, dès que l'on prend les U_i suffisamment petits, pour tout j fixé, on a l'alternative : si $\Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow s}$ n'est pas vide, alors $\Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow ss}$ l'est. Ceci est une conséquence de la continuité du flot et du fait que la distance entre les deux pré-images d'un point du cercle par l'application de Kasner est uniformément minorée.

Applications de passage global : Les applications de passage global suivent les orbites qui s'éloignent du cercle de Kasner jusqu'à ce qu'elles reviennent dans son voisinage. Pour la définition suivante, on pose $\Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow s} = \Sigma_{i \rightarrow j, \delta, \epsilon}^{u \rightarrow s}$ et $\Sigma_j^s = \Sigma_{j, \epsilon, \epsilon}^s$.

Définition 5.10 (de l'application de passage global $\phi_{i \rightarrow j}^s : \Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow s} \rightarrow \Sigma_j^s$). On fixe i, j et ϵ . On considère l'orbite ayant pour condition initiale $x^{in} = (\epsilon, x_s^{in}, x_{ss}^{in}, x_c^{in}) \in \Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow s}$. Pour tout δ suffisamment petit, cette orbite coupe Σ_j^s par continuité du flot et on note $x^{out} = (x_u^{out}, \epsilon, x_{ss}^{out}, x_c^{out})$ la première intersection. On pose

$$\phi_{i \rightarrow j}^s(x^{in}) := x^{out}$$

et on oublie les coordonnées constantes, ce qui donne

$$\phi_{i \rightarrow j}^s(x_s^{in}, x_{ss}^{in}, x_c^{in}) = (x_u^{out}, x_{ss}^{out}, x_c^{out})$$

Ceci définit une application lisse par transversalité.

Remarque 5.11. On pourrait raffiner un peu la définition précédente. En effet, fixons $0 < \epsilon < \epsilon_F$ puis $0 < \epsilon' < \epsilon$. Alors, pour tout δ suffisamment petit, l'application $\phi_{i \rightarrow j}^s$ est à valeurs dans $\Sigma_{j, \epsilon'}^s$.

Décomposition de Σ_i^s en sous-tranches : On pose

$$\Sigma_i^s = \left(\bigcup_j \Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow s} \right) \cup \left(\bigcup_j \Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss} \right)$$

où $x \in \Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss}$ si et seulement si

(Cas $x_u \neq 0$) la première intersection de l'orbite $\mathcal{O}_X(x)$ avec Σ_i^u se fait dans la tranche $\Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow ss}$.
(Cas $x_u = 0$) la première intersection de l'orbite $\mathcal{O}_{\Pi}^u(0, 0, 0, x_c)$ avec Σ_i^u se fait dans la tranche $\Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow ss}$.

Cette décomposition n'a de sens qu'après avoir fixé ϵ et avoir pris δ suffisamment petit.

Remarque 5.12. On a $\Sigma_{i \rightarrow j, \delta, \epsilon}^{s \rightarrow s} = \left(\psi_{i, \delta, \epsilon}^s \right)^{-1} \left(\Sigma_{i \rightarrow j, \delta, \epsilon}^{u \rightarrow s} \right)$

Applications de retour : Pour la définition suivante, on pose $\Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss} = \Sigma_{i \rightarrow j, \delta, \epsilon}^{s \rightarrow ss}$ et $\Sigma_j^{ss} = \Sigma_{j, \epsilon, \epsilon}^{ss}$.

Définition 5.13 (de l'application de retour *partielle* $\rho_{i \rightarrow j, \delta, \epsilon}^{s \rightarrow ss} : \Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss} \rightarrow \Sigma_j^{ss}$). On fixe i, j et ϵ . On pose

$$\rho_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss} = \phi_{i \rightarrow j}^{ss} \circ (\psi_i^s)_{|\Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss}}$$

ce qui a un sens dès que δ est suffisamment petit.

Pour résumer toutes les définitions précédentes, on a décomposé Σ de la manière suivante :

$$\Sigma = \bigcup_{i, j} \left(\Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow s} \cup \Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss} \cup \Sigma_{i \rightarrow j}^{ss \rightarrow s} \cup \Sigma_{i \rightarrow j}^{ss \rightarrow ss} \right)$$

Remarque 5.14. A chaque fois qu'on a écrit une union d'ensembles dans cette partie, il s'agissait en fait d'une union disjointe.

Nous allons maintenant définir l'application de retour *totale* qui vérifiera les critères de cônes de la proposition 5.20 énoncé au début de la partie 5.3.

Définition 5.15 (de l'application de retour totale $\rho_{\delta, \epsilon} : \Sigma_{\delta, \epsilon} \rightarrow \Sigma_{\epsilon, \epsilon}$). On fixe ϵ et on prend δ suffisamment petit pour que les définitions et les décompositions précédentes aient un sens. Soit $x \in \Sigma_{\delta, \epsilon}$. D'après la remarque 5.14, il existe un unique couple (i, j) et un unique couple de symboles (λ, γ) dans $\{s, ss\}$ tels que $x \in \Sigma_{i \rightarrow j, \delta, \epsilon}^{\lambda \rightarrow \gamma}$. On pose

$$\rho_{\delta, \epsilon}(x) = \rho_{i \rightarrow j, \delta, \epsilon}^{\lambda \rightarrow \gamma}(x)$$

ce qui définit l'application $\rho_{\delta, \epsilon}$.

Remarque 5.16. On notera cette application ρ quand le contexte sera clair pour δ et ϵ .

5.2 Constante d'expansivité pour l'application de Kasner

On va introduire dans cette partie une constante uniforme d'expansivité pour l'application de Kasner. Cette constante sera utile pour montrer l'hyperbolicité de l'application de retour ρ .

On rappelle qu'on a pris les U_i suffisamment petits pour qu'ils ne contiennent aucun point de Taub et aucun point de paramètre de Kasner $u = 1$ dans leur adhérence. On a également choisis la coordonnée locale x_c comme étant l'abscisse curviligne sur le cercle. Il existe alors une constante $K_f(F) > 1$ telle que pour tout i et pour tout $p, p' \in U_i$, on a

$$|f(p)_c - f(p')_c| \geq K_f(F) |p_c - p'_c| \quad (5.1)$$

On identifiera dans la suite f et $p_c \mapsto f(0, 0, 0, p_c)_c$. Avec cette identification, f est une fonction réelle strictement monotone sur $U_i \cap \mathcal{K}$.

En particulier, on utilisera le fait que pour tout $y_c \in F$, pour tout δ suffisamment petit pour que $[y_c - \delta, y_c + \delta] \subset (U_i)_c$, les nombres $f(y_c + \delta) - f(y_c)$ et $f(y_c - \delta) - f(y_c)$ sont non nuls et de signes opposés.

5.3 Hyperbolicité de l'application de retour (existence des cônes invariants)

Commençons par définir précisément les cônes qui interviendront dans la proposition 5.20.

Définition 5.17 (des cônes). Soient $\epsilon > 0$, $0 < \delta \leq \frac{1}{4}\epsilon$, $x \in \Sigma_{i,\delta,\epsilon}^s$ et $v > 0$. On note $C_x^c(v, \delta)$ et $C_x^u(v, \delta)$ les cônes fermés de paramètres v et δ suivants :

$$C_x^c(v, \delta) = \{\tilde{x} \in \Sigma_{i,\delta}^s \mid \|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\| \leq v|\tilde{x}_c - x_c|\}$$

$$C_x^u(v, \delta) = \{\tilde{x} \in \Sigma_{i,\delta}^s \mid |\tilde{x}_c - x_c| \leq v\|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\|\}$$

Remarque 5.18. Lorsque le paramètre δ sera connu d'après le contexte, on notera plus simplement $C_x^c(v)$ et $C_x^u(v)$ les cônes. Encore plus simplement, on définit les cônes là où ρ est définie. Le paramètre δ joue uniquement un rôle technique.

Remarque 5.19. Si on ne dit rien sur x , on ne sait pas a priori si $C_x^c(v) = \{\tilde{x} \in \Sigma_{i,\delta}^s \mid \|\tilde{x}_{u,s} - x_{u,s}\| \leq v|\tilde{x}_c - x_c|\}$ ou si $C_x^c(v) = \{\tilde{x} \in \Sigma_{i,\delta}^{ss} \mid \|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\| \leq v|\tilde{x}_c - x_c|\}$. Cette ambiguïté est requise pour ne pas séparer de cas artificiellement dans l'énoncé de la proposition 5.20. On lèvera l'ambiguïté au cours de la preuve puisque on fixera x , ce qui détermine « i » et le symbole « s » ou « ss ».

Proposition 5.20 (Hyperbolicité de l'application de retour). *Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit et pour tout $0 < \delta < \epsilon$ suffisamment petit par rapport à ϵ , l'application $\rho = \rho_{\delta,\epsilon}$ est définie sur $\Sigma_{\delta,\epsilon}$, à valeurs dans $\Sigma_{\epsilon,\epsilon}$ et est lipschitzienne. De plus, pour tout $K_u > 1$, pour tout $0 < \sigma < 1$, pour tout $K_c > (1 - \sigma^2)^{-1}$, il existe $\epsilon_F > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_F$, il existe $\delta_F(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $0 < \delta < \delta_F(\epsilon)$, l'application ρ vérifie les critères de cônes suivants :*

(Invariance) Pour tout $x \in \Sigma_\delta$,

$$\rho(C_x^c(\sigma)) \cap \Sigma \subset \left(\text{int } C_{\rho(x)}^c(\sigma)\right) \cup \{\rho(x)\}$$

et

$$\rho^{-1}\left(C_{\rho(x)}^u(\sigma)\right) \cap \Sigma \subset \left(\text{int } C_x^u(\sigma)\right) \cup \{x\}$$

(Expansion et Contraction) Pour tout $x \in \Sigma$, pour tout $\tilde{x} \in C_x^c(\sigma)$, on a expansion dans la direction centrale :

$$|\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c| \geq K_c|\tilde{x}_c - x_c|$$

et pour tout $\rho(\tilde{x}) \in C_{\rho(x)}^u(\sigma)$, on a contraction dans les directions transverses :

$$\|\rho(\tilde{x})_{u,ss} - \rho(x)_{u,ss}\| \leq \frac{1}{K_u}\|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\|$$

Remarque 5.21. $\|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\|$ est seulement une astuce d'écriture. En effet, d'après la définition des cônes, on a l'alternative $x_s = \tilde{x}_s$ ou $x_{ss} = \tilde{x}_{ss}$ et donc $\|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\| = \|\tilde{x}_{u,s} - x_{u,s}\|$ ou $\|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\| = \|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\|$. Cette écriture est pratique parce qu'elle permet de ne pas différentier les cas. Il en est de même pour $\|\rho(\tilde{x})_{u,ss} - \rho(x)_{u,ss}\|$.

Démonstration. On commence par fixer $\epsilon_F > 0$ puis $0 < \epsilon < \epsilon_F$ puis $0 < \delta \leq \epsilon$ suffisamment petits pour que les définitions et les décompositions de la partie 5.1 aient un sens. On réduira ces paramètres au fur et à mesure de la preuve, à chaque fois qu'on en aura besoin pour obtenir une nouvelle inégalité.

L'application ρ est localement lipschitzienne puisque c'est la composée de deux applications qui le sont. Comme elle est définie sur un compact, elle est lipschitzienne.

On va s'intéresser à deux points \tilde{x} et x dans $\Sigma_{\delta,\epsilon}$ proches l'un de l'autre. Pour fixer les idées, supposons que \tilde{x} et x sont dans la tranche $\Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss}$. On suppose que $\tilde{x} \neq x$.

Afin d'alléger les calculs, nous allons simplifier quelques notations le temps de la preuve. On pose

$$\psi = (\psi_i^s)_{|\Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss}} \quad , \quad \phi = \phi_{i \rightarrow j}^{ss} \quad \text{et} \quad \rho = \rho_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss}$$

Étape 1 : Expansion dans la direction centrale.

Par définition de ϕ , on a, en notant y^{out} les coordonnées dans $\Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow ss}$ et y^{in} les coordonnées dans Σ_j^{ss} ,

$$\phi(y_s^{out} = 0, y_{ss}^{out} = 0, y_c^{out}) = (y_u^{in} = 0, y_s^{in} = 0, y_c^{in} = f(y_c^{out}))$$

L'application ϕ étant lisse, on peut alors écrire, pour tout $y \in \Sigma_{i \rightarrow j}^{u \rightarrow ss}$,

$$\phi(y_s, y_{ss}, y_c) = (0, 0, f(y_c)) + \tilde{\phi}(y_s, y_{ss}, y_c) y_{s,ss}$$

où $(y_s, y_{ss}, y_c) \mapsto \tilde{\phi}(y_s, y_{ss}, y_c)$ est une application lisse à valeurs dans l'espace des matrices réelles (3×2) . On se donne une constante³ $C^{glob}(\epsilon) > 0$ telle que $\|\tilde{\phi}\|_\infty \leq C^{glob}(\epsilon)$ et $\|D\tilde{\phi}\|_\infty \leq C^{glob}(\epsilon)$. On obtient alors l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|\phi(\tilde{y}) - \phi(y) - (0, 0, f(\tilde{y}_c) - f(y_c))\| \\ = \|\tilde{\phi}(\tilde{y})(\tilde{y}_{s,ss} - y_{s,ss}) + (\tilde{\phi}(\tilde{y}) - \tilde{\phi}(y)) y_{s,ss}\| \\ \leq C^{glob}(\epsilon) (\|\tilde{y}_{s,ss} - y_{s,ss}\| + \|\tilde{y} - y\| \|y_{s,ss}\|) \end{aligned}$$

On remplace maintenant \tilde{y} et y par $\psi(\tilde{x})$ et $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \|\rho(\tilde{x}) - \rho(x) - (0, 0, f(\psi(\tilde{x})_c) - f(\psi(x)_c))\| \\ \leq C^{glob}(\epsilon) (\|\psi(\tilde{x})_{s,ss} - \psi(x)_{s,ss}\| + \|\psi(\tilde{x}) - \psi(x)\| \|\psi(x)_{s,ss}\|) \end{aligned}$$

On utilise ensuite la proposition 4.21 sous la forme :

$$\begin{aligned} \|\psi(\tilde{x})_{s,ss} - \psi(x)_{s,ss}\| &\leq C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \|\tilde{x} - x\| \\ \|\psi(\tilde{x})_c - \psi(x)_c\| &\leq (C \epsilon u_0^4 M(u_0)^2 + 1) \|\tilde{x} - x\| \end{aligned}$$

3. On insiste sur le fait que cette constante dépend de ϵ . Comme on l'a déjà vu au début de la partie 5, plus ϵ est petit, plus le temps de parcours est long et donc moins le contrôle sur les orbites de type VIII ou IX est bon.

et le corollaire 4.15 sous la forme :

$$\|\psi(x)_{s,ss}\| \leq 2x_u \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1}$$

où

- C est suffisamment grand
- u_0 est le paramètre de Kasner d'un point de F proche de x et \tilde{x} (dans le voisinage de coordonnées U_i)
- $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$

afin de pouvoir appliquer l'étude locale de la partie 4.

On obtient alors

$$\begin{aligned} & \|\rho(\tilde{x}) - \rho(x) - (0, 0, f(\psi(\tilde{x})_c) - f(\psi(x)_c))\| \\ & \leq C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \|\tilde{x} - x\| \\ & + 2x_u M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1} \left(C u_0 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} + C \epsilon u_0^4 + 1 \right) \|\tilde{x} - x\| \end{aligned}$$

or, en se souvenant que $\beta(u_0, \alpha) = \alpha \left(\frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1 \right)$, il est facile de voir que

$$2x_u \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\alpha \frac{\mu_s(u_0)}{\mu_u(u_0)} - 1} \leq \min \left(1, C u_0 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \right)$$

donc, pour tout C assez grand,

$$\|\rho(\tilde{x}) - \rho(x) - (0, 0, f(\psi(\tilde{x})_c) - f(\psi(x)_c))\| \leq C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \|\tilde{x} - x\| \quad (5.2)$$

On fixe maintenant deux constantes K_c et σ vérifiant

$$\begin{cases} 1 < K_c < K_f(F) \\ 0 < \sigma < 1 \\ 1 < K_c(1 - \sigma^2) \end{cases}$$

et on se place dans le cône $C_x^c(v, \delta) : \|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\| \leq v|\tilde{x}_c - x_c|$, inclus dans $\Sigma_{i,\delta,\epsilon}^s$, pour un certain $v > 0$.

On va maintenant minorer $|\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c|$ pour prouver qu'il y a expansion dans le cône $C_x^c(v, \delta)$.

$$\begin{aligned} |\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c| &= |(f(\psi(\tilde{x})_c) - f(\psi(x)_c)) + (\psi(\tilde{x})_c - \psi(x)_c - (f(\psi(\tilde{x})_c) - f(\psi(x)_c)))| \\ &\geq |f(\psi(\tilde{x})_c) - f(\psi(x)_c)| - C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \|\tilde{x} - x\| \\ &\geq K_f(F) |\psi(\tilde{x})_c - \psi(x)_c| - C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \|\tilde{x} - x\| \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la dernière ligne l'inégalité (5.1), ce qui est possible dès que δ est suffisamment petit. De plus, d'après la proposition 4.21,

$$\begin{aligned} |\psi(\tilde{x})_c - \psi(x)_c| &= |(\tilde{x}_c - x_c) + (\psi(\tilde{x})_c - \psi(x)_c - (\tilde{x}_c - x_c))| \\ &\geq |\tilde{x}_c - x_c| - C\epsilon u_0^4 M(u_0)^2 \|\tilde{x} - x\| \end{aligned}$$

et, d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x\| &= \|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\| + |\tilde{x}_c - x_c| \\ &\leq (1+v)|\tilde{x}_c - x_c| \end{aligned}$$

l'égalité étant due au fait que les coordonnées x_s et \tilde{x}_s sont identiques dans $\Sigma_{i \rightarrow j}^{s \rightarrow ss}$ et l'inégalité étant une conséquence directe de la définition du cône $C_x^c(v)$. On en déduit que

$$|\psi(\tilde{x})_c - \psi(x)_c| \geq (1 - C\epsilon u_0^4 M(u_0)^2 (1+v)) |\tilde{x}_c - x_c|$$

puis que

$$\begin{aligned} |\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c| &\geq K_f(F) |\tilde{x}_c - x_c| \\ &\quad - (1+v) \left(K_f(F) C\epsilon u_0^4 M(u_0)^2 + C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \right) |\tilde{x}_c - x_c| \end{aligned}$$

On choisit maintenant ϵ assez petit puis δ assez petit pour avoir

$$K_c < K_f(F) - (1 + \frac{1}{\sigma}) \left(K_f(F) C\epsilon u_0^4 M(u_0)^2 + C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \right)$$

et, ce, indépendamment de u_0 car u_0 prend ses valeurs dans un compact.

Plus précisément, on impose que ϵ_F soit suffisamment petit pour que

$$\forall u_0, K_f(F) C\epsilon_F u_0^4 M(u_0)^2 < \frac{1}{2} \frac{K_f(F) - K_c}{1 + \frac{1}{\sigma}}$$

puis on impose que $\delta_F(\epsilon)$ soit suffisamment petit pour que

$$\forall \epsilon < \epsilon_F, \forall u_0, C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{\delta_F(\epsilon)}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \leq \frac{1}{2} \frac{K_f(F) - K_c}{1 + \frac{1}{\sigma}}$$

A fortiori, pour tout $v \leq \frac{1}{\sigma}$ (et en particulier pour $v = \sigma$), on a

$$K_c < K_f(F) - (1+v) \left(K_f(F) C\epsilon u_0^4 M(u_0)^2 + C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon} \right)^{\beta(u_0, \alpha)} \right)$$

ce qui prouve que, pour tout $v \leq \frac{1}{\sigma}$ et pour tout $\tilde{x} \in C_x^c(v, \delta)$,

$$|\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c| > K_c |\tilde{x}_c - x_c| \tag{5.3}$$

En choisissant $v = \sigma$, on obtient l'expansion dans la direction centrale dans le cône $C_x^c(\sigma, \delta)$ avec la constante K_c , *i.e.* pour tout $\tilde{x} \in C_x^c(\sigma, \delta)$,

$$|\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c| > K_c |\tilde{x}_c - x_c|$$

On a même mieux en choisissant $v = \frac{1}{\sigma}$. En effet, on obtient l'expansion dans la direction centrale à l'extérieur du cône $C_x^u(\sigma, \delta)$, i.e. pour tout $\tilde{x} \notin C_x^u(\sigma, \delta)$,

$$|\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c| > K_c |\tilde{x}_c - x_c|$$

Étape 2 : Invariance des cônes.

On se place encore dans le cône $C_x^c(v, \delta)$ pour $v \leq \frac{1}{\sigma}$, on a alors

$$\begin{aligned} \|\rho(\tilde{x})_{u,s} - \rho(x)_{u,s}\| &\leq \|\rho(\tilde{x}) - \rho(x) - (0, 0, f(\psi(\tilde{x})_c) - f(\psi(x)_c))\| \\ &\leq C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} \|\tilde{x} - x\| \\ &\leq C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} (1+v) |\tilde{x}_c - x_c| \\ &< C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} (1+v) K_c^{-1} |\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c| \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (5.2) à la deuxième inégalité et (5.3) à la dernière inégalité.

A ϵ fixé, on choisit $\delta_F(\epsilon)$ suffisamment petit pour avoir

$$C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} K_c^{-1} < \frac{\sigma}{1+\sigma}$$

et, ce, indépendamment de u_0 . La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est monotone croissante donc on a

$$C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} K_c^{-1} < \frac{v}{1+v}$$

pour tout $v \geq \sigma$. On obtient alors l'invariance (stricte) du cône $C_x^c(v, \delta)$

$$\|\rho(\tilde{x})_{u,s} - \rho(x)_{u,s}\| < v |\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c|$$

pour tout $\sigma \leq v \leq \frac{1}{\sigma}$.

Le choix $v = \sigma$ donne l'invariance stricte (dans le futur) du cône $C_x^c(\sigma, \delta)$. Le choix $v = \frac{1}{\sigma}$ donne l'invariance stricte (dans le passé) du cône $C_{\rho(x)}^u(\sigma, \delta)$.

Étape 2 : Contraction dans les directions transverses.

On suppose que $\rho(\tilde{x}) \in C_{\rho(x)}^u(\sigma, \delta)$, c'est-à-dire

$$|\rho(\tilde{x})_c - \rho(x)_c| \leq \sigma \|\rho(\tilde{x})_{u,s} - \rho(x)_{u,s}\|$$

d'après ce qui précède, il y a invariance (dans le passé) de ce cône et donc

$$|\tilde{x}_c - x_c| \leq \sigma \|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\|$$

Comme précédemment, on utilise (5.2) pour obtenir

$$\|\rho(\tilde{x})_{u,s} - \rho(x)_{u,s}\| \leq C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{x_u}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} (1+\sigma) \|\tilde{x}_{u,ss} - x_{u,ss}\|$$

On fixe maintenant une constante $K_u > 1$. On choisit ϵ_F et $\delta_F(\epsilon)$ suffisamment petits pour avoir

$$\forall u_0, \forall \epsilon < \epsilon_F, C^{glob}(\epsilon) C u_0 M(u_0)^2 \left(\frac{\delta_F(\epsilon)}{\epsilon}\right)^{\beta(u_0, \alpha)} (1+\sigma) \leq K_u^{-1}$$

ce qui fournit la contraction dans les directions transverses avec la constante K_u . \square

5.4 Existence des variétés stables pour l'application de retour

On rappelle que l'on note $\mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$ l'orbite de type II qui part de $p \in \mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ et qui arrive en $f(p)$. On pose

$$F' = \bigcup_{p \in F} \Sigma \cap \mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$$

Définition 5.22 (Ensemble stable local de y pour ρ). Soit $\gamma > 0$. Soit $y \in \Sigma$ tel que $\rho^n(y)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle *ensemble stable local de y pour ρ* et on note $W_{\gamma}^{s,loc}(\rho, y)$ l'ensemble des points x qui vérifient

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho^n(x)$ existe.
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(\rho^n(x), \rho^n(y)) \leq \gamma$$

Remarque 5.23. Dans le cas hyperbolique (et c'est le cas ici!), le choix du paramètre γ n'est pas très important parce que, si $0 < \gamma' < \gamma$, alors il existe $0 < \gamma''$ tel que

$$W_{\gamma}^{s,loc}(\rho, y) \cap B_{\gamma''}(y) = W_{\gamma'}^{s,loc}(\rho, y) \cap B_{\gamma''}(y) = W_{\gamma''}^{s,loc}(\rho, y)$$

où $B_{\gamma''}(y)$ est la boule centrée en y et de rayon γ'' . Ceci est due au fait que, pour tout γ assez petit et pour tout $x \in W_{\gamma}^{s,loc}(\rho, y)$, on a $d(\rho^n(x), \rho^n(y)) \leq d(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce fait deviendra clair après avoir fait la preuve du théorème 5.24. On fera donc l'abus d'écrire $W^{s,loc}(\rho, y)$ pour parler de « l' » ensemble stable local.

Théorème 5.24 (Existence des variétés stables pour l'application de retour). *En tout point $y \in F'$, l'ensemble stable local de y pour ρ est une variété lipschitzienne de dimension 2 qui dépend continûment de y . En particulier, cet ensemble est non trivial.*

De plus, la convergence des orbites est exponentielle : pour tout $K_u > 1$, pour tout $y \in F'$, pour tout $x \in W^{s,loc}(\rho, y)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\rho^n(x) - \rho^n(y)\|_{\infty} \leq \frac{1}{K_u^n} \|x_{u,s,ss} - y_{u,s,ss}\| \quad (5.4)$$

Avant de commencer la preuve de ce théorème, il nous faut raffiner encore les définitions des sections locales (qui sont, hélas, déjà suffisamment compliquées). On pose, pour $\epsilon \leq \epsilon_F$, $\delta \leq \frac{1}{4}\epsilon$ et $\delta_u \leq \delta$,

$$\Sigma_{i,\delta_u,\delta,\epsilon}^{ss} = \{(x_u, x_s, x_{ss}, x_c) \mid 0 \leq x_u \leq \delta_u, 0 \leq x_s \leq \delta, x_{ss} = \epsilon, d((0, 0, 0, x_c), U_i \cap F) \leq \delta\}$$

Ensuite, on étend toutes les définitions précédentes à cette nouvelle section locale. Il faut comprendre $\Sigma_{i,\delta_u,\delta,\epsilon}^{ss}$ de la manière suivante : on a comprimé la taille de $\Sigma_{i,\delta,\epsilon}$ dans la direction instable (ce qui sera utile pour prouver l'étape 1 dans la preuve qui suit) et on s'est restreint à l'adhérence de la composante connexe « $N_i > 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ » (ce qui n'implique aucune perte de généralité).

Preuve du théorème 5.24. Pour montrer que $W^{s,loc}(\rho, y)$ est une variété lipschitzienne de dimension 2, on va montrer que c'est le graphe d'une application lipschitzienne $\zeta_y^s : (x_u, x_s) \mapsto x_c$. L'idée générale de la preuve est d'utiliser une transformation de graphe d'Hadamard. La différence avec le cas classique réside dans la ligne singulière $x_u = 0$ où ρ n'est pas injective. Les variétés stables

locales seront essentiellement données comme le point fixe d'une application contractante sur un bon espace fonctionnel.

Introduction des notations et de l'architecture de la preuve :

On fixe $K_u, \sigma, K_c, \epsilon_F, \epsilon, \delta_F(\epsilon)$ et δ tels qu'on soit dans le cadre d'application de la proposition 5.20. Soit M une constante de lipschitz pour l'application ρ . On choisit δ_u assez petit pour que

$$\delta_u \leq \frac{K_f(F)\delta}{2M(1+\sigma)} \quad (5.5)$$

Nous allons démontrer l'existence d'une variété stable pour tout point y dans

$$F' = \bigcup_{p \in F} \Sigma_{\delta_u, \delta, \epsilon} \cap \mathcal{O}_{\Pi}^u(p)$$

On notera toujours (x_u, x_s, x_c) les coordonnées d'un point dans Σ , même si il se situe dans la tranche $x_s = \epsilon$ et qu'on devrait noter ses coordonnées (x_u, x_{ss}, x_c) , ceci dans le but d'alléger la preuve. La disjonction de cas est de toute façon uniquement formelle. Autrement dit, on fera comme si toutes les orbites arrivent par la direction ∂_{ss} .

Remarquons que si $u = (0, 0, 0, y_c)$, alors l'intersection de $\mathcal{O}_{\Pi}^u(u)$ avec Σ se fait au point $(0, 0, 0, f(y_c)) = (0, 0, 0, f(u)_c)$. D'autre part, F' est clairement invariant par ρ .

On note H l'ensemble des graphes inclus, pour un certain i , dans Σ_i , qui sont donnés en coordonnées par une application $\zeta : (x_u, x_s) \in [0, \delta_u] \times [0, \delta] \mapsto x_c = \zeta(x_u, x_s) \in [1, +\infty[$ qui est σ -lipschitzienne, c'est-à-dire $\text{Lip}(\zeta) \leq \sigma$ où

$$\text{Lip}(\zeta) = \sup_{(x_u, x_s) \neq (\tilde{x}_u, \tilde{x}_s)} \frac{|\zeta(x_u, x_s) - \zeta(\tilde{x}_u, \tilde{x}_s)|}{\|(x_u, x_s) - (\tilde{x}_u, \tilde{x}_s)\|_{\infty}}$$

On munit H de la topologie induite par la norme infinie.

On note E l'ensemble des applications continues $\Lambda : y \in F' \mapsto \zeta_y \in H$ telles que pour tout $y \in F'$ et pour tout x_s , on ait $\zeta_y(0, x_s) = y_c$. On confond bien entendu dans cette définition un graphe avec son application sous-jacente. On peut remarquer que E n'est pas vide puisque si l'on pose, pour tout $y \in F'$, $\zeta_y \equiv y_c$, alors $\Lambda : y \mapsto \zeta_y$ est un élément de E . De plus, E est un espace complet.

Enfin, on définit $G : E \rightarrow E$ en posant, pour tout $\Lambda \in E$ et pour tout $y \in F'$,

$$\begin{aligned} G\zeta_y(\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))_{u,s}) &:= \rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))_c && \text{pour tout } x_{u,s} \neq 0, \\ G\zeta_y(0, x_s) &:= y_c && \text{pour tout } x_s. \end{aligned}$$

où l'on a noté $(G\Lambda)(y) = G\zeta_y$.

La preuve est constituée essentiellement de trois étapes. On montre que G est bien définie, puis qu'elle est contractante et enfin on vérifie que son unique point fixe est l'objet recherché. Pour les besoins techniques de la preuve, on différencie cinq étapes, les trois premières ayant pour but de montrer que G est bien définie.

Étape 1 : tout $x_{u,s}$ s'écrit sous la forme $\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s}$.

Pour tout $\Lambda \in E$, pour tout $y \in F'$, pour tout $x_{u,s} \in]0, \delta_u] \times [0, \delta]$, il existe $\tilde{x}_{u,s} \in ([0, \delta_u] \times [0, \delta]) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s} = x_{u,s}$.

Étape 2 : tout $x_{u,s}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s}$.

Pour tout $\Lambda \in E$, pour tout $y \in F'$, et pour tout $x_{u,s}, \tilde{x}_{u,s} \in ([0, \delta_u] \times [0, \delta]) \setminus \{(0, 0)\}$, si $\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))_{u,s} = \rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s} \in]0, \delta_u] \times [0, \delta]$, alors $x_{u,s} = \tilde{x}_{u,s}$.

Étape 3 : G est bien définie.

Pour tout $\Lambda \in E$ et pour tout $y \in F'$, l'application $G\zeta_y$ est σ -lipschitzienne.

Étape 4 : G est contractante.

Il existe une constante $0 < \kappa < 1$ telle que pour tout $\Lambda, \tilde{\Lambda} \in E$, on a

$$\|G\Lambda - G\tilde{\Lambda}\|_{\infty} \leq \kappa \|\Lambda - \tilde{\Lambda}\|_{\infty}$$

Étape 5 : le point fixe de G donne les variétés stables locales recherchées.

Soit $\Lambda^s : y \mapsto \zeta_y^s$ l'unique point fixe de G . Pour tout $y \in F'$, la variété lipschitzienne $\text{Graph}(\zeta_y^s)$ de dimension 2 est l'ensemble stable local de y pour ρ . Plus précisément,

1. Pour tout $x \in \text{Graph}(\zeta_y^s)$, on a

$$\|\rho^n(x) - \rho^n(y)\|_{\infty} \leq \frac{1}{K_u^n} \|x_{u,s,ss} - y_{u,s,ss}\|$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\rho^n(x), \rho^n(y)) = 0$$

2. Pour tout $x \notin \text{Graph}(\zeta_y^s)$, l'orbite $(\rho^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sort de Σ .

Preuve des différentes étapes :

Étape 1 : tout $x_{u,s}$ s'écrit sous la forme $\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s}$.

On fixe Λ, y et $x_{u,s}$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \exists \tilde{x}_{u,s}, \rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s} = x_{u,s} &\iff \exists \tilde{x}_{u,s}, \exists x_c, \rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) = (x_{u,s}, x_c) \\ &\iff \exists \tilde{x}_{u,s}, \exists x_c, (\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) = \rho(x_{u,s}, x_c) \\ &\iff \exists x_c, \zeta_{\rho(y)}(\rho(x_{u,s}, x_c)_{u,s}) = \rho(x_{u,s}, x_c)_c \end{aligned}$$

On pose $\omega(x_c) = \rho(x_{u,s}, x_c)_c - \zeta_{\rho(y)}(\rho(x_{u,s}, x_c)_{u,s})$ pour tout $x_c \in [y_c - \delta, y_c + \delta]$. On veut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à ω pour montrer qu'elle s'annule. On va donc montrer que $\omega(y_c + \delta)$ et $\omega(y_c - \delta)$ sont non nuls et de signes opposés. Plus précisément, on sait déjà que $f(y_c + \delta) - f(y_c)$ et $f(y_c - \delta) - f(y_c)$ sont non nuls et de signes opposés, on va donc montrer que $\omega(y_c + \delta)$ est du même signe que $f(y_c + \delta) - f(y_c)$ et que $\omega(y_c - \delta)$ est du même signe que $f(y_c - \delta) - f(y_c)$. Faisons le pour $\omega(y_c + \delta)$:

$$\begin{aligned} \omega(y_c + \delta) &= (f(y_c + \delta) - f(y_c)) \\ &\quad + (\rho(x_{u,s}, y_c + \delta)_c - f(y_c + \delta)) \\ &\quad + (f(y_c) - \zeta_{\rho(y)}(\rho(x_{u,s}, y_c + \delta)_{u,s})) \quad (5.6) \end{aligned}$$

On sait que

$$|f(y_c + \delta) - f(y_c)| \geq K_f(F)\delta \quad (5.7)$$

D'autre part, ρ est M -lipschitzienne donc

$$\|(0, 0, f(x_c)) - \rho(x_{u,s}, x_c)\|_\infty = \|\rho(0, x_s, x_c) - \rho(x_u, x_s, x_c)\|_\infty \leq M|x_u| \leq M\delta_u$$

donc

$$|f(x_c) - \rho(x_{u,s}, x_c)_c| \leq M\delta_u \quad (5.8)$$

$$\|\rho(x_{u,s}, x_c)_{u,s}\|_\infty \leq M\delta_u \quad (5.9)$$

De plus, $\zeta_{\rho(y)}$ est σ -lipschitzienne et $\zeta_{\rho(y)}(0, 0) = f(y_c)$ donc, en utilisant l'inégalité (5.9) avec $x_c = y_c + \delta$, on obtient

$$|f(y_c) - \zeta_{\rho(y)}(\rho(x_{u,s}, y_c + \delta)_{u,s})| \leq \sigma M\delta_u \quad (5.10)$$

Les inégalités (5.7), (5.8) avec $x_c = y_c + \delta$ et (5.10), couplées avec le choix de δ_u donné en (5.5), prouvent que $\omega(y_c + \delta)$ est non nul et du même signe que $f(y_c + \delta) - f(y_c)$.

Étape 2 : tout $x_{u,s}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s}$.

On fixe $\Lambda, y, x_{u,s}$ et $\tilde{x}_{u,s}$ et on suppose que

$$\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))_{u,s} = \rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s} \in]0, \delta_u] \times [0, \delta]$$

On a clairement

$$\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) \in C_{\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^c(\sigma)$$

et par invariance du cône, on en déduit que

$$(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) \in C_{(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^c(\sigma)$$

De plus, $\zeta_{\rho(y)}$ est σ -lipschitzienne et cela implique que

$$(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) \in C_{(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^u(\sigma)$$

On en déduit facilement que $x_{u,s} = \tilde{x}_{u,s}$.

Étape 3 : G est bien définie.

On fixe $\Lambda, y \in F'$ et $x_{u,s}, \tilde{x}_{u,s} \in ([0, \delta_u] \times [0, \delta]) \setminus \{(0, 0)\}$. L'application $\zeta_{\rho(y)}$ est σ -lipschitzienne donc

$$(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) \in C_{(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^u(\sigma)$$

et par invariance du cône, on a

$$\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) \in C_{\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^u(\sigma)$$

D'autre part, pour la ligne singulière, on a, toujours parce que $\zeta_{\rho(y)}$ est σ -lipschitzienne,

$$\rho(0, x_s, y_c) = (0, 0, f(y)_c) = (0, 0, \zeta_{\rho(y)}(0, 0)) \in C_{(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^u(\sigma)$$

donc, par invariance du cône, on a

$$(0, x_s, y_c) = (0, x_s, G\zeta_y(0, x_s)) \in C_{\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^u(\sigma)$$

et cela traduit exactement le fait que $G\zeta$ est σ -lipschitzienne.

Étape 4 : G est contractante.

On fixe Λ et $\tilde{\Lambda}$. On note $\tilde{\zeta}_y = \tilde{\Lambda}(y)$. On va montrer que

$$\|G\Lambda - G\tilde{\Lambda}\|_{\infty} \leq \frac{1}{K_c(1 - \sigma^2)} \|\Lambda - \tilde{\Lambda}\|_{\infty}$$

Il suffit pour cela de montrer que, pour tout $y \in F'$,

$$\|G\zeta_y - G\tilde{\zeta}_y\|_{\infty} \leq \frac{1}{K_c(1 - \sigma^2)} \|\tilde{\zeta}_{\rho(y)} - \zeta_{\rho(y)}\|_{\infty}$$

Pour tout x_s , on a $G\zeta_y(0, x_s) = y_c = G\tilde{\zeta}_y(0, x_s)$. On va donc seulement s'intéresser au sup de $|G\zeta(x_u, x_s) - G\tilde{\zeta}(x_u, x_s)|$ pour $x_u \neq 0$. Cela revient à majorer le sup de

$$\left| G\zeta_y \left(\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))_{u,s} \right) - G\tilde{\zeta}_y \left(\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s} \right) \right|$$

sur tous les $x_{u,s}, \tilde{x}_{u,s} \in ([0, \delta_u] \times [0, \delta]) \setminus \{(0, 0)\}$ tels que

$$\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta(x_{u,s}))_{u,s} = \rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \tilde{\zeta}(\tilde{x}_{u,s}))_{u,s} \in]0, \delta_u] \times [0, \delta]$$

On a par définition

$$\rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) \in C_{\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^c$$

et par invariance du cône, il vient

$$(\tilde{x}_{u,s}, \tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})) \in C_{(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^c$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |\tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}) - \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s})| &\leq |\tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}) - \zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})| + |\zeta_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}) - \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s})| \\ &\leq \|\tilde{\zeta}_{\rho(y)} - \zeta_{\rho(y)}\|_{\infty} + \sigma \|\tilde{x}_{u,s} - x_{u,s}\| \\ &\leq \|\tilde{\zeta}_{\rho(y)} - \zeta_{\rho(y)}\|_{\infty} + \sigma^2 |\tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}) - \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s})| \end{aligned}$$

et donc

$$|\tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}) - \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s})| \leq \frac{1}{1 - \sigma^2} \|\tilde{\zeta}_{\rho(y)} - \zeta_{\rho(y)}\|_{\infty}$$

On a ensuite, par expansion de $C_{(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))}^c$ dans la direction centrale par ρ ,

$$\begin{aligned} |(G\tilde{\zeta}_y - G\zeta_y) \left(\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))_{u,s} \right)| &= |\rho^{-1}(x_{u,s}, \zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}))_c - \rho^{-1}(\tilde{x}_{u,s}, \tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s}))_c| \\ &\leq \frac{1}{K_c} |\zeta_{\rho(y)}(x_{u,s}) - \tilde{\zeta}_{\rho(y)}(\tilde{x}_{u,s})| \\ &\leq \frac{1}{K_c(1 - \sigma^2)} \|\tilde{\zeta}_{\rho(y)} - \zeta_{\rho(y)}\|_{\infty} \end{aligned}$$

On passe au sup :

$$\|G\zeta_y - G\tilde{\zeta}_y\|_\infty \leq \frac{1}{K_c(1-\sigma^2)} \|\tilde{\zeta}_{\rho(y)} - \zeta_{\rho(y)}\|_\infty$$

ce qui implique, pour tout $y \in F'$,

$$\|G\zeta_y - G\tilde{\zeta}_y\|_\infty \leq \frac{1}{K_c(1-\sigma^2)} \|\tilde{\Lambda} - \Lambda\|_\infty$$

et on passe au sup sur y :

$$\|G\Lambda - G\tilde{\Lambda}\|_\infty \leq \frac{1}{K_c(1-\sigma^2)} \|\tilde{\Lambda} - \Lambda\|_\infty$$

ce qui prouve que G est contractante puisque $K_c(1-\sigma^2) > 1$.

Étape 5 : le point fixe de G donne les variétés stables locales recherchées.

Il est assez facile de voir, en utilisant l'invariance de Λ^s par G et l'étape 1, que pour tout $y \in F'$,

$$\rho(\text{Graph}(\zeta_y^s)) \subset \text{Graph}(\zeta_{\rho(y)}^s)$$

Soit $x \in \text{Graph}(\zeta_y^s)$. On note $x = (x_{u,s}, \zeta_y^s(x_{u,s}))$. L'application ζ^s est σ -lipschitzienne donc $x \in C_y^u(\sigma)$ et par invariance des graphes, on a aussi $\rho(x) \in C_{\rho(y)}^u(\sigma)$. On en déduit par contraction dans la direction transverse que

$$\|\rho(x)_{u,s} - \rho(y)_{u,s}\| \leq \frac{1}{K_u} \|x_{u,s} - y_{u,s}\|$$

On peut itérer cette inégalité et obtenir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|\rho^n(x)_{u,s} - \rho^n(y)_{u,s}\| \leq \frac{1}{K_u^n} \|x_{u,s} - y_{u,s}\|$$

D'autre part, $\rho^n(x) \in \text{Graph}(\zeta_{\rho^n(y)}^s)$ donc $\rho^n(x)_c = \zeta_{\rho^n(y)}^s(\rho^n(x)_{u,s})$, on en déduit

$$\begin{aligned} |\rho^n(x)_c - \rho^n(y)_c| &= |\zeta_{\rho^n(y)}^s(\rho^n(x)_{u,s}) - \zeta_{\rho^n(y)}^s(\rho^n(y)_{u,s})| \\ &\leq \sigma \|\rho^n(x)_{u,s} - \rho^n(y)_{u,s}\| \\ &\leq \frac{\sigma}{K_u^n} \|x_{u,s} - y_{u,s}\| \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\|\rho^n(x) - \rho^n(y)\|_\infty \leq \frac{1}{K_u^n} \|x_{u,s} - y_{u,s}\|$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\rho^n(x), \rho^n(y)) = 0$$

Soit $x \notin \text{Graph}(\zeta_y^s)$. Montrons que l'orbite de x sous l'action de ρ doit sortir de Σ . Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle reste dedans. On note $x = (x_{u,s}, x_c)$ et on pose $z = (x_{u,s}, \zeta_y^s(x_{u,s}))$. Il faut penser à z comme le « projeté » de x sur le graphe de ζ_y^s . Par construction, on a $x \in C_z^c(\sigma)$ donc $\rho(x) \in C_{\rho(z)}^c(\sigma)$, $\rho(z) \in \zeta_{\rho(y)}^s \subset \Sigma$ et $|\rho(x)_c - \rho(z)_c| \geq K_c |x_c - z_c|$. Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho^n(x) \in C_{\rho^n(z)}^c(\sigma)$, $\rho^n(z) \in \zeta_{\rho^n(y)}^s \subset \Sigma$ et $|\rho^n(x)_c - \rho^n(z)_c| \geq K_c^n |x_c - z_c|$, ce qui est absurde puisque Σ est borné, $K_c > 1$ et $|x_c - z_c| > 0$. \square

5.5 Orbites de type VIII et IX qui pistent une chaine hétérocline

Rappelons qu'à tout point x du cercle de Kasner, on associe une chaine hétérocline $H_f(x)$ d'orbites de types I et II qui part de x :

$$H_f(x) = (x, \mathcal{O}_{\Pi}^u(x), f(x), \mathcal{O}_{\Pi}^u(f(x)), f^2(x), \dots)$$

Rappelons aussi que l'on note $P(x)$ l'ensemble des points (dans $\mathcal{B}_{\text{VIII}} \cup \mathcal{B}_{\text{IX}}$) dont l'orbite pour le champ X piste cette chaine hétérocline. Plus précisément, un point y est dans $P(x)$ si il existe une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ qui tend vers $+\infty$ et telle que

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X^{t_n}(y), f^n(x)) = 0$
2. La distance de Hausdorff entre le morceau d'orbite $\{X^t(y) \mid t_n < t < t_{n+1}\}$ et l'orbite $\mathcal{O}_{\Pi}^u(f^n(x))$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème principal, à savoir :

Théorème principal. *Soit F un compact (positivement) invariant par f inclus dans $\mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$. Pour tout $x \in F$, l'ensemble $P(x)$ est une variété lipschitzienne de dimension 3, injectivement immergée dans \mathcal{B} et qui dépend continûment de x .*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 5.24 (description des variétés stables locales pour l'application de retour ρ sur la section locale Σ) et de la proposition 5.25 ci-dessous. En effet, la continuité de $x \mapsto P(x)$ est une conséquence de la continuité de $x \mapsto x'$, de $x' \mapsto W^{s,loc}(\rho, x')$ et du flot de X . Le reste vient de la transversalité de $W^{s,loc}(\rho, x')$ par rapport au champ X .

Proposition 5.25 (Description des ensembles $P(x)$). *Soit F un compact (positivement) invariant par f inclus dans $\mathcal{K} \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ et soit $x \in F$. On note x' l'unique point d'intersection de l'orbite de type II qui part de x et de la section Σ , de sorte que $x' \in F'$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W^{s,loc}(\rho, \rho^n(x'))$ la variété stable locale de $\rho^n(x')$ pour l'application de retour ρ . Alors*

$$P(x) = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq 0} X^{-t} (W^{s,loc}(\rho, \rho^k(x'))) \right) \cap (\mathcal{B}_{\text{VIII}} \cup \mathcal{B}_{\text{IX}})$$

Autrement dit, l'ensemble $P(x)$ est l'ensemble des orbites de types VIII et IX qui rencontrent la variété stable locale d'un des itérés $\rho^k(x')$ pour l'application de retour sur Σ .

Démonstration. Commençons par montrer l'inclusion facile, c'est-à-dire

$$P(x) \subset \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X^t (W^{s,loc}(\rho, \rho^k(x'))) \right) \cap (\mathcal{B}_{\text{VIII}} \cup \mathcal{B}_{\text{IX}})$$

Soit $y \in P(x)$. Par définition, il existe une suite de temps strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ qui tend vers $+\infty$ et telle que

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X^{t_n}(y), f^n(x)) = 0$
2. La distance de Hausdorff entre le morceau d'orbite $\mathcal{O}_y^n := \{X^t(y) \mid t_n < t < t_{n+1}\}$ et l'orbite $\mathcal{O}_x^n := \mathcal{O}_{\Pi}^u(f^n(x))$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

La propriété 2 implique qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, le morceau d'orbite \mathcal{O}_y^n coupe la section Σ . On note z_n le premier point d'intersection. D'après la propriété 2, la distance entre z_n et le point d'intersection de \mathcal{O}_x^n avec Σ , c'est-à-dire $\rho^n(x')$, converge vers 0. D'autre part, on a, pour tout $n \geq n_0$, $z_n = \rho^{n-n_0}(z_{n_0})$. D'où $z_{n_0} \in W^{s,loc}(\rho, \rho^{n_0}(x'))$ et

$$y \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X^t(W^{s,loc}(\rho, \rho^{n_0}(x')))$$

On peut maintenant démontrer l'inclusion réciproque :

$$\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X^t(W^{s,loc}(\rho, \rho^k(x'))) \right) \cap (\mathcal{B}_{\text{VIII}} \cup \mathcal{B}_{\text{IX}}) \subset P(x)$$

Comme $P(x)$ est invariant par le flot, il suffit de montrer que

$$\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} W^{s,loc}(\rho, \rho^k(x')) \right) \cap (\mathcal{B}_{\text{VIII}} \cup \mathcal{B}_{\text{IX}}) \subset P(x)$$

Faisons le pour $k = 0$, les autres cas étant analogues. Soit $y \in W^{s,loc}(\rho, x') \cap (\mathcal{B}_{\text{VIII}} \cup \mathcal{B}_{\text{IX}})$. On note (T_n) la suite des temps telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X^{T_{n+1}}(y) = \rho^n(y)$$

Le temps que met une orbite de type VIII ou IX à traverser la boîte entre Σ et Σ^u est uniformément minoré par compacité de F donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$. Le point y étant dans la variété stable locale de x' , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X^{T_{n+1}}(y), \rho^n(x')) = 0$$

Or, le point $\rho^n(x')$ n'est autre que l'unique point d'intersection de \mathcal{O}_x^n avec Σ . On en déduit que la distance entre le point $X^{T_{n+1}}(y)$ et le point d'intersection de \mathcal{O}_x^n avec Σ tend vers 0. Le flot étant continue et $f^{n+1}(x)$ étant l'unique point ω -limite de l'orbite \mathcal{O}_x^n , on en déduit immédiatement l'existence d'une suite de temps (t_n) telle que pour tout n , $t_n \in]T_n, T_{n+1}[$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X^{t_n}(y), f^n(x)) = 0$$

Il reste à voir que \mathcal{O}_y^n converge au sens de Hausdorff vers \mathcal{O}_x^n . C'est une conséquence directe de la continuité du flot et de la propriété suivante montrée dans la partie 4.3 (voir la proposition 4.13) : si $X^{t_n}(y)$ est très proche de $f^n(x)$, alors l'orbite future de $X^{t_n}(y)$ reste près de l'orbite \mathcal{O}_x^n tant qu'elle ne sort pas de la boîte entre Σ et Σ^u et, de même, l'orbite passée de $X^{t_n}(y)$ reste près de l'orbite \mathcal{O}_x^{n-1} tend qu'elle ne sort pas de la boîte entre Σ et Σ^u . \square

Références

- [1] Stefan Liebscher, Jörg HÄrterich, Kevin Webster, Marc Georgi. Ancient Dynamics in Bianchi Models : Approach to Periodic Cycles. Commun.Math.Phys.305 :59-83,2011.
- [2] François Béguin. Aperiodic Oscillatory Asymptotic Behavior for some Bianchi Spacetimes. Classical Quantum Gravity 27, No. 18, Article ID 185005, 24 p. (2010).
- [3] M. Reiterer, E. Trubowitz. The BKL Conjectures for Spatially Homogeneous Spacetimes. arXiv :1005.4908, 2010.
- [4] John Milnor. Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups. Advances in Mathematics 21, 293-329 (1976).
- [5] Hans Ringstrom. The Cauchy Problem in General Relativity. ESI, Lectures in Mathematics and Physics.
- [6] Hans Ringstrom. Curvature Blow Up in Bianchi VIII and IX Vacuum Spacetimes. Class.Quant.Grav. 17 (2000). arXiv :gr-qc/9911115.
- [7] J. Mark Heinzle, Claes Uggla. A new proof of the Bianchi type IX attractor theorem. Classical and Quantum Gravity, Volume 26, Number 7 (2009). arXiv :0901.0806.
- [8] Manfredo Perdigao Do Carmo. Riemannian Geometry. Birkhauser, Mathematics : Theory and Applications.
- [9] Boris Hasselblatt. Hyperbolic Dynamical Systems. Newton Institute Preprints.
- [10] Robert Bartnik, Jim Isenberg. The Constraint Equations. Chruściel, Piotr T. (ed.) et al., The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields. 50 Years of the Cauchy problem in general relativity. With DVD. Basel : Birkhäuser (ISBN 3-7643-7130-7/hbk). 1-38 (2004).