微积分和积分变换求解

本章节讨论极限、微分、积分问题求解方法。先讨论极限问题的求解，接着是函数求导以及偏导数运算，还有参数方程、隐函数的导数计算方法。最后讲不定积分，定积分，无穷积分以及反常积分问题的求解方法。

单变量函数的极限

运算	函数的格式和解释
极限运算	`L = limit(f,x,x_0)` 求出$L=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，其中f是函数，x是变量，x_0可以是常数、函数或者inf，单边极限可以由 `L = limit(f,x,x0,'left')` 给出或者 `L=limit(f,x,x0,'right')`
求导	`D=diff(f,x,n)` 表示求$D=d^nf/dx^n$，若$n=1$可以忽略，该函数还可以用来求偏导数，例如$D=diff(f,x,x,x,y)$可以求$\partial^4 f/\partial x^3\partial y$
参数方程求导	`D=paradoff(y,x,t,n)` 表示对参数方程$y(t)$和$x(t)$求导，其中t是自变量，n为阶次，即$D=d^ny/dx^n$
隐函数求导	`D=imgdiff(f,x,y,n)` 表示对$f(x,y)=0$的符号表达式求导，n为阶次，返回$D=d^n/dx^n$
积分运算	`F=int(f,x)` 表示取不定积分$F=\int f(x)dx$， `F=int(f,x,a,b)` 可以直接求取定积分$F=\int_a^b f(x)dx$，a是下限，b是上限。重积分可以由 `int()` 嵌套得到

函数的极限

函数的极限问题是整个微积分学的基础。我们给出一些具体的例子。假设已知函数$f(x)$，则极限问题的表示为

$$L=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

它表示当$x\to x_0$时，求$f(x)$在x_0处的极限值。

查表可知可以用 `limit` 函数求解，调用格式为 `L=limit(f,x0)` 和 `L=limit(f,x,x0)` 。前者使用默认的符号变量。若极限为∞，则直接用inf表示即可。

现在，我们求解$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

求解需要3个步骤：

- 声明必要的符号变量，比如x
- 定义函数$f(x)=\sin x/x$
- 调用 `limit()` 求解

```
>> syms x;f(x) = sin(x)/x;L = limit(f,x,0)

L =

1
```

现在我们求解极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x(1+\frac{a}{x})^x\sin(\frac{b}{x})$。

手动求解该函数不简单，那么转为Matlab命令则为

```
>> syms x a b; f(x) = x*(1+a/x)^x * sin(b/x); L = limit(f,inf)

L =

b*exp(a)
```

那么就得到结果$L = be^a$

序列极限

现在，我们求序列极限 $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}$

注意n是整数，那么命令如下

```
>> syms n integer
>> f = factorial(n)^(1/n^2)

f =

factorial(n)^(1/n^2)

>> L=limit(f,n,inf)

L =

1
```

最后一个题目，我们求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{1}{n(x^2+1)+x}\right)\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n}\right)$$

该极限有序列和函数，但matlab可以直接求解：

```
>> syms x n; f(x)=n*atan(1/(n*(x^2+1)+x))*tan(pi/4+x/2/n)^n;
>> L=limit(f,n,inf)

L(x) =

exp(x)/(x^2 + 1)
```

单边极限

对于左右极限，求法也是很简单的。左右极限的数学表示如下：

$$L_1 = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ 或 } L_2 = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

matlab上的调用格式为 `L = limit(f,x,x0,'left')` 或者 `L = limit(f,x,x0,'right')`

现在我们求出下列函数的单边极限问题：

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}}}}}$$

和之前的求解的步骤是一样，命令为

```
>> syms x positive
>> f(x) = sqrt(1/x+sqrt(1/x+sqrt(1/x+sqrt(1/x+sqrt(1/x))))) - sqrt(1/x-sqrt(1/x-sqrt(1/x-sqrt(1/x-sqrt(1/x)))));
>> L=limit(f,x,0,'right')

L =

1
```

累次极限

给定多元函数$f(x_1,\cdots,x_n)$，每个自变量按照某种次序依次逼近目标值所定义的极限称为函数的累次极限，二元函数的累次极限可如下定义：

$$L_1=\lim_{x\to x_o}\lim_{y\to y_0}f(x,y),\ \ L_2=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$$

其中x_0,y_0也可以是某种函数或者数。

在matlab可以如下的调用函数求解累次极限 `L1 = limit(limit(f,y,y0),x,x0)` 或者 `L2 = limit(limit(f,x,x0),y,y0)`

现在我们看一个例子，我们求如下函数的极限

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{x\to 1/\sqrt{y}}e^{-1/(y^2+x^2)}\frac{\sin^2 x}{x^2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{x+a^2y^2}$$

那么

```
syms x a; syms y positive;
f(x,y) = exp(-1/(y^2+x^2))*sin(x)^2/x^2*(1+1/y^2)^(x+a^2*y^2)
L = limit(limit(f,x,1/sqrt(y)),y,inf)
```

那么答案应该是e^{a^2}

重极限

多元函数$f(x_1,\cdots,x_n)$所有自变量同时趋向各自的目标值所得的极限称为重极限，函数$f(x,y)$的重极限可以如下表示

$$L=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$$

求解重极限的方法没有直接使用的函数，所求方法一般使用k值法

重极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin(1/y)+y\sin(1/x)$可以这样求：给定$y=kx$，让$y\to x^2$或者$x\to y^2$，若重极限存在，则这三个方向的累次极限相同。不难得到极限$L_1=L_2=L_3=0$

```
syms k x y;
f(x,y) = x*sin(1/y)+y*sin(1/x);
L1 = limit(limit(f,x,k*x),x,0);
L2 = limit(limit(f,x,y^2),y,0);
L3 = limit(limit(f,y,x^2),x,0);
```

求出重极限是非常困难的事情，但指出极限存在或不存在则非常简单，只需要证明两个方向上的累次极限不存在即可。

函数求导

现在我们开始用matlab研究导数

导数和高阶导数

一阶导定义如下：函数$y=f(x)$对变量x的一阶导数定义为

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

现在，我们计算函数$f(x)=\frac{\sin x}{x^2+4x+3}$

```
syms x h;
f(x) = sin(x)/(x^2+4*x+3);
F = limit(f(x+h)-f(x)/h,h,0)
```

结果如下

```
>> syms x h;
f(x) = sin(x)/(x^2+4*x+3);
F = limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)

F =

cos(x)/(x^2 + 4*x + 3) - (sin(x)*(2*x + 4))/(x^2 + 4*x + 3)^2
```

还有其他方法，我们可以用 `diff()` 来运算。格式为 `f1=diff(f,x,n)` ，其中f是函数，x是变量,n是导数的阶。

现在我们对上面函数求4阶导

```
syms x ;
f(x) = sin(x)/(x^2+4*x+3);
F = diff(f,x,4)
```

结果

```
F(x) =

sin(x)/(x^2 + 4*x + 3) + (12*sin(x))/(x^2 + 4*x + 3)^2 + (24*sin(x))/(x^2 + 4*x + 3)^3 - (24*cos(x)*(2*x + 4)^3)/(x^2
```

多元函数偏导数

对二元函数$z=f(x,y)$，可以如下定义对x的偏导数

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

我们可以用如下方法求偏导数

```
f1 = diff(diff(f,x,m),y,n)
f1 = diff(diff(f,y,n),x,m)
```

这俩都是在求偏导$\partial^{m+n}f/(\partial x^m\partial y^n)$

新版本中还可以用这种方法： `f1 = diff(f,x,\cdots,x,y,\cdots,y)` ，其中有m个x和n个y。

现在，我们求$z=(x^2-2x)e^{-x^2-y^2-xy}$的一阶偏导。

```
syms x y;
z(x,y)=(x^2-2*x)*exp(-x^2-y^2-x*y);
zx = simplify(diff(z,x)),zy=diff(z,y)
```

结果：

```
zx(x, y) =

exp(- x^2 - x*y - y^2)*(2*x + 2*x*y - x^2*y + 4*x^2 - 2*x^3 - 2)


zy(x, y) =

exp(- x^2 - x*y - y^2)*(- x^2 + 2*x)*(x + 2*y)
```

即：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-e^{-2x^2-y^2-xy}(-2x+2+2x^3+x^2y-4x^2-2xy)$$

和

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x(x-2)(2y+x)e^{-x^2-y^2-xy}$$

对其他变量更多的函数也可以如法炮制

`diff(f(x,y,z,...),x,y,z)` 可以求得$\partial f/\partial x\partial y\partial z$的偏导数

隐函数的偏导数

matlab并没有可以直接求解隐函数的工具，不过利用我们充足的数学知识，我们可以编写相应的函数。

考虑一个二元隐函数$f(x,y)=0$，现在我们记$F(x,y)=f(x,y)=0$是一个隐函数。记F_x是对x求关于F的偏导，而F_y是对y求偏导，那么一阶隐函数偏导数公式为

$$F_x=\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_y}$$

那么可以推出二阶导数为

$$F_{x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_x}{\partial y}F_x(x,y)$$

若记$F_n=\partial^n y/\partial x^n$，那么递推式可以这样给出：

$$F_n(x,y)=\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x}+\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y}F_1$$

根据递推式我们可以编写算法来求解偏导数

```
1 function dy=imgdiff(f,x,y,n)
2 if nargin==3,n=1; end
3 if mod(n,1)~=0 || n<=0
4     error('n should be a positive integer')
5 else, F1 = -simplify(diff(f,x)/diff(f,y));dy=F1;
6     for i=2:n, dy=simplify(diff(dy,x)+diff(dy,y)*F1);
7     end
8 end
```

第二行指出，若输入参数只有3个，那么默认n=1，也就是求一阶导。第三行指出，若n不是正整数，那么报错。第5行开始求一阶导，之后的for循环是求n阶导。

现在我们检验一下，

给定隐函数$x^2\sin y+y^2z+z^2\cos y-4z=0$，我们求$dz/dx$和$d^2z/dx^2$

```
syms x y z;
f(x,y,z)=x^2*sin(y)+y^2*z+z^2*cos(y)-4*z
F1 = simplify(imgdiff(f,x,z,1))
F2 = simplify(imgdiff(f,x,z,2))
```

结果：

```
F1(x, y, z) =

-(2*x*sin(y))/(2*z*cos(y) + y^2 - 4)

>> F2

F2(x, y, z) =

- (2*sin(y))/(2*z*cos(y) + y^2 - 4) - (8*x^2*cos(y)*sin(y)^2)/(2*z*cos(y) + y^2 - 4)^3
```

也就是

$$F_1 = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x \sin y}{2z \cos y + y^2 - 4}$$

而

$$F_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2 \sin y}{2z \cos y + y^2 - 4} - \frac{8x^2 \cos y \sin^2 y}{(2z \cos y + y^2 - 4)^3}$$

参数方程的导数

对参数方程也是一样的。定义参数方程$y = f(t)$和$x = g(t)$，则$\frac{d^n y}{dx^n}$可以这样推出

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)\frac{1}{g'(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{g'(t)} \\ &\cdots \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)\frac{1}{g'(t)} \end{aligned}$$

我们依然是编写对应的脚本求解

```
function result=paradiff(y,x,t,n)
if mod(n,1)~=0,
   error('n must be positive integer')
else,
    g1 = diff(x,t);result = diff(y,t)/g1;
        for i=2:n, result=diff(result,t)/g1;end
end
```

脚本名必须是paradiff.m

现在我们求

$$y(t) = \frac{\sin t}{(t+1)^3}, x(t) = \frac{\cos t}{(t+1)^3}$$

的三阶参数方程导数

```
syms t;
y=sin(t)/(t+1)^3;
x=cos(t)/(t+1)^3;
f = simplify(paradiff(y,x,t,3))
```

结果:

```
f =
(3*(t + 1)^7*(23*cos(t) + 24*sin(t) - 6*t^2*cos(t) - 4*t^3*cos(t) - t^4*cos(t) + 12*t^2*sin(t) + 4*t^3*sin(t) - 4*t*c
```

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3(t+1)^7\left(23\cos t + 24\sin t - 6t^2\cos t - 4t^3\cos t - t^4\cos t + 12t^2\sin t + 4t^3\sin t - 4t\cos t + 32t\sin t\right)}{(3\cos t + \sin t + t\sin t)^5}$$

积分

一般来说，积分是导数的逆命题。若知道一个函数的导数，则可以用前面的方法求出。当然也有一些不能用初等函数表示的函数，这些我们略过

不定积分

对$f(x)$的不定积分可以这样表示:

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

在matlab中可以使用 `F=int(f,x)` 进行调用。

现在，已知$\int f'(x)dx = f(x)$,我们可以使用matlab进行检验，对函数的导数进行积分看是否能得到原函数。

```
syms x;
y(x) = sin(x)/(x^2+4*x+3);
y1 = diff(y);
y0 = simplify(int(y1))
```

结果:

```
y(x) = sin(x)/(x^2+4*x+3);
y1 = diff(y);
y0 = simplify(int(y1))

y0(x) =

sin(x)/((x + 1)*(x + 3))
```

实际上，函数的原函数应该写为$y1(x) = \sin(x)/(x^2 + 4x + 3) + C$，其中$C$是任意常数，我们如果知道原函数的一个已知点，则可以唯一的确定该系数。

现在我们求下面的不定积分问题

$$I = \int \sin^3(x^2+1)^4 \cos(x^2+1)^4 (x^2+1)^3 \mathrm{dx}$$

```
syms x;
F(x) = sin((x^2+1)^4)^3*cos((x^2+1)^4)*(x^2+1)^3*x;
I = int(F,x)
```

结果:

```
I(x) =

cos(4*(x^2 + 1)^4)/256 - cos(2*(x^2 + 1)^4)/64
```

定积分

定积分格式如下：

它形如

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

我们可以用 `I=int(f,x,a,b)` 去求解，其中x是自变量，(a,b)是定积分的积分区域。若得到的积分值是不确切的数值，还可以尝试使用 `vpa()` 来得出定积分或无穷积分的高精度近似解

现在我们尝试求解

$$I = \int_0^1 \frac{x^2+4x-4}{\sqrt{x^3+6x^2-12x+9}}dx$$

```
syms x;
f(x) = (x^2+4*x-4)/(sqrt(x^3+6*x^2-12*x+9));
I = int(f,x,0,1);
vpa(I)
```

结果

```
ans =

-0.66666666666666666666666666666667
```

反常积分

对于正常的积分，在积分区域内都是连续的，但有一类积分，它在点c外的区域都是连续的，并且满足$\lim\limits_{x \to c} | f(c) | = \infty$

那么基于奇点c，我们可以把积分区域变为$[a,c_1),(c_2,b]$的子区间，并用如下方法计算

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c_1\to c^-}\int_a^{c_1} f(x)dx+\lim_{c_2\to c^+}\int_{c_2}^b f(x)dx$$

不过matlab已经把这些规则嵌入求解函数了，我们只需要直接调用 `int()` 即可。不需要手工输入奇点信息和单边极限等运算。

现在我们求解

$$\int_1^{2e}\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$$

```
syms x;
f(x) = 1/(x*sqrt(1-log(x)^2));
I = int(f,x,1,2*exp(sym(1))),vpa(I)
```

结果

```
I =

asin(log(2) + 1)


ans =

1.5707963267948966192313216916398 - 1.1182308528192447293713675895252i
```

重积分

可积函数的重积分通过重复调用int()完成

比如我们要求积分

$$J=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-x^2/2}\sinh(x^2+y)dxdy$$

这样就可以了

```
syms x y;
f(x,y) = exp(-x^2/2)*sinh(x^2+y);
I = int(int(f,x,-sqrt(1-y^2),sqrt(1-y^2)),y,-1,1);
vpa(I)
```

结果

```
ans =

0.70412133490335689947800312022517
```