# 线性方程组解的结构

2022 年 5 月 31 日

## 目录



#### 齐次线性方程组的解一些性质

1、两个解的和还是方程组的解

设两个不同系数的线性方程组满足$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$和 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+I_n\alpha_n=0$ 那么

$$\left(k_1+l_1\right)\alpha_1+\left(k_2+l_2\right)\alpha_2+\cdots+\left(k_n+l_n\right)\alpha_n=0$$

2、一个解的倍数还是方程组的解

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$$
$$\text{则}ck_1\alpha_1+ck_2\alpha_2+\cdots+ck_n\alpha_n=\mathbf{0}$$

所以，这个定理说明的是，我们可能可以找到一个方程组去掉一系列的杂项和倍数后得到一个最简解。那么给出定义：

### 0.0.1 定义17-基础解系

齐次线性方程组的一组解$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$称为其的基础解系，如果：

1、齐次线性方程组的任一个解都可以表示成$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$的线性组合

2、$\eta_1,\cdots,\eta_t$线性无关

这和我们在讲基本向量的时候很像，基础向量是线性无关的，即每个向量的分量只有一个为1，其他为0.而基础解系也有很好的性质，也就是：**基础解系即为所有解向量组成向量组的极大线性无关组**，我们给出一个重要定理

### 0.0.2 定理8-基础解系的个数

齐次线性方程组有非零解的前提下存在基础解系，且基础解系中的解的个数$t = n - r$，即$n$个方程减去自由未知量的个数r剩下的变量。

证明：一个一般齐次线性方程组的秩为$r$，且右端为0，那么这个时候我们可以把多的自由未知量移到右边去，可以得到等式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

那么我们可以由这些自由未知量唯一的解出左端每行方程组的解,因此，如果$r = n$，那么没有自由未知量，右端全为0，而此时齐次线性方程组仅有零解，不存在基础解系。所以有非零解的时候存在$r < n$。那么这时候存在$n - r$个未知量，分别令r个自由未知量其中的一个为1，其他的$n - r - 1$个分量为0可以构造出

$$\begin{cases} \eta_1 = (c_{11}, \cdots, c_{1r}, 1, 0, \cdots, 0) \\ \eta_2 = (c_{21}, \cdots, c_{2r}, 0, 1, \cdots, 0) \\ \cdots \\ \eta_{n-r} = (c_{n-r,1}, \cdots, c_{n-r,r}, 0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$

那么每行的向量$c_{i1}, \cdots, c_{in}$可以由一个自由变量$a_{i,r+1} = 1$解出。为了证明其线性无关，我们可以做如下的改动，我们给每个$\eta$配上一个$k$，如果其线性无关，那么每个向量加起来等于0只有$k = 0$的时候会发生，那么

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_n\eta_{n-r} = 0$$

一种简单的方法是，由于右边自由变量（从1开始）是单位向量，单位向量是线性无关的，因此结果为0，左边的是极大线性无关组，结果也是0，因此根据1的命题证明一下就可以知道也是线性无关的。另一种证明方法是：

在前面的极大线性无关组外，我们关注的点实际上在于$\eta$后面的单位向量，给每个配上一个$k$，可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n-r} k_i c_{i1}, \cdots, \sum_{i=1}^{n-r} k_i c_{ir}, k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}\right) = 0$$

实际上每个$k_1$就是单位向量的值，因为除了$k_i$位是1其他都是0，因此加起来等于0的话只能是$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$因此线性无关。否则加起来会发生不等于零的情况发生。

现在我们证明齐次线性方程组中的任一一个解都能表成$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$的线性组和。

设$\eta = (c_1, \cdots, c_n, c_{r+1}, \cdots, c_n)$，而我们知道，我们其实不需要关注前面的$c_1$到$c_r$是多少，因为只要自由变量一样，怎么样都可以给出一个解。因此我们的关注点在那些自由变量上，刚才我们也证明了。如果把向量的分量加起来，那么就会有$C_{r+1}\eta_1 + C_{r+2}\eta_2 + \cdots + C_n\eta_{n-r} = (*, \cdots, *, C_{r+1}, C_{r+2}, \cdots, C_n)$，然而这就是我们的解。因此证明完毕

注，这里的自由变量设置为1，是因为每个自由变量实际上都可以任意取值，设置成1只是方便表示，其实也可以随便设一个字母然后指定一个倍数，但这很麻烦。

一般线性方程组讲等式右端的常数项换成0，得到的齐次线性方程组称为原方程组的导出组，即$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$的导出组为$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}$

1、线性方程组两个解的差是导出组的解

$$\begin{aligned}
&k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta, \\
&l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + I_n\alpha_n = \beta, \\
&\text{ 则 } (k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_n - I_n)\alpha_n = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

2、线性方程组的解加上导出组的任一一个解还是线性方程组的解

$$\begin{aligned}
&k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta, \\
&l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + I_n\alpha_n = 0, \\
&\text{ 则 } (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_n + I_n)\alpha_n = \beta.
\end{aligned}$$

那么我们得到：

### 0.0.3 定理9

如果$\gamma_0$是方程组的一个解，我们说特解，则称线性方程组解集为$\{\gamma_0 + \eta | \eta$为导出组的解$\}$

这和微分方程的特解很相似。

因此，如果导出组的基础解系是$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$,而$\gamma_0$是特解，则方程组解集为：$S = \{\gamma_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} \mid k_i \in P, i = 1, 2, \cdots, n-r\}$

我们有一个重要的推论：线性方程组有唯一解的充要条件就是导出组只有零解。

证明：由上面结论可得，如果$S = \{\gamma_0\}$，那么只能说基础解系是不存在的，那么导出组只有零解