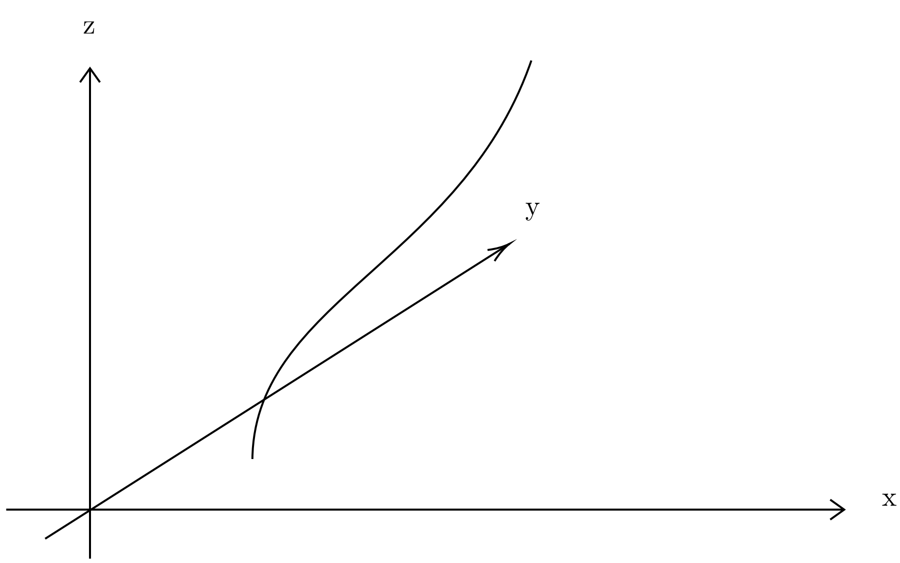
曲线积分

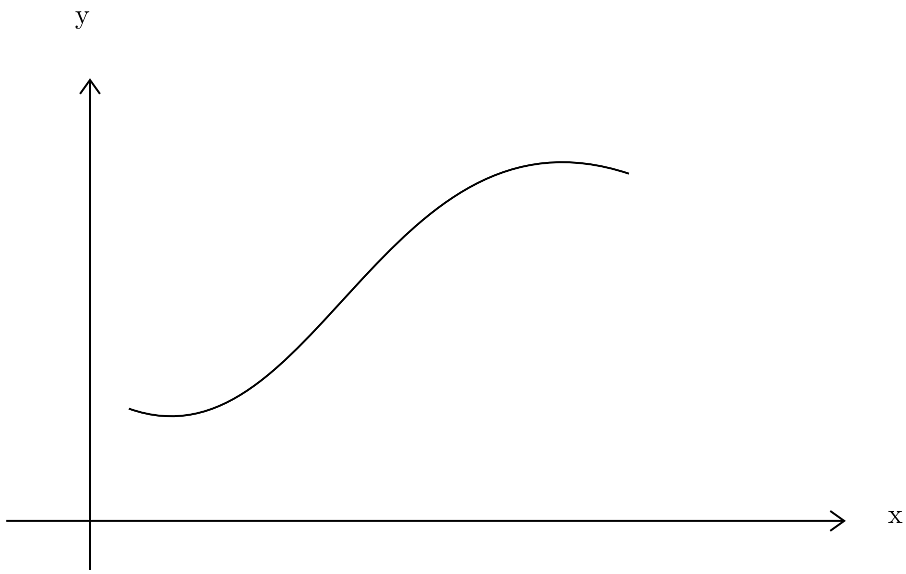
2022 年 6 月 21 日

目录

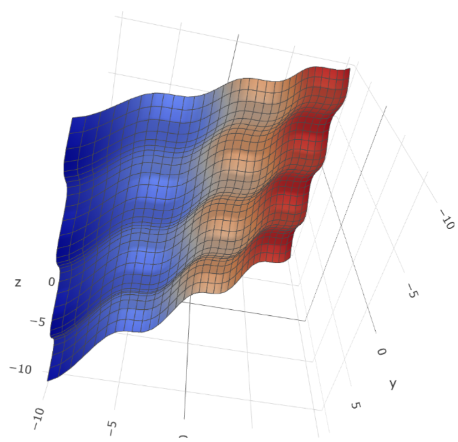
0.1 线积分的几何意义



这是一条三维上的曲线，它的底是这样子的



所以我们为什么要对它积分，这样子把，考虑一张长方形的纸片，大小随你喜欢设，现在我们把它弯曲一下画出来



假设这是一张生活中随处可见的纸，而他的底其实就是上边的那个函数，而它的高实际上就是那条三维曲线的每个点的取值。对这张纸求面积实际上就是对这个线做积分。因此叫线积分，但线积分最早的运用是物理上的。

现在，我们需要对其积分，弧长怎么积分？定积分的底可是一段直线，可以直接积，那弯弯曲曲的弧长呢，那没关系嘛，我们直接让弧长S取其一段小线段$\Delta S_i, i = 1, 2, 3 \cdots$，并设其函数（高的取值）为$u(x, y)$。其中一段

弧长为λ，然后一个高的取值为$u(\xi_i,\eta_i)$直接求和得到$\sum_{i=1}^{n} u(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$，然后令其弧长趋向于0且加到无限，那就是典型的黎曼和了，可以得到$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} u(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i = M$，其实就是纸的面积了。而求和$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} u(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i = \int_L f(x,y)dS$，其中$L=S$是弧长，为避免混淆使用$L$，当中求面积自然是一重积分。其中的积分区域是在曲线上，因此叫曲线积分，也叫线积分。
也有很多不错的性质：

(1)、$\int_L \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)dS = \alpha\int_L f(x,y)dS+\beta\int_L g(x,y)dS$

(2)、$\int_L f(x,y)dS = \int_{L_1} f(x,y)dS+\int_{L_2} f(x,y)dS$[1]

(3)、$f(x,y)\le g(x,y)$，则$\int_L f(x,y)dS \le \int_L g(x,y)dS$

(4)、$\left|\int_L f(x,y)dS\right| \le \int_L |f(x,y)|dS$

0.2 如何计算线积分

遗憾的是，三维曲线是通过参数方程来确定的。

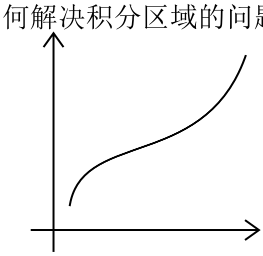
定理

$$L\text{参数方程}=\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha\le t\le\beta)\text{ 且 }[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\ne 0,\text{则}$$

$\int_L f(x,y)dS = \int_\alpha^\beta f(\phi(t),\psi(t))\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt, \alpha<\beta$

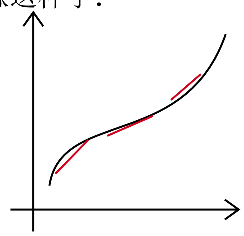
现在让我们来解释一下为什么$dS=\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$

就拿纸作为例子吧，你想求出一张纸的面积，首先我们的第一步，你需要对其建立坐标系，它的高是一个二元函数$f(x,y)$，它的底的弧长我们记作S，那么现在，我们知道一个三维曲线是参数化的，即$f(x,y)=f(\phi(t),\psi(t))$，这说明可以由一个共同的变量$t$生成我们的高。那么积分里面的$f(x,y)$替换成$f(\phi(t),\psi(t))$是对的，剩下的就是我们一开始的问题了，如何解决积分区域的问题，那么现在我们关注底

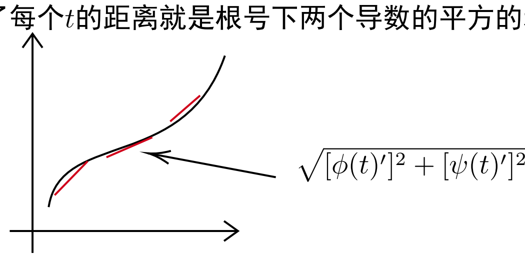


[1]这里是指把一段弧长积分和把弧长分成两段分别积分是相等的

好了，我们假设这张纸的底是这么一条曲线，虽然我们想直接积分，但你记住，我们还没有碰到过那种可以直接对曲线下手的公式，因此我们尝试与一元微积分一样的做法，利用什么东西去逼近他，毫无疑问，直线是最好的近似了，因此我们做如下的近似，1、分割弧，2、利用直线近似每一段弧，就像这样子：



因此，由于函数是参数t运算来的，我们可以知道这段S实际上就是每个t的逼近后的取值。接下来是比较超纲的地方：**我们建立的坐标系，叫直角坐标系，其实就是我们的实直线，两个点之间的距离就是经典的公式$\sqrt{x^2+y^2}$，因此我们接下来的时候，我们知道t是直线的每个取值，而曲线的每个点的切线是什么？连续函数的切线不就是导数吗，因此我们知道了每个t的距离就是根号下两个导数的平方的和。** 即

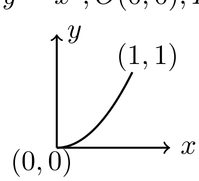


因此，$dS=\sqrt{[\phi(t)']^2+[\psi(t)']^2}dt$。

0.2.1 例子1

$\int_L \sqrt{y}dS, L: y=x^2, O(0,0), B(1,1)$

L的图像为：



这是弧长，但我们跟计算二重积分一样，我们根本不关注$\sqrt{2}$，只需要关注弧长就行了。

现在列出所有的条件$y=x^2, 0 \le x \le 1$，现在让我们带入得到

$$
\begin{aligned}
&原式=\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{(y')^2+[(x^2)']^2}dx \\
&\because \sqrt{y}=x \\
&\therefore \int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{(y')^2+[(x^2)']^2}dx \\
&=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx \\
&=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)
\end{aligned}
$$

0.2.2 例子2

给定一段圆弧L，它是从第四域转了2α个角度到了第一区域。其中$I=\int_L y^2 dS$ 首先我们一定是用极坐标来做这道题目的，因此我们知道从第四区域转了2α到第一区域，其实就是在$-\alpha$到α上的一段弧。所以我们可以得到$-\alpha \le \theta \le \alpha$。现在我们先来求积分区域前面的“欧几里得度量”，其实就是根号下的那堆垃圾。根据参数方程$x=rcos\theta, y=rsin\theta$，则$\sqrt{[(rsin\theta)']^2+[(rcos\theta)']^2}=R$，因此

$$
\begin{aligned}
I&=\int_L y^2 dS=\int_{-\alpha}^{\alpha} y^2\ Rd\theta \\
&\because y=rsin\theta, \therefore \\
I&=\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 sin^2\theta Rd\theta \\
&=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1-cos2\theta}{2}d\theta=R^3(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\frac{sin2\theta}{2})|_{-\alpha}^{\alpha}
\end{aligned}
$$