二元高次方程组

2022 年 6 月 20 日

目录

0.1 引理

设$f(x),g(x)$为 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$
$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$ 是数域P上两个非零的多项式，这表明a_0,b_0不全为0，则$f(x)$和$g(x)$在$P[x]$中有次数大于0的公因式 $\Longleftrightarrow$ 在$P[x]$中存在非零次数小于m的多项式$u(x)$，次数小于n的多项式$v(x)$使得$u(x)f(x)=v(x)g(x)$

这是第一章的贝祖定理的拓展。他有一个证明很有意思，即让一个函数利用辗转相除法，使得最后剩下一个余项，然后把每个余项带回到上一个余项的式子里面，因此我们的证明也跟这个有点关系。因此我们得先证明充分性和必要性，不过没有第一章那么麻烦。

充分性⇒

$f(x)$和$g(x)$存在次数大于0的公因式$d(x)$，那么则有$f(x)=d(x)f_1(x)$，而$g(x)=d(x)g_1(x)$，那么g_1和f_1的次数一定是小于f,g的。满足$deg(u)<m$和$deg(v)<n$，我们只需要取$u(x)=g_1(x)$和$v(x)=f_1(x)$，那么$u(x)f(x)=v(x)g(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)$

必要性$\Leftarrow$

系数a_0和b_0不全为0，不妨设$a_0 \neq 0$，且存在非零次数小于m的多项式$u(x)$和小于次数n的多项式$v(x)$使得$u(x)f(x) = v(x)g(x)$，然后我们要证明$f(x), g(x)$有次数大于0的公因式。

那么，我们令$(f(x), g(x)) = d(x)$，且$f(x) = d(x)f_1(x), v(x) = d(x)v_1(x)$带入即可得到$u(x)f_1(x) = g(x)v_1(x)$，由于$d(x)$是$v(x)$的因式，次数小于$n$，那么由$f(x) = d(x)f_1(x)$可得，$f_1(x)$次数也是小于$n$且大于0的。那么我们知道$f_1(x)|g(x)v_1(x)$，且$(f_1(x), v_1(x)) = 1$，因为我们的等式是整除了最大的公因式$d(x)$后得到的。那么会有$f_1(x)|g(x)$，从而$f_1(x)$是$f(x), g(x)$的公因式。

现在，我们用待定系数法确定$u(x) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i x^{m-1-i}$,$v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i x^{n-1-i}$，带入$u(x)f(x) = v(x)g(x)$，可以得到下面一系列的东西，这种多项式该怎么比较，这里我们比较是系数，第一章我们已经讲了系数怎么比较了即每一项角标加起来应该都是等于的，其中$f(x)$的系数为a_n，而$g(x)$的系数为b_0。那么可以得到

$$\begin{cases} a_0u_0 & = b_0v_0 \\ a_1u_0 + a_0u_1 & = b_1v_0 + b_0v_1 \\ a_2u_0 + a_1u_1 + a_0u_2 & = b_2v_0 + b_1v_1 + b_0v_2 \\ \cdots & \\ a_nu_{m-2} + a_{n-1}u_{m-1} & = b_mv_{n-2} + b_{m-1}v_{n-1} \\ a_nu_{m-1} & = b_mv_{n-1} \end{cases}$$

因为$f(x), g(x)$是已经确定的，v, u必须满足次数小于m, n，所以我们不妨假设为$m-1$和$n-1$次。其中，a_0到a_n有n个未知数，而b_0到b_m存在m个未知数，但其实有$m+n$个方程，变量从0到m和0到n，因此，如果我们把右端的多项式移到左边来，那么明显就是一个存在$m+n$个变量和方程的齐次线性方程组。根据引理，那么这个方程组有解只能是方程组的行列式等于0。

如果我们对上述系数然后提取出矩阵行列转换呢，那么是这样子的

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & & & & \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n & \\ & -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{n-1} & -b_n \\ \cdots & \cdots & & & & \end{pmatrix}$$

现在我们提取行列式的$(-1)^n$，因为转置后$-b_i$ 的未知量有$v_0 \cdots v_{n-1}$一共是n个，因此提取$(-1)^n$。那么定义这个行列式叫$f(x)$与$g(x)$的结式。

$$R(f,g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & & & & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \cdots & \cdots & & & & \end{pmatrix}$$

我们知道每一行都是跟上一行错开一列的，那么到底错开了多少列呢？想想我们的变量$v(x)$和$u(x)$,$v(x)$一共有n个，而$u(x)$有m个，因此a_0一共错开m列，b_0错开n列，因此它确实是一个方阵。是$m+n$级方阵。

因此，想要知道是否存在$u(x)$和$v(x)$，只需要解该系数矩阵，如果$R(f,g) = 0$，那么就存在，如果$R(f,g) \neq 0$，那么不存在。

0.2 定理10

设$f(x), g(x)$为 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$， $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ 是数域P上两个非零的多项式，其中$m, n > 0$，则$R(f,g) = 0$等价于f, g两个多项式在数域P中有次数大于0的公因式，或者系数a_0, b_0全为0

0.3 定理10在复数域上的拓展

如果$R(f,g) = 0$，那么等价于$f(x), g(x)$在复数域上存在一个公共根，或者他们第一个系数都为0

0.4 结式的应用

结式的一个应用是解二元高次方程组

$$\begin{cases} f(x,y)= & 0 \\ g(x,y)= & 0 \end{cases}$$

那么我们将方程组中的复系数二元多项式整理为如下

$$\begin{cases} f(x,y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y) \\ g(x,y)=b_0(y)x^m+b_1(y)x^{m-1}+\cdots+b_m(y) \end{cases}$$

其中系数a是关于变量y的函数，b也是一样的。所以这样子就能把$f(x,y),g(x,y)$看成是x的多项式，那么我们定义结式为

$$R(f,g)=\begin{pmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \cdots & a_n(y) & \\ & a_0(y) & a_1(y) & \cdots & a_{n-1}(y) & a_n(y) \\ \cdots & \cdots & & & & \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \cdots & b_n(y) & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & b_{n-1}(y) & b_n(y) \\ \cdots & \cdots & & & & \end{pmatrix}$$

一个很明显的情况就是，如果y_0是结式的一个根，那么会使得结式$R_x(f,g)=0$成立，且$a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$或者存在复数x_0使得(x_0,y_0)是二元高次方程组的解。

它的证明方法也很简单，把a,b关于y看成是常数，运用定理10证明即可。

一般步骤如下：先计算$R_x(f,g)$或者$R_y(f,g)$并求出所有的根，然后带入原二元高次方程组求出对应的x或者y。

0.4.1 例子

解方程组

$$\begin{cases} y^2-7xy+4x^2+13x-2y\div 3=0 \\ y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0 \end{cases}$$

首先，我们整理方程组为

$$\begin{cases} y^2-(7x+2)y+(4x^2+13x-3) & =0 \\ y^2-(14x+4)y+(9x^2+28x-5) & =0 \end{cases}$$

现在我们计算结式

$$R_y(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & -7x+2 & 4x^2+13x-3 & 0 \\ 0 & 1 & -7x+2 & 4x^2+13-3 \\ 1 & -14x-4 & 9x^2+28x-5 & 0 \\ 0 & 1 & -14x-4 & 9x^2+28x-5 \end{vmatrix}$$

首先注意到，a_0到a_n的情况有$n=2$，第二个方程也是一样的，有$m=2$，因此是一个4×4方阵。

我们只需要计算行列式，就可以得到一个式子。

$$\begin{vmatrix} 1 & -7x+2 & 4x^2+13x-3 & 0 \\ 0 & 1 & -7x+2 & 4x^2+13-3 \\ 0 & -7x-2 & 5x^2+15x-2 & 0 \\ 0 & 1 & -14x-4 & 9x^2+28x-5 \end{vmatrix}$$

现在对第一列展开，最后得到

$$\begin{vmatrix} 1 & -7x+2 & 4x^2+13-3 \\ -7x-2 & 5x^2+15x-2 & 0 \\ 1 & -14x-4 & 9x^2+28x-5 \end{vmatrix} = (5x^2+15x-2)+(7x+2)(-7x-2)(x^2+2x+1)$$

化简一下就是$-24x(x-1)(x-2)(x+2)$ 因此，根据第一章的有理式分解，和克莱姆定理可以得到。x的可能的取值有$x=0,1,2,-2$，我们一个个带进去看看。当$x=0$的时候，解得$y=-1$，而$x=1,y=2$，$x=2,y=3$都是方程原方程的解。$x=-2,y=1$也是方程的解，因此该二元高次方程组一共有四组解$(0,-1),(1,2),(2,3),(-2,1)$