矩阵的秩

2022 年 5 月 26 日

目录

1 矩阵的秩 上 **1**

1.1 定理4 2

1.2 矩阵的值 中 3

1.3 矩阵的秩 下 4

1.3.1 计算矩阵的秩 6

1 矩阵的秩 上

定义15

矩阵的行秩指的是矩阵的行向量组的秩，而列秩指的是矩阵的列向量组的秩。

例如：

矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

它的行向量为：$\alpha_1 = (1,1,3,1), \alpha_2 = (0,2,-1,4), \alpha_3 = (0,0,0,5), \alpha_4 = (0,0,0,0)$，我们发现其线性无关，因此行秩为3，而列向量组$\beta_1 = (1,0,0,0), \beta_2 = (1,2,0,0), \beta_3 = (3,-1,0,0), \beta_4 = (1,4,5,0)$其中我们发现$\beta_3 = \frac{7}{2}\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2$，而$\beta_4$和$\beta_1, \beta_2$线性无关，因此矩阵$A$的列秩也等于3。我们发现列的秩等于行的秩，但在证明之前我们需要一些工作。

引理

引理相对于定理来说比较好证明，我们看这个

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_1 \cdots a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵A的行秩$r < n$，则方程组有非零解。

由于秩是其线性无关组向量的个数，那么该方程组系数矩阵的行向量我们设为$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，且行秩为$r$，我们设其极大线性无关组为$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$，其中我们知道极大线性无关组跟向量组自身是等价的，因为其可以被自身的向量组线性表出。声音下列方程组和原方程组同解

$$\begin{cases} a_{i_1 1}x_1 + a_{i_1 2}x_1 \cdots a_{i_1 n}x_n = 0 \\ a_{i_2 1}x_1 + a_{i_2 2}x_1 \cdots a_{i_2 n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{i_r 1}x_1 + a_{i_r 2}x_1 \cdots a_{i_r n}x_n = 0 \end{cases}$$

由于上面是一个极大线性无关方程组，因此由定理1，$r < n$的时候说明变量的数量比方程的数量多，因此线性相关。证明完毕，它的一个逆否命题是，$r > n$的时候一定线性无关，也就是无非零解。

1.1 定理4

矩阵的行秩与列秩相等。

设s行n列的矩阵A的行秩为r，列秩为r_1，我们得先证明$r \leq r_1$

记矩阵A的行向量为$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，取起极大线性无关组为$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$，线性无关就说明$x_1\alpha_{i_1} + \cdots + x_r\alpha_{i_r} = 0$，只存在零解，也就是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{i_1 1}x_1 + a_{i_1 2}x_1 \cdots a_{i_1 n}x_r = 0 \\ a_{i_2 1}x_1 + a_{i_2 2}x_1 \cdots a_{i_2 n}x_r = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{i_r 1}x_1 + a_{i_r 2}x_1 \cdots a_{i_r n}x_r = 0 \end{cases}$$

仅有零解。现在我们直接套用引理，可以知道如果这个线性方程组的行秩小于r的话，那么就线性相关了，因为存在r个未知数。和n个方程。因此利

用引理的逆否命题，我们知道行秩是一定得大于或者等于r的。那么这个行秩其实就是说有多少个方程，而且其也是列向量的一部分。原来的列向量是$1\cdots s$而我们是从里面选r个组成的方程组。

注意到一个点：向量已经线性无关，不管再补充多少个方程组依然是线性无关。也可以表示为在向量中添加分量不会影响线性相关性。

我们在上面已经选了r个行向量，即$(a_{11},a_{22},\cdots,a_{rr_1}),\cdots,(a_{1r_1},a_{2r_1},\cdots,a_{rr_1})$这其实也就是选了$r_1$个列向量。从$x_1,\cdots,x_r$个变量，利用结论，我们在添加后也得使其其线性无关，因此最少需要添加到r个分量。也就是说行向量的r是未知数的个数，而列向量的r_1的秩则像是方程组的个数。因此$r_1\geq r$。证明完毕，即$r=r_1$，也就是矩阵行的秩等于列的秩。

因为矩阵的行秩等于列秩，因此我们统称其为矩阵的秩。

1.2 矩阵的值 中

定理5

$n\times n$矩阵$A=(a_{ij})$的行列式为0的充分必要条件为A的秩小于n

当$n=1$的时候，$|A|=0$，也就是$a_{11}=0$的情况下成立。现在我们设$n-1$级结论成立，在证明n级矩阵$|A|=0$即可推出A的秩小于n即可。

现在我们设n级矩阵A的行向量为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，现在我们假设矩阵的第一列全为0，那么$A$的列向量组的秩小于$n$，定理4可得$A$的秩小于$n$。不然存在非零解使得行列式不为0，这是一种定理4的特殊情况，现在我们证明一般下的情况。

假设A的秩小于n，不然存在一个在行列上的$a_{i1}\neq 0$。并进行如下对换。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

最后的一个行列式我们是用第一行去消去下面的第一列元素。这样子的样子是可以按照第一列展开代数余子式。然后我们进行展开得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n11} & a_{n12} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} a_{i1} \begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} a_{i1} \left| A_1 \right|.$$

得到$|A| = (-1)^{i-1} a_{i1} \left| A_1 \right|$，因为我们已经假设$n-1$级成立，那么其实这个$n-1$级的矩阵是线性相关的（由克拉默法则得到），它的秩一定是小于$n-1$的。因此如果要线性表示的话，可以在前面加一些0来表示出。所以我们证明了对n级行列式成立的。

现在证明必要性。

当n级矩阵A的秩小于n的时候，如果$n=1$秩为0就是零矩阵，行列式必然为0如果$n>1$，则A的行向量线性相关，因此这些秩势必是小于n的，我们由克拉默法则也可以轻易得出，如果A的秩不比n小，行列式不为0。那么就只有零解使得矩阵成立。相反，由方程组线性相关定义可以得到A的秩是一定小于n的，所以行列式为0

1.3 矩阵的秩 下

为了更全面的描述秩和矩阵的关系，我们应入如下定理

定义16 子式

在一个$s \times n$矩阵A中任意选定k行和k列，位于这些选定的行和列的交点上k^2个元素按原来的次序所组成的k级行列式，称为A的一个子式。
例如矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们选择第$1,3$行和$3,4$列可以得到子式$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$，如果我们选择$1,2,3$行和$1,2,4$列

可以得到$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 4\\0 & 0 & 5\end{vmatrix}$。

选定的行和列标号一致的时候称为矩阵的主子式，例如：如果你选择了$1,3$行，那么你只能选择$1,3$列的时候才会称作主子式。我们可以得到二级主子式$\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 0\end{vmatrix}$，特别的，如果行列标号都是从1开始的连续数字时得到的子式称为矩阵的顺序主子式，如上面矩阵选第$1,2$行和$1,2$列得到2级顺序主子式$\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{vmatrix}$，如果我们把这些概念结合集合来看呢，我们知道对于$n$级顺序主子式的话，他最多只能取$n$个对吧，而主子式除了$n$个顺序主子式外，由于不需要考虑是否连续，因此他可以选择的更多，即$\frac{n(n+1)}{2}$个，而子式呢？可以任意取，因此子式集合的势比其他两个更多，他们的包含关系如下：**子式 $\subseteq$ 主子式 $\subseteq$ 顺序主子式**

定理6

一矩阵的秩是r的充要条件为矩阵至少有一个r级子式不为0，同时矩阵的$r+1$级子式都为0

证明：

矩阵A的秩为r说明其极大线性无关组的向量个数为r，因此任意的$r+1$个向量都可以组成线性相关。因此在$r+1$个行向量都是线性相关。因此$r+1$级子式必然为0，从而选择$r+1$列和$r+1$行都是线性相关的，因为线性相关后加多少分量都不会改变其性质。因此矩阵的$r+1$级子式都为零。

矩阵A的秩为r说明存在r个行向量线性无关，选出这r行得到一个新矩阵A_1，此时矩阵A_1的行秩为r，定理4指出A_1的行秩等于列秩都为r，因此矩阵A_1的向量组线性无关。A_1线性无关，而且秩为r，说明A_1是一个r级子式，由克拉默法则可以发现，矩阵的行列式不为0时行列式线性无关，因此我们可以得到极大线性无关组A_1的行列式不为0，也就是可以找到一个r级子式不为0

定理告诉我们：矩阵A非零的r级子式所在的行是行向量组的一个极大线性无关组，对于列定理也成立。

1.3.1 计算矩阵的秩

我们是如何判断一个矩阵是无非零解的？首先通过初等行变换对吧，然后找出矛盾的地方，例如矩阵变为行阶梯型后在第i行出现$0=5$等奇怪现象，这说明$0x_k=5$，因此直接判断线性无关，我们的证明和其是差不多的。即：

第一步 矩阵通过初等行变换（不会改变秩）化为阶梯型 **第二步** 适当改变矩阵阶梯型中列的次序，例如第一列的元素在$a_1 1$，而第二列第三列等等等到i列的第i个元素全都是0，到i+1个元素才不为0，我们可以调整顺序变成阶梯型。例如：

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\
0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

我们可以让第二列和第三列互换变为：

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{13} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{23} & 0 & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\
0 & a_{33} & 0 & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\
\vdots & & \vdots\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

然后以此类推把它换到r列外面，变为一个阶梯型即：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & a_{12} \\ 0 & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

调整为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1i} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{2i} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

这样子的，我们发现$a_{11}a_{i2}\cdots a_{rr}$不为零，因此秩只需要数存在多少个非零行，秩就是多少。如果非零行是3，秩就是3，如果是4，秩就是4