高等代数第三章

2022 年 5 月 19 日

目录

1 线性方程组

1.1 消元法

一般线性方程组长这个样子

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

其中a_{ij}是方程组的系数，而b_j叫做常数项。满足所有方程组成立的n元有序数组$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$称为方程组的解，解的全体组成的集合称为方程组

的解集合。如果两个不同方程组的解集相同时我们称这两个方程组同解。其中方程的矩阵其实就是它所有的系数放在一个框里面的表示。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

它的增广矩阵其实就是把b_s放进矩阵里面。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_n \end{pmatrix}$$

矩阵和行列式最大的不同在于行列式要求n个方程组而矩阵不一定需要n行n列。

矩阵可以通过这三种初等变换来变换。

（1）、第i个方程两端乘以非零常数c

（2）、第k个方程两端乘以常数p加到第i个方程两端

（3）、第i个方程与第j个方程互换。

由这三种变换解方程组的方法叫**消元法**

初等行变换后得到新线性方程组与原方程组是同解的，即

原方程组解$(c_1, \cdots, c_n$是新方程组的解

新方程组的解$(c'_1, c'_2, \cdots, c'_n$也是原方程组的解。

1.1.1 例子1

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = 5 \end{cases}$$

先列出增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

将第一行的-2倍加到第二行，然后把-1倍加到第3行得到新矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

然后把第二行的$\frac{1}{2}$倍加到第三行可得最终的矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

那么$-\frac{1}{2}x_3 = 3, x_3 = -6$，再把$x_3$回代可得

$$4x_2 - (-6) = 2, x_2 = -1$$

把两个解带回去得到

$$2x_1 - (-1) + 3 \cdot (-6) = 1, x_1 = 9$$

方程组解集为$(9, -1, -6)$

1.1.2 例子2

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

我们快速的用消元法得到下列矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

带入$x_3=-2$ 解得$x_1=\frac{7+x_2}{2}$，因此该方程组解集为

$$\left\{\left(\frac{7+x_2}{2},x_2,-2\right) \mid x_2 \text{ 为数域 } P \text{ 上任意数}\right\}$$

这是一个有趣的事实，似乎方程的发展和x_2的关系不是很大，因为x_2似乎可以取任何的数。我们把这种不影响方程但是又是组成解的一部分的这种变量叫做**自由变量**

来看最后一个例题

1.1.3 例3

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1-2x_2+5x_3=4 \\ 2x_1-x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

快速的解得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可以看到$0x_1+0x_2+0x_3=1$，也就是$0=1$，这是个矛盾的现象，故方程组无解。

1.2 总结

这三个例子讲述了三种可能的结果，对于n元方程组的增广矩阵进行行阶梯化后，剩下的非零行（即：0=0）个数记为r，如果r行出现矛盾等式则无解，如果$r<n$没有矛盾则有无穷多解，而$r=n$则有唯一解。因此我们可以利用这个性质给出定理1

1.2.1 定理1

若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

中有$s < n$，即未知数的个数大于方程组的个数，那么必然有非零解。

证明：阶梯行化后的非零行个数$r \leq s$，必然有$r < n$，因此存在无数多解，自然有非零解。

2 n维向量空间

在学实变函数的时候，稍微靠后会有一章叫度量与空间的，这也说明我们要学的东西可能跟几何空间有关。

一个空间也可以叫成集合，在实变函数中的空间需要一个东西叫度量，不过我们这边不管，因为一直在欧几里得空间内讨论，我们不需要那么多细节的东西。

定义2

数域P上的一个n维向量就是由数域P中的n个数组成的有序数组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，其中每个$a_i$称为向量的分量。而向量常用$(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$表示

定义3

如果n维向量空间$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$与向量$\beta = (b_1, \cdots, b_n)$对应分量相同，即$a_i = b_i, i = 1, 2, 3, 4 \cdots, n$，我们说这两个向量是相等的，记作$\alpha = \beta$

定义4

向量α和β满足如上定理的话，我们定义向量γ为$(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n$为$\alpha$与$\beta$的和，记为$\gamma = \alpha + \beta$

定义5

分量全为零的向量叫做零向量，记为0，向量$(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$记为向量$\alpha$的负向量，记作$-\alpha$

向量加法四条基本运算法则

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \beta+\alpha\\ \alpha+(\beta+\gamma) &= (\alpha+\beta)+\gamma\\ \alpha+0 &= \alpha\\ \alpha+(-\alpha) &= 0\end{aligned}$$

定义7

设k是数域P中的数，向量$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$是向量$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$与数$k$的数量乘积，记为$k\alpha$

$$\begin{aligned}k(\alpha+\beta) &= k\alpha+k\beta\\ (k+l)\alpha &= k\alpha+l\alpha\\ k(l\alpha) &= (kl)\alpha\\ 1\alpha &= \alpha\end{aligned}$$

定义8

以数域P中的数作为分量的n维向量全体，同时考虑定义在其上的加法和数量乘法，称为数域P上的n维向量空间