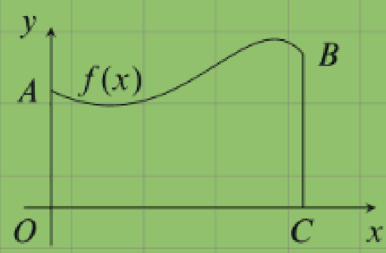
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x>0)$$



大学生数学竞赛教程

蒲和平◎编著
谢云荪◎主审

蒲和平大学生数学竞赛教程

课后习题解析

作者:hoganbin
Email:hoganbin1995@outlook.com
微信公众号:八一考研数学竞赛

更新:May 23, 2019
版本: 3.07

ElegantLaTeX Program

电子工业出版社

目　录

第 1 章 函数、极限、连续

1.1 函数

✍ 习 题 1.1

1. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\le 0\\ x+2, x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$，求 $g(f(x))$.

   解： 由题设知

   - 当 $x<0$, $f(x)=x^2>0$, 则有 $g(f(x))=g(x^2)=x^2+2$.
   - 当 $x\geqslant 0$, $f(x)=-x\leqslant 0$, 则有 $g(f(x))=g(-x)=x+2$.

   即有 $g(f(x))=\begin{cases}x^2+2, x<0\\ x+2, x\geqslant 0\end{cases}$.

2. 已知 $f(x)$ 满足等式 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}$，求 $f(x)$ 的表达式.

   解： 变量代换令 $t=\frac{1}{x}$，然后通分消 $f(\frac{1}{x})$ 即可. 由题设易知

$$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \tag{1.1.1}$$

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=1+\frac{1}{1+x} \tag{1.1.2}$$

   然后将式1.1.2乘以 x^2，式1.1.1乘以 2，然后两式相减得 $f(x)=\frac{x}{1+x}$.

3. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right]$，求 $f(x)$ 的显式表达式.

   解：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right]&=\lim_{n\to\infty}n\left\{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x-\mathrm{e}^x\right\}=\lim_{n\to\infty}ne^x\left\{\left[\frac{(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}}{e}\right]^x-1\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}ne^x\left\{\left[1+\frac{(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}-e}{e}\right]^x-1\right\}=\lim_{n\to\infty}ne^x\frac{(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}-e}{e}x\\
&=x^2e^{x-1}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}-e}{\frac{x}{n}}=x^2e^{x-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}\\
&=x^2e^{x-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}}{1}=x^2\mathrm{e}^x\lim_{t\to 0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{(1+t)t^2}\\
&=x^2\mathrm{e}^x\lim_{t\to 0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2}=x^2\mathrm{e}^x\lim_{t\to 0}\frac{1-1-\ln(1+t)}{2t}\\
&=-\frac{1}{2}x^2e^x
\end{aligned}$$

4. 设函数 $F(x)$ 是奇函数，$f(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$，其中 $a>0, a\neq 1$. 证明：$f(x)$ 是偶函数.

   证明： 由 $f(-x)=F(-x)\left(\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}\right)$，且 $F(x)$ 为奇函数，则有 $F(x)=-F(-x)$，即要证 $f(x)$ 为偶函数，则有 $\frac{f(-x)}{f(x)}=-\left(\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\frac{a^x+1}{2(1-a^x)}}{\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}}=1$，即证 $f(x)=f(-x)$.

5. 设对一切实数 x，有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，证明 $f(x)$ 是周期函数.

解：考虑到 $f(x+1)=f[(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]$，故有

$$
\begin{aligned}
f(x+1)&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+\frac{1}{2})-f^2(x+\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}+f(x)-f^2(x)\right)}\\
&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

由于

$$
f(x)=f(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-\frac{1}{2})-f^2(x-\frac{1}{2})}\geqslant\frac{1}{2}\tag{1.1.4}
$$

即 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=f(x)-\frac{1}{2}$，将其代入1.1.3式，得 $f(x+1)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)$

6. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足等式 $f(3-x)=f(3+x)$, $f(8-x)=f(8+x)$，且 $f(0)=0$，试问：方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0,2014]$ 上至少有多少个根.

解： 此题需要用到下面的结论：若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于二垂直轴 $x=a, x=b(b>a)$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数 $T=2(b-a)$.

由于 $f(x)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$; $f(8+x)=f(8-x)$，即 $f(x)$ 的图形既关于直线 $x=3$，又关于直线 $x=8$ 对称，于是 $f(x)$ 是以 $T=2(8-3)=10$ 为周期的周期函数.

事实上，若 $f(t)$ 满足 $f(a-t)=f(a+t)$，令 $x=a-t$，则 $a+t=2a-x$，即对任意实数 x，有 $f(x)=f(2a-x)$；又因为 $f(b-t)=f(b+t)(b>a)$. 对任意实数 x，令 $t=2a-x$，则有

$$
f(x)=f(2a-x)=f(t)=f(2b-t)=f[2b-(2a-x)]=f[x+2(b-a)]
$$

于是 $f(x)$ 以 $T=2(b-a)=2(8-3)=10$ 为周期. 在 $f(3-x)=f(3+x)$ 中，令 $x=3$，则 $f(6)=f(0)=0$. 在 $f(8-x)=f(8+x)$ 中，令 $x=2$，则 $f(6)=f(10)=0$.

因此 $f(x)$ 在 $(0,10]$ 中至少有 2 根，以 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数 [*] 因此在 $(0,2014]$ 中 $f(x)=0$ 至少有 $2[\frac{2014}{10}]=402$ 个根，再加上 $x=0$ 这个根 f(x) 在 $[0,2014]$ 中至少有 $N=403$ 个根.

7. 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 满足 $f(x+T)=kf(x)$(其中 T 和 k 是正整数)，证明 $f(x)$ 可表示为 $f(x)=a^x\varphi(x)$，式中 $a>0$, $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

解：由假定 $k>0, T>0$, 现令 $a=k^{\frac{1}{T}}>0$, 则 $a^T=k$，即有 $f(x+T)=a^Tf(x)$. 现定义函数如下 $\varphi(x)=a^{-x}f(x)$，可知 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数.

事实上 $\varphi(x+T)=a^{-(x+T)}f(x+T)=a^{-x}a^{-T}a^Tf(x)=a^{-x}f(x)=\varphi(x)$. 因此 $f(x)=a^x\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数，证毕.

8. 若对任意 x,y，有 $f(x)-f(y)\leqslant(x-y)^2$，求证对任意正整数 n，任意 a,b，有

$$
|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{n}(b-a)^2
$$

解：法 1：

- 当 $a=b$，显然成立;

- 当 $a \neq b$，不妨设 $a<b$ 将 $[a,b]n$ 等分，设分点 $x_i, i=0,1,2,\cdots,n$ 则有

$$
\begin{aligned}
|f(b)-f(a)| &= |\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\frac{(b-a)}{n})^2 = n\frac{(b-a)^2}{n^2} = \frac{1}{n}(b-a)^2
\end{aligned}
$$

法 2：证 $f(x)$ 常值函数

$$
0 \leqslant |\lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leqslant \lim_{x\to y}|x-y| = 0
$$

即 $f'(y)=0$, y 具有任意性

1.2 极限

✍ 习 题 1.2

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\cdots\left(1+x^{2n}\right)$

解：

(1) 分母有理化有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} = 2
\end{aligned}
$$

(2) 一步到位

$$
\text{原极限} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1
$$

(3) 很容易得到在 $x=-1$ 极限为 0，在 $x<-1$ 与 $x\geqslant 1$ 时，无极限，现在我们来讨论在 $|x|<1$ 时的情况，可考虑

$$
a_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^n})
$$

然后两边乘 $1-x$ 有

$$
\begin{aligned}
(1-x)a_n &= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) \\
&= (1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) \\
&= \cdots = 1-x^{2^{n+1}},
\end{aligned}
$$

即

$$
\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.
$$

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x - x\arctan x}{\mathrm{e}^x + x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解:

(1) 极限不存在.

(2) 考虑左右极限

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

注意:这里出现了绝对值函数 (绝对值函数实际上是分段函数) 以及 $e^{\frac{1}{x}}$(这里由于 $\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0$),容易想到考虑左、右极限.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\mathrm{e}^{2+\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{2-\frac{1}{n}}-2\mathrm{e}^2\right]$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x^2}}-1}{\arctan x^2}=C\neq 0$,求 a,b,使得 $x\to 0,\quad f(x)\sim ax^b$.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x\ln\left[\left(1+\sin x+\cos^2 x\right)/(1-\sin x)\right]$

6. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}$

(3) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[k]{k}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

解:

(1) 法 1:利用不等式

$$x-\frac{1}{6}x^3\leqslant\sin x\leqslant x,\quad x\in[0,\pi/2)$$

则有

$$\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{6}\frac{\pi^3}{(n^2+k)^{3/2}}\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}$$

即

$$\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}}-\frac{1}{6}\frac{\pi^3}{n^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)\leqslant\pi.$$

根据夹逼法则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)=\pi.$

法 2: 利用泰勒展开, 当 $n \to \infty$, 有

$$\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}} + O\left(\frac{\pi}{(n^2+k)^{3/2}}\right)$$

得到

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}} + \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{\pi}{(n^2+k)^{3/2}}\right)$$

对 $\exists C \geqslant 0$, 当 $n \to \infty$, 有

$$\frac{C\pi n}{(n^2+n)^{3/2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{\pi}{(n^2+k)^{3/2}}\right) \leqslant \frac{C\pi n}{(n^2+1)^{3/2}}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{\pi}{(n^2+k)^{3/2}}\right) = 0$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right) = \pi$.

(2) 由于 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n^2}}$, 即对 $\forall k \in [1,n]$ 有

$$\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n^2}} \leq \frac{1+\frac{k}{n}}{1+0} = 1+\frac{k}{n}$$

因此

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n^2}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)$$

考虑到 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, 即有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} = \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

(3) 由 $\dfrac{1}{\sqrt[k]{k}} < 1 (k > 1)$, 即 $1 \leqslant a_n \leqslant n$, 可知 $1 \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{n} \to 1 (n \to \infty)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

7. 设 $F(x) = \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$.

解: 考虑 $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 与 $m = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 则有

(1) 当 $x > 0$ 时, 有 $M \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \leqslant F(x) \leqslant M$, 由夹逼法则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = M$.

(2) 当 $x > 0$ 时, 有 $m \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \leqslant F(x) \leqslant m$, 由夹逼法则可知 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = m$.

(3) 由 $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + e_n^x}{\pi}}{x}$, 即可得

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \exp\left(\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}\right) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

8. 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 x_n 的极限存在, 并求出极限.

9. $0 < a < 1, x_1 = \dfrac{a}{2}, x_n = \dfrac{a}{2} + \dfrac{x_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, \cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 存在, 并求此极限.

10. 设数列 x_n 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{\tan x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

11. 设 $x_1=\dfrac{1}{1}, x_2=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}, x_3=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

12. 设 $x_{n+1}=x_n\left(2-Ax_n\right), n=0,1,2,\cdots$，其中 $A>0$. 确定初始值 x_0，使得 x_n 收敛.

13. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点与 $y=\sin x$ 相切，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}$.

14. 设函数 $f(x)>0$，在 $x=a$ 处可导，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^n$.

解：由题设易知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^n &= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^{\frac{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}} \\
&= e^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}
\end{aligned}
$$

或取对数得

$$
\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\exp\left(n\left(\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f\left(a-\frac{1}{n}\right)\right)\right)=e^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}
$$

注意：该极限属于型的问题，一般可利用重要极限或利用指数、对数去解决.

15. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\dfrac{\arctan(x+1)}{\arctan x}$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}$

16. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

17. 如图弦 PQ 所对的圆心角为 θ，设 $A(\theta)$ 是弦 PQ 与弧 PQ 之间的面积，$B(\theta)$ 是切线长 PR、QR 与弧之间的面积，求极限 $\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}$.

18. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{\left(1-\sin^{\alpha}x\right)\left(1-\sin^{\beta}x\right)}}$

19. 试确定常数 a,b，使极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ 存在，并求出它的值.

20. 确定 a,b 的值，使当 $x\to0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小.

21. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$

(1) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 $f''(x)$.

22. 当 $x\to0$ 时，$f(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$ 是关于 x 的几阶无穷小？

解：易知

$$
f(x)=\left(x^2+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(x^2+x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{15}}\left[\left(1+x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(1+x^{\frac{9}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]
$$

$$= x^{\frac{1}{15}}\left[1+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}+o\left(x^{\frac{5}{3}}\right)-\left(1+\frac{1}{3}x^{\frac{9}{5}}+o\left(x^{\frac{9}{5}}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{5}x^{\frac{26}{15}}+o\left(x^{\frac{26}{15}}\right)-\frac{1}{3}x^{\frac{28}{15}}+o\left(x^{\frac{28}{15}}\right)=\frac{1}{5}x^{\frac{26}{15}}+o\left(x^{\frac{26}{15}}\right)$$

即 $f(x)$ 是关于 x 的 $\dfrac{26}{15}$ 阶无穷小.

23. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\sin x}-x-\cos x}{\arcsin^2 x}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^4}{12}}{\sin^6 x}\right)$

24. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}=D\neq 0$,求常数 A,B,C,D.

解: 此题暴力泰勒展开

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)\overset{(\text{泰勒展开})}{=}\exp\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+o\left(x^3\right)\right)$$
$$=\exp\left(1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)^3+o\left(x^3\right)\right)$$
$$=\exp\left(1-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{48}\right)x^3+o\left(x^3\right)\right)$$
$$=\exp\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)$$

因此得到 $A=e,B=-\dfrac{1}{2}e,C=\dfrac{11}{24}e,D=-\dfrac{7}{16}e$

25. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{n^2}\right)$.

解: 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$,则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

26. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

解:

(1) 由定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i+1}{n})^2}<\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$，即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i+1}{n})^2}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

考虑到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i+1}{n})^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{n+1}{n})^2}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-0+0=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

两边夹可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\frac{\pi}{4}$

(3) 由于 $\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$，即有

法一：根据 Stolz 定理

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-n\ln n}{n}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n!-n\ln n)-[\ln(n-1)!-(n-1)\ln(n-1)]}{n-(n-1)}\\&=\exp\lim_{n\to\infty}(\ln n!-n\ln n)-[\ln(n-1)!-(n-1)\ln(n-1)]\\&=\exp\lim_{n\to\infty}(n-1)\ln(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

法二：定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\exp\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{e}$$

其中 $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x=-1.$

法三：

定理 1.1. 柯西命题

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

证明： 我们只需证明：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a=\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}$$

是无穷小，而条件是 $\{a_n-a\}$ 是无穷小，这表明只需对 $a=0$ 这一特殊情况来证明这个命题就行了. 由于 $a_n\to a$ 对任意的 $\epsilon>0$, 存在一个正整数 N, 当 $n>N$ 时，便有 $|a_n|<\frac{\epsilon}{2}$, 设 $n>N$，这时有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|&=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\right|\\&\leqslant\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_N|}{n}+\frac{1}{n}(|a_{N+1}|+\cdots+|a_n|)\\&\leqslant\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_N|}{n}+\frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由于 N 已经取定，$|a_1+a_2+\cdots+a_N|$ 便是一个有限数，再取整数 $N_1>N$, 使得

当 $n > N_1$ 时,有

$$\frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_N|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

可见,$n > N_1$ 时,有

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \epsilon$$

这就证明了当 $a_n \to a(n \to \infty)$ 时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$$

定理 1.2. 乘积形式的柯西命题

证明:如果 $x_n(n = 1, 2, \cdots)$ 收敛,且 $x_n > 0$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

解: 记 $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 则 $a \geqslant 0$. 若 $a > 0$, 则也有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, 根据平均值不等式 $H \leqslant G \leqslant A$,刻碟

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

令 $n \to \infty$ 并在两边用柯西命题,可见他们都收敛于 a, 因此得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$$

在 $a = 0$ 的情况则只要如上写出右边的不等式后再用柯西命题.

然后将数列通项写成 $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ 记 $x_n = \frac{n^n}{n!}$,则有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

然后用上题的定理可证.

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} = \frac{1}{e}$$

.

法四:斯特林公式 $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}} \ (0 < \theta_n < 1)$,也就 $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$,即有

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim \frac{\frac{n}{e}\sqrt[n]{2\pi n}}{n} = \frac{1}{e}\sqrt[n]{2\pi n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\sqrt[n]{2\pi n} = \frac{1}{e}$$

法五:考虑到 $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\frac{\ln n!}{n} - \ln n} \sim e^{\frac{n\ln n - n + 1}{n} - \ln n} = e^{-1+\frac{1}{n}}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$.

法六:令 $a_n = \frac{n!}{n^n}$,有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$

法七:考虑

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{1} \cdots \frac{(n+1)^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots\cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

由正项数列可得到 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\longrightarrow a\ (n\to\infty)$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}=\dfrac{1}{e}$

法八：考虑 $\displaystyle\int_{k=1}^{k}\ln x\mathrm{d}x<\ln k<\int_{k}^{k+1}\ln x\mathrm{d}x, k=1,2,\ldots,$ 即 $\displaystyle\int_0^n\ln x\mathrm{d}x<\ln(n!)<\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x$，则有

$$n\ln n-n<\ln n!<(n+1)\ln(n+1)-n\Rightarrow\frac{n^n}{e^n}<n!<\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

因此

$$\frac{n}{e}<\sqrt{n!}<\frac{n+1}{e}\cdot\sqrt[n]{n+1}\Rightarrow\frac{1}{e}<\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\frac{1}{e}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{n+1}$$

由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n!}=\dfrac{1}{e}$.

注意：因此这个题 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{2}{e}$.

27. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{1+x}\mathrm{d}x$.

解：考虑 $f_n(x)=\dfrac{\sin^n x}{1+x}, g(x)=\dfrac{1}{1+x}$，对 $k\in\mathcal{Z}$ 在 $a\neq\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$，有 $|\sin(a)|<1$，即当 $n\to\infty$ 有 $f_n(a)\to 0$. 注意到 $|f_n(x)|\le|g(x)|$ 且 $g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 可积，因此根据勒贝格控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}0\mathrm{d}x=0.$$

28. 设 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明：法 1：单调有界数列必收敛，利用不等式

$$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

得 $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}>2\sqrt{n+1}-2-2\sqrt{n}>-2$，即有上限.

又由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0$，即 $x_{n+1}<x_n$，故 x_n 单调递减，有下界. 即证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

法 2：本题利用级数的知识证明数列收敛更容易

$$0<a_n-a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}<\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

由正项级数审敛法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，从而数列 $\{x_n\}$ 收敛.

注意：利用级数的知识去说明数列收敛甚至求极限也是要掌握的方法，一般有两种情况：

(1) 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$，且 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$.

29. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}(a>1,k>0)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right]$

30. 序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 由下列条件定义：$x_0=a,x_1=b,x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}+(2n-1)x_n}{2n},n\geqslant 1$ 这里 a 与 b 是已知数，试用 a 与 b 表示 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$.

解：由于

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \left(-\frac{1}{2n}\right)(x_n-x_{n-1})=\cdots \\ &= \left(-\frac{1}{2n}\right)\left(-\frac{1}{2(n-1)}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)(x_1-x_0) \\ &= (-1)^n\frac{b-a}{2^n\cdot n!} \end{aligned}$$

即 $x_n-x_{n-1}=(-1)^{n-1}\dfrac{b-a}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}(n=1,2,\cdots)$

所以 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})+x_0=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\dfrac{b-a}{2^{i-1}\cdot(i-1)!}+a$

由此得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{b-a}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}+a=(b-a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+a=(b-a)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}+a$$

31. 证明压缩映射定理.

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，存在 $0<a<1$，使得对任何 x,y 都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\alpha|x-y|$$

证明存在唯一的 x_0 使得 $x_0=f(x_0)$(x_0称为不动点).

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导且 $\left|f'(x)\right|\leqslant\alpha$，其中常数 $\alpha<1$. 任取 $x_1\in(-\infty,+\infty)$ 有 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并且不依赖于初始值 x_1.

解：

(1) 先证不动点的存在性

任取 $x_1\in(-\infty,+\infty)$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,3\cdots)$, 则

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant\alpha|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant\alpha^{n-1}|x_2-x_1|$$

注意到 $0<\alpha<1$, 可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 绝对收敛，设 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 再由 $f(x)$ 的连续性可知 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1})=f(x_0)$，即 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个不动点

再证不动点的唯一性，设另有不动点 $\overline{x_0}=f(\overline{x_0})$, 则

$$|\overline{x_0}-x_0|=|f(\overline{x_0})-F(x_0)|\leqslant\alpha|\overline{x_0}-x_0|$$

注意到 $0<\alpha<1$, 这个不等式只有在 $|\overline{x_0}-x_0|=0$ 时才成立，即 $\overline{x_0}=x_0$.

(2) 由拉格朗日中值定理可知，对任何 x,y 都有 $|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|\leqslant\alpha|x-y|$

由 (1) 的证明可知，存在极限 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 它是 $f(x)$ 唯一的不动点且这个不动点不依赖于初值 x_1 .

32. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 有几条渐近线？

33. 求曲线 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的渐近线.

1.3 连续

✍ 习 题 1.3

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$，问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 是否连续？若不连续，修改函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的定义使之连续.

2. 求 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\pi x}{x^2+ax+b}, x\neq\dfrac{1}{2}\\ 2, \quad x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 连续.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax+b}{2x^3+3x^2-1}, x\neq -1\\ c, \quad x=-1\end{cases}$，试确定 a,b,c 的值使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 连续.

4. 求 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的间断点并指出其类型.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+ax^3\right)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

6. 设 $f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2 x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x$，求证：
   (1) 对任意的自然数 n，方程 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内仅有一根.
   (2) 设 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

解：

- 因为 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，又 $f_n(0)=1$，$f_n(\dfrac{\pi}{2})=0$，故由介值定理知存在 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 使得 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$ 且因为
$$f_n'(x)=-n(1-\cos x)^{n-1}\sin x<0\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$
所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内单调递减. 因此满足方程 $f(x_n)=\dfrac{1}{2}$ 的根 x_n 存在且唯一.
- 因为 $f_n\left(\arccos\dfrac{1}{n}\right)=1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$，令 $n\to\infty$ 两边取极限，有
$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{e}>\frac{1}{2}$$
说明存在正整数 N，使对于 $n\geq N$ 时有 $f_n\left(\arccos\dfrac{1}{n}\right)>\dfrac{1}{2}=f_n(x_n)$
因为 $f_n(x)$ 严格单调递减，所以 $\arccos\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{\pi}{2}$，对于 $n\geq N$ 由夹逼定理即知，当 $n\to\infty$ 时有 $x_n\to\dfrac{1}{2}$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$

7. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$ 试证：对一切 x 满足 $f(2x)=f(x)e^x$ 的充分必要条件是 $f(x)=f(0)e^x$.

证明：充分性：事实上如果 $f(x)=f(0)e^x$，那么 $f(2x)=f(0)e^{2x}=f(0)e^x\cdot e^x=f(x)e^x$
必要性：已知 $f(2x)=f(x)e^x$，依次用 $\dfrac{x}{2}$ 代替 $f(x)$ 中的 x，则得 $f(x)=f(\dfrac{x}{2})e^{\frac{x}{2}}$
其中 $f(\dfrac{x}{2})=f(\dfrac{x}{2^2})e^{\frac{x}{2^2}},\cdots,f(\dfrac{x}{2^{n-1}})=f(\dfrac{x}{2^n})e^{\frac{x}{2^n}}$
于是
$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}=f\left(\frac{x}{2^2}\right)e^{\frac{x}{2^2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}=f\left(\frac{x}{2^2}\right)e^{\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\ldots$$

$$= f(\frac{x}{2^n})e^{\frac{x}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})} = f(\frac{x}{2^n})e^{\frac{x}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}} = f(\frac{x}{2^n})e^{x(1-\frac{1}{2^n})}$$

将 x 固定,在上式中,令 $n\to\infty$,得到 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{x}{2^n})e^{x(1-\frac{1}{2^n})}$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xlongequal{t=\frac{x}{2^n}} \lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0)$,且 $e^{x(1-\frac{1}{2^n})} \xlongequal{u=\frac{1}{2^n}} \lim\limits_{n\to\infty} e^{x(1-u)} = e^x$,因此 $f(x) = f(0)e^x$ 得证.

8. 设 $f(x)\in C[0,2]$,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$,证明:$\exists\xi\in(0,2)$ 使 $f(\xi)=1$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续,且 $f(0)=f(1)=0$. 证明:对实数 $a(0<a<1)$,必有 $\xi\in[0,1)$,使得 $f(a+\xi)=f(a)$.

10. 依次求解下列问题:

(1) 证明方程 $e^x + x^{2n+1} = 0$ 有唯一的实根 $x_n(n=0,1,2,\cdots)$;

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求其值 A;

(3) 证明当 $n\to\infty$,$x_n - A$ 与 $\dfrac{1}{n}$ 是同阶无穷小.

证明:

(1) 很容易知道 $f_n(x)$ 是关于自变量 x 单调递增,且 $f_n(0)=1>0$, $f_n(-1)=e^{-1}-1<0$,由函数连续性可知方程存在唯一的实根 $x_n\in(-1,0)$;

(2) 考虑 $f_n(x_n) = e^{x_n} + (x_n)^{2n+1} = 0$,则 $x_n = -e^{\frac{x_n}{2n+1}}$,又因为 $x_n\in(-1,0)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{2n+1} = 0$.
由函数连续性可知存在极限 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -e^0 = -1$.

(3) 根据拉格朗日中值定理得

$$x_n - A = x_n + 1 = e^0 - e^{\frac{x_n}{2\pi+1}} = -e^{\xi_n}\frac{x_n}{2n+1}$$

其中 ξ_n 介于 0 与 $\dfrac{x_n}{2n+1}$ 之间,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+1}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(-e^{\varepsilon_n}\cdot x_n\cdot\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

即证.

11. 设 Ω 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上某些连续函数所构成的集合,满足当 $f(x)=Q$,存在常数 k,使得 $f(f(x)) = kx^9$. 试确定常数 k 的取值范围.

证明:充要条件是 $k\geq 0$. 若 $k\geq 0$, 我们发现 $f(x)=\sqrt[4]{k}x^3$ 满足 $f(f(x))=kx^9$. 相反地, 我们注意到 $k\neq 0$ 及对一切实数 x 有 $f(f(x))=kx^9$ 可推出 f 能取到一切实数值. 由 kx^9 确定了 f 是一对一的. 事实上从 $f(a)=f(b)$ 可导出 $ka^9=f(f(a))=kb^9$, 所以 $a=b$. 但是, 从实数集 R 到其自身上的一个连续的一对一函数 f 必定是严格单调的. 当 f 为单调时, 通常是递增的或者是递减的, $f(f(x))$ 将总是递增的. 所以当 $k<0$ 时, 不可能等于 kx^9.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $f[f(x)]=x$. 证明:在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$.

证明: 法 1:假设对 $\forall x\in[a,b]\subset R, F(x)\neq 0$ 故由零值定理知 $f(x)-x$ 不变号,即 $f(x)-x>0$或$(f(x)-x<0), x\in[a,b]$,因此 $x=f(f(x))>f(x)>x$ 矛盾

法 2:欲证 $\exists x_0\in(-\infty,+\infty), s.t\quad f(x_0)-x_0=0$,作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$. 由题设条件知,函数 $f(x)$ 不恒为 x,所以存在实数 t,使得 $f(t)\neq t$,且在 $[t,f(t)]$或$[f(t),t]$ 上连续,并有 $F(t)F(f(t)) = (f(t)-t)(f(f(t))-f(t)) = -(f(t)-t)^2 < 0$

故由零点定理知,存在 $x_0\in(t,f(t))$,或 $(f(t),t)$ 使得 $F(x_0)=0$,即存在 x_0 使得 $F(x_0)=0$.

1.4 综合题 1

1. 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.
2. 设对 $\forall x,y$ 为实数，有 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ 且 $f(x)\geqslant 0,\ f(0)=c$，证明：$f(x)=c$.
3. 试构造一个整系数多项式 ax^2+bx+c，使它在 $(0,1)$ 上有两个相异的根，同时给出 a 是满足所述条件的最小正整数，并证明之.
4. 炮弹击中距地面高度为 h 的正在飞行的飞机. 已知炮弹在地面上发射时有初速度 V，大炮位置及其仰角都是未知的. 试推断大炮位于一圆内，其圆心在飞机的正下方，半径是 $(V/g)\sqrt{V^2-2gh}$(忽略大气阻力).
5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非负实数，试证：$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|$ 的充分必要条件为 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\leqslant 1$.

证明：由题设可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\le|\sin x|\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{x}\right|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

即

$$\left|\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{x}\right|\le 1\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k\right|\le 1$$

6. 是否存在自然数 n 使得式子 $(2+\sqrt{2})^n$ 的值的小数部分大于 $0.\underbrace{99\cdots 9}_{2014个9}$.
7. 设 $a_1=\sqrt{\dfrac{1}{2}},a_n=\sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}(n=2,3,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n$.
8. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\sqrt{x^2+k}$.
9. 设 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_{n+1}^k/n^2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
10. 设 $x_1>0,x_{n+1}=\ln(1+x_n),n=1,2,\cdots$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 且 $x_n\sim\dfrac{2}{n}(n\to+\infty)$.
11. 给定一个序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 且具有性质 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.
12. 设 $a_1=1,a_k=k(a_{k-1}+1)(k=2,3,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{a_k}\right)$.
13. 设 $b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{C_n^k}(n=1,2,\cdots)$. 证明：

    (1) $b_n=\dfrac{n+1}{2n}b_{n-1}+1(n=2,3,\cdots)$

    (2) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$
14. 设 $f_1(x)=x,f_2(x)=x^x,f_3(x)=x^{x^x},\cdots,f_n(x)=x^{\{x^x\}共有n个}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f_n(x)$.
15. 设 $x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n},\cdots$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求极限值.
16. 证明：数列 $\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\cdots$ 收敛，并计算其极限值.
17. 一数列由递推公式 $u_1=b,u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2(n=1,2,\cdots)$ 所确定. 当 a,b 满足何种关系时，数列 u_n 收敛？它的极限是何值？
18. 序列 x_n 对一切 m 与 n 满足条件 $0\leqslant x_{n+m}\leqslant x_n+x_m$. 证明：序列 $\dfrac{x_n}{n}$ 收敛.
19. 设 $x_1,x_2,\cdots$ 是非负序列，满足 $x_{n+1}\leqslant x_n+\dfrac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

20. 设 $a>0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\frac{a+s}{n}\right)^{n}$ 介于 e^{a} 与 e^{a+1} 之间.

21. 设 $u_n=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\cdots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

22. 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$

23. 设 $0<x_1<1$ 而 $x_{n+1}=x_n\left(1-x_n\right),n=1,2,\cdots$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

24. 设 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，记 $\{x\}=x-[x]$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^{n}\right\}$.

25. 设实函数 $f(x)$ 定义于 $0<x<1$，以 $f(x)=o(x)$ 表示当 $x\to 0$ 时 $\frac{f(x)}{x}\to 0$.
试证以下推断：若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 以及 $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=o(x)$，则 $f(x)=o(x)$.

26. 对于实数对 (x,y)，定义数列 a_n，其中 $a_0=x,a_{n+1}=\frac{a_n^2+y^2}{2}(n=0,1,2,\cdots)$. 设区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\text{使得数列}\ \{a_n\}\ \text{收敛}\right\}$，求 D 的面积.

27. 设 a_1,b_1 是任意取定的实数，令

$$a_n=\int_0^1\max\left(b_{n-1},x\right)\mathrm{d}x,\ b_n=\int_0^1\min\left(a_{n-1},x\right)\mathrm{d}x,\ n=2,3,4,\cdots$$

证明数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

28. 空气通过盛有 CO_2，吸收剂的圆柱形器皿，已知它吸收 CO_2 的量与 CO_2 的百分浓度及吸收层厚度成正比. 今有 CO_2，含量为 8% 的空气，通过厚度为 10 厘米的吸收层，其 CO_2，含量为 2%. 问：

(1) 若通过的吸收层厚度为 30 厘米，出口处空气中 CO_2，的含量是多少？

(2) 若要使出口处空气中 CO_2，的含量为 1%，其吸收层厚度应为多少？

29. 求证方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x=1(n=2,3,4,\cdots)$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

30. 设有一实值连续函数，对于所有的实数 x 和 y 满足函数方程 $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f(x)f(y)$ 及 $f(1)=2$. 证明：$f(x)=2^{x}$.

31. 对于每一个 $x>\mathrm{e}^{x}$，归纳定义一个数列，$u_0,u_1,u_2,\cdots$ 如下：$u_0=e,u_{n+1}=\log_{u_n}x(n=0,1,2,\cdots)$. 证明：该数列收敛，记 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$，并且 $x>e^{e}$ 时 $g(x)$ 是连续的.

32. 设 $f(x)$ 是连续函数，使得对所有的 x 都有 $f\left(2x^2-1\right)=2xf(x)$ 成立. 证明：对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$，恒有 $f(x)=0$.

33. 设 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并有数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，使得 $f\left(x_{n+1}\right)=g\left(x_n\right),n=1,2,\cdots$ 证明存在一点 x_0，使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

34. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f[f(x)]=x$. 证明：$f(x)=x$.

35. 定义在 R 上的函数 f 满足：f 在 $x=0$ 连续，且对 $x,y\in\mathrm{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明：对 $\forall x\in\mathrm{R},\ f(x)=xf(1)$.

36. 函数 $f(x)$ 在半直线 $[0,+\infty)$ 上有定义且一致连续，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$ （n 为自然数）对任何 $x\geqslant 0$ 成立. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

第 2 章 一元函数微分学

2.1 导数、微分的概念与计算

✍ 习 题 2.1

1. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 $f(0)$.
2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且对所有 $xy\neq 1$ 的实数 x,y，都有 $f(x)+f(y)+f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$，求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导，并求 $f(x)$ 的表达式.
3. 设 $f: I\to \mathrm{R}$ 是任一函数，$x_0\in I$，证明 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是：存在一个函数 $\varphi: I\to\mathrm{R}$，使
   (1) $f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0),\forall x\in I$
   (2) φ 在 x_0 处连续，且 $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.
4. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点与 $y=\sin x$ 相切，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}$.
5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$，讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性；确定 a、b 的值使 $f(x)$ 可导并求 $f'(x)$.
6. 确定 a,b 的值，使函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), x<0\\ 0, x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln\left(b+x^2\right), x>0\end{cases}$$
   在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导，并求它的导函数.
7. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx\ (a_i\in\mathrm{R}, i=1,2,\cdots,n)$，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.
8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=\begin{cases} f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$，求 $F'(x)$.
9. 设 $n\in\mathrm{N}_+$，试讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.
10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=1$. 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.
11. 设函数 $\varphi:(-\infty,x_0]\to\mathrm{R}$ 是二阶可导函数，选择 a,b,c，使 $f(x)$ 在 R 上二阶可导.
$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\leqslant 0\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x=0\end{cases}$$
12. 设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

13. 设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=2t+|t| \\ y=t^2+2t|t| \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
14. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程与法线方程.
15. 由方程 $x^y=y^x+\cos\left(x^3\right)$ 确定了隐函数，试确定 $A(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}y=A(x,y)\mathrm{d}x$(其中$x>0,y>0$).
16. 设 $f(x)$ 任意可导，且 $f'(x)=e^{-f(x)}$, $f(0)=1$，求 $f^{(n)}(0)$.
17. 设 $f(x)=\min\{\sin x,\cos x\}(-\infty<x<+\infty)$，求 $f^{(n)}(x)$.
18. 求 n 阶导数 $\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n)}$ $(n\geqslant 1)$.
19. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f^{(n)}(0)$.

2.2 微分中值定理与导数的应用

✍ 习 题 2.2

1. 证明当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$，有 $3\arccos x-\arccos\left(3x-4x^3\right)=\pi$.
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且满足 $f(1)-2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.
3. 已知 $a<b$，且 $a\cdot b>0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，试证：存在 $\xi\in(a,b)$ 满足 $\dfrac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$.
4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 二阶可导，且 $2f(0)=\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3)$，证明：$\exists\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.
5. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=f(b)=0$，试证：
   (1) 在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.
   (2) 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，满足 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.
6. 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$，与点 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f"(\xi)=0$.
7. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a)f'_-(b)>0$，证明方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.
8. 证明：无穷区间上的罗尔定理.
   (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty]$ 可导，且 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，证明：存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$
   (2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上连续，在 $(-\infty,a)$ 可导，且 $f(a)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，证明：存在 $\xi\in(-\infty,a)$ 使得 $f'(\xi)=0$.
   (3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，证明：存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$.
9. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：存在 $\xi\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

10. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f'(x) \neq 0$，证明：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}$.

11. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. 证明在区间 (a,b) 内至少两点 ξ_1, ξ_2，使

$$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2} = f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$$

12. 证明：多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$ 的全部根都是实数，且均分布在 $(-1,1)$ 上.

13. 证明不等式 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2} \quad (a > 1, n \geqslant 1)$.

14. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$，使

$$f'(x_1) = (b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = \left(b^2+ab+a^2\right)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

15. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，$f(0)=0, f(1)=1, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 个正数，且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = 1$，证明：存在 n 个不同的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$，使得

$$\frac{\lambda_1}{f'(x_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n}{f'(x_n)} = 1$$

16. 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 有 n 阶连续导数，且 $f^{(k)}(x_0) = 0 (k=2,3,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$，当 $0 < |h| < \delta$ 时，$f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(x_0+\theta h), (0<\theta<1)$. 试证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{n\sqrt[n-1]{n}}$.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足条件 $|f(x)| \leqslant a, \left|f''(x)\right| \leqslant b$，其中 a,b 都是正实数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$\left|f'(c)\right| \leqslant 2a + \dfrac{b}{2}$.

18. 设 $f(x) \in C^3[0,1]$，且 $f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$，证明在 $(0,1)$ 内至少一点 $\xi \in (0,1)$ 满足 $\left|f''(\xi)\right| \geqslant 24$.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导.
   (1) 证明当 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$ 时，存在一点 $\xi_1 \in (-1,1)$，使得 $f'''(\xi_1) \leqslant 3$.
   (2) 又设 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明存在一点 $\xi_2 \in (-1,1)$，使得 $f'''(\xi_2) = 3$.

20. 试证明：当 $0 < x < a$ 时，多项式 $(a-x)^6 - 3a(a-x)^5 + \dfrac{5}{2}a^2(a-x)^4 - \dfrac{1}{2}a^4(a-x)^2$ 仅取负值.

21. 试比较 π^e 与 e^π 的大小.

22. 比较 $\prod\limits_{n=1}^{25}\left(1-\dfrac{n}{365}\right)$ 与 $\dfrac{1}{2}$ 的大小.

23. 比较 $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 与 $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 的大小，这里 $n > 8$.

24. 求函数 $f(x) = \left(1+x+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 的极值.

25. 设 $f(x)$ 满足方程 $3f(x) + 4x^2 f\left(-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{7}{x} = 0$，求 $f(x)$ 的极大值与极小值.

26. 求由参数方程 $\begin{cases} x = t - \lambda\sin t \\ y = 1 - \lambda\cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的极值，其中 $0 < \lambda < 1$.

27. 若 $0 < a < b$，证明：$(1+a)\ln(1+a) + (1+b)\ln(1+b) < (1+a+b)\ln(1+a+b)$.

28. 设 $x \in (0,1)$，证明：$\dfrac{1}{\ln 2} - 1 < \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$.

29. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内确定方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 根的个数.

30. 方程 $xe^x = a(a>0)$ 有几个实根.

31. 设 $x > 0$ 时，方程 $kx + \dfrac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个实根，求 k 的取值范围.

32. 设曲线 $y = 4 - x^2$ 与 $y = 2x+1$ 相交于 A、B 两点，C 弧段 AB 上的一点，问 C 点在何处时 $\angle ABC$ 的面积最大？并求此最大面积.

33. 求曲线 $y = x^2\ln(ax)(a > 0)$ 的拐点，并求当 a 变动时，拐点的轨迹方程.
34. 设 a, b 是正数，证明：$a^s b^t \leqslant sa + tb$，其中 s, t 是正数，$s + t = 1$.
35. 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，设 $0 < x_i < \pi$ 并且取 $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$，证明：$\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i} \leqslant \left(\frac{\sin\overline{x}}{\overline{x}}\right)^n$.
36. 过正弦曲线 $y = \sin x$ 上点 $M(\dfrac{\pi}{2}, 1)$ 处作一抛物线 $y = ax^2 + bx + c$，使抛物线与正弦曲线在 M 点具有相同的曲率和凹凸，并写出 M 点处两曲线的公共曲率圆方程.

2.3 综合题 2

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|x|^{1/n}}{n+\frac{1}{n}} + \frac{|x|^{2/n}}{n+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{|x|^{n/n}}{n+\frac{n}{n}}\right), & x \neq 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right), & x = 0 \end{cases}$，求 $f(x)$.
2. 求证极坐标方程 $r = f(\theta)$ 给出的曲线 C 在曲线上点 $M(\theta, f(\theta))$ 处的切线与向径 OM 的夹角 $\varphi = \arctan\dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}$.
3. 求证：$\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\tan\dfrac{x}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{x}{2^n} - \cot x$.
4. 某人以 5/3（m/s）的速率，沿直径为 200/3（m）四周有围墙的圆形球场的一条直径前进，在与此直径相垂直的另一直径的一端有一灯，灯光照射人影于围墙上，问此人行进到离中心 20/3（m）时，围墙上人影的移动速率是多少？
5. 设 $y = \cos(\beta\arcsin x)$，求 $y^{(n)}(0)$.
6. 设 $f(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上有定义，并且有二阶导数. 证明：在 $a < x < b$ 内有
$$\frac{1}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] = \frac{1}{2}f''(\xi)$$
这里 ξ 是 a 与 b 之间的某数.
7. 设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有三阶导数，证明：存在 $\xi \in (a, b)$，使得
$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)\left[f'(a) + f'(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$
8. 证明方程 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!} = 0$ 有且仅有一个实数根，其中 n 为自然数.
9. 设 $P(x)$ 是一个实系数多项式. 构造多项式 $Q(x)$ 如下：
$$Q(x) = \left(x^2+1\right)P(x)P'(x) + x\left[(P(x))^2 + \left(P'(x)\right)^2\right]$$
假定方程 $P(x) = 0$ 有 n 个大于 1 的互异实数根. 证明或否定下列结论：方程 $Q(x) = 0$ 至少有 $2n-1$ 个互异的实数根.
10. 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有二阶可导，且 $f(a+1) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 求证在 $(a, +\infty)$ 内至少存在有一点 ξ，满足 $f''(\xi) = 0$.
11. 设函数在 $[-2, 2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)| < 1$，又 $f^2(0) + \left[f'(0)\right]^2 = 4$. 试证在 $(-2, 2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.
12. 设 s 为正数，证明 $\dfrac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots + n^s < \dfrac{(n+1)^{s+1}}{s+1}$.
13. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) > 0$. 在曲线 $y = f(x)$ 上任意取一点 $(x, f(x))(x \neq 0)$ 作曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记作 u，求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xf(u)}{uf(u)}$.
14. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上具有任意阶导数，且在 $x = 0$ 处所有导数都不等于零，设 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, 0 < \theta < 1$. 试求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\theta$.

15. 证明 $\sin 1$ 是无理数.
16. 对于所有整数 $n>1$，证明：$\dfrac{1}{2ne}<\dfrac{1}{e}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{1}{ne}$.
17. 设 n 为自然数，试证 $\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
18. 设 $f(x)$ 是二次可微的函数，满足 $f(1)=6, f'(1)=0$，且任意的 $x\geqslant 1$ 有 $x^2f''(x)-3xf'(x)-5f(x)\geqslant 0$. 证明：对 $\forall x\geqslant 1$，都有 $f(x)\geqslant x^5+\dfrac{5}{x}$.
19. 对于一切满足 $1\leqslant r\leqslant s\leqslant t\leqslant 4$ 的实数 r,s,t，定出 $(r-1)^2+\left(\dfrac{s}{r}-1\right)^2+\left(\dfrac{t}{s}-1\right)^2+\left(\dfrac{4}{t}-1\right)^2$ 的最小值.
20. 方程 $x^3-3x+1=0$ 有几个实数根？求出其绝对值最小的一个近似根. 精确到 0.001.
21. 设 $f(x)$ 是一具有三阶连续导数的实函数，并且对所有的 $x, f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ 为正值. 假设对 $\forall x, f''(x)\leqslant f(x)$. 证明：对一切 x 有 $f'(x)<2f(x)$
22. 研究由微分方程 $f''(x)=\left(x^3+ax\right)f(x)$ 及初始条件 $f(0)=1, f'(0)=0$ 定义的函数 f. 求证：$f(x)$ 的根有上界而无下界.
23. 点 A 到点 B 的距离为 S，若质点 M 从点 A 沿直线由静止状态运动到点 B 停止，费时 $T(s)$，证明：在此运动过程中某一时刻加速度的绝对值大于等于 $\dfrac{4S}{T^2}$.
24. 众所周知，为判别二次三项式 x^2+bx+c 的实根的情况，我们可以引入判别式 $\Delta=b^2-4c$. 那么，当 $\Delta>0,\quad \Delta=0$ 和 $\Delta<0$ 时，二次三项式 x^2+bx+c 分别具有两个不等实根、两个相等实根、没有实根。对于三次三项式 $p(x)=x^3+bx+c$，请你给出一个利用 b,c 判别 $p(x)$ 实根情况的方法，并且证明你的结论.

第 3 章 一元函数积分学

3.1 不定积分

✍ 习 题 3.1

1. 计算积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$

解：

$$=\int \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{dx}=\int \frac{1}{2}\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\mathrm{dx}$$
$$=\int \frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\tan\frac{\mathrm{x}}{2}=\ln|1+\tan\frac{\mathrm{x}}{2}|+\mathrm{C}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

解：

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dx}{1+\sqrt{\frac{1+x}{2}}+\sqrt{\frac{1-x}{2}}} \xlongequal{t=\sqrt{\frac{1+x}{2}},x=2t^2-1} \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4t\,dt}{1+t+\sqrt{1-t^2}}$$
$$\xlongequal{t=\sin x}\int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4\sin x\cos x\,dx}{1+\sin x+\cos x}=\frac{4}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{2}\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{1+\sin x+\cos x}dx$$
$$=\sqrt{2}\int \sin x+\cos x-1dx=\sqrt{2}(-\cos x+\sin x-x+C)$$
$$=\sqrt{2}(-\cos(\arcsin t)+\sin(\arcsin t)-\arcsin t+C)$$
$$=\sqrt{2}(-\sqrt{1-t^2}+t-\arcsin t+C)$$
$$=\sqrt{2}(-\sqrt{\frac{1-x}{2}}+\sqrt{\frac{1+x}{2}}-\arcsin\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)+C)$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{x-1}}dx$

解：

注意：附注：八一特别赠送：

2. 计算积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x$

解：

$$=\int \frac{\ln(\tan x)\cos x}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{dx}=\int \frac{\ln(\tan x)}{\tan x}\tan\mathrm{x}=\frac{1}{2}\ln^2|\tan x|+C$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

解：

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$= \int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx = \int \frac{1+\ln t}{\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)^2}dt$$
$$= -\int \frac{d(1+t\ln t)}{(1+t\ln t)^2} = \frac{1}{1+t\ln t}+C = \frac{x}{x-\ln x}+C$$

3. 计算积分 $\int \max\left\{x^3, x^2, 1\right\}dx$

解: $f(x) = \max\left(1, x^2, x^3\right) = \begin{cases} x^3, & x \geqslant 1 \\ x^2 & x \leqslant -1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}$

$$\int f(x)dx = \max\left(1, x^2, x^3\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + C_1, & x \geqslant 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2 & x \leqslant -1 \\ x + C, & |x| < 1 \end{cases}$$

由于原函数的连续性, 有:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x + C_3)$, 即 $\frac{1}{4} + C_1 = 1 + C_3$

$\lim\limits_{x\to -1^+}(x + C_3) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{3}x^3 + C_2\right)$, 即 $-\frac{1}{3} + C_2 = -1 + C_3$

另 $C_3 = C$, 则:$C_1 = \frac{3}{4} + C, \quad C_2 = -\frac{2}{3} + C$

$$\int \max\left(1, x^2, x^3\right)dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4} + C, & x \geqslant 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} + C, & x \leqslant -1 \\ x + C, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

4. 设不定积分 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$,求 $\int \frac{1}{f(x)}dx$.

解: 两边同时进行求导, 整理可得

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int -x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}d(1-x^2)$$
$$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

5. 设不定积分 $\int \frac{x^2+ax+2}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$ 的结果中不含反正切函数,计算该不定积分.

解: 先进行有理式拆分, 保证 $\frac{1}{x^2+1}$ 的分子不为常数, 则 $a = -1$

$$= \int \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2+1}dx = 2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

6. 计算积分:

(1) $\int \frac{1}{x\left(x^5+1\right)^2}dx$

解: 令 $t = x^5$

$$= \int \frac{x^4}{x^5(x^5+1)^2}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t(t+1)^2}dt$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2}dt = \frac{1}{5}(\ln|\frac{t}{1+t}| + \frac{1}{1+t}) + C$$

$$= \frac{1}{5}(\ln|\frac{x^5}{1+x^5}| + \frac{1}{1+x^5}) + C$$

(2) $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$

解：

$$= \int \frac{x^4+1+x^2-x^2}{x^b+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)(x^4+x^2+1)} - \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x = \arctan x^2 - \frac{1}{3}\arctan x^3 + x$$

7. 计算积分：

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}\mathrm{d}x$

解：

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2\sqrt{x^4+2x^2-1}} \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+2t-1}}$$
$$\xlongequal{u=\frac{1}{t},dt=-\frac{1}{u^2}} -\frac{1}{2}\int \frac{d\frac{1-u}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{1-u}{\sqrt{2}})^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{1-u}{\sqrt{2}} + C \xlongequal{u=\frac{1}{x^2}} \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x^2} + C$$

(2) $\int \frac{1}{(1+x^4)\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x$

解：

8. 计算积分 $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\mathrm{d}x$

解：

9. 计算积分：

(1) $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

解：令 $t = \arctan x$

$$= \int \frac{\tan t e^t}{\sec^3 t}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int \sin t e^t \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C$$
$$= \frac{1}{2}e^{\arctan x}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

(2) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

解：

$$= \int e^{\sin x}(x\cos t - \frac{\sin x}{1-\sin^2 x})\mathrm{d}x =$$

(3) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解：

$$= \int \arcsin x(\frac{1}{x^2}+1)\mathrm{d}(\arcsin x) = \int \frac{\arcsin t}{x^2}\mathrm{d}(\arcsin x) + \frac{1}{2}\arcsin^2 x + C$$

10. 计算积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x(x>0)$.

解： 另 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，于是

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{x}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}\left(1-x^2\right) = \frac{1}{4}\int x d\frac{1}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{x}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x^2-x^2+1}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{x}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}\left(1-x^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|
\end{aligned}$$

11. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)F(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1$，求 $f(x)$.

解： 两边同时积分

$$\begin{aligned}
&\int F(x)\mathrm{d}F(x) = \int \frac{xe^x}{2(1+x)^2}dx \\
&F^2(x) \xlongequal{e^x=t,x=\ln t} \int \frac{\ln t}{(1+\ln t)^2}\mathrm{d}t \\
&= -\int t\ln t\mathrm{d}(1+\ln t)^{-1} = -\frac{t\ln t}{1+\ln t} + t + C \xlongequal{F(0)=1} \frac{e^x}{1+x} \\
&F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}} \\
&f(x) = \frac{x\sqrt{e^x}}{2\sqrt{(1+x)^3}}
\end{aligned}$$

12. 设 y 是由方程 $y^3(x+y)=x^3$ 所确定的隐函数，求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^3}$.

解： 令 $\frac{x}{y}=t, x=yt \quad dx=ydt \quad y=\frac{t^3}{(t+1)}$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{y^2} = \int \frac{(t+1)^2}{t^6}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^5}+\frac{1}{t^6}\mathrm{d}t \\
&= -\left(\frac{1}{t^3}+\frac{7}{4t^4}+\frac{4}{5t^5}\right) + C \xlongequal{\frac{x}{y}=t} \\
&= -\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{7}{4}\frac{y^4}{x^4}+\frac{4}{5}\frac{y^5}{x^5}\right) + C
\end{aligned}$$

3.2 定积分

✍ 习 题 3.2

1. 设 $f''(x)$ 连续，当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)f''(t)\mathrm{d}t$ 的导数与 x^2 为等价无穷小，求 $f''(0)$.

解：

2. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，且当 $x>0$ 时，有 $\int_0^x f(x)f(x-t)\mathrm{d}t=x^3$，求 $f(x)$.

解：

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0,\quad f'(0)=-2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}$.

解：

4. 设 $f(x)$ 为连续函数，$f(a)\neq 0$, $f'(a)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f(a)(x-a)}-\dfrac{1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}\right]$.

解：

5. 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数)，求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：

6. 确定方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内根的个数.

解：

7. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\arcsin\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

解：

(2) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\mathrm{d}x$

解：

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}(0<a<1)$

解：

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2014}\mathrm{d}x$

解：

8. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{x}{e^{x}+e^{2-x}}dx$

9. 定义 $C(\alpha)$ 为 $(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式中 x^{2014} 的系数. 计算积分

$$\int_{0}^{1}C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots+\frac{1}{y+2014}\right)dy$$

10. 设 $f(x)=\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{x}}\frac{dt}{1+(\tan t^2)^{\sqrt{2}}}$，求 $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx$.

11. 设 n 为自然数，$I_n=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$，求 (1) 建立 I_n 关于下标 n 的递推公式;(2) 计算 I_n 的值.

12. 计算积分 $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$ (n 为整数).

13. 设 $f(x)\in C[0,1]$，记 $I(f)=\displaystyle\int_{0}^{1}x^2f(x)dx,\ J(f)=\int_{0}^{1}x^2(f(x))^2dt$. 求函数 $f(x)$ 使 $I(f)-J(f)$ 取得最大值.

14. 设 $|y|<1$，求 $\displaystyle\int_{-1}^{1}|x-y|e^{x}dx$.

15. 设 $f(x)=x,x\geqslant 0,g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，求 $\Phi(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}f(t)g(x-t)dt$ 的表达式 $(x\geqslant 0)$.

16. 证明：$\displaystyle\int_{1}^{a}[x]f'(x)dx=[a]f(a)-(f(1)+\cdots+f([a]))$，这里 a 大于 1，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，并求出 $\displaystyle\int_{1}^{a}\left[x^2\right]f'(x)dx$ 与上式相当的表达式.

17. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在任意区间 $[\alpha,\beta](a\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant b)$ 上具有不等式 $\left|\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|\leqslant M|\beta-\alpha|^{1+\delta}$($M,\delta$ 是正的常数)，试证：$f(x)$ 恒等于零.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数的充要条件是：对于任何 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$ 且 $\displaystyle\int_{a}^{b}g(x)dx=0$，总有 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)g(x)dx=0$.

19. 证明：$\displaystyle\int_{0}^{x}e^{xt-t^2}dt=e^{\frac{x^2}{4}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{4}}dt$

20. 证明等式 $\displaystyle\int_{1}^{a}f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x}=\int_{1}^{a}f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}$.

21. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)dx=f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx$$

22. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)dx=0,\ \int_{0}^{\pi}f(x)\cos x\,dx=0$. 试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

23. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶导数连续，证明：$\displaystyle\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi)$

24. 设 $f(x)=x-[x]$，($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)，求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)dt$.

25. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}|\ln t|[\ln(1+t)]^{n}dt$.

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}x^2\sqrt[n]{f(x)}dx$.

27. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 是以 $T>0$ 为周期的连续函数，且 $\displaystyle\int_{0}^{T}f(x)dx=A$，求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{x}.$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调减少，$f(0)=1$, $f(1)=0$. 证明 $\forall\delta\in(0,1)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1[f(x)]^n\mathrm{d}x}{\int_0^\delta[f(x)]^n\mathrm{d}x}=0$.
29. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，证明：$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.
30. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=a>0$. 证明：$\exists\xi\in[0,2]$ 使 $|f(\xi)|\geqslant a$.
31. 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin\mathrm{e}^t\mathrm{d}x$，试证：$\mathrm{e}^x|f(x)|\leqslant 2$.
32. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$. 证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(t)\mathrm{d}x$.
33. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且单调减少，证明：对任给 $\alpha\in(0,1)$，有 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.
34. 设 n 为自然数，$f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$. 证明：$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可取得最大值. 且 $\max\limits_{x\in[0,+\infty)}f(x)\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.
35. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
36. 证明对任意连续函数 $f(x)$，有 $\max\left\{\int_{-1}^1\left|x-\sin^2 x-f(x)\right|\mathrm{d}x,\int_{-1}^1\left|\cos x^2-f(x)\right|\mathrm{d}x\right\}\geqslant 1$.
37. 设在 $[a,b]$ 上 $\left|f'(x)\right|\leqslant M$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，试证：$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{4}(b-a)^2$.
38. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $\left|f'(x)\right|\leqslant M$，证明 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$.
39. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在且可积，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x(a<x<b)$.
40. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，证明：$\forall x\in(0,1)$，有 $|f(x)|\leqslant\int_0^1\left(|f(t)|+\left|f'(t)\right|\right)\mathrm{d}t$.
41. 设 $f:[0,1]\to R$ 有连续导数并且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：对每一个 $b\in(0,1)$，$\left|\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{8}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|f'(x)\right|$.
42. 设 $f''(x)>0.x\in[a,b]$，求证：$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.

解：由函数的凹凸性和连续性

$$x\in[a,b],f(x)=f(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b)\leq\frac{f(a)(b-x)+f(b)(x-a)}{b-a}$$

$$=\quad x=\frac{a+b}{2}+t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b+a}{2}}f(\frac{a+b}{2}+t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{b-a}{2}}(f(\frac{a+b}{2}+t)+f(\frac{a+b}{2}-t))\mathrm{d}t$$

$$\geq\int_0^{\frac{b-a}{2}}2f(\frac{a+b}{2})\mathrm{d}t=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

43. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f''(x)\geqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$，函数 $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续

$(a>0)$，证明：$\frac{1}{a}\int_0^a f[g(t)]\mathrm{d}t \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a g(t)\mathrm{d}t\right]$.

解：

44. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2t}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x, t>0$.

解：

45. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\geqslant 0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1, k$ 为任意实数，试证明：

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 1$$

证明：利用 cauchy-schwarz

$$left := (\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x)^2 = [\int_a^b \sqrt{f(x)}\sqrt{f(x)}\cos kx\mathrm{d}x]^2 \le \int_a^b f(x)dx \int f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x$$
$$right := (\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x)^2 = [\int_a^b \sqrt{f(x)}\sqrt{f(x)}\sin kx\mathrm{d}x]^2 \le \int_a^b f(x)\sin^2 kx\mathrm{d}x$$

所以: 对部分同时利用 cauchy-schwarz, 结合即得证.

46. 求 $\sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}}$ 的整数部分.

47. 计算积分：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^1 \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

48. 计算积分：

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$

(2) $\int_0^a x^3\cdot\sqrt{\frac{x}{a-x}}\mathrm{d}x, (a>0)$

49. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x}\mathrm{d}x$.

50. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t\,(x>0)$，试证：$0<f(x)<\frac{1}{x}$.

51. 设 a,b 均为常数，$a>-2, a\neq 0$，求 a,b 为何值时，使 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$.

52. 判别积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x^n}\mathrm{d}x\,(a\neq 0)$ 的收敛性.

53. 讨论下列积分的敛散性

(1) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{1+x}\right)\mathrm{d}x\,(p\neq 0)$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}(p,q>0)$

54. 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的连续正值函数，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$. 证明若 $\lambda>1$，则 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

55. 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx\right|\leqslant 1$.

56. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续正值函数，且在任意有限区域 $[-a,b]$ 上可积，又 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|/k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$($M$ 为常数) 对任意 $k>0$ 成立. 证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

57. 设 $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，求 $f'(0)$.

58. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且对 $x>1$，有 $f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$，试证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，且极限值小于 $1+\pi/4$.

解：

59. 设 $f(x)=\int_{-1}^x t|t|\mathrm{d}t(x\geqslant 1)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积.

60. 求常数 a、b、c，使得曲线 $y=ax^2+bx+c$ 满足：(1) 通过点 $(0,0)$ 及 $(1,2)$; (2)$a<0$; (3) 当 $x>0$ 时，与抛物线 $y=-x^2+2x$ 有交点，且与 $y=-x^2+2x$ 所围成的图形面积最小

61. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内 $f(x)>0$. 证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ 使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$ 及 $x=a$ 所围平面图形 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$ 及 $x=b$ 所围平面图形 S_2 的 3 倍.

62. 设 D 是曲线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围成的平面图形，直线 $y=kx$ 把 D 分成 D_1,D_2 两块，若 D_1 的面积 S_1 与 D_2 的面积 S_2 之比为 $S_1:S_2=1:7$，求
   (1) 平面图形 D_1 的面积 S_1 与 D_2 的面积 S_2.
   (2) 平面图形 D_1 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

63. 求心脏线 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 和直线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成图形绕极轴旋转所成旋转体体积.

64. 设 s 是单位圆周的任意一段整个位于第一象限的弧，A 是弧段 s 与 x 轴之间的曲边梯形的面积，B 是弧段 s 与 y 轴之间的曲边梯形的面积的面积. 证明：$A+B$ 只依赖于弧 s 的长度而不依赖于弧 s 的位置.

65. 已知圆 $(x-b)^2+y^2=a^2$，其中 $b>a>0$，求此圆绕 y 轴旋转所构成的旋转体体积和表面积.

66. 一容器的外表面是曲线 $y=x^2(0\leqslant y\leqslant H)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，其容积为 $70\pi m^3$，其中盛满了水，如果将水汲出 $64\pi m^3$，问至少需要做多少功？

67. 有一半径为 R 的实心球，其密度 ρ 是离开球心的距离 r 的函数. 如果球对球内任意一点的引力量值是 kr^2(k 为常数)，试求出函数 $\rho=\rho(r)$. 并且求出在球外面距球心为 r 远处的一点所受引力的量值.(对于一薄球壳体作如下假设：如果点 P 在壳体里面，则设壳体对 P 的引力值为零；如果点 P 在壳体外面，则设壳体对 P 的引力值为 m/r^2，其中 m 是壳体的质量，r 是 P 到球心的距离)

3.3 综合题 3

1. 计算不定积分 $\int x\arctan x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$.
2. 计算不定积分 $I=\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$.
3. 计算定积分 $\int_0^{3\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\cos^3 x\mathrm{d}x$.
4. 计算定积分 $\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$.

5. 计算积分 $\int_0^\pi \frac{q-\cos x}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x(|q|\neq 1)$.
6. 求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x$($n$ 为自然数) 的递推公式.
7. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos^2 x+a^2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x(a>0)$.
8. 设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x)>0, f(0)=f'(0)=0$. 试求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.
9. 刘维尔 (Liouville) 曾证明了：如果 $f(x),g(x)$ 为有理函数，$g(x)$ 的阶大于 0，且 $\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{d}x$ 为初等函数，则 $\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{d}x=h(x)\mathrm{e}^{g(x)}$，其中 $h(x)$ 为有理函数. 试应用刘维尔的这一结果证明 $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 不是初等函数.
10. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right]=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

11. 设 $a(x),b(x),c(x)$ 和 $d(x)$ 都是 x 的多项式. 试证：$\int_1^x a(x)c(x)\mathrm{d}x\cdot\int_1^x b(x)d(x)\mathrm{d}x-\int_1^x a(x)d(x)\mathrm{d}x\cdot\int_1^x b(x)c(x)\mathrm{d}x$ 可被 $(x-1)^4$ 除尽.
12. 设连续实函数 f 与 g 都是周期为 1 的周期函数，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)$$

13. 在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上函数 $K(x,y)$ 是正的且连续的，在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是正的且连续的，假设对于所有满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的 x 有 $\int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y=g(x)$ 和 $\int_0^1 g(y)K(x,y)\mathrm{d}y=f(x)$. 证明：对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，有 $f(x)=g(x)$.
14. (1) 设函数 f 在闭区间 $[0,\pi]$ 上连续，且有 $\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$ 求证：在 $(0,x)$ 内存在两点 α,β，使得 $f(\alpha)=f(\beta)=0$.(2) 设 D 是欧氏平面上任一有界的凸的开区域 (即 D 是被某一圆域包含的连通开集，D 内任意二点间的线段完全位于其内部). 试应用 (1) 的结论证明：D 的形心 (重心) 至少平分 D 内三条不同的弦.
15. 设 f 在 $[a,b]$ 上不恒为零，且其导数 f' 连续，并有 $f(a)=f(b)$. 试证明：存在点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\left|f'(\xi)\right|>\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
16. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0, |f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|(-\infty<x,y<+\infty)$，证明：$|f(x)|\leqslant LT/2$.
17. 给定一个 $[a,b]$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$，并且 $\int_a^b f_n^2(x)\mathrm{d}x=1$，证明：可以找到自然数 N 及数 $c_1,c_2,\cdots,c_N$，使 $\sum\limits_{k=1}^N c_k^2=1$，$\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\sum\limits_{k=1}^N c_k f_k(x)\right|>100$.
18. 试证：对于每个正整数 n，有 $\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$
19. 计算 $\int_0^\infty\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots\right)\mathrm{d}x$
20. 证明：反常积分 $\int_1^{+\infty}\sin x\sin x^2 dx$ 收敛.
21. 证明：对于每个整数 $n\geqslant 0$ 都有 $1+(n/1!)+\left(n^2/2!\right)+\cdots+(n^n/n!)>\mathrm{e}^n/2$.

提示：可利用积分余项形式的泰勒公式：$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$，以及 $n! = \int_0^{\infty} t^n \mathrm{e}^{-1} \mathrm{d}t$.

22. 证明：边界由至多为数目有限的直线段组成，而面积不小于 $\frac{\pi}{4}$ 的平面凸区域中，至少存在一对相距为 1 的点.

23. 如果 x 轴、曲线 $y = f(x)(f(x) > 0)$、直线 $x = 0$ 与 $x = a$ 所包围的面积的质量中心的 x 坐标 $\tilde{x}$ 是由 $\tilde{x} = g(a)$ 给定的. 证明 $f(x) = A\frac{g'(x)}{(x-g(x))^2}\mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}}$. 这里 A 是正的常数.

24. 有一个立体，两底位于水平面 $z = h/2$ 与 $z = -h/2$ 内，包围它的侧面是曲面。它的每一个水平截面的面积为 $a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$(特殊情形系数可以为零). 证明：它的体积为 $V = (1/6)h(B_1 + B_2 + 4M)$. 这里 B_1 与 B_2 是底的面积，M 是正中间的水平截面的面积当 $a_0 = 0$ 时，这个公式包含锥与球的体积公式.

第 4 章 多元函数微分学

4.1 多元函数的极限与连续

✍ 习 题 4.1

1. 设 $u(x,y)=y^2F(3x+2y)$，其中，求 $u(x,y)$.
2. 已知 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，若当 $y=1$ 时，$z=x$，求函数 $f(t)$ 和 z.
3. 求下列各极限：
   (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)\sin(xy^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}$；
   (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\ln(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$；
   (3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\sin(xy)$.
4. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^n}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 的连续性.
5. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x-2y)}{x-2y}, & x\neq 2y\\ 0, & x=2y\end{cases}$ 的连续性.
6. 试证：若函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P)$ 内的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 均有界，则 $f(x,y)$ 在 $U(P)$ 内连续.

4.2 多元函数的偏导数与偏微分

✍ 习 题 4.2

1. 设 $S=\mathbf{R}^2\backslash\{(x,y)|x=0,y\geqslant 0\}$, $D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$, $f(x,y)=\begin{cases}y^2,(x,y)\in D\\ 0,(x,y)\in S\backslash D\end{cases}$，试求 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$；并说明 $f(x,y)$ 是否与 x 无关.
2. 证明：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 连续，$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 存在，但在点 $(0,0)$ 不可微.
3. 设函数 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$，其中 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，试问：
   (1) $g(0,0)$ 为何值时，偏导数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 存在？
   (2) $g(0,0)$ 为何值时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.
4. 设 $P(x,y,z)$ 为曲面 S 上一点，n 为 S 在点 P 处的法向量，点 $A(a,b,c)$ 为空间中一定点 (不在 S 上). 试证函数 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ 在点 P 处沿 n 方向的方向导数等于 $\vec{n}$ 与 $\vec{PA}$ 夹角余弦的相反数，即 $\dfrac{\partial r}{\partial n}=-\cos(\vec{n},\vec{PA})$.
5. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微，$\vec{l}_1,\vec{l}_2$ 是两个给定的方向，它们之间的夹角为 $\varphi(0<\varphi<\pi)$. 试证：$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\leqslant\dfrac{2}{\sin^2\varphi}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2\right]$
6. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为一定值，且 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边长分别为 a,b,c，试证：$\dfrac{\mathrm{d}a}{\cos A}+\dfrac{\mathrm{d}b}{\cos B}+\dfrac{\mathrm{d}c}{\cos C}=0$.

7. 设 $f(x,y)$ 可微，l_1 与 l_2 是 $\mathbf{R}^2$ 上一组线性无关的向量，试证：若 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l_i} \equiv 0 (i=1,2)$，则 $f(x,y) \equiv$ 常数.
8. 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 有连续的偏导数，$\Gamma: x=x(t), y=y(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是 D 中的光滑曲线，Γ 的端点为 A,B. 若 $f(A)=f(B)$，求证：存在点 $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma$，使得 $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}=0$，其中 $\vec{l}$ 是 Γ 在 M_0 点的切线的方向向量.
9. 已知 $\left(axy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1+by\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y$ 为某函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a,b 的值
10. 设函数 $f(x,y)$ 可微，又 $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=a$, $f_y(0,0)=b$，且 $\varphi(t)=f\left[t,f\left(t,t^2\right)\right]$，求 $\varphi'(0)$.
11. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 与 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.
12. 设 $x=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}, y=\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}, z=\dfrac{1}{u^3}+\dfrac{1}{v^3}+\mathrm{e}^x$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial z}{\partial v}$.
13. 对于函数 $F(x,y)$，如果存在常数 k，使得对于任何 x,y 及 $t>0$ 恒有 $F(tx,ty)=t^kF(x,y)$ 成立则称 $F(x,y)$ 是 k 次齐次函数。证明：可微函数 $F(x,y)$ 是 k 次齐次函数的充要条件为对任何 x,y 恒有 $xF_1(x,y)+yF_2(x,y)=kF(x,y)$ 成立.
14. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right]$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.
15. 设函数 $u(x,y)$ 二阶连续可微，且 $u_{xx}-u_{yy}=0$ 与 $u(x,2x)=x, u_x(x,2x)=x^2$，求 $u_{xx}(x,2x), u_{xy}(x,2x), u_{yy}(x,2x)$.
16. 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\Delta z=z_{xx}+z_{yy}$.
17. 已知 $C^{(2)}$ 函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，试证：经变换 $u=\dfrac{1}{2}(x+y)$, $v=\dfrac{1}{2}(x-y), w=z\mathrm{e}^y$，以 u,v 作自变量，w 作因变量，方程可化为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w$.

4.3 多元函数微分学的应用

✍ 习 题 4.3

1. 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$. 试问：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否取得极值，是极大还是极小值？
2. 求函数 $z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$ 的极值点与极值
3. 设二次函数 $y=\varphi(x)$(其中，x_2 项的系数为 1) 的图形与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 及 $(B,0)$，其中 $B=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}2e^{\sin t}\mathrm{d}t-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$，求使二元函数（$I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1[\varphi(x)-(\alpha x+\beta)]^2\mathrm{d}x$ 取得最小的实数 α,β 的值.
4. 设 $z=f(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。
5. 设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq0$，证明 z 的最大值只能在 D 的边界上取到.
6. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.
7. 证明：当 $x\geqslant0, y\geqslant0$ 时，有 $\dfrac{x^2+y^2}{4}\leqslant e^{x+y-2}$.

8. 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $l=i-j$ 的方向导数最大.
9. 某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R（万元）与电台广告费用 x_1（万元）及报纸广告费用 x_2（万元）之间的关系有如下经验公式：

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$$

   (1) 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；
   (2) 若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.
10. 从已知 $\triangle ABC$ 的内部的点 P 向三条边作三条垂线，求使此三条垂线的乘积为最大的点 P 的位置.
11. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.
12. 设四边形各边长一定，分别为 a,b,c,d. 问何时四边形面积最大？
13. 设 f 为可微函数。证明：曲面 $z=xf\left(\dfrac{y+1}{x}\right)+2$ 上任一点处的切平面都相交于一点。
14. 证明：曲面 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 任意点处的切平面在 Oz 轴上的截距与切点到坐标原点的距离之比为常数，并求出此常数.
15. 证明旋转曲面 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(f'\neq 0\right)$ 上任一点处的法线与旋转轴相交.
16. 在空间（平面）中，设 P_1,P_2 分别属于点集 T_1,T_2，如果距离 $|P_1P_2|$ 是 T_1,T_2 中任意两点距离中的最小（大）值，则称 P_1,P_2 是点集 T_1,T_2 的最近（远）点. 则下列结论成立：
   (1) 在空间（平面）中，如果 $\varGamma$ 是光滑闭曲线，点 P 是 $\varGamma$ 上与点 Q 的最近（远）点，则直线 PQ 在点 P 与 $\varGamma$ 垂直（即 PQ 与 $\varGamma$ 在点 P 的切线垂直. 如果两点 P 与 Q 重合，则规定 PQ 与任何直线垂直）
   (2) 在空间中，如果 $\varSigma$ 是光滑闭曲面，点 P 是 $\varSigma$ 上与点 Q 的最近（远）点. 则直线 PQ 在点 P 与 $\varSigma$ 垂直（即 PQ 与 $\varSigma$ 在点 P 的切平面垂直. 如果两点 P 与 Q 重合，则规定 PQ 与任何平面垂直）
   (3) 在空间（平面）中，点 P_1,P_2 分别是光滑闭曲线 $\varGamma_1,\varGamma_2$ 之间的最近（远）点，则直线 P_1P_2 是 $\varGamma_1,\varGamma_2$ 的公垂线.
   (4) 在空间中，点 P_1,P_2 分别是光滑闭曲面 $\varSigma_1,\varSigma_2$，之间的最近（远）点. 则直线 P_1P_2 是 $\varSigma_1,\varSigma_2$ 的公垂线

   注：以上结论统称为最近（远）距离的垂线原理.
17. 设函数 $u=F(x,y,z)$ 在条件 $\chi(x,y,z)$ 与 $\phi(x,y,z)$
18. 设有一表面光滑的橄榄球，它的表面形状是由长半轴为 6，短半轴为 3 的椭圆绕其长轴旋转所得的旋转椭球面. 在无风的细雨天，将该球放在室外草坪上，使长轴在水平位置，求雨水从椭球面上流下的路线方程.

4.4 综合题 4

1. 试求通过三条直线：

$$\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=0 \\ x+y-z=-2 \end{cases},\quad \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y-z=0 \end{cases}$$

   的圆柱面方程.
2. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内分别对每一个变量 x 和 y 是连续的，而且对其中一个是单

调的，则 $f(x,y)$ 是 D 内的二元连续函数.

3. 设 $F(u,v)$ 可微，$y=y(x)$ 是由方程
$$F\left(x\mathrm{e}^{x+y}, f(xy)\right)=x^2+y^2$$
所确定的隐函数，其中 $f(x)$ 满足 $\int_1^{xy} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^y f(t)\mathrm{d}t + y\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, $f(1)=1$ 的连续函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
4. 设有方程 $\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$，试证：$\|\operatorname{grad} u\|^2 = 2r\cdot\operatorname{grad} u$，其中 $r=(x,y,z)$.
5. 取 x 作为 y 和 z 的函数，解方程 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
6. 记曲面 $z=x^2+y^2-2x-y$ 在区域 $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, 2x+y\leqslant 4$ 上的最低点 P 处的切平面为 π，曲线 $x^2+y^2+z^2=6$ $x+y+z=0$ 在点 $Q(1,1,-2)$ 处的切线为 l，求点 P 到直线 l 在平面 π 上的投影 l' 的距离 d.
7. 设 $a^2+b^2+c^2\neq 0$，求 $w=(ax+by+cz)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 在整个空间上的最大值与最小值.
8. 设 $a>b>1$，求证：$a^{b^a}>b^{a^b}$
9. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $Ax+By+Cz=0$ 相交所得椭圆的面积.
10. 在平面上有一 $\triangle ABC$，三边长分别为 $BC=a, CA=b, AB=c$，以此三角形为底，h 为高，可做无数个三棱锥，试求其中表面积为最小者.
11. 设 $f(x,y,z)$ 在空间区域 Ω 上有连续偏导数，$\Gamma: x=x(t), y=y(t), z=z(t)(\alpha<t<\beta)$ 是 Ω 中的一条光滑曲线. 若 P_0 是 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上的极值点，求证：
    (1) $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \tau}=0$，其中 τ 是 Γ 在 P_0 点的单位切向量.
    (2) Γ 在 P_0 点的切线位于等值面 $f(x,y,z)=f(P_0)$ 在 P_0 点的切平面上.
12. 过椭球面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 外一定点 (α,β,γ) 作其切平面，再过原点作切平面的垂线，求垂足的轨迹方程.
13. 设 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 分别位于曲线 $L_1: f(x,y)=0, L_2: g(x,y)=0, L_3: g(x,y)=0$ 上，试证：若 $\triangle ABC$ 的面积达到最大值，则曲线在 A,B,C 处的法线都与三角形的对边垂直.
14. 在 A,B 两种物质的溶液中，我们想提取出物质 A，可采取这样的方法：在 A,B 的溶液中加入第三种物质 C，而 C 与 B 不互溶，利用 A 在 C 中的溶解度较大的特点，将 A 提取出来. 这种方法就是化工中的萃取过程.
    现有稀水溶液的醋酸，利用苯作为溶剂，设苯的总体积为 m，进行 3 次萃取来回收醋酸。若萃取时苯中的醋酸重量浓度与水溶液中醋酸重量浓度成正比. 问每次应取多少苯量，方使水溶液中取出的醋酸最多？

第 5 章 多元数量值函数积分学

5.1 二重积分

✍ 习 题 5.1

1. 设 D 为中心在原点，半径为 r 的圆域，求 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解：由二重积分的积分中值定理知存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得

$$\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi r^2 e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)$$

由于当 $r\to 0$, 故 $(\xi,\eta)\to(0,0)$，于是有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{r\to 0}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1$$

注意：二重积分的积分中值定理: 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\cdot\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\cdot S_D$

2. 求 $\iint_D xy\left[1+x^2+y^2\right]\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$，其中 $[\cdot]$ 为取整函数.

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\left[1+r^2\right]r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r\cdot r\left[1+r^2\right]r\mathrm{d}r$

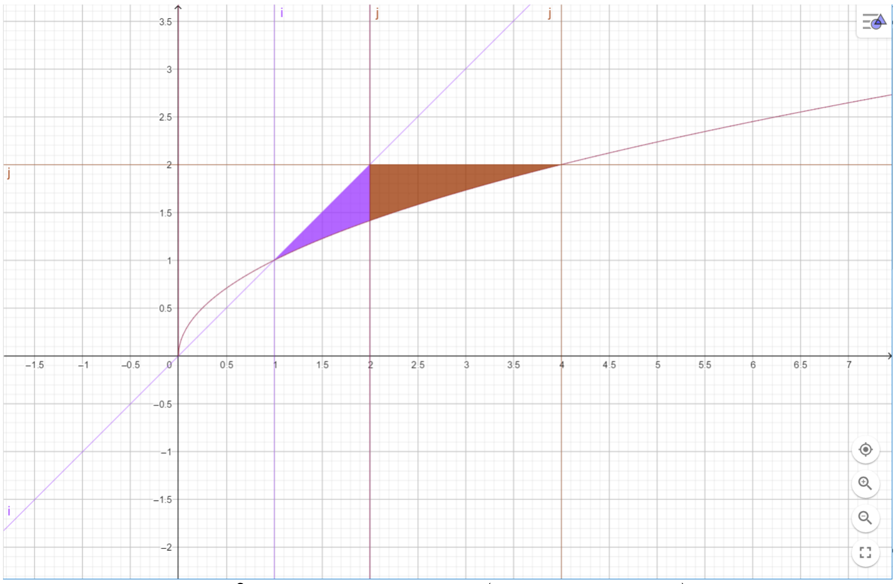
$$=\left.\frac{(\sin\theta)^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^2\left[1+r^2\right]d\left(r^2\right)\overset{r^2+1=u}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}}(u-1)[u]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\int_1^2(u-1)\mathrm{d}u+\int_2^{1+\sqrt{2}}2(u-1)\mathrm{d}u\right\}=\frac{1}{4}\left(\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^{\sqrt{2}}2t\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+2-1\right)=\frac{3}{8}$$

3. 计算 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y.$

注意：本题有误，应改为 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$

解：积分区域如下图所示：(紫色区域表示的是前面一部分的积分区域, 褐色部分表示的是后面一部分的积分区域, 下图为 geogebra 软件制作, 由刘力手和本本蛋蛋提供, 在此做出感谢)



则原式 $=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=\int_1^2 \mathrm{d}y\left(\frac{2}{\pi}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}y}\sin u\mathrm{d}u\right)=-\int_1^2\left(\frac{2}{\pi}y\cos\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{d}y$

$\underline{\underline{\frac{\pi}{2}y=t}}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\cos t\mathrm{d}t=-\frac{8}{\pi^3}(t\sin t+\cos t)|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{8}{\pi^3}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4(2+\pi)}{\pi^3}$

注意:本题考察的是交换积分次序 (前提是得正确画出区域)

4. 计算二重积分 $\iint_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1|\}$.

解: 记 $D_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$,$D_2=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\}$

由于区域 D_1 和区域 D_2 关于 $y=x$ 对称

故 $\iint_{D_1}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2}\mathrm{e}^{\max\{y^2,x^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

故原式 $=2\iint_{D_1}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$ $\mathrm{e}-1$

注意:

1. 如果积分区域 D 关于 x,y 具有轮换对称性,也就是 D 当中如果交换 x 和 y 的位置的话,区域表示结果一模一样,且假定区域 D_1 为区域 D 的 $y=x$ 的一侧,那么我们就可以得到 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2. 注意: $\int e^{x^2}\mathrm{d}x$ 无初等函数 (也就是俗称的“不可积”)

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$,求 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

解: 法 1:$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[f(x)\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=-\int_0^1\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]$ $=-\frac{1}{2}\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right]^2=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\frac{A^2}{2}$

法 2: $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(y)\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ $=\int_0^1\left[\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\left[\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\right]^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\frac{A^2}{2}$

法 3: $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(y)f(x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \cdot \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 = \frac{A^2}{2}$

6. 计算积分 $\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 2x+2y\}$.

解： 法 1：区域 $D = \{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2\}$

故令 $x-1=u, y=1=v$，则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$，区域 $D_1 = \{(u,v)|u^2+v^2 \leqslant 2\}$

故原式 $= \iint_{D_1} [(u+1)+(v+1)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{D_1} 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\cdot 2\pi = 4\pi$

法 2：原式 $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta+2\sin\theta} (r\cos\theta + r\sin\theta)r\mathrm{d}r = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \frac{(2\cos\theta+2\sin\theta)^3(\cos\theta+\sin\theta)}{3}\mathrm{d}\theta$

$= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi} (\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]^4\mathrm{d}\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{32}{3}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot$
$\frac{\pi}{2} = 4\pi$

结论： 华里士公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, n\text{为奇数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{为偶数} \end{cases}$

7. 计算 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y(a>0)$

解： 原式 $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_0^{-2a\sin\theta} \frac{1}{r}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\arcsin\frac{r}{2a}\right)\Big|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (-\theta)\mathrm{d}\theta =$
$\frac{\pi^2}{32}$

8. 计算 $\iint_D |\sin(x-y)|\mathrm{d}\sigma, D: 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2\pi$

解： 法 1：记 $D_1: \{(x,y)|0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2\pi, 0\leqslant y-x\leqslant\pi\}$，$D_2: \{(x,y)|0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2\pi, \pi < y-x\leqslant 2\pi\}$

故原式 $= \iint_{D_1} |\sin(x-y)|\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} |\sin(x-y)|\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} \sin(y-x)\mathrm{d}\sigma - \iint_{D_2} \sin(y-x)\mathrm{d}\sigma$

$= \iint_D \sin(y-x)\mathrm{d}\sigma - 2\iint_{D_2} \sin(y-x)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^y \sin(y-x)\mathrm{d}x - 2\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^{y-\pi}\sin(y-$
$x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^y \sin x\mathrm{d}x + 2\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{\pi}^{y}\sin t\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(1-\cos y)\mathrm{d}y + 2\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos y)\mathrm{d}y$
$= 2\pi + 2\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos y)\mathrm{d}y = 4\pi - 2\int_{\pi}^{2\pi}\cos y\mathrm{d}y = 4\pi$

法 2：原式 $= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^y |\sin(x-y)|\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^y |\sin x|\mathrm{d}x = \left(y\int_0^y |\sin x|\mathrm{d}x\right)\Big|_0^{2\pi} -$
$\int_0^{2\pi} y|\sin y|\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x - \pi\int_0^{2\pi}|\sin y|\mathrm{d}y = \pi\int_0^{2\pi}|\sin y|\mathrm{d}y = \pi\cdot 2\cdot 2 = 4\pi$

注意： $\int_0^{2\pi} y|\sin y|\mathrm{d}y = \pi\int_0^{2\pi}|\sin y|\mathrm{d}y$ 的理由如下：

$\int_0^{2\pi} y|\sin y|\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi-y=t}(2\pi-t)|\sin t|\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}2\pi|\sin t|\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}t\sin t|\mathrm{d}t$

故 $\int_0^{2\pi} y|\sin y|\mathrm{d}y = \pi\int_0^{2\pi}|\sin y|\mathrm{d}y$

9. 计算积分 $\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y)|y^2\leqslant x+2, x^2\leqslant y+2\}$.

解： 记 $D_1 = \{(x,y)|y^2\leqslant x+2, x^2\leqslant y+2, y\leqslant x\}$，$D_1$ 的边界为 L

其中 L 是由 L_1, L_2, L_3 所围成的，这三条线分别为

$L_1: y=x$，x 从 2 到 -1；

$L_2: y^2=x+2$, y 从 -1 到 $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$;

$L_3: x^2=y+2$, x 从 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 到 2.

则原式 $=2\iint_{D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L(x-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}ys$

$=\int_{L_2}\left(x-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-y\right)\mathrm{d}y+\int_{L_3}\left(x-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-y\right)\mathrm{d}y$

$=\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left[(-2)\cdot 2y+\left(y^2-2\right)^2-y\right]\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{2}\left[x-\left(x^2-2\right)^2+2\cdot 2x\right]\mathrm{d}x$

其中 $\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left[\left(y^2-2\right)^2-5y\right]\mathrm{d}y\xlongequal{y+1=u}\int_0^{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\left(u^4+2u^3-4u^3-u+6\right)\mathrm{d}u$

$=\int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{0}\left(u^4+2u^2+4u^3+u+6\right)\mathrm{d}u$, 且 $x-\left(x^2-2\right)^2+2\cdot 2x=5x-x^4+4x^2-4$

令 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=v$, 则 $v^2+v=1$

则原式 $=\int_v^0\left(u^4+2u^2+4u^3+u+6\right)\mathrm{d}u+\int_v^2\left(5x-x^4+4x^2-4\right)\mathrm{d}x$

$=\int_v^0\left(u^4+2u^2+4u^3+u+6+5u-u^4+4u^2-4\right)\mathrm{d}u+\int_0^2\left(5x-x^4+4x^2-4\right)\mathrm{d}x$

$=2\int_v^0\left(2u^3+3u^2+3u+1\right)\mathrm{d}u+\int_0^2\left(5x-x^4+4x^2-4\right)\mathrm{d}x$

$=-2\int_0^v\left(2u^3+3u^2+3u+1\right)\mathrm{d}u+\int_0^2\left(5x-x^4+4x^2-4\right)\mathrm{d}x$

$=-2\left(\dfrac{v^4}{2}+v^3+\dfrac{v^2}{2}+v^2+v\right)+\left(\dfrac{5}{2}\cdot 2^2-\dfrac{32}{5}+\dfrac{4}{3}\cdot 2^3-8\right)$

$=-2\left[\dfrac{\left(v^2+v\right)\left(v^2+v\right)}{2}+\left(v^2+v\right)\right]+\left(2-\dfrac{32}{5}+\dfrac{32}{3}\right)=-3+2-\dfrac{32}{5}+\dfrac{32}{3}$

$=\dfrac{32}{3}-\dfrac{32}{5}-1=\dfrac{64}{15}-1=\dfrac{49}{15}$

注意: 如果遇到一些不好算的二重积分的时候不妨逆用格林公式把它转换为曲线积分, 有的时候会有比较神奇的效果哟, 用这个方法的时候巧妙构造函数才是关键, 既要保证能够使用格林公式的几个条件, 也得要让函数的形式尽量靠近积分区域的边界形式, 同时还需要注意的是变为曲线积分了之后, 就可以带入边界函数了

10. 已知 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y)=f(x,1)=0$, $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$, 计算二重积分 $I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 原式 $=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\left(xyf'_x(x,y)\big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(xf'_x(x,1)-\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

法 1: 由于 $f(x,1)=f(1,y)=0$, 故 $f(1,1)=0$, $\int_0^1 f(x,1)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(1,y)\mathrm{d}y=0$

故原式 $=\int_0^1 xd[f(x,1)]-\int_0^1\left(\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$

$=f(1,1)-\int_0^1 f(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(\int_0^1 xd[f(x,y)]\right)\mathrm{d}y=-\int_0^1\left(f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

$=-\int_0^1 f(1,y)\mathrm{d}y+\iint_D f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}y=a$

法 2: 由于 $f(x,1)=f(1,y)=0$, 故 $f_x'(x,1)=0$

故原式 $=-\int_0^1\left(\int_0^1 xf_x'(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^1\left(\int_0^1 xd[f(x,y)]\right)\mathrm{d}y$

$=-\int_0^1\left(f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=-\int_0^1 f(1,y)\mathrm{d}y+\iint_D f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}y=$ a

注意: 正确做出本题的话要注意:

1. 理解好法 2 当中为什么由 $f(x,1)=0$ 可以推出 $f_x'(x,1)=0$

2. 做分部积分的时候要注意, 此时 y 和 x 都是变量, y 不是关于 x 的函数, 这一点尤其要注意

11. 设 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴围成的区域, 求 $\iint_D\frac{(x+y)\ln(1+y/x)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 法 1: 令 $x+y=u, x=v$, 也就是 $\begin{cases}x=v\\ y=u-v\end{cases}$, 则 $D':\{(x,y)|u\leqslant 1, v\geqslant 0, u-v\geqslant 0\}$

那么 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$, 故 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

故原式 $=\iint_{D'}\frac{u(\ln u-\ln v)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\frac{u(\ln u-\ln v)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}v=\int_0^1\left[\int_0^u\frac{u\ln u-u\ln v}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$

$=\int_0^1\left(\frac{u^2\ln u}{\sqrt{1-u}}-\frac{u}{\sqrt{1-u}}\int_0^u\ln v\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u=\int_0^1\left(\frac{u^2\ln u}{\sqrt{1-u}}-\frac{u^2\ln u-u^2}{\sqrt{1-u}}\right)\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\frac{(1-t^2)^2}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 u\mathrm{d}u=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$

法 2: (极坐标变换)

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}\frac{(r\sin\theta+r\cos\theta)\ln(1+\tan\theta)}{\sqrt{1-(r\sin\theta+r\cos\theta)}}r\mathrm{d}r$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{u\ln(1+\tan\theta)}{\sqrt{1-u}}\frac{u}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\tan\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\tan\theta)}{(\tan\theta+1)^2}\mathrm{d}(\tan\theta)\int_0^1\frac{(1-u)^2}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\tan\theta)}{(\tan\theta+1)^2}\mathrm{d}(\tan\theta)\cdot 2\int_0^1\left[1-(\sqrt{u})^2\right]^2 d(\sqrt{u})$

由于

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\tan\theta)}{(\tan\theta+1)^2}\mathrm{d}(\tan\theta)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\left[\frac{\ln x}{x}\bigg|_0^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{x}\bigg|_{+\infty}^{1}=1$

$2\int_0^1\left[1-(\sqrt{u})^2\right]^2 d(\sqrt{u})=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-(\sin t)^2\right]^2 d(\sin t)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\mathrm{d}t=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$

故原式 $=1\cdot 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$

注意: 本题既可作为竞赛题, 亦可作为考研题, 因为方法一提供的是竞赛界的普遍方法, 也是很多参考书上给出的方法, 方法二提供的就是考研的方法, 需要注意的是华里士公式的正确使用条件。

12. 计算二重积分 $\iint_D\frac{x^2}{y}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y)|0<\frac{\pi y}{2}\leqslant x^2\leqslant\pi y,\quad 0<x\leqslant y^2\leqslant 2x\right\}$.

解: 令 $\frac{x^2}{y}=u,\quad\frac{y^2}{x}=v$, 即 $\begin{cases}x=\sqrt[3]{u^2v}\\ y=\sqrt[3]{uv^2}\end{cases}$, 则区域 $D':\left\{(u,v)|,\frac{\pi}{2}<u<\pi, 1<v<2\right\}$

则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^2}}\\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$, 故 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

故原式 $=\frac{1}{3}\iint_{D'}u\sin(uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}u\int_1^2 u\sin(uv)\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos u-\cos 2u)\mathrm{d}u=$

$-\dfrac{1}{3}$

注意：对于一些二重积分不好直接积的时候，不妨可以尝试着采用二重积分的换元法，往往会起到事半功倍的效果，需要注意以下几点：

1.$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$，注意：$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 是行列式

2.$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，注意：$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 是 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 的绝对值

3.$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 的结果不能出现 x 和 y，但可以出现 u 和 v

13. 设有一半径为 R，高为 H 的圆柱形容器，盛有高 $\dfrac{2}{3}H$ 的水，放在离心机上高速旋转，因受离心力的作用，水面呈抛物面形，问当水刚要溢出容器时，液面的最低点在何处？

解：为了描述的方便，我们以圆柱的中心线所在直线为 y 轴，圆柱的底面圆的半径方向为 x 轴建立直角坐标系.

设抛物线方程为 $y=ax^2+c$，其中 $a,c>0$.

故 $\begin{cases} V=\pi R^2\cdot\dfrac{2}{3}H=2\pi\displaystyle\int_0^R x\left(ax^2+c\right)\mathrm{d}x\\ H=aR^2+c\end{cases}$，也就是 $\begin{cases}\dfrac{2}{3}H=\dfrac{a}{2}R^2+c\\ H=aR^2+c\end{cases}$，故 $c=\dfrac{H}{3}$

故液面的最低点在 $\dfrac{H}{3}$ 处

14. 求曲面 $(z+1)^2=(x-z-1)^2+y^2$ 与平面 $z=0$ 所围成立体的体积.

解：记 $D_z:\left\{(x,y)|[x-(z+1)]^2+y^2\leqslant(z+1)^2\right\}$

Ω 为曲面 $(z+1)^2=(x-z-1)^2+y^2$ 与平面 $z=0$ 所围成立体

则 $V=\displaystyle\iiint_\Omega \mathrm{d}V=\int_{-1}^0\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^0\pi(z+1)^2\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{3}$

注意：至于 z 的下限为什么是 -1，上限为什么是 0 呢？z 的上限是 0 比较理解，因为题目中出现了 $z=0$，故 z 的上限是 0，至于为什么 z 的下限是 -1，是因为曲面 $(z+1)^2=(x-z-1)^2+y^2$ 的极值为 $z=-1$，且该曲面显然是连续可偏导的，故由问题的实际意义知，曲面最值就是 $z=-1$

15. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(t)=2\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x^2+y^2\right)f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4$. 求 $f(t)$.

解：由极坐标变换可知

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x^2+y^2\right)f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r^2f(r)\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t r^3f(r)\mathrm{d}r$$

故 $f(t)=4\pi\displaystyle\int_0^t r^3f(r)\mathrm{d}r+t^4$，故 $f(0)=0$，两边对 t 求导得 $f'(t)=4\pi t^3f(t)+4t^3$

故由公式得

$f(t)=e^{-\int(-4\pi t^3)\mathrm{d}t}\left[\displaystyle\int 4t^3e^{\int(-4\pi t^3)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=e^{\pi t^4}\left[\int 4t^3e^{-\pi t^4}\mathrm{d}t+C\right]=-1+Ce^{\pi t^4}$

由 $f(0)=0$ 得 $f(t)=\dfrac{1}{\pi}\left(e^{\pi t^4}-1\right)$

16. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(f(t))^{\frac{1}{t^2}}$

解：由极坐标变换可知

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t} f\left(\frac{r}{2}\right)\cdot r\mathrm{d}r = 8\pi\int_0^{2t} f\left(\frac{r}{2}\right)\cdot\frac{r}{2}d\left(\frac{r}{2}\right) = 8\pi\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u$$

故 $f(t)=e^{4\pi^2}+8\pi\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u$，故 $f(0)=1$，两边对 t 求导得 $f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)$

即 $f'(t)-8\pi tf(t)=8\pi te^{4\pi t^2}$

故由公式得

$$f(t)=e^{-\int(-8\pi t)\mathrm{d}t}\left[\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{\int(-8\pi t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=e^{4\pi t^2}\left[\int 8\pi t\mathrm{d}t+C\right]=4\pi t^2e^{4\pi t^2}+Ce^{4\pi t^2}$$

由 $f(0)=1$ 得 $f(t)=4\pi t^2e^{4\pi t^2}+e^{4\pi t^2}$

故 $\lim\limits_{t\to 0}(f(t))^{\frac{1}{t^2}}=\exp\left\{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-1}{t^2}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4\pi t^2e^{4\pi t^2}+e^{4\pi t^2}-1}{t^2}\right\}=e^{4\pi+4\pi}=e^{8\pi}$

17. 设 d : $0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2$

(1) 求 $B=\iint_D |xy-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解： 记 $D_1:\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2, xy\leqslant 1\}$，$D_2:\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2, xy>1\}$

原式 $=\iint_{D_1}(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint_D(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint_D(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_{D_2}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2(1-xy)\mathrm{d}y-2\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2(1-xy)\mathrm{d}y$

$=-\int_0^2(2-2x)\mathrm{d}x-2\int_{\frac{1}{2}}^2\left(2-2x-\dfrac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x=-4\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1-x-\dfrac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x$

$=-4\cdot\dfrac{3}{2}+2\cdot\dfrac{15}{4}+2\ln 2=\dfrac{3}{2}+2\ln 2$

(2) 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，试证：存在 $(\xi,\eta)\in D$，使 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\dfrac{1}{B}$

证明： 由于 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，故 $\left|\iint_D(xy-1)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=1$

由于 $1=\left|\iint_D(xy-1)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint_D|(xy-1)f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D|xy-1||f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

且由二重积分中值定理知存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint_D|xy-1||f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|f(\xi,\eta)|\iint_D|xy-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|f(\xi,\eta)|B$$

且 $B>0$，故存在 $(\xi,\eta)\in D$，使 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\dfrac{1}{B}$

注意： 当一个题目给出了多问的时候，这些小问之间一般是有联系的，此时第一问的过程或者是结果可以对后面小问的解答做出一些提示

18. 设 $f(x)\in C[0,1]$ 且正值递减，试证：$\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\dfrac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$

证明： 由于 $f(x)\in C[0,1]$ 递减，故 $(x-y)[f(x)-f(y)]\leqslant 0$，记 $D:\{(x,y)|, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$

由于 $\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\iint\limits_D xf^2(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\left[xf^2(x)f(y)+yf^2(y)f(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\iint\limits_D xf(x)f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\left[xf(x)f^2(y)+yf(y)f^2(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，且

$f(x)$ 在 [0,1] 正值

故 $\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\left[xf(x)f^2(y)+yf(y)f^2(x)-xf^2(x)f(y)-yf^2(y)f(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x-y)f(x)f(y)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$

故

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 正值，故 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$

即 $\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$

19. 证明：$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)<\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2<\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right)$

注意： 本题有误，应该为 $\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)<\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2<\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$

证明： 记区域 $D:\{(x,y)|,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，区域 $D_1:\left\{(x,y)|,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1\right\}$

区域 $D_2:\left\{(x,y)|,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 2\right\}$

由于 $\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，且 $\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

且 $\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$

$\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$

故 $\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)<\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2<\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$

20. 证明 $1\leqslant\iint_D\left(\cos x^2+\sin y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}$，其中 $\mathrm{d}:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1.$

证明： 由于区域 D 关于 $y=x$ 对称（也就是区域 D 交换 x 和 y 之后，区域 D 不变），故由

$$\iint_D\left(\cos x^2+\sin y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\cos x^2+\sin x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint_D\cos\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

考虑到 $0\leqslant x\leqslant 1$，故 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，故 $\frac{\pi}{4}\leqslant x^2+\frac{\pi}{4}\leqslant 1+\frac{\pi}{4}$，即 $1\leqslant\sqrt{2}\cos\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$

故 $\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}\iint_D\cos\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即 $1\leqslant\iint_D\left(\cos x^2+\sin y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}$

21. 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$，且满足 $\forall x,y\geqslant 0$，有 $f(x)f(y)\leqslant xf\left(\frac{y}{2}\right)+yf\left(\frac{x}{2}\right)$，试证：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant 2x^2$

证明： 由于 $\forall t,u\geqslant 0$，有 $f(t)f(u)\leqslant tf\left(\frac{u}{2}\right)+uf\left(\frac{t}{2}\right)$

故两边对 t 在 $[0,x]$ 上积分，得 $f(u)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{x^2}{2}f\left(\frac{u}{2}\right)+u\int_0^x f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$

故两边对 u 在 $[0,x]$ 上积分，得 $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{x^2}{2}\int_0^x f\left(\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u+\frac{x^2}{2}\int_0^x f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$

即 $\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)^2\leqslant x^2\int_0^x f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$，由于 $\int_0^x f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\xlongequal{\frac{t}{2}=u}2x^2\int_0^{\frac{x}{2}}f(u)\mathrm{d}u$

又因为 $\forall x,y\geqslant 0$，有 $f(x)f(y)\leqslant xf\left(\frac{y}{2}\right)+yf\left(\frac{x}{2}\right)$，故令 $x=y$，则原式变为 $0\leqslant f^2(y)\leqslant 2yf\left(\frac{y}{2}\right)$

由于 $yf\left(\frac{y}{2}\right) \geqslant 0$, 且 $y \geqslant 0$, 故 $f(y) \geqslant 0$, 故 $2x^2\int_0^{\frac{x}{2}} f(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 2x^2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$, 且 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \geqslant 0$

即 $\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)^2 \leqslant x^2\int_0^x f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \leqslant 2x^2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$, 由于 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \geqslant 0$

故 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant 2x^2$

注意:根据题目条件,以及要证明的结论,往形式上面凑,即可出现答案

5.2 三重积分

✍ 习 题 5.2

1. 求由下列曲面所围的体积 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

解: 设 Ω 为曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ 所围成的立体

并令 $\frac{x}{a}=u, \frac{y}{b}=v, \frac{z}{c}=w$, 那么 Ω' 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和曲面 $x^2+y^2=z$ 所围成的立体

$$\text{此时 } \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}=abc\cdot\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$\text{故 } V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V \xlongequal{\frac{x}{a}=u,\frac{y}{b}=v,\frac{z}{c}=w} abc\iiint\limits_{\Omega'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

记 $D:\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$, 令 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=v>0$, 故 $v^2+v=1$, 即 $v^2=1-v, v=\sqrt{1-v}$

$$\text{故 } \iiint\limits_{\Omega'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iint\limits_{D}\left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left[\sqrt{1-x^2-y^2}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{v}}\left[\sqrt{1-r^2}-r^2\right]\cdot r\mathrm{d}r \xlongequal{r^2=u} \pi\int_0^v\left(\sqrt{1-u}-u\right)\mathrm{d}u=\pi\left(-\frac{2}{3}(1-u)^{\frac{3}{2}}-\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^v$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\pi\left[\frac{2}{3}(1-v)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}v^2\right]=\frac{2}{3}\pi-\pi\left(\frac{2}{3}v^3+\frac{1}{2}v^2\right)=\pi\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}v\cdot(1-v)-\frac{1}{2}(1-v)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}v+\frac{2}{3}v^2-\frac{1}{2}(1-v)\right]=\pi\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}v+\frac{2}{3}(1-v)-\frac{1}{2}(1-v)\right]=\left[\frac{4}{3}(1-v)-\frac{1}{2}(1-v)\right]$$

$$=\frac{5\pi}{6}(1-v)=\frac{5\pi}{6}\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{5\pi(3-\sqrt{5})}{12}$$

$$\text{故 } V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=abc\iiint\limits_{\Omega'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}$$

注意:此题纯属计算量比较大的题,为了简化计算,我们考虑采用一个符号作为化简,例如本题当中,因为多次出现了 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 所以我们不妨采用将其代换为一个字母,这样从计算难度和计算的速度来看都起一个降低的作用. 这种方法在之前的第一章的例题当中就有出现, 已知一个函数的表达式, 求特定点 $\left(\text{那道例题是} t=\frac{\sqrt{45}-1}{2}\right)$ 的值的时候, 我们采用的方法是: 构造此点的表达式, 然后不断进行化简, 最后就可以得出答案

2. 计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{1-x-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y$

解: 原式 $=\int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}x \int_0^{1-x-z} (1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}y \int_0^{1-y-z} (1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} (1-y)(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} (1-z-y+z)(1-z-y)\mathrm{e}^{-(1-z-y)^2}\mathrm{d}y$

$\xlongequal{1-z-y=u} \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} u(u+z)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{1-u} u(u+z)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{1-u} (u^2+zu)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}z$

$= \int_0^1 \left[u^2(1-u)+u\frac{(1-u)^2}{2}\right]\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 (u-u^3)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 u\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^1 u^3\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}\left(u^2\right) - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}\left(u^2\right) = \frac{1}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(-u^2\right)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}\left(-u^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) - \frac{1}{4}\left(u^2+1\right)\mathrm{e}^{-u^2}\Big|_1^0 = \frac{1}{4\mathrm{e}}$

注意: 交换积分次序的时候需要保证被积函数和积分区域不能改变, 对于本题而言, 交换积分次序的次数比较多。例如在本题中, 第一步用了一次, 第二步用了一次, 第三行第二个等号那里又用了一次。如何才能保证每一次的交换积分次序都是正确的呢? 正确的画出区域即可

3. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = m$, 试求 $\int_0^1 \int_x^1 \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解: 法 1:(凑微分法)

由于 $\int_0^1 \int_x^1 \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$

其中 $\int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(y)f(z)\mathrm{d}z = f(x)\int_x^1 f(y)\left[\int_x^y f(z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y$

$= \frac{f(x)}{2}\left[\int_x^y f(z)\mathrm{d}z\right]^2\Bigg|_{y=x}^{y=1} = \frac{f(x)}{2}\left[\int_x^1 f(z)\mathrm{d}z\right]^2$

故 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{f(x)}{2}\left[\int_x^1 f(z)\mathrm{d}z\right]^2\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_x^1 f(z)\mathrm{d}z\right]^2 \mathrm{d}\left[\int_x^1 f(z)\mathrm{d}z\right] = -\frac{1}{6}\left[\int_x^1 f(z)\mathrm{d}z\right]^3\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(z)\mathrm{d}z\right]^3 = \frac{m^3}{6}$

法 2:(交换积分次序)

由于 $\int_0^1 \int_x^1 \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$

故原式 $= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}x \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z \int_0^z f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z \int_z^y f(z)f(y)f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z \int_0^y f(z)f(y)f(x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\left[\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\right]^2\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\right]^2 \mathrm{d}\left[\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\right]^3\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(z)\mathrm{d}z\right]^3 = \frac{m^3}{6}$

注意: 注意到本题的法 1 采用的是凑微分的方法做的, 这是因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x f(z)\mathrm{d}z\right] = f(x)$, 故考虑采用凑微分的方法, 此题和下面这道题目是一套题, 源题如下:

【源题】已知 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = m$, 试求 $\int_0^1 \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【源题解答】$\int_0^1 \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_y^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{m^2}{2}$

4. 设三元函数 $f(x,y,z)$ 连续，且 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{\frac{1}{4}} f(x,y,z)\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$. 在积分区域 Ω 的边界曲面 S 上求一点 $P\,(x_0,y_0,z_0)$，使 S 在点 P 处的切平面 π 经过点 $Q_1(1,-1,-1)$ 和 $Q_2(3,0,2)$.

解：由题意知边界曲面 $S: z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$, 其中 $x,y\geqslant 0, 0\leqslant z\leqslant \frac{1}{4}$

由于 $P\,(x_0,y_0,z_0)$ 在曲面 S 上，故 $z_0=\frac{1}{4}(x_0^2+y_0^2)$

S 在点 P 处的切平面 π 的法向量为 $\vec{n}=(2x_0,2y_0,-4)=2(x_0,y_0,-2)$

故 S 在点 P 处的切平面 π 的方程为 $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)-2(z-z_0)=0$

即 $\pi: x_0x+y_0y-2z-2z_0=0$，由于点 $Q_2(3,0,2)$ 在平面 π 上, 故 $3x_0-4-2z_0=0$

由于直线 Q_1Q_2的方向向量为$\vec{s}=(2,1,3)$，故 $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$, 即 $2x_0+y_0-6=0$

$$故 \begin{cases} 3x_0-4-2z_0=0 \\ 2x_0+y_0-6=0 \\ z_0=\frac{1}{4}(x_0^2+y_0^2) \end{cases}，解得 \begin{cases} x_0=3-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y_0=\frac{2}{\sqrt{5}} \\ z_0=\frac{5}{2}-\frac{3}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

但是求解的过程当中 x_0 不是介于 $[0,1]$ 之间

5. 设有一半径为 R 的球形物体，其内任意一点 P 处的体密度 $\rho=\frac{1}{|PP_0|}$，其中 P_0 为一定点，且 P_0 到球心的距离 r_0 大于 R，求该物体的质量.

解：为了描述的方便，我们假定 $P_0:(0,0,r_0)$, 设区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$

则该物体的质量为 $V=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{x^2+y^2+(z-r_0)^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2-2r\cos\varphi+r_0^2}}\mathrm{d}r$

6. 求曲线 AB 的方程，使图形 $QABC$ 绕 x 轴旋转所形成的旋转体的重心的横坐标等于 B 点的横坐标的 $\frac{4}{5}$

解：

7. 求密度为常数 μ 的球体 (半径为 R)，对于它的某条切线的转动惯量.

解：

8. 在某平地上向下挖一个坑，坑分为上下两部分，上半部分是底面半图 5.21 径与高度均为 a 圆柱形，下半部分是半径为 a 的半球. 若某点泥土的密度为 $\mu=\rho^2/a^2$，其中 ρ 为此点离坑中心轴的距离，求挖此坑需做的功.

解：

9. 一均匀圆锥体高为 h，半顶角为 α. 求圆锥体对位于其顶点处且质量为 m 的质点的引力.

解：

10. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，记

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma}, G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f\left(x^2\right)\mathrm{d}x}$$

其中 $\Omega(t)=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\right\}, D(t)=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant t^2\right\}$

(1) 讨论 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

解：

(2) 证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$

证明：

5.3 第一型曲线与曲面积分

✍ 习 题 5.3

1. 计算 $\oint_L (2x^2+3y^2)\,\mathrm{d}s$,其中 L 为 $x^2+y^2=2(x+y)$.

   解:

2. 计算 $\oint_L (x^3+z)\,\mathrm{d}s$,其中 L 为圆柱面 $x^2+y^2=x$ 与圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线.

   解:

3. 求八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界曲线的质心. 设曲线的密度为 1.

   解:

4. 求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 在平面 $z=0$ 与马鞍面 $z=xy$ 之间部分的面积

   解:

5. 计算 $I=\oint_\Gamma (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$. 其中 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

   解:

6. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b\leqslant a)$ 内那部分的面积

   解:

7. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2+y^2=1} (ax+by+cz)^2\,\mathrm{d}S$.

   解:

8. 求 $F(t)=\displaystyle\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}S$,其中 $f(x,y,z)=\begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leq 1 \\ 0, & x^2+y^2+z^2>1 \end{cases}$

   解:

9. 已知球 A 的半径为 R,另一半径为 r 的球 B 的中心在球 A 的表面上 $(r<2R)$.

   (1) 求球 B 被夹在球 A 内部的表面积;

   解:

   (2) 问 r 值为多少时这表面积为最大?并求最大表面积的值.

   解:

10. 在半径为 R 的圆柱体上,镗上一个半径为 $r(r\leqslant R)$ 的圆柱形的孔,两轴成直角.

    (1) 证明:小圆柱套上大圆柱的表面的面积为 $S=8r^2\displaystyle\int_0^1 \frac{1-v^2}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}\mathrm{d}v$,这里 $m=r/R$.

    解:

    (2) 如果 $K=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}, E=\int_0^1\sqrt{\frac{1-m^2v^2}{1-v^2}}\mathrm{d}v$. 证明:$S=8\left[R^2E-\left(R^2-r^2\right)K\right]$

    证明:

11. 设 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in\Sigma$,π 为 Σ 在点 P 处的切平面,$\rho(x,y,z)$ 是点 $O(0,0,0)$ 到平面元的距离,求 $\displaystyle\iint\limits_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

    解:

12. 求高度为 $2h$,半径为 R,质量均匀的正圆柱面对柱面中央横截面一条直径的转动惯量

    解:

13. 设球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ 的密度等于点到 xOy 平面的距离,求球面被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下部分曲面的重心.

    解:

5.4 综合题 5

1. 计算积分 $\iint_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

   解:

2. 计算积分 $\iint_D \sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|x^2\leqslant y\leqslant 4\}$，$[\cdot]$ 为取整函数.

   解:

3. $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分

   $$I=\iint\limits_{x^2+y^y\leqslant 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   解:

4. 设二元函数 $f(x,t)=\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{3}{2}}}$，计算二次极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,t)$

   解:

5. 设 $f(x)\in C[a,b]$，而在 $[a,b]$ 之外等于 0，记 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t(h>0)$，试证：$\displaystyle\int_a^b|\varphi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$

   解:

6. 设 $p(x),f(x),g(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可积函数，且 $p(x)$ 非负，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的单调性. 证明：$\displaystyle\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$

   解:

7. 设 $F(x)=\dfrac{x^4}{\mathrm{e}^{x^3}}\displaystyle\int_0^x\int_0^{x-u}\mathrm{e}^{u^3+v^3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ 或者证明它不存在

   解:

8. 设 $\mathrm{d}:x^2+y^2\leqslant 1$，证明不等式是 $\dfrac{61}{165}\pi\leqslant\displaystyle\iint_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\dfrac{2}{5}\pi$.

   解:

9. 设 $f(x,y)$ 在区域 $\mathrm{d}:a\leqslant x\leqslant b,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\phi(x)$ 上可微，其中 $\varphi(x),\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x,\varphi(x))=0$，证明：$\exists K>0$，使得 $\displaystyle\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant K\iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   解:

10. 令 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上的一个实值连续函数. 证明：

    $$\int_0^1\int_0^1|f(x)+f(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$$

    解:

11. 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathrm{d}:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 连续，对任意 $(a,b)\in D$，设 $D(a,b)$ 是以 (a,b) (为中心含于 D 内且各边与 D 的边平行的最大正方形，若总有 $\displaystyle\iint_{D(a,b)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，证明在 D 上 $f(x,y)\equiv 0$.

    证明:

12. 计算积分 $\displaystyle\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+z^2=x\\ y=\sqrt{x^2+z^2}\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面所围成的区域

    解:

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导，$f(x)\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=c>0$. 记

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}V,\ G(t)=\iint\limits_{x^2+y^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

试求函数 $h(x)$ 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{F(t)}{h(t)G(t)}=1$.

解：

14. 设椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1(a>b>c>0)$ 的密度为 1，求它对过原点的任一直线 $L:\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$ 的转动惯量（其中 $l^2+m^2+n^2=1$），并求此转动惯量的最大、最小值.

解：

15. 求曲线 $L_1: y=\dfrac{1}{3}x^3+2x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转所生成旋转曲面的面积.

解：

16. 设曲线 $C: y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$，证明：$\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\leqslant\int_C x\mathrm{d}s\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$.

解：

17. 设曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$，计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+1)^2\mathrm{d}S$.

解：

18. 设曲面 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是空间中任意一点，计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{\rho}$，其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

解：

第 6 章 多元向量值函数积分学

6.1 第二型曲线积分

✍ 习 题 6.1

1. 设 L 为封闭曲线 $|x|+|x+y|=1|$ 的正向一周，计算 $\oint_L x^2y^2\mathrm{d}x-\cos(x+y)\mathrm{d}y$.
2. 设质点在力 $F=\dfrac{-y-x^2}{x^2+y^2+2|xy|}i+\dfrac{x+y^2}{x^2+y^2+2|xy|}$ 作用下沿闭曲线 $|x|+|y|=1$ 逆时针方向运动一周，求力 F 所做的功.
3. 计算 $\int_C\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1+xy-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$，其中 C 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.
4. 计算 $I=\int_L\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，其中 L 从点 $(1,0)$ 沿上半圆周 $x^2+y^2=1$ 到点 $(-1,0)$.
5. 计算 $\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$ 其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心，半径为 $R(\neq 0,1)$ 的逆时针方向的圆
6. 计算 $\int_L\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}-y\right)\mathrm{d}x+\left(x-\frac{1}{2}+y\right)\mathrm{d}y}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2}$，其中 L 是由点 $(0,-1)$ 到点 $(0,1)$ 经过圆 $x^2+y^2=1$ 右部分的路径.
7. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=1,g(0)=0$，L 为平面上任意简单光滑闭曲线，L 围成的平面区域为 D，已知 $\oint_L y[x-f(x)]\mathrm{d}x+[yf(x)+g(x)]\mathrm{d}y=\iint_D yg(x)\mathrm{d}\sigma$，求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$.
8. 设 $u(x,y)$ 于圆盘 $D:x^2+y^2\leqslant\pi$ 内有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{\pi-x^2-y^2}\sin\left(x^2+y^2\right)$，记 D 的正向边界曲线为 ∂D, ∂D 的外法线向量为 n，求 $\int_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$.
9. 设积分 $\oint_L 2[xf(y)+g(y)]\mathrm{d}x+\left[x^2g(y)+2xy^2-2xf(y)\right]\mathrm{d}y=0$，其中 L 为任一条平面曲线. 求：
   (1) 可微函数 $f(y),g(y)$，已知 $f(0)=-2,g(0)=1$.
   (2) 沿 L 从原点 $(0,0)$ 到点 $\mathrm{M}(\pi,\frac{\pi}{2})$ 的曲线积分.
10. 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$）在光滑曲线 Γ 上可积，L 为 Γ 的弧长，而 $M=\max\limits_{(x,y)\in\Gamma}\sqrt{P^2+Q^2}$. 试证：$\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant ML$
11. 设 C 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，又 $f(x)$ 为正值连续函数. 试证：$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\dfrac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi$
12. 设 $\mathrm{d}u=\dfrac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$，求 $u(x,y,z)$.
13. 计算曲线积分 $\oint_\Gamma z^3dx+x^3dy+y^3dz$，其中曲线 Γ 是 $z=2\left(x^2+y^2\right)$ 与 $z=3-x^2-y^2$ 的交线，从 Oz 的正向看 Γ 是逆时针方向的.
14. 设一力场 F 的大小与作用点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离成反比 (比例系数为 $k>0$)，方向总是指向原点，质点受 F 的作用从点 $A(0,0,e)$ 沿螺旋线 $x=\frac{1}{2}(1+\cos t),y=\sin t,z=\frac{e}{\pi}t$ 到点 $B(l,0,0)$，求力场 F 对质点所做的功 W.

6.2 第二型曲面积分

✍ 习 题 6.2

1. 计算 $I=\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截部分的外侧.
2. 计算曲面积分 $\iint_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R,z=-R(R>0)$ 所围成立体表面的外侧.
3. 设函数 $u(x,y,z)$ 在由球面 $S:x^2+y^2+z^2=2z$ 所包围的闭区域 Q 上具有二阶连续偏导数，且满足关系式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2+y^2+z^2.n$ 为 S 的外法线方向的单位向量，试计算 $\iint_s \dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$.
4. 计算向量场 $r=(x,y,z)$ 对有向曲面 S 的通量
   (1) S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧；
   (2) S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围锥体表面的外侧.
5. 设 $u=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，求向量场 grad u 通过曲面 $S:1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}(z\geqslant 0)$ 上侧的通量.
6. 设 S 是锥面 x=y2+22 与两球面 x2+y2+z2=1，x2+y2+z2=2 所围成立体表面的外侧，计算曲面积分 $\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^3+f(yz)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[z^3+f(yz)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(u)$ 是连续可微的奇函数.
7. 设 S 是以 L 为边界的光滑曲面，试求可微函数 $\varphi(x)$ 使曲面积分 $\iint_S (1-x^2)\varphi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4xy\varphi(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与曲面 S 的形状无关.
8. 设函数 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数，证明
$$\iiint_\Omega u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
   其中 S 是闭区域 Ω 的整个边界曲面，$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 为函数（$v(x,y,z)$ 沿 S 的外法线方向的方向导数.

6.3 综合题 6

1. 假设 L 为平面上一条不经过原点的光滑闭曲线，试确定 k 的值，使曲线积分 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}x-ky\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0$，并说明理由.
2. 半径为 a 的圆在内半径为 $3a$ 的一个圆环的内侧滚动，求在动圆圆周上一点生成的闭曲线所包围的面积.
3. 设 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上具有连续的导数，且 $f(1)=f(4)$，计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{1}{y}f(xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是由 $y=x,y=4x,xy=1,xy=4$ 所围成区域 D 的正向边界.
4. 设 $f(x)$、$g(x)$ 为连续可微函数，且 $w=yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y$.
   (1) 若存在 u，使得 $\mathrm{d}u=w$，求 $f-g$.
   (2) 若 $f(x)=g(x)$，求 u 使得 $\mathrm{d}u=w$.
5. 设函数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\cos t|\mathrm{d}t$，$L$ 是从点 $A(10)$ 到原点的位于第一象限的光滑曲线，并且与线段可围成的闭区域 D 的面积为 1.
   (1) 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值 a 与最小值 b.

(2) 对 (1) 的 a、b，求曲线积分 $I=\int_L(3+by+\mathrm{e}^x\sin y)\,\mathrm{d}x+(ax+\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{d}y$.

6. 已知曲线积分 $\int_L\frac{1}{\varphi(x)+y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)\equiv A$(常数)，其中 $\varphi(x)$ 是可导函数且 $\varphi(1)=1$，L 是绕原点 $(0,0)$ 一周的任意正向闭曲线，试求出 $\varphi(x)$ 及 A.

7. 已知点 $A(0,0,0)$ 与点 $B(1,,1,1)$，Σ 是由直线 AB 绕 Oz 轴旋转一周而成的旋转曲面介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧，函数 $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续导数，计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma[xf(xy)-2x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^2-yf(xy)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

8. 计算曲面积分 $I=\iint_S(xy+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yz+\cos(z+x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(6z+\mathrm{e}^{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

9. 设 S 为一光滑闭曲面，原点不在 S 上，n 为 S 上点 (x,y,z) 处的外法向量，$r=(x,y,z)$，计算曲面积分 $I=\oiint_S\frac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}S$，其中 $r=\|r\|$.

10. 设 $A=\iint_S x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是曲面 $az=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant a)$ 的第一卦限部分的上侧. 求二阶可导函数 $f(x)$，使之满足 $f(0)=A,f'(0)=-A$，并使 $y\left[f(x)+3\mathrm{e}^{2x}\right]\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分.

第 7 章 常微分方程

7.1 各类方程求解

✍ 习 题 7.1

1. 若函数 $y=y(x)$ 连续，且满足 $x\int_1^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_1^x ty(t)\mathrm{d}t-x+1$，求函数 $y(x)$.
2. 设函数 $y(x)$ 可导，且对任何实数 x,h 满足 $f(x)\neq 0,\ f(x+h)=\int_x^{x+h}\frac{t\left(t^2+1\right)}{f(t)}\mathrm{d}t+f(x)$，此外，$f(1)=\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的表达式.
3. 设 $f\in C(-\infty,\infty),\ f'(0)$ 存在，且对任意 x,y 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，求 $f(x)$.
4. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}$ 的通解.
5. 求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x-y+1}$ 的通解
6. 设 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(x)+1$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.
7. 设 $\varphi(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，且 $\Phi'(x)=\varphi(x),\ \Phi'(0)=0,\ \Phi'(2\pi)\neq 0$.
   (1) 求解 $y'+y\sin x=\varphi(x)\mathrm{e}^{\cos x}$
   (2) 以上解中是否存在以 2π 为周期的解，若有求之.
8. 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2,若x<1\\0,若x>1\end{cases}$. 试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程，且满足条件 $y(0)=0$.
9. 求解方程 $y'+x\sin 2y=x\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 y,\ y(0)=\frac{\pi}{4}$.
10. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x^6y^3-x}$ 的通解.
11. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处可导，对 $\forall a\in I$，有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=a^2e^a$，求 $f(x)$.
12. 求方程 $(\ln y+2x-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y$ 的通解.
13. 微分学中的一个错误结论是：$(fg)'=f'g'$. 如果 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，是否存在一个开区间 (a,b) 和定义在 (a,b) 上的非零函数 g 使得这个错误的乘积对于 (a,b) 中的 x 是对的
14. 求方程 $yy''+1=y^2$ 满足 $y(0)=1,\ y'(0)=-\frac{1}{2}$ 的特解.
15. 求方程 $yy'+1=y'^2$ 满足 $y(0)=1,\ y'(0)=-\sqrt{2}$ 的特解.
16. 求解微分方程 $\left(y'''\right)^2-y''y^{(4)}=0$.
17. 试证曲率为非零常数的平面曲线为圆.
18. 若 $u=f(xyz),\ f(0)=0,\ f'(1)=1$,，且 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$，求 u.
19. 求方程 $xyy''-xy^2=yy'$ 的通解.
20. 求满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$ 的可微函数 $f(x)$.
21. 求代数多项式 $F(x)$ 和 $G(x)$ 使得
$$\int[\left(2x^4-1\right)\cos x+\left(8x^3-x^2-1\right)\sin x]\mathrm{d}x=F(x)\cos x+G(x)\sin x+C$$
22. 求方程 $y''+ay=\frac{1}{2}(x+\cos 2x)(a>0)$ 的通解.

23. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y=0$$

为一全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

24. 解微分方程 $x^3y''-x^2y''+2xy'-2y=x\sin(\ln x)$.

25. 设函数 $u=f(r), r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，其中 $f(r)$ 二阶可导，且 $f(1)=f'(1)=1$，求 $f(r)$.

26. 设 $f(x)$ 在 $[1+\infty)$ 上有连续的二阶导数，且 $f(1)=0, f'(1)=1$，二元函数 $z=\left(x^2+y^2\right)f\left(x^2+y^2\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 求 $\lim\limits_{t\to 0+}\iint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: 0<t\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1$.

27. 设 $xy=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 是某微分方程的通解，求对应的微分方程.

7.2 微分方程的应用

✍ 习 题 7.2

1. 设函数 f 定义在有限或无限区间 I 上，I 的左端点为 0. 若正数 $x\in I$，则 f 在 $[0,x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值，求满足上述条件的函数 $f(x)$.
2. 设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1), B(1,0)$ 的一段连续曲线，$M(x,y)$ 为该曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影，O 为坐标原点. 若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$，求 $f(x)$ 的表达式。
3. 求一曲线，使得在其上任一点 P 处的切线在 y 轴上的截距等于原点到点 P 的距离.
4. 设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0, y(0)=1$，过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.
5. 在第一象限内求一条与 x 轴相切于点 $A(\mathrm{e},0)$ 的下凸曲线 $y=f(x), f''(x)\geqslant 0$，使曲线上任意两点 M_1, M_2 之间的弧长，等于曲线在这两点处的切线在 y 轴上截下的线段 P_1P_2 之长.
6. 设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.
7. (CPU 降温问题) 一台计算机启动后，其芯片 CPU 温度会不断升高，升高速度为 20°C/h. 为防止温度无限升高而烧坏 CPU，在计算机启动后就要用风扇将恒温空气对它猛吹，使它冷却降温. 根据牛顿冷却定律可知冷却速度和物体与空气的温差成正比. 设空气的温度一直保持 15°C/h 不变. 试求 CPU 温度的变化规律.
   (1) 试证明在这种冷却方法下，CPU 温度 T 是关于时间 t 的单调增加函数，但 $T(d)$ 有上界；
   (2) 若已知计算机在启动 1h 后其温度的升高率为 14°C/h，试求在启动 2h 后 CPU 温度的升高率.
8. 拖拉机后面通过长为 $a(m)$ 不可拉伸的钢绳拖拉着一个重物，拖拉机的初始位置在坐标原点，重物的初始位置在 $A=(0,a)$ 点. 现在拖拉机沿 x 轴正向前进，求重物运动的轨迹曲线方程.
9. 从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮子的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水密度为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.
10. 某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $V/6$，流入湖泊内不含 A 的水量为

$V/6$，流出湖泊的水量为 $V/3$. 已知 1999 年底的湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标，为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 m_0/V. 问至少需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内?（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的）

11. 有一小船从岸边的 O 点出发驶向对岸，假定河流两岸是互相平行的直线，并设船速为 a 方向始终垂直于对岸，又设河宽为 $2l$，河面上任一点处的水速与该点到两岸距离之积成正比，比例系数为 $k=\dfrac{v_0}{l^2}$，求小船航行的轨迹方程
12. 一条鲨鱼在发现血腥味时，总是沿血腥味最浓的方向追寻. 在海平面上进行试验表明，如果把坐标原点取在血源处，在海平面上建立直角坐标系，那么点 (x,y) 处血液的浓度 C(每百万份水中所含血的份数) 的近似值为 $C=\mathrm{e}^{-(x^2+2y^2)/10^4}$。求鲨鱼从点 (x_0,y_0) 出发向血源前进的路线.

7.3 综合题 7

1. 找出所有的可微函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$，对于这样的函数，存在一一个正实数 a，使得对于所有的 $x>0$，有 $f'\left(\dfrac{a}{x}\right)=\dfrac{x}{f(x)}$.
2. 解二阶偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{2x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$，其中 $z=z(x,y)$，有连续的二阶偏导数。
3. 设 $p_1(x),p_2(x)$ 是连续函数，$y_1(x),y_2(x)$ 是方程 $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ 的两个线性无关的解. 证明：如果 α,β 是 $y(x)$ 的两个零点，则在 α,β 之间必存在 $y_2(x)$ 的一个零点.
4. 设 $\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$ 为方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的两个积分因子，且 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\neq$ 常数，求证 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=C$ 是该方程的通解，其中 C 为任意常数.
5. 设函数 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\displaystyle\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant x^2+y^2}\dfrac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.
   (1) 试求函数 $f(x)$ 的表达式：
   (2) 若 $f(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x^4}$.
6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\Omega(t)=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2,z\geqslant0\right\}$，$S(t)$ 是 $\Omega(t)$ 的表面，$D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xOy 面的投影区域，$L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线，已知当 $t\in(0,+\infty)$ 时，恒有
$$\oint_{L(t)} f\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s+\oiint_{S(t)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=\iint_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma+\iiint_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$$
   求 $f(x)$ 的表达式
7. 求出所有定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续的，在 $(0,+\infty)$ 上（函数）值是正实数的函数 $y=g(x)$，使得对所有 $x>0$，区域 $R_x=\{(s,t)|0\leqslant s\leqslant x,0\leqslant t\leqslant g(s)\}$ 的质心的 y 坐标和 g 在 $[0,x]$ 上的平均值相同. 并证明你的结论.
8. 一个质点在直线上运动，仅有与速度成反比的力作用于其上. 如果初速为每秒 1000 尺，当它经过 1200 尺后，速度为每秒 900 尺. 试计算运行这段距离的时间. 误差不超过百分之一秒.
9. 飞机在机场开始滑行着陆。在着陆时刻已失去垂直速度，水平速度为 v_0 米/秒飞机与地面的摩擦系数为 μ，且飞机运动时所受空气的阻力与速度的平方成正比，在水平方向的比例系数为 k_x 千克 · 秒 ^{2}/米，在垂直方向的比例系数为 k_y 千克 · 秒 ^{2}/米. 设飞机的质量为 m 千克，求飞机从着陆到停止所需的时间.
10. 有一圆锥形的塔，底半径为 R 高为 $(h>R)$，现沿塔身建一登上塔顶的楼梯，要求楼梯曲线在每一点的切线与过该点垂直于 xOy 平面的直线的夹角为工，设楼梯入口在点 $(R,0,0)$，试求

楼梯曲线的方程 (设塔底面为 xOy 平面).

11. 设过曲线上任一点 $M(x, y)$ 的切线 MT 与坐标原点到此点的连线 OM 相交成定角 ω，求此曲线方程.
12. (四人追逐问题) 位于边长为 $2a$ 的一个正方形的四个顶点有四个人 P_1, P_2, P_3, P_4，一开始分别位于点 $A_1(a, a), A_2(-a, a), A_3(-a, -a), A_4(a, -a)$ 处，他们玩依次追逐的游戏，P_1 追逐 P_2，P_2 追逐 P_3，P_3 追逐 P_4，P_4 追逐 P_1. 求各自追逐路线的方程.
13. 一个质点缚在一条轻的竿 AB 的一端 A 上. 竿长为 a，竿的 B 端有绞链使它能在一个垂直平面上自由转动. 竿在绞链上面竖直的位置处于平衡，然后轻微地扰动它. 证明：竿从通过水平位置降到最低位置的时间是 $\sqrt{a/g}\ln(1+\sqrt{2})$.
14. 一个质量为 $m = 1$kg 的爆竹，以初速度 $v_0 = 21$m/s 铅直向上飞向高空，已知在上升的过程中，空气对它的阻力与它运动速度 v 的平方成正比，比例系数为 $k = 0.025$kg/m. 求该爆竹能够到达的最高高度.
15. 一质点在一与距离 k 次方成反比的有心力作用下运动。如果质点的运动轨道为一圆 (假设有心力由圆周上的点出发)，试求 k 的值
16. (雨滴下落的速度) 有一滴雨滴，以初速度为零开始从高空落下，设其初始质量为 m_0(g). 在下落的过程中，由于不断地蒸发，所以其质量以 a(g/s) 的速率逐渐减少. 已知雨滴在下落时，所受到的空气阻力和下落的速度成正比，比例系数为 $k > 0$. 试求在时刻 $t\left(0 < t < \dfrac{m_0}{a}\right)$，雨滴的下落速度 $v(t)$.

第 8 章 无穷级数

8.1 常数项级数

✍ 习 题 8.1

1. 讨论下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\mathrm{e}^{-n}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(a>b>0)$

2. 判定下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)^{\ln(1+n)}}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x$

3. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；(2) 试证：对任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 收敛.

4. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的正项级数，求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛，反之是否正确？

5. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$ 的敛散性，并求其和.

6. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\operatorname{arccot}\left(n^2+n+1\right)$ 的和.

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^p\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)a_n\right]=1(p>1)$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性.

8. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 存在.

9. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 的敛散性。其中 x_n 是方程 $x=\tan x$ 的正根按递增顺序的排列. =1Xn

10. 设 $B_n(x)=1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x$，判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{B_n(\log_n 2)}{(n\log_2 n)^2}$ 收敛.

11. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n t\mathrm{d}t$，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性.

12. 设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在唯一正实根 x_n，并证明：当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

13. 设 $\{p_n\}$ 是单调增加的正实数列,证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 同敛散.

14. 设 $\{u_n\},\{c_n\}$ 为正实数列,试证明:

(1) 若对所有的正整数 n 满足: $c_nu_n-c_{n+1}u_{n+1}\leqslant 0$,且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

(2) 若对所有的正整数 n 满足: $c_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-c_{n+1}\geqslant a$(常数 $a>0$),且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

15. 设数列 $S_1=1,S_2,S_3,\cdots$ 由公式 $2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n}\,(u_n>0)$ 确定,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{S_n\}$ 收敛.

16. 令 A 为整数的一个集合,这些数在它们的十进制表示中不包含数字 9,证明: $\sum_{\alpha\in A}\frac{1}{a}$ 收敛,即 A 定义了一个调和级数的收敛子列.

17. 设 $\{a_n\}$ 是正项递减数列,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,证明:

(1) $\lim_{n\to\infty}na_n=0$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_{n-1}-a_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,其中 $a_0=0$

18. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$ 收敛.

19. 设 F_n 满足条件 $F_0=1,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n=2,3,\cdots)$. 判断两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n},\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln F_n}$ 的敛散性.

20. 设实数列 $u_0,u_1,u_2,\cdots$ 满足 $u_n=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2,n=0,1,2,\cdots$,试证: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则对于所有的 k 都有 $u_k=0$.

21. 判断下列级数的敛散性?如果收敛,是条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(3^n+2^n)\,n}$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$

(3) $a-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\cdots\left(a^2+b^2\neq 0\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^2+an+b}{n}\pi\right)$($a,b$ 为常数)

22. 设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的敛散性.

23. 设 $|a_n|\leqslant 1\ (n\in\mathbf{N}_+)$,且 $|a_n-a_{n-1}|\leqslant\frac{1}{4}\left|a_{n-1}^2-a_{n-2}^2\right|\ (n\geqslant 3)$,求证:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

24. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}(p\geqslant 1)$ 的敛散性.

25. 给定级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$, $p>0$. 证明下列结论:

(1) 当 $p>1$ 时,该级数绝对收敛;

(2) 当 $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时，该级数条件收敛;

(3) 当 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时，该级数发散.

26. 设 $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 (n = 1, 2, \cdots)$，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n} = 1$.

27. 证明：$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$

8.2 函数项级数

✍ 习 题 8.2

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-1)^n$ 的收敛半径.

2. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$ 的收敛域.

3. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$ 的收敛域.

4. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + 50^n}{n^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

5. 对 p 讨论幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln n}$ 的收敛域.

6. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) x^n$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot (x-a)^{2n}}{2^n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n + \sin n\right) x^n$

7. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$ 的收敛区间及和函数.

8. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{2n}$ 级数的和函数.

9. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(n^2 - n + 1\right)}{2^n}$ 级数的和函数.

10. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x \mathrm{d}x, n = 0, 1, 2, \cdots$，求 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} I_n$.

11. 求 $\dfrac{1 + \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 4!} + \frac{\pi^8}{2^8 \cdot 8!} + \frac{\pi^{12}}{2^{12} \cdot 12!} + \cdots}{\frac{1}{2!} + \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 6!} + \frac{\pi^8}{2^8 \cdot 10!} + \frac{\pi^{12}}{2^{12} \cdot 14!}}$ 的值.

12. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ 的收敛域与和函数.

13. 设 $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = \frac{7}{2}, a_{n+1} = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) a_n (n = 2, 3, \cdots)$. 证明当 $|x| < 1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，并求和函数 $S(x)$.

14. 给定三个幂级数 $u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$, 证明：$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$

15. 设 $f_0(x) = e^x$，对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$，定义 $f_{n+1}(x) = xf_n'(x)$. 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!} = e^{ex}$

16. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数从某项起具有周期性. 证明：此级数的和函数是有理函数.

17. 设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots (3n)} \left(\frac{x}{2}\right)^n, (-2 \leqslant x < 2)$

 (1) 证明 $S(x)$ 满足 $\left(1 - \frac{x}{2}\right) S'(x) = \frac{1}{6} S(x) + \frac{1}{6}$;

 (2) 求和函数 $S(x)$.

18. 将 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数

19. 将 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x$ 函数展开成 x 的幂级数.

20. 将 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 函数展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

21. 将函数 $e^x \sin x$ 展开成 x 的幂级数

22. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 函数，求：

 (1) $f(x)$ 的麦克劳林展开式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$;

 (2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{2n}| x^{2n}$ 的和函数 $S(x)(-1 < x < 1)$.

23. 将 $f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开为傅里叶级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

24. 设 $f(x)$ 是以 2π 为为周期的连续函数，其傅里叶系数为 a_0, b_n, c_n.

 (1) 求函数 $G(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) \mathrm{d}t$ 的傅里叶级数 A_0, B_n, C_n.

 (2) 利用 (1) 的结果证明巴塞瓦 (Parseval) 等式：$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

8.3 综合题 8

1. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 \mathrm{d}t$，判断级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 的敛散性.

2. 求级数 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ 的值.

3. 设 $u_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p} \ln \frac{n+1}{n-1} (p > 0)$，判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

4. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n}\right)^n$ 的敛散性与参数 p, x 的关系.

5. 证明弗林克 (Frink) 判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n = k$ 存在，则当 $k < \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数收敛；当 $k > \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数发散.

6. 证明：若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n + a_{n+1} + \cdots}$ 发散

7. 设 $a_1=a>0, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)^2-1\right]$ 收敛.

8. 设有一严格递增的正整数序列 (例如 $1,2,3,4,5,6,10,12,\cdots$).u_n 表示此序列前 n 项的最小公倍数. 求级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 收敛.

9. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(3n+1)}$ 的值.

10. 设 $E(n)$ 表示能使 5^k 整除乘积 $1^1 2^2 3^3\cdots n^n$ 的最大的整数 k，计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^2}$.

11. 讨论级数的敛散性：$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^q}-\frac{1}{4^p}+\cdots-\frac{1}{(2n)^p}+\frac{1}{(2n+1)^q}+\cdots$.

12. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

13. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3+\sqrt{5})^n$ 的敛散性.

14. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$ 的敛散性.

15. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 A，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=A$.

16. 求 $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

17. 判定下列反常积分的敛散性.

 (1) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$，($[\cdot]$ 为取整函数)

 (2) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}$

18. 令 $A=\{(x,y)|0\leqslant x,y<1\}$，对任何 $(x,y)\in A$，令 $S(x,y)=\sum\limits_{\frac{1}{2}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 2}x^m y^n$. 这里的求和对一切满足所列不等式的正整数 m,n 进行. 试计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,y)\in A}\left(1-xy^2\right)\left(1-x^2y\right)S(x,y)$

19. 当 r 取何值时，级数 $\frac{1}{2}+r\cos x+r^2\cos 2x+r^3\cos 4x+r^4\cos 8x+$ 的所有部分和对一切 x 都非负.

20. 已知 $a_1=1, a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\quad(n=2,3,\cdots)$，试求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径与和函数.

21. 设 $u_0=0, u_1=1, u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$，其中 a,b 是满足 $a+b<1$ 的正的常数，求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$ 的和函数篇！

22. 设 $a_0=3, a_1=5$，且对任何自然数 $n>1$，有 $na_n=\frac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)a_{n-1}$，证明：当 $|x|<1$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，并求其和函数。

23. 试证幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 逐项求导后所得的级数与原级数有相同的收敛半径.

24. 对于每一个正整数 n，用 $a(n)$ 表示 n 的 3 进位数中 0 的个数。试求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{a(n)}}{n^3}$ 的收敛域

25. 幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的每一个系数 a_n 只取值 0 或 1. 证明：$f(x)$ 是有理函数的充要条件

为 $f(\frac{1}{2})$ 是有理数

26. 设 $y=y(x)=\frac{1}{4}\left(1+x-\sqrt{1-6x+x^2}\right)$，其幂级数展开式为 $y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$，证明该幂级数展开式的系数都是正整数
27. 将函数如 $\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$ 展开为 x 的幂级数
28. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2x^2}{1+x^2}\right)^n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{2n-1}(|x|<1)$.
29. 证明：$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n$.
30. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，并且平方可积，证明 Bessel 不等式：
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$
其中 a,b 是 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶系数.
31. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积函数，其傅里叶系数为 a_0,a_n,b_n，记 $S_0(x)=a_0/2$，$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$， $\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}S_k(x)$. 证明
(1) $S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t$;
(2) $\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t$.