模

2025 年 6 月 12 日

目录

1 范畴

1.1 范畴入门

想象把集合的原始术语集合换成集合和函数，该怎么定义双射、笛卡尔积、并和交呢，范畴论迫使我们思考这样的问题，范畴讨论的是诸如群、环、向量空间、模、集合和拓扑空间等等。以及他们各自的变换、同态、函数和连续映射等的一般性质的语言。研究范畴有两个基本理由：一个是需要定义函子和自然变换，二是范畴迫使我们不孤立的对待像模这样的对象。而是把它放在和一切其他模的相互关系中考虑它。例如我们要作为泛映射问题的解来定义某种模。

集合论上有一些著名的悖论，若我们不注意如何运用不加定义的术语集合和元素，矛盾便会产生。由此可知，必须对什么的组合可以视作集合提出某些条件。避免这个问题的方法是可以考虑用更原始的术语代替集合使得集合论公理化。比如说类，公理给出有限类和$\mathbb{N}$的存在性；也提出了从给定类构造特定类的法则，按照这些法则构造出来的类称为集合，可以定义基数。一个例子是：类是集合当且仅当是小的，即存在一个基数，定义真类为不是集合的类。例如$\mathbb{N},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{R}$都是集合，而一切集合的组合是真类，定义一些法则只能适用集合而不能用在真类上，可以避免出现悖论

1.2 定义：范畴

一个范畴$\mathcal{C}$由三要素组成，对象的一个类$\mathrm{obj}(\mathcal{C})$，对每个有序对象对$(A,B)$的态射$\mathrm{Hom}(A,B)$的集合，对每个有序三对象组$A,B,C$的复合$\mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Hom}(B,C)\to\mathrm{Hom}(A,C)$，记为

$$(f,g)\mapsto gf$$

一般来说，我们可以用$f:A\to B$和$A\xrightarrow{f}B$表示$f\in\mathrm{Hom}(A,B)$，但这些都受到下述公理的制约：

- Hom集合是两两不相交的，即每个态射有唯一的定义域和唯一的目标域

- 对每个对象A，有一个单位态射$1_A\in\mathrm{Hom}(A,A)$使得

$$\forall f:A\to B, f1_A=f \text{ and } 1_Bf=f$$

- 复合是结合的：给定态射

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

则

$$h(gf) = (hg)f$$

在这个想法下，重要的并不是范畴而是函子，等一下我们引入函子的概念，但为了定义我们必须考虑向量空间。

下面是定义范畴的一些好处：

- $\mathcal{C} =$ 集合，这个范畴中的对象是集合，态射是函数，复合是一般的函数复合

- $\mathcal{C} =$ 群。这里的对象是群，态射是同态，复合是一般复合

- $\mathcal{C} =$ 交换环这里的对象是交换环，态射是环同态，复合是通常的复合

- $\mathcal{C} = {}_RMod$，这里的对象是$R-$模，其中R是交换环，态射是$R-$同态，复合是一般复合。里面的$\mathrm{Hom}(A,B)$记为$\mathrm{Hom}_R(A,B)$。若$R=\mathbb{Z}$，我们常写

$${}_ZMod = Ab$$

用于提醒$\mathbb{Z}$模就是阿贝尔群

- $\mathcal{C} = \mathrm{PO}(X)$，该范畴下$X$是偏序集，则可以把它看做是一个范畴，它的对象是$X$的元素，Hom集要么是空集要么只有一个元素：

$$\mathrm{Hom}(x,y) = \begin{cases} \varnothing & x \not\preceq y \\ \{\kappa_y^x\} & x \preceq y \end{cases}$$

符号κ_y^x表示当$x \preceq y$时在Hom集中的唯一元素。复合由

$$\kappa_z^y \kappa_y^x = \kappa_z^x$$

给出，自反性给出$1_x = \kappa_x^x$。所以复合是有意义的。

范畴的定义中强调了$\mathrm{Hom}(A,B)$是一个集合，但我们没有排除它是空集的可能性，范畴$\mathrm{PO}(X)$的例子中就出现了这种可能性。

- 若$\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$，若$G$是群，则下面的描述定义范畴$\mathcal{C}(G)$，他只有一个对象记为$*$，$\mathrm{Hom}(*,*) = G$，复合是

$$\mathrm{Hom}(*,*) \times \mathrm{Hom}(*,*) \to \mathrm{Hom}(*,*)$$

即$G \times G \to G$是G给定的乘法。

这是比较自然的定义，像思考$\mathcal{C} = G$一样定义。$\mathcal{C}(G)$中的对象只有$*$，$*$是一个类似占位符一样的作用。映射$* \to *$把对象映射到对象自身，所以$\mathrm{Hom}(*,*) = G$。

范畴$\mathcal{C}(G)$有一个不常见的性质，$*$是对象而不是集合，所以$* \to *$上没有函数可定义。所以这里的态射并不是函数，这个范畴的另一个古怪性质是只从只有一个对象得出的另一个推论，这里没有真子对象。

1.3 定义：等价

范畴$\mathcal{C}$的态射$f : A \to B$是等价（或同构），若存在$\mathcal{C}$中的态射$g : B \to A$使得

$$gf = 1_A \text{ and } fg = 1_g$$

称态射g是f的逆。容易证明等价的逆是唯一的。

范畴中的单位态射恒为等价，若$\mathcal{C} = \mathrm{PO}(X)$，则唯一的一个等价是单位态射，若$\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$，其中$G$是群，则每个态射都是等价。若$\mathcal{C} =$集合，则等价是双射。若$\mathcal{C} =$群、交换环或R模，则等价是同构。若$\mathcal{C}$是拓扑，则等价是同胚。

1.4 定义：预加性

称范畴$\mathcal{C}$是预加性的，若对每个$\mathrm{Hom}(A, B)$配置了二元运算使他变成一个（加法）阿贝尔群，且运算对分配率成立，对一切$f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$，

1 若$p : B \to B'$，则

$$p(f + g) = pf + pg \in \mathrm{Hom}(A, B')$$

2 若$q : A' \to A$，则

$$(f + g)q = fq + gq \in \mathrm{Hom}(A', B)$$

1.5 定义：图

范畴中的图是一个有向多重图，定点$\mathcal{C}$中的对象，箭头是$\mathcal{C}$的态射。例如：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\
Y \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "k"'] & Z
\end{tikzcd}$$

】是范畴中的图图的路径就是从一个顶点走到另一个顶点，比如$X \to Y \to Z$是一路径。而X, Y, Z是顶点。一条路径可以看做是态射的复合

1.6 定义：图交换

称图交换，若每个顶点对A, B，从A到B的任两条路径都相等，即复合是相同的态射。

例如上图的$fg = h$，则三角形就是图交换的。

若A, B是集合S的子集，则他们的交定义为

$$A \cap B = \{s \in S : s \in A, s \in B\}$$

若两个集合不是作为子集给出的，则他们的交也许不是我们期待的。比如，若$\mathbb{Q}$定义为整数有序对(m, n)的一切等价类，则$\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \varnothing$

1.7 定义：余积

若A, B是范畴$\mathcal{C}$中的对象，则他们的余积$A \sqcup B$是指obj$(\mathcal{C})$中的一个对象$\mathcal{C}$连同内射态射$\alpha : A \to A \sqcup B$和$\beta : B \to A \sqcup B$满足对$\mathcal{C}$中每个对象$X$和每对态射$f : A \to X$和$g : B \to X$存在唯一的态射$\theta : A \sqcup B \to X$使得下图交换，即$\theta\alpha = f$，$\theta\beta = g$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \sqcup B \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & X \\
& B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

我们可以通过一种非正式的方法分离两个重叠的子集A, B迫使他们不相交，比如$(A \cup B) \times \{1,2\}$可以分离成子集$A \times \{1\}$和$B \times \{2\}$。

我们可以证明上述分解是范畴中的一个余积：若X是任意集合，$f : A \to X$和$g : B \to X$是任意给定的函数，则存在函数$\theta : A \sqcup B \to X$同时扩张$f, g$.若$\psi : A \sqcup B \to X$满足$\psi\alpha = f$和$\psi : \beta = g$。则

$$\psi(\alpha(a)) = \psi((a,1)) = f(a) = \theta((a,1))$$

同样的有

$$\psi((b,2)) = g(b)$$

所以ψ和θ在$A' \sqcup B' = A \sqcup B$上一致从而有$\psi = \theta$

余积不是恒存在的，但在集合范畴中余积确实存在，但在那的余积不是不想交并，群范畴中余积也存在，称为自由积，自由群是无限循环群的自由积。自由群是无限循环群的自由积

1.8 命题

若A, B是$R-$模，则它们在${}_R\mathrm{Mod}$范畴的余积存在，是直和$C = A \sqcup B$

证明： 命题的陈述不完整，因为余积需要内射态射α, β，$C = A \sqcup B$的底集是笛卡尔积$A \times B$，由此可以定义$\alpha : A \to C$为$a : a \mapsto (a, 0)$。定义$\beta : B \to C$为$\beta : b \mapsto (0, b)$

现在设X是模，再设$f : A \to X$和$g : B \to X$是同态。定义$\theta : C \to X$为$\theta : (a,b) \mapsto f(a) + g(b)$。首先证明图交换。若$a \in A$，则$\theta\alpha(a) = \theta((a,0)) = f(a)$。而对一切$b \in B$有$\psi((0,b)) = g(b)$，由于$\psi$是同态，那么

$$\psi((a,b)) = \psi((a,0)) + \psi((b,0)) = f(a) + g(b)$$

因此$\psi = \theta$

1.9 命题

若$\mathcal{C}$是范畴，A, B是$\mathcal{C}$的对象，则A, B的任意两个余积若存在的话必等价。

证明： 我们设存在两个余积C, D，假定$\alpha : A \to C$，$\beta : B \to C$。还有$\gamma : A \to D$和$\delta : B \to D$是内射态射，如果在定义C的图中取$X = D$，则存在态射$\theta : C \to D$使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
C \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & D \\
& B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

同样的操作，在图D中取$X = C$，有态射$\psi : D \to C$使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
D \arrow[rr, dashed, "\psi"] & & C \\
& B \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

现在把两个图链接起来，就有

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[dll, "\alpha"'] \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
C \arrow[rr, "\theta"'] \arrow[rrrr, bend left, "\psi\theta"] & & D \arrow[rr, "\psi"'] & & C \\
& & B \arrow[ull, "\beta"] \arrow[urr, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

现在，有$\psi\theta\alpha = \psi\gamma = \alpha$和$\psi\theta\beta$，这个图交换。而且恒等映射$1_C : C \to C$也使得在图交换。由定义，交换的时候态射是唯一的，所以$\psi\theta = 1_C$。可以反过来证明$\theta\psi = 1_D$。所以$\theta : C \to D$是等价

1.10 定义：积

若A, B是范畴$\mathcal{C}$中的对象，则他们的积$A \sqcap B$是对象$P \in \mathcal{C}$和态射$p : P \to A$，$q : P \to B$使得对每个对象$X \in \mathcal{C}$和每对态射$f : X \to A$，$g : X \to B$，存在唯一的态射$\theta : X \to P$使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
A \sqcap B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, dashed, "\theta"'] \arrow[dl, "g"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

两个集合A, B的笛卡尔积$P = A \times B$是集合范畴中的范畴积，定义$p : A \times B \to A$为$p : (a, b) \mapsto a$和$q : A \times B \to B$为$q(a, b) \mapsto b$即可。只需要定义$\theta : x \mapsto (f(x), g(x)) \in A \times B$的映射$\theta : X \to A \times B$就是必须的条件了

1.11 命题

若A, B是范畴$\mathcal{C}$中的对象，则A, B任意的积存在则必等价。

证明： 命题1.9修改即可

反转定义余积的图中的一切箭头得到定义积的图。若S是图D提出的泛映射问题的一个解，令D'是反转D中一切箭头得到的图，若S'是D'提出泛映射问题的解，那么我们说S和S'对偶。在范畴中，有对象和对偶对象都存在的例子，也有对象存在而对偶对象不存在的例子

现在，让我们思考两个模的积是什么。

1.12 命题

若R是交换环，A, B是R模，则存在他们的范畴积（$A \sqcap B$），事实上有

$$A \sqcup B \cong A \sqcap B$$

证明： 对R模来说，它的同构可以这样描述：

下述命题是等价的

(I) $S \cup T \cong M$

(II) 存在单射 R-映射：$i : S \to M$ 和 $j : T \to M$ 使得

$$M = \operatorname{im} i + \operatorname{im} j \text{ 和 } \operatorname{im} i \cap \operatorname{im} j = \{0\}$$

(III) 存在 R-映射：$i : S \to M$ 和 $j : T \to M$ 使得对每个 $m \in M$，存在唯一的 $s \in S$ 和 $t \in T$ 满足

$$m = is + jt$$

(IV) 存在 R-映射：$i : S \to M$, $j : T \to M$, $p : M \to S$ 和 $q : M \to T$ 满足

$$pi = 1_S, \quad qj = 1_T, \quad pj = 0, \quad qi = 0, \text{ 和 } ip + jq = 1_M$$

其中M, S, T都是$R-$模

我们使用满足第4条

$$pi = 1_A, qj = 1_B, pj = 0, qi = 0.ip + jq = 1_M$$

的投射和内射态射

$$A \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} M \underset{j}{\overset{q}{\rightleftarrows}} B$$

的存在性刻画$M \cong A \sqcup B$

若X是模，$f : X \to A$，$g : X \to B$是同态，定义$\theta : X \to A \sqcup B$为$\theta(x) = if(x) + jg(x)$，积的图

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
A \sqcup B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, dashed, "\theta"'] \arrow[dl, "g"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

交换，因为对一切$x \in X$有

$$p\theta(x) = pif(x) + pjg(x) = f(x)$$

并且用相同的方法可以得到$q\theta(x) = g(x)$。等式给出$ip + jq = 1_{A \sqcup B}$，因此θ是唯一存在的。

至少有两种方法把模的直和的概念从两个直和推广到直和项的加标族

1.13 定义：直积 & 直和

设R是交换环，$\{A_i : i \in I\}$是一个$R-$模的加标族，直积$\prod_{i \in I} A_i$是指笛卡尔积（即对一切i，第i个坐标a_i在A_i中的一切n元组[1]）连同坐标状态的加法和标量乘法：

$$\begin{aligned}(a_i) + (b_i) =& (a_i + b_i) \\ r(a_i) =& (ra_i)\end{aligned}$$

其中$r \in R$，以及对一切$a_i, b_i \in A_i$

直和是指由有限个非零坐标的一切(a_i)组成的$\prod_{i \in I} A_i$的子模，记为$\sum_{i \in I} A_i$，也可以记为$\oplus_{i \in I} A_i$

每个$m \in \sum_{i \in I} A_i$都有形如

$$m = \sum_{i \in I} \alpha_i(a_i)$$

的唯一表达式，其中$a_i \in A_i$，而$\alpha_i(a_i)$指的是$\prod A_i$中第i个坐标是a_i，而其他坐标为0的I元组，且几乎一切$a_i = 0$，即只有有限个a_i非零

若指标集是有限的，则直积=直和，若是无穷的，则他俩几乎永不同构。

[1] I元组是指函数$f : I \to \bigcup_i A_i$，其中对一切$i \in I$，$f(i) \in A_i$

1.14 定义：对象族的余积

设$\mathcal{C}$是范畴，$\{A_i, i \in I\}$是$\mathcal{C}$中由集合I加标的对象族，余积是指由一个对象$C = \bigsqcup_{i\in I} A_i$和一族内射态射$\{a_i : \forall i \in I, A_i \to C\}$且满足下面的性质：对每个配置有态射$f : A_i \to X$的对象$X$，存在唯一的态射$\theta : C \to X$使得每个$i$下图交换：

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ C \arrow[rr, dashed, "\theta"'] & & X \end{tikzcd}$$

如果余积存在，则用$\bigsqcup_{i\in I} A_i$表示余积，且不计等价的话，它是唯一的。

简单的描述集合$\{A_i : i \in I\}$的不想交并的存在性，首先，构成集合$B = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times I$，定义

$$A' = \{(a_i, i) \in B : a_i \in A_i\}$$

于是不相交并为$\bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i'$。可以简单证明$\bigsqcup_i A_i$连同$\alpha_i : a_i \mapsto (a_i, i) \in \bigsqcup_i A_i$给出的函数$\alpha_i : A_i \to \bigsqcup_i A_i$组成集合范畴的余积。

1.15 命题：

若$\{A_i : i \in I\}$是$R-$模的族，则直和$\sum_{i\in I} A_i$是他们在${}_R\mathrm{Mod}$范畴中的余积。

证明： 命题陈述并不完全，余积需要定义内射态射α_i，记$\sum_{i\in I} A_i$为C，定义$\alpha_i : A_i \to C$为$a_i \mapsto \alpha_i(a)$。若$a_i \in A_i$，则$\alpha_i(a_i) \in C$是第i个坐标为a_i，而其他坐标为0的I元组。详细的证明在下面的命题。

现在设X是模，且对每个$i \in I$，设$f_i : A_i \to X$是同态。定义$\theta : C \to X$为$\theta : (a_i) \mapsto \sum_i f_i(a_i)$。

首先，图交换，若$a_i \in A_i$，则$\theta\alpha_i(a_i) = f_i(a_i)$，接着，$\theta$是唯一的，若$\psi : C \to X$使得图交换，则$\psi((a_i)) = f_i(a_i)$，由于$\psi$是同态，那么

$$\begin{aligned}\psi((a_i)) =& \psi(\sum_i \alpha_i(a_i)) \\ =& \sum_i \psi\alpha_i(a_i) = \sum_i f_i(a_i)\end{aligned}$$

因此$\psi=\theta$

我们给出θ的明确的公式，若$f_i:A_i\to X$是给定的同态，则$\theta:\sum_{i\in I}A_i\to X$由

$$\theta:(a_i)\mapsto\sum_{i\in I}f_i(a_i)$$

给出。（当然几乎一切$a_i=0$，从而早$\sum_{i\in I}f_i(a_i)$中只有有限个非零项）

接下来是对偶概念：

1.16 定义：对象族的积

设$\mathcal{C}$是范畴，并设$\{A_i:i\in I\}$是用集合I加标的$\mathcal{C}$中的族，一个积是指由一个对象C和一个投射态射的族$\{p_i:C\to A,\forall i\in I\}$组成的有序对$(C,\{p_i:C\to A_i\})$并满足下列条件：对每个配置有态射$f_i:X\to A_i$的对象$X$，存在唯一的态射$\theta:X\to C$使得对每个$i$下图交换：

$$\begin{tikzcd}
& A_i & \\
C \arrow[ur, "p_i"] & & X \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[ll, dashed, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

若积存在的话，用$\sqcap_{i\in I}A_i$表示，且不计等价的话，它是唯一的。

现在证明笛卡尔积是集合范畴中的积，设X是集合，C是加标族集合的笛卡尔积，即$C=\prod_{i\in I}A_i$，其中A_i是一些集合。现在，只需要定义$p_i:C\to A_i$为$p_i:(a_i)\to a_i\in A_i$。接着定义$f_i:X\to A_i$为$\theta:X\to C$为$\theta:x\mapsto(f_i(x))$即可。

1.17 命题：

若$\{A_i:i\in I\}$是$R-$模的族，则直积$C=\prod_{i\in I}A_i$是它们在${}_R\mathrm{Mod}$范畴中的积。

证明： 命题陈述并不完整，因为积需要投射，对每个$j\in I$，定义$p_j:C\to A_j$为$p_j:(a_i)\mapsto a_j\in A_j$。

再设X是模，且对每个$i\in I$，设$f_i:X\to A_i$是同态。定义$\theta:X\to C$为$\theta:x\mapsto(f_i(x))$。首先，图是交换的，若$x\in X$，则$p_i\theta(x)=f_i(x)$。最

后，θ也是唯一的，若$\psi : X \to C$使得图交换，则对一切i，$p_i\psi(x) = f_i(x)$。即对第i个坐标来说有$f_i(x)$为$\theta(x)$的第i个坐标。因此对一切$x \in X$有$\psi(x) = \theta(x)$。从而$\psi = \theta$。

我们现在使用范畴来看下面的两个定理

1.18 定理

设R是交换环，对每个$R-$模A和每个$R-$模的族$\{B_i : i \in I\}$，经$R-$同构

$$\varphi : f \mapsto (p_i f)$$

有

$$\mathrm{Hom}_R(A, \prod_{i \in I} B_i) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(A, B_i)$$

其中p_i是积$\prod_{i \in I} B_i$的投射。

证明： 先证明φ是可加的，为了证明φ是$R-$映射，注意对每个i和每个$r \in R$，有$p_i r f = r p_i f$，所以

$$\varphi : rf \mapsto (p_i r f) = (r p_i f) = r(p_i f) = r\varphi(f)$$

接着证明φ是满射，若$(f_i) \in \prod \mathrm{Hom}_R(A, B_i)$，则对每个$i, f_i : A \to B_i$

$$\begin{tikzcd} & B_i & \\ \prod B_i \arrow[ur, "p_i"] & & A \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[ll, dashed, "\theta"] \end{tikzcd}$$

根据命题1.17，$\prod B_i$是${}_R\mathrm{Mod}$范畴中的积，因此有唯一的$R-$映射$\theta : A \to \prod B_i$使得对每个i，$p_i\theta = f_i$。从而有$(f_i) = \varphi(\theta)$，所以φ是满射。

为了证明φ是单射，我们设$f \in \ker\varphi$，即$0 = \varphi(f) = (p_i f)$，于是每个i都有$p_i f = 0$。因此下面包含f的图交换

$$\begin{tikzcd} & B_i & \\ \prod B_i \arrow[ur, "p_i"] & & A \arrow[ul, "0"'] \arrow[ll, dashed, "\theta"] \end{tikzcd}$$

但零同态也使得图交换，因此箭头$A \to \prod B_i$的唯一性给出$f = 0$

1.19 定理

对每个$R-$模B和每个$R-$模的族$\{A_i : i \in I\}$，经$R-$同构

$$f \mapsto (f\alpha_i)$$

有

$$\mathrm{Hom}_R\left(\sum_{i\in I} A_i, B\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(A_i, B)$$

其中α_i是和$\sum_{i\in I} A_i$的内射。

证明： 和上述定理一样，我们首先证明$\psi : f \mapsto (f\alpha_i)$是一个可加的函数。

$fr = f\alpha_i r = rf\alpha_i$。接着考虑下图。

$$\begin{tikzcd}
& A_i \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\sum A_i \arrow[rr, dashed, "\theta"'] & & B
\end{tikzcd}$$

先证明$\psi : f \mapsto (f\alpha_i)$是满射。若$(f_i) \in \prod \mathrm{Hom}_R(A_i, B)$,则对每个$i, f_i : A_i \to B$。利用命题1.15，现在$\sum_{i\in I} A_i$是模范畴中的余积，那么也会有唯一的$\theta : \sum A_i \to B$，使得对每个$i$，$\theta\alpha_i = f_i$，从而$(f_i) = \psi(\theta)$，$\psi$是个满射，接着，我们证明单射

考虑$f \in \ker\psi$，就有$0 = \psi(f) = (f\alpha_i)$，于是对每个$i, f\alpha_i = 0$，箭头$\sum A_i \to B$的唯一性决定了$f = 0$。

1.20 推论

若A, A'和B, B'是$R-$模，有同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(A, B \sqcup B') &\cong \mathrm{Hom}_R(A, B) \sqcup \mathrm{Hom}_R(A, B') \\
\mathrm{Hom}_R(A \sqcup A', B) &\cong \mathrm{Hom}_R(A, B) \sqcup \mathrm{Hom}_R(A', B)
\end{aligned}$$

证明： 指标集有限的时候，模的直和是直积

现在给出两种常用的对偶结构

1.21 定义：拉回（纤维积）

范畴$\mathcal{C}$中给定两个态射$f : B \to A$和$g : C \to A$，一个解是指有序三元组(D, α, β)使得下图交换

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

而一个拉回（或称纤维积）是指下列意义的“最好”解(D, α, β)。对每个解(X, α', β')，存在唯一的态射$\theta : X \to D$使得下图交换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, "\alpha'"] \arrow[ddr, "\beta'"'] & & \\ & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\ & B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

拉回存在时，若不计等价是唯一的。

1.22 命题

在$_R\mathrm{Mod}$范畴中任两个映射$f : B \to A$和$g : C \to A$的拉回存在。

证明 定义

$$D = \{(b, c) \in B \sqcup C : f(b) = g(c)\}$$

接着定义$\alpha : D \to C$是投射$(b, c) \mapsto c$的限制。定义$\beta : D \to B$是投射$(b, c) \mapsto b$的限制，那么(D, α, β)是一个解。

若(X,α',β')是另一个解，定义映射$\theta : X \to D$为$\theta : x \mapsto (\beta'(x), \alpha'(x))$，由于$X$是一个解，从而$f\beta'(x) = g\beta'(x)$。因此$\theta$的值在$D$中。然后有$g\alpha = g\alpha\theta = f\beta\theta$，因此图交换。最后我们假设存在一个态射$\psi$，有$\psi : X \to D$使得$\alpha\psi = \beta'$，就有$\alpha\psi = b = \beta\theta$，用相同的方法可以证明$\alpha\theta = \alpha\psi$.因此$\psi = \theta$

例子： 若$f : B \to A$是同态，则$\ker f$是下图的拉回

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] \\
B \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

具体来说，该拉回为$\{(b,0) \in B \sqcup \{0\} : fb = 0\} \cong \ker f$

下述是其的对偶结构

1.23 定义：推出（纤维和）

给定范畴$\mathcal{C}$中的两个态射$f : A \to B$和$g : A \to C$，一个解是指有序三元组(D, α, β)使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"] \\
B \arrow[r, "\alpha"] & D
\end{tikzcd}$$

一个推出（纤维和）是指在下列意义中“最好”的解(D, α, β)：对每个解(X, α', β')存在唯一的态射$\theta : D \to X$使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\
B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "\alpha'"'] & D \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

若推出存在，不计等价则其是唯一的。

1.24 命题

在${}_R\mathrm{Mod}$范畴中任两个映射$f : A \to B$和$g : A \to C$的推出存在

证明： 构造

$$S = \{(f(a), -g(a)) \in B \sqcup C : a \in A\}$$

是$B \sqcup C$的子模，定义$D = (B \sqcup C)/S$为$\alpha : B \to D$为$b \mapsto (b, 0) + S$，定义$\beta : C \to D$为$c \mapsto (0, c) + S$，则(D, α, β)是一个解，因为$\alpha(f(a)) = (f(a), 0) + S = \beta(g(a)) = (0, g(a)) + (f(a), -g(a)) + S$[2]。

那么，给定另一个解(X, α', β')，定义$\theta : D \to X$为$\theta : (b, c) + S \mapsto \alpha'(b) + \beta'(c)$.注意$\theta\alpha f = \theta((f(a), 0) + S) = \alpha'(f(a)) = \alpha' f$。因此交换，并且也具有唯一性。

[2]注意I_3中$4 + I_3 = 1 + 3 + I_3 = 1 + I_3$