- 斯特林公式

斯特林公式

这章的涉及到阶乘的东西会有点多。在前几章我们已经定义了整数输入的阶乘函数。但是如果取阶乘的是负数呢？例如$s=-\frac{1}{2}$，那我们该怎么办。我们其实可以把正态分布给改成一个伽马函数求解。事实上，$\sqrt{\pi}=(-1/2)!$(**在下面证明**)，那么$-1/2$的阶乘是啥呢。我们对付这个问题当然要用到伽马函数。

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx，\ s>0$$

如果n为一个非负整数，那么$\Gamma(n+1)=n!$，且$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$，所以，对上述公式进行变形得到$s-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，所以带入，我们会用到一个小trick。

还记得我们怎么求的伽马函数吗，我们是对正态分布标准型求来的。当

$$s-1=-\frac{1}{2}$$

的时候我们知道就是$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

$$n!=\Gamma(n+1)$$
$$\therefore -(1/2)!=\Gamma(1+(-1/2))=\Gamma(1/2)$$

现在来看斯特林公式吧。
一般来讲，没有人会喜欢去计算阶乘，在我学习泰勒公式的时候，就会用到阶乘去证明一个东西，他是这样子的。我们给出一个指数函数和一个阶乘

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

在《普林斯顿微积分》的24.3节均有介绍。我把证明放在最后

求一个指数就已经很头疼的，结果我们发现阶乘函数比幂指数还要头疼很多倍。那么有没有什么方法可以让我们减轻痛苦呢，当然有，就是用我们的斯特林冲锋枪对着自己的脑袋来一枪（不是）。是我们的斯特林公式！斯特林公式是一条用来取n的阶乘的近似值的。

一般来说，阶乘的计算复杂度为线性。常见的方法能够把你算boom。这玊公式能减少我们的计算，变成指数级的，且在n很小的时候很精准。

在$n\to\infty$的时候，我们有

$$n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1$$

准确的说，我们有这个级数展开

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\cdots)$$

当然我并不喜欢纠结严格证明，所以这就是为什么我的数学成绩不好的原因。

注意一个$n!=n(n-1)(n-1)\cdots$，而$n^n=nnnnn$，所以有$n!\leq n^n$，这与斯特林公式一致，但这个公式显然太粗糙了，我们必须做以修改，还记得正态分布吗，我们用一个e^{-x}来做修正。当然我们对于斯特林考虑的是什么呢，找个下界看看把，我们不妨先假设是偶数的情况，对于$n!\geq n(n-1)\cdots\frac{n}{2}$，所以$n!\geq(n/2)^{n/2}$，我们找到的这个下界显然有点糟糕，因为右边的等式甚至都不是一个容易计算的结果，因为幂是$\frac{n}{2}$，可以对其简单算几个验证一下。所以我们得找到一个近似的东西。

所以我们该如何鉴定级数有不错的性质，当然，可以理解为我们可以用的东西，误差不大。那么有必要用起一个收敛判别法了，**比式判别法**，在有阶乘的时候应用它！

比式判别法：

当$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$则在$n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，在$L<1$收敛，大于1发散，在$L=1$时或极限不存在时判别法无效

$L<1$级数绝对收敛

当然，这种也能判别极限收敛，一个简单的原理，若存在$a<b,$而$f(a)>f(b)$，那么趋于**无穷**时候当然是0，因为上面速度太小了，就像$\frac{n}{x}$

现在我们继续关于斯特林公式的工作吧。

代数嘛，都是换来换去，那么对于阶乘$\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$
那么斯特林公式告诉我们什么结果

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)!}{n!}\approx&\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi(n+1)}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\\=&(n+1)\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\times\frac{1}{e}\times\sqrt{\frac{n+1}{n}}\\=&(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{e}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

得到了一个看似不错的结果，我们如何让两个东西靠在一起呢，当然是考虑无穷的情况。那么当$n \to \infty$
结果变成

$$(n+1)e \times \frac{1}{e} \times 1 = (n+1)$$

这真是一个不错的近似。不过这不是证明，但是看起来像证明了