尼尔森-施赖埃尔定理

2025 年 4 月 10 日

目录

1 尼尔森-施赖埃尔定理

1.1 定义

设S是群G的子群，S在G中的一个**陪集代表系**l指的是G的一个如下定义的子集，它由每个陪集Sb中恰好取出一个元素$\ell(Sb) \in Sb$组成，并且满足$\ell(S) = 1$ [1]

设F是以X为基的自由群，再设S是F的子群，给定S在F中的一个陪集代表系ℓ，则对每个$x \in X$，$\ell(Sb)x$和$\ell(Sbx)$都在陪集Sbx中，从而

$$t_{Sb,x} = \ell(Sb)x\ell(Sbx)^{-1}$$

也在S中，可能有任意的$s_1 \in S$和$s_2 \in S$，使得$s_1bx * (s_2bx)^{-1} = s_1s_2^{-1} \in S$

所以，不等于1的一切$t_{Sb,x}$的集合组成S的一组基。可知S是自由的。

现在设l是自由群F的子群S的一个陪集代表系，元素$t_{Sb,x}$如上。定义Y为符号$y_{Sb,x}$上的自由群。从而$y_{Sb,x} \mapsto t_{Sb,x}$是双射，定义$\varphi : Y \to S$为

$$\varphi : y_{Sb,x} \mapsto t_{Sb,x} = \ell(Sb)x\ell(Sbx)^{-1}$$

的同态。

现在先定义陪集函数$F \to Y$。每个陪集Sb对应一个陪集函数。记为$u \mapsto u^{Sb}$。这些函数不是同态，我们对$| u | \geq 0$用归纳法同时定义他们，其中u是X上的约化字。对所有$x \in X$和所有陪集Sb，定义

$$1^{Sb} = 1, x^{Sb} = y_{Sb,x}, (x^{-1})^{Sb} = (x^{Sbx^{-1}})^{-1}$$

若$u = x^{\epsilon}v$是长度为$n+1$的约化字，其中$\epsilon = \pm 1$且$| v | = n$，定义

$$u^{Sb} = (x^{\epsilon})^{Sb}v^{Sbx^{\epsilon}}$$

[1]就像同余类一样，对 $\mod n$都有集合$\{[1], [2], \cdots, [n-1]\}$，其中$1, 2, \cdots, n-1$是代表元，也就是定义中的$b$

1.2 引理

1. 对所有$u,v\in F$，陪集函数满足$(uv)^{Sb}=u^{Sb}v^{Sbu}$
2. 对所有$u\in F$，$(u^{-1})^{Sb}=(u^{Sbu^{-1}})^{-1}$
3. 若$\varphi:Y\to S$是定义如下的同态：$\varphi: y_{Sb,x}\mapsto t_{Sb,x}=\ell(Sb)x\ell(Sbx)^{-1}$，则对所有的$u\in F$,$\varphi(u^{Sb})=\ell(Sb)u\ell(Sbu)^{-1}$
4. 由$\theta:u\mapsto u^S$给定的函数$\theta:S\to Y$是同态，并且$\varphi\theta=1_S$

证明： 我们对$|\ u\ |$进行归纳，其中u是既约字。当$|\ u\ |=0$的时候，$u=1$，则$(uv)^{Sb}=v^{Sb}$。对于等式右边，$1^{Sb}v^{Sb1}=v^{Sb}$

对于归纳步骤，我们记$u=x^{\epsilon}w$，则

$$\begin{aligned}(uv)^{Sb}=&(x^{\epsilon})^{Sb}(wv)^{Sbx^{\epsilon}} && \text{陪集函数定义}\\ =&(x^{\epsilon})^{Sb}w^{Sbx^{\epsilon}}v^{Sbx^{\epsilon}w} && \text{由归纳假设得到}\\ =&(x^{\epsilon})^{Sb}w^{Sbx^{\epsilon}}v^{Sbu}\\ =&(x^{\epsilon}w)^{Sb}v^{Sbu}\\ =&u^{Sb}v^{Sbu}\end{aligned}$$

对第二个命题，注意到

$$1=1^{Sb}=(u^{-1}u)^{Sb}=(u^{-1})^{Sb}(u^{Sbu})^{-1}$$

对第三个命题，注意φ确实是定义了一个同态，利用自由群的定义，Y是以所有$y_{Sb,x}$为基的自由群。我们依然是对$|\ u\ |\geq 0$做归纳。

首先，对$\varphi(1^{Sb})=\varphi(1)=1$，因为$\ell(S)1\ell(S1)^{-1}=1$

对归纳步骤，我们令$u=x^{\epsilon}v$，其中u是既约的，则

$$\begin{aligned}\varphi(u^{Sb})=\varphi((x^{\epsilon}v)^{Sb})=&\varphi((x^{\epsilon})^{Sb}v^{Sbx^{\epsilon}})\\ =&\varphi((x^{\epsilon})^{Sb})\varphi(v^{Sbx^{\epsilon}})\\ =&\varphi\left((x^{\varepsilon})^{Sb}\right)\ell(Sbx^{\varepsilon})v\ell(Sbx^{\varepsilon}v)^{-1}\end{aligned}$$

最后一个等号来自归纳假设，那么对ϵ，有两种情况，若$\epsilon=1$，则

$$\begin{aligned}\varphi(u^{Sb})&=\ell(Sb)x\ell(Sbx)^{-1}\ell(Sbx)v\ell(Sbxv)^{-1}\\ &=\ell(Sb)xv\ell(Sbxv)^{-1}\\ &=\ell(Sb)u\ell(Sbu)^{-1}.\end{aligned}$$

若$\epsilon = -1$，则

$$\begin{aligned}
\varphi(u^{Sb}) = \varphi(x^{-1}v) &= \varphi((y_{Sbx^{-1},x})^{-1})\ell(Sbx^{-1})v\ell(Sbx^{-1}v)^{-1} \\
&= \left(\ell(Sbx^{-1})x\ell(Sbx^{-1}x)^{-1}\right)^{-1}\ell(Sbx^{-1})v\ell(Sbx^{-1}v)^{-1} \\
&= \ell(Sb)x^{-1}\ell(Sbx^{-1})^{-1}\ell(Sbx^{-1})v\ell(Sbx^{-1}v)^{-1} \\
&= \ell(Sb)x^{-1}v\ell(Sbx^{-1}v)^{-1} \\
&= \ell(Sb)u\ell(Sbu)^{-1}.
\end{aligned}$$

对第四个命题，定义$\theta : S \to Y$为

$$\theta : u \mapsto u^S$$

θ是$b = 1$时，陪集函数$u \mapsto u^{Sb}$对S的限制。现在，若$u, v \in S$，则

$$\theta(uv) = (uv)^S = u^S v^{Su} = u^S v^S = \theta(u)\theta(v)$$

因为$Su = S$，其中$u \in S$，所以θ是一个同态，更多的。若$u \in S$，则由第三个定理给出

$$\varphi\theta(u) = \varphi(u^S) = \ell(S1)u\ell(S1u)^{-1} = u$$

1.3 推论

若S是自由群F的子群且ℓ是S在F中的陪集代表系，则所有不等于1的$t_{Sb,x}$生成S

证明： 由于$\varphi\theta = 1_S$，函数$\varphi : Y \to S$是一个满射，因此Y的生成元$y_{Sb,x}$的像$t_{Sb,x}$生成$\mathrm{im}\varphi = S$

接着我们试着证明S有表现

$$S = \{y_{Sb,x}, \text{所有}x \in X, \text{所有陪集}Sb \mid \ell(Sb)^S, \text{所有陪集}Sb\}$$

1.4 引理

若ℓ是S在F中的陪集代表系，则$\ker\varphi$是一切$\ell(Sb)^S$生成的Y的正规子群。

证明： 令N是所有$\ell(Sb)^S$生成的Y的正规子群，再令$K=\ker\varphi$。由引理1.2的4，$\theta: S\to Y$是一个同态且$\varphi\theta=1_S$，其中$\varphi: y_{Sb,x}\mapsto t_{Sb,x}$且$\theta: u\mapsto u^S$

现在，引入命题

> 设 Y 和 S 是群，并设 $\varphi: Y\to S$ 和 $\theta: S\to Y$ 是同态满足$\varphi\theta=1_S$。
>
> （Ⅰ）如果 $\rho: Y\to Y$ 定义为 $\rho=\theta\varphi$，证明 $\rho\rho=\rho$ 以及对每个$a\in\operatorname{im}\theta$, $\rho(a)=a$。（同态 ρ 叫做收缩。）
>
> （Ⅱ）如果 K 是 Y 的正规子群，它由一切 $y^{-1}\rho(y)$ 生成，其中$y\in Y$，证明 $K=\ker\varphi$。
>
> 证明：$\rho\rho=\theta\varphi\theta\varphi=\theta 1\varphi=\rho$。现在，对$a\in\operatorname{im}\theta$，设$a=\theta(b)$，就有$\rho(a)=\rho(\theta(b))=\theta(\varphi(\theta(b)))=\theta(b)=a$
>
> 证明2：现在$K\lhd Y$，其中$K=\{y^{-1}\rho(y): y\in Y\}$,那么$\varphi(k)=\varphi(y^{-1}\rho(y))=\varphi(y^{-1}\theta\varphi(y^{-1}))=\varphi(y^{-1})(\varphi\circ\theta\circ\varphi(y))=\varphi(y^{-1}*y)=\varphi(1)=1$，其中$k\in K$

因此，由上述命题，K是由$\{y^{-1}\rho(y): y\in Y\}$生成的正规子群，其中$\rho=\theta\varphi$。现在，由引理1.2的1.就有

$$\begin{aligned}
y_{Sb,x}^{-1}\rho(y_{Sb,x}) &= y_{Sb,x}^{-1}\left(\ell(Sb)x\ell(Sbx)^{-1}\right)^S \\
&= y_{Sb,x}^{-1}\ell(Sb)^S x^{Sb}\left(\ell(Sbx)^{-1}\right)^{Sbx} \\
&= \left(y_{Sb,x}^{-1}\ell(Sb)^S y_{Sb,x}\right)\left(\ell(Sbx)^{-1}\right)^{Sbx},
\end{aligned}$$

其中$x^{Sb}=y_{Sb,x}$是陪集函数$u\to u^{Sb}$定义中的一个等式。引理1.2的2给出$(\ell(Sbx)^{-1})^{Sbx}=(\ell(Sbx)^S)^{-1}$。则

$$y_{Sb,x}^{-1}\rho(y_{Sb,x})=y_{Sb,x}^{-1}\ell(Sb)^S y_{Sb,x}(\ell(Sbx)^S)^{-1}$$

由上述等式，则$y_{Sb,x}^{-1}\rho(y_{Sb,x}) \in N$，从而$K \leq N$。因为正规子群对共轭封闭。$y_{Sb,x}^{-1}\ell(Sb)^S y_{Sb,x} \in N$。现在，$N$是所有陪集生成的群，那么$\ell(Sbx)^S \in N$，由封闭性可知$((\ell Sbx)^S)^{-1}$也在N中。所以$K \leq N$

对于反包含，$\ell(Sb)^S \in K$当且仅当$\ell(Sbx)^S \in K$。

现在，我们对$|\ \ell(Sb)\ |$归纳来证明另一个包含光系，当$|\ \ell(Sb)\ | = 0$的时候，就有$y_{1,x}^{-1}\rho(y_{1,x}) = 1 \Rightarrow 1 = 1$

剩下的以后再补

1.5 定义：施赖埃尔陪集代表系

我们设F是以X为基的自由群，并设S是F的子群，一个**施赖埃尔陪集代表系**指的是满足下列性质的陪集代表系ℓ，若$\ell(Sb) = x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\cdots x_n^{\epsilon_n}$是既约的，则每个初始段$x_1^{\epsilon_1}\cdots x_k^{\epsilon_k}$也在陪集代表系中，其中$1 \leq k \leq n$

1.6 引理

F的每个子群S都存在施赖埃尔陪集代表系

证明： 我们定义陪集Sb的长度为元素$sb \in Sb$的最小长度，记为$|\ Sb\ |$，现在对$|\ Sb\ |$用归纳法。我们要证明存在代表元$\ell(Sb) \in Sb$使得其对一切初始段都是长度较短的陪集的代表元。

一开始定义$\ell(S) = 1$。现在，对归纳假设我们有$|\ Sz\ | = n+1$和$ux^\epsilon \in Sz$，其中$z = \pm 1$和$|\ ux^\epsilon\ | = n+1$。若$|\ Su\ | = m < n$，那么就会有一个长度为m的代表元v，使得vx^ϵ是Sz的代表元[2]。但$vx^\epsilon < n+1$，所以$|\ Su\ | = n$。由归纳假设，存在$b = \ell(Su)$使得每个初始段也是代表元。于是定义$\ell(Sz) = bx^\epsilon$

1.7 尼尔森-施赖埃尔定理

自由群F的每个子群S都是自由的，实际上，若X是F的基，ℓ是S在F中的施赖埃尔陪集代表系，则S的一个基由一切不等于1的$t_{Sb,x} = \ell(Sb)x\ell(Sbx)^{-1}$组成

[2]考虑$H = \{(1),(12)\}$，陪集$(13)H = \{(13),(123)\}$，所以有两个代表元$(13)H, (123)H$，但他们是一样的，可以替换(123)为(13)

证明： 对引理的1.2的φ应用第一同构定理，就有$S \cong Y/K$，其中Y是一切符号$y_{Sb,x}$为基的自由群，而$K = \ker\varphi$，利用引理1.4，现在K等价于一切$\ell(Sb)^S$生成的正规子群。利用下述习题

> 设F是以X为基的自由群且$A \subseteq X$，证明若N是A生成的F的正规子群，则F/N是自由群

我们只需要证明K等于一切特定的$y_{Sb,x}$生成的Y的正规子群T。也就是满足$\varphi(y_{Sb,x}) = 1 = t_{Sb,x}$的那些$y_{Sb,x}$。显然的是，利用定义有$T \leq K = \ker\varphi$，现在我们来证明反包含。

我们对$|\ \ell(Sv)\ |$用归纳法证明。若$|\ \ell(Sv)\ |= 0$，则$|\ \ell(Sv)\ |= \ell(S) = 1$。现在，若$|\ \ell(Sv)\ |> 0$，则$\ell(Sv) = ux^\epsilon$，其中$\epsilon = \pm1$且$|\ u\ |<|\ \ell(Sv)\ |$。由于$\ell$是施赖埃尔陪集代表系，那么$u$是代表元，有$u = \ell(Su)$ 利用引理1.2的1，就有

$$\ell(Sv)^S = u^S(x^\epsilon)^{Su}$$

现在，归纳假设告诉我们u^S是特定$y_{Sb,x}$上的字，那么$u^S \in T$。

剩下，我们证明$(x^\epsilon)^{Su}$是特定$y_{Sb,x}$上的字。那么现在有两种情况，$\epsilon = \pm1$。那么$(x^\epsilon)^{Su} = x^{Su} = y_{Su,x}$。而$v = ux$且$\ell$是施赖埃尔陪集代表系，由定义，$v = ux$也在其中，所以$\ell(Sux) = ux$。从而

$$\varphi(y_{Su,x}) = t_{Su,x} = \ell(Su)x\ell(Sux)^{-1} = ux(ux)^{-1} = 1$$

因此

$$\varphi((x^{-1})^{Su}) = (t_{Sux^{-1},x})^{-1} = [\ell(Sux^{-1})x\ell(Sux^{-1}x)]^{-1} = [\ell(Sux^{-1})x\ell(Su)]^{-1}$$

而ℓ是施赖埃尔陪集代表系，就有$\ell(Su) = u$和$\ell(Sux^{-1}) = \ell(Sv) = v = ux^{-1}$。最后

$$\varphi((x^{-1})^{Su}) = [(ux^{-1})xu^{-1}]^{-1} = 1$$

所以他的逆$y_{Sux^{-1}}$也是特定的$y_{Sb,x}$中的一个，从而$(x^{-1})^{Su} \in T$。证明完毕

和阿贝尔群不同的是，有限生成群的子群未必是有限生成的

1.8 命题

若F是秩为2的自由群，则它的换位子群F'是秩为无限的自由群。

证明： 我们设$\langle x, y\rangle$是F的基，那么F/F'就是以$\{xF', yF'\}$为基的自由阿贝尔群。因此每个陪集$F'b$有唯一形如$x^m y^n$的代表元，其中$m, n \in \mathbb{Z}$。由于每个$x^m y^n$的子字具备同样形式的字（由交换性得到），所以我们选取$\ell(F'b) = x^m y^n$的陪集代表系就是施赖埃尔代表系，若$n > 0$，则$\ell(F'y^n) = y^n$，但是$\ell(F'y^n x) = xy^n \neq y^n x$，从而存在无穷多个这样的元素$y_{Sy^n,x} = \ell(F'y^n)x\ell(F'y^n x)^{-1} \neq 1$。由尼尔森-施赖埃尔定理证毕。

但，即使是有限生成自由群的任一子群未必是有限生成的，但指数有限的子群必然是有限生成的

1.9 定理

若F是具备有限秩n的自由群，则F的每个具有有限指数j的子群S也是有限生成的，事实上，$\mathrm{rank}(S) = jn - j + 1$

证明： 我们设$X = \{x_1, \cdots, x_n\}$是F的基，再设$\ell = \{\ell(Sb)\}$是施赖埃尔陪集代表系。利用定理1.7，S的一组基是由那些不等于1的元素$t_{Sb,x}$组成的，其中$x \in X$，Sb有j种取法，而x有n种。所以S的基中至多有jn个元素，所以$rank(S) \leq jn$是有限生成的。

定义平凡有序对$(Sb, x) = t_{Sb,x} = 1$。也就是$\ell(Sb)x = \ell(Sbx)$，我们现在要证明的是陪集族$(Sb \neq S)$和平凡有序对之间存在双射ψ，从而证明存在$j-1$个有序对。这样，只要剔除了$j-1$个1即可得到rank为

$$\mathrm{rank}(S) = jn - (j-1)$$

由于$Sb \neq S$。那么$\ell(Sb) = ux^\epsilon$，因为ℓ是施赖埃尔代表系，有$u \in \ell$，定义$\varphi(Sb)$如下

$$\psi(Sux^\epsilon) = \begin{cases} (Su, x) & \text{如果 } \epsilon = +1; \\ (Sux^{-1}, x) & \text{如果 } \epsilon = -1. \end{cases}$$

注意$\psi(Sux^\epsilon)$是平凡有序对，假设$\epsilon = 1$，则$\ell(Sux) = \ell(Sb) = b = ux$，从而$\ell(Su)x = ux$和$t_{Su,x} = 1$，注意$\ell(Su)x\ell(Sux)^{-1} = t_{Su,x} = 1$。若$\epsilon = -1$，则$\ell(Sbx) = \ell(Sux^{-1}x) = \ell(Su) = u$。从而$\ell(Sb)x = bx = ux^{-1}x = u$，就有$t_{Sb,x} = 1$

为了得到ψ是单射，设$\psi(Sb) = \psi(Sc)$，其中$b = ux^\epsilon$和$c = vy^\eta$。我们假设x, y在F的基中且$\epsilon = \pm 1$，$\eta = \pm 1$。那么就存在4种可能性，他们依赖于ϵ和η

$(Su,x)=(Sv,y)$, $(Su,x)=(Svy^{-1},y)$œ $(Sux^{-1},x)=(Sv,y)$, $(Su,x)=(Svy^{-1},y)$

第一种情况，若$(Su,x)=(Sv,y)$，则$Su=Sv$。那就有$Sb=Sux=Svx=Sc$。若$(Su,x)=(Svy^{-1},y)$,那么$Su=Svx^{-1}=Sc$,从而$\ell(Su)=\ell(Sc)=c$，但(Su,x)是平凡有序对，那么$\ell(Su)x=\ell(Sux)=b$，从而$b=\ell(Su)x=cx=vx^{-1}x$，这是个矛盾。因为b是既约的。剩下的两种情况如上。最后，若$(Sux^{-1},x)=(Svx^{-1},x)$，则回到第一种情况，有$Sb=Sux^{-1}=Svx^{-}Sc$

最后，我们证明ψ是满射。取平凡有序对(Sw,x)，也就是$\ell(Sw)x=wx=\ell(Swx)$，现在，$w=ux^{\epsilon}$，其中$u\in\ell$，且$\epsilon=\pm1$，若$\epsilon=1$，则w不以x^{-1}结尾，从而$\psi(Swx)=(Sw,x)$。若$\epsilon=-1$则w以x^{-1}结尾，从而$\psi(Su)=(Sux^{-1})=(Sw,x)$，实际上就是验证了一下定义。

1.10 定理

存在不同构的有限生成群G和H，他们的每一个同构于另一个的子群

证明： 若G是秩为2的自由群，H是秩为3的自由群，则$G\ncong H$，现在，选择基里面任意2个元素生成的子群就是秩为2的子群，这表明G于此同构，最后，由于G的换位子群是无限群，它包含了一个秩为3的自由子群，即H和G的子群同构。