交换环2

2024 年 5 月 15 日

目录

1 素理想与极大理想

我们对本章的内容主要是学习具有多个变量的多项式。在过往解析几何的学习中，我们看到一些多项式具体对应了一个几何图形，例如$f(x,y)=x^2/a^2+y^2/b^2-1$是一个椭圆，且与平面R^2密切相关。在环$k[x_1,\cdots,x_n]$（k是一个域）与k^n的子集的几何学之间，有更进一步的联系。给定一组n元多项式，$f_1,\cdots,f_n$，它们共同的根构成的子集$V\subseteq k^n$为一个代数集。我们也可以研究代数集（拓展为线性代数）的解是非常有趣的，本章可以看成是代数几何的一个介绍。

和通常一样，我们在讨论多项式环之前，先来看更一般的情形（即交换环）。这样会简单一些，在这章中我很大的问题是和整除性相关的：给定两个整数a,b，$a\mid b$合适成立？何时b是a的倍数？这些都可以变成关于主理想的问题。因为$a\mid b$当且仅当$(a)\subseteq(b)$。我们将给出类似于群论的对应定理那样的定理。

1.1 环的对应定理

若I是交换环R中的一个真理想。则自然映射$\pi:R\to R/I$可以得到一个包含I的所有中间理想J(即$I\subseteq J\subseteq R$)的集合，到R/I中所有理想构成的集合且保包含关系的双射π'

$$\pi':J\to J/I=\{a+I:a\in J\}$$

因此商环R/I的每一个理想具有形式J/I，对某个唯一的中间理想J成立。

证明： 首先考虑加法的情况，则此时是一个加法阿贝尔群，它的理想I是一个正规的子群，利用对应定理（群的），则有一个包含关系的双射

$$\pi_*:\{\text{R包含I的子群全体}\}\to \text{R/I的子群全体}$$

其中$\pi_*(J)=J/I$

若J是理想，则$\pi_*(J)$也是一个理想，因为若$r\in R,a\in J$，则$ra\in J$，故

$$(r+I)(a+I)=ra+I\in J/I$$

令π'是π_*在中间理想构成的集合上的一个限制，则π'是一个单射，由于π_*是双射，下面证明π'是满射。令J^*是一个R/I的理想，则$\pi^{-1}(J^*)$是一个R中的中间理想。只需要定义$J=\pi^{-1}(J^*)$，就得到了我们想要的东西

1.2 定义：素理想

一个交换环I上的理想I称作素理想，若它是一个真理想，记$I \neq R$且对于$ab \in I$有$a \in I$或者$b \in I$

1.3 命题：

若k是域，则每个非零多项式$p(x) \in k[x]$是不可约的当且仅当$(p(x))$是素理想

证明： 设$p(x)$不可约，首先，(p)是主理想。另一方面，$R = (p)$因此$1 \in (p)$，那么就存在一个多项式$f(x)$使得$1 = f(x)p(x)$。但p次数最少也是1，那么

$$0 = \deg(1) = \deg(pf) = \deg(p) + \deg(f) \geq \deg(p) \geq 1$$

矛盾，说明(p)是素理想。

反之，设$p(x)$不是不可约的，这里就存在因式分解

$$p(x) = a(x)b(x)$$

其中$\deg(a) < \deg(p)$和$\deg(b) < \deg(p)$。由于每个非零多项式$g(x) \in (p)$都有形如$d(x)p(x)$对某个$d(x) \in k[x]$成立，就有$\deg(g) \geq \deg(p)$，从而a, b都不属于$(p(x))$就有(p)不是真理想

1.4 命题：

真理想I在交换R中是素理想当且仅当R/I是整环。

证明： 令I是素理想。由于I是真理想，则我们有$1 \notin I$，因此$1 + I \neq 0 + I \in R/I$。若$0 = (a + I)(b + I) = ab + I$。则$ab \in I$，由于$I$是素理想，那么$a \in I$或者$b \in I$，因此$a + I = 0$或者$b + I = 0$，可以知道$R/I$是整环。

反过来，由于R/I是整环，所以任意的$a + I, b + I \in R/I$都使得$(a + I)(b + I) = ab + I \in I$,整环满足消去律，两边重复消去$a + I$或者$b + I$就有$a \in I$或者$b \in I$。

1.5 定义：极大理想

一个交换环R中的理想I说是极大理想，若I是真理想且不存在其他中间理想J使得$I \subsetneq J \subsetneq R$.

1.6 引理

理想$\{0\}$是交换环R的极大理想当且仅当R是域。

证明： 我们古早前证明了如下定理：

非零交换环R是域当且仅当R的理想只有$\{0\}$和本身。

这个命题实际上就是其的一个逆命题，由于R是域，则每个R中的非零理想等价于R,所以$\{0\}$就是一个极大理想。

1.7 命题：

每个交换环R中的真理想I是极大理想当且仅当R/I是域。

证明： 对应定理告诉我们I是极大理想当且仅当R/I不存在$\{0\}$和R/I之外的理想，再利用引理1.6我们就知道R/I是域了。

1.8 推论：

每个交换环R中的极大理想I是素理想。

证明： 若I是极大理想，则R/I是域，每个域都是整环。利用命题1.4就证明完了。

1.9 推论：

若k是域，则$(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$是$k[x_1, \cdots, x_n]$中的极大理想，其中$a_i \in k$对每个$1, \cdots, n$成立.

证明： 我们引入如下定理：

设R,S是交换环，$\varphi : R \to S$是同态，若$s_1, \cdots, s_n \in S$，则存在唯一的同态

$$\bar{\varphi} : R[x_1, \cdots, x_n] \to S$$

满足对所有i有$\bar{\varphi}(x_i) = s_i$且对所有$r \in R$有$\bar{\varphi}(r) = \varphi(r)$

那么这里就存在唯一的同态

$$\varphi : k[x_1, \cdots, x_n] \to k[x_1, \cdots, x_n]$$

使得$\varphi(c) = c$对所有$c \in k$且$\varphi(x_i) = x_i - a_i$成立。实际上这是一个同构，φ^{-1}将x_i映射到$x_i + a_i$。因此，若I是一个极大理想，那么$\varphi(I)$也应该是极大理想。对同构$k[x_1, \cdots, x_n]/(x_1, \cdots, x_n) \cong k$，不难理解，$(x_1, \cdots, x_n)$是一个除了常数多项式之外的理想，由定义，它是所有非常数多项式的集合，因此$k[x_1, \cdots, x_n]/(x_1, \cdots, x_n)$都是形如$a + I$的形式，其中$a \in k$。因此同构，利用命题1.7，$(x_1, \cdots, x_n)$是极大理想，所以$(x_1 - _1, \cdots, x_n - a_n)$是极大理想。

1.10 定理：

若R是PID，则每个非零素理想I是极大理想。

证明： 假设存在真理想J使得$I \subseteq J$。由于R是PID，$I = (a)$，而$J = (b)$对某个$a, b \in R$成立。这意味着$a = rb$对某个$r \in R$成立。那么$rb \in I$成立。但I是素理想，要么$r \in I$，要么$b \in I$。若$r \in I$，那么$r = sa$对某个$s \in R$成立，且有$a = rb = sab$，由于R是整环，那么$1 = sb \in J$，那么$(a) \equiv (b)$，注意真理想不含1，因此$J = (b) = R$成立，与我们给定J是真理想矛盾。若$b \in I$，则$J \subseteq I$成立，因此I是极大理想。

1.11 推论：

若k是域且$p(x) \in k[x]$是不可约的，则商环$k[x]/(p(x))$是域。

证明： 由于$p(x)$不可约，那么命题1.3告诉我们主理想$I = (p(x))$是非零素理想，由于$k[x]$是PID,I是极大理想。因此$k[x]/(p(x))$是域