交换环2

2024 年 5 月 24 日

目录

1 诺特环

令k是域$k[x_1, \cdots, x_n]$的一个重要性质是其每个理想都可以由有限的元生成。我们之前在证明UFD中的时候就用到过，这种关系也叫理想链。在等一下我们会用到

1.1 定义：ACC(升链条件)

交换环R满足ACC，即升链条件(ascending chain condition)。若每个上升的理想链

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

均是会停止的，即从某项开始后固定不变。换句话说，存在整数N使得$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \cdots$

1.2 定义：有限生成

交换环R中的理想I称为有限生成的，若这里存在有限个元$a_1, \cdots, a_n \in I$使得

$$I = \left(\{\sum_i r_i a_i : r \in R\text{对所有i成立}\} \right)$$

也就是说，每个 I是一些元a_i的线性组合，即

$$I = (a_1, \cdots, a_n)$$

那么我们说I是由$a_1, \cdots, a_n$生成。并称其为一组基。但这是比线性空间的基弱点的定义，因为我们没有提及唯一性。

1.3 命题

下列条件对交换环R是等价的

1. R是ACC
2. R满足最大条件：每一个R中理想的非空集合$\mathcal{F}$存在极大元，即$I_n \in \mathcal{F}$使得不存在满足$I_0 \subsetneq J$的$J \in \mathcal{F}$
3. R中的每个理想都是有限生成的。

证明： 由$1 \to 2$，设$\mathcal{F}$是R中一些理想构成的集合，设$\mathcal{F}$无极大元，令$I_1 \in \mathcal{F}$。由于I_1非极大元，那么就有$I_2 \in \mathcal{F}$使得$I_2 \subsetneq I_1$，并且I_2也不是极大元。这种情况可以一直递推下去，我们就得到一个严格的上升链，这与R是Acc矛盾。

证明2： $2 \to 1$，令I是R中的理想，并定义$\mathcal{F}$是所有包含于I中且是有限生成的理想的全体。由假设，那么存在极大元$M \in \mathcal{F}$。由于$M \in \mathcal{F}$。那么$M \subseteq I$。若$M \subsetneq I$，则存在$a \in I$使得$a \notin M$。那么下面的理想

$$J = \{m + ra : m \in M, r \in R\} \subseteq I$$

是有限生成的，故$J \in \mathcal{F}$ 。但$M \subseteq J$且M是极大元。$M \subsetneq J$。这与M的极大性矛盾，为此$M = I$。所以I是有限生成的。

证明3： 最后，由$3 \to 1$设每个R中的理想是有限生成的，令

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

是R中理想的上升链。那么$J = \bigcup_n I_n$也是理想。若$a \in J$，则$a \in I_n$对某个n成立。若$r \in R$，则$ra \in I_n$。因为I_n是理想，那么$ra \in J$。若$a, b \in J$，则存在一些理想I_n, I_m使得$a \in I_n$和$b \in I_m$。我们假设$I_n \subseteq I_m$。就有$a, b \in I_m$。由于I_m是理想，则$a - b \in I_m$因此$a - b \in J$。所以J是理想

由假设，则有一些$a_i \in J$使得$J = (a_1, \cdots, a_n)$。现在对某个n_i有a_i落在I_{n_i}中。设N是n_i中最大的，则对所有i存在$I_{n_i} \subseteq I_N$。因此

$$J = (a_1, \cdots, a_q) \subseteq I_N \subseteq J$$

它表明了若$n \geq N$，则$J = I_N \subseteq I_n \subseteq J$。所以$R$是ACC

1.4 定义：诺特环

一个交换环R称为诺特环，若其每个理想都是有限生成的。

1.5 推论

若I是在非零诺特环R中的理想，则存在极大理想M在R中使得其包含I。特别的，每个非零诺特环都存在极大理想。

证明： 令$\mathcal{F}$是所有R中包含I的理想构成的族，因此$\mathcal{F} \neq \emptyset$。由于$R$是诺特环，那么它满足最大条件。存在一个极大元$M \in \mathcal{F}$。我们要证明$M$是$R$中的极大理想。我们设存在真理想$J$使得$M \subseteq J$。那么$I \subseteq J$，就有$J \in \mathcal{F}$。因此，由$M$的极大性可知$M = J$，因此$M$就是$R$中的理想。

1.6 定义：偏序集

偏序集指的是非空集合X，对$x, y, z \in X$装备了关系$x \preceq y$，我们有

自反 $x \preceq x$

反对称性 若$x \preceq y$和$y \preceq x$，则$x = y$

传递 若$x \preceq y$且$y \preceq z$，则$x \preceq z$。

偏序集X中的元素u称为极大元，若不存在$x \in X$使得$u \preceq x$且$u \neq x$

注记： 我们设A是一个集合，若定义$U \preceq V$表示$U \subseteq V$，其中U, V是A的子集。那么集族$\mathcal{P}(A)^*$表示所有A的真子集构成的集合。它是一个偏序集。

另一个例子是实数集R，若定义$x \preceq y$表示$x \leq y$。那么就存在一些具有多个极大元的偏序集，例如上述的$\mathcal{P}(A)^*$，或者是没有最大元的偏序集R。特别的是，若偏序集上的zorn定理成立，那么可以保证偏序集至少有一个极大元。

1.7 Zorn引理

令X是偏序集，且X中的每个链C都有一个上界，即存在$x_0 \in X$使得$c \preceq x_0$，其中$c \in C$。则X有极大元。

佐恩引理实际上和选择公理是等价的。但我们在处理诺特环大多数时候并不需要用到。

1.8 推论

若R是诺特环且J是R中的理想，则R/J也是诺特环。

证明： 若A是R/I中的理想，则对应定理证明理想$J \in R$使得$J/I = A$。由于R是诺特环。则理想J是有限生成的，即$J = (b_1, \cdots, b_n)$。因此$A = J/I$也是有限生成的。因此R/I也是诺特环。

1.9 引理

交换环R是诺特环当且仅当对每个R中的元的序列$a_1, \cdots, a_n, \cdots$，存在$m \geq 1$和$r_1, \cdots, r_m \in R$使得$a_{m+1} = r_1 a_1 + \cdots + r_m a_m$

证明： 设R是诺特环和$a_1, \cdots, a_n, \cdots \in R$。若$I_n = (a_1, \cdots, a_n)$，那么存在一个理想的ACC，$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$。由于是ACC，就有$m \geq 2$使得$I_m = I_{m+1}$，因此$a_{m+1} \in I_{m+1} = I_m$，那么就存在一些$r_i \in R$使得$a_{m+1} = r_1 a_1 + \cdots + r_m a_m$

反之设R是设R是满足元素链条件的，若R非诺特环，则存在一个不停止的理想上升链$I_1 \subseteq \cdots$，去掉重复项，我们就可以假设对所有n存在$I_n \subseteq I_{n+1}$。对每个n，选择$a_{n+1} \in I_{n+1}$使得$a_{n+1} \notin I_m$。那么就存在$m, r_i \in R$。对所有$i \leq m$使得$a_{m+1} = \sum_{i \leq m} r_i a_i \in I_m$矛盾。为此$R$是诺特环。

1.10 定理：希尔伯特基

若R是交换诺特环，则$R[x]$也是。

证明： 设I是$R[x]$中的非有限生成的理想。那么$I \neq \{0\}$。定义$f_0(x)$是I中次数最小的多项式，并连续的定义到$f_{n+1}(x)$是$I - (f_0, \cdots, f_n)$中一个次数最低的多项式。注意，对所有$n \geq 0$，$f_n(x)$是存在的，若$I - (f_0, \cdots, f_n)$是空集，这说明I是有限生成的。显然

$$\deg(f_0) \leq \deg(f_1) \leq \cdots$$

记a_n是$f_n(x)$的首系数。由于R是诺特环，那么利用引理1.9存在m使得$a_{m+1} \in (a_0, \cdots, a_m)$。也就是可以表示为$a_{m+1} = r_1 a_1 + \cdots + r_m a_m$对某些$r \in R$成

立。那么我们定义

$$f^* = f_{m+1}(x) - \sum_{i=0}^{m} x^{d_{m+1}-d_i} r_i f_i(x)$$

其中$d_i = \deg(f_i)$，注意$f^*(x) \in I_(f_0, \cdots, f_n)$，否则$f_{m+1} \in (f_0, \cdots, f_n)$。我们只需要证明$\deg(f^*) < \deg(f_{m+1})$即可。因为这意味着$f_{m+1}$是不在$(f_0, \cdots, f_m)$中的最低次数的多项式矛盾。

我们把上述定义的式子展开，得到

$$\begin{aligned} f^*(x) =& f_{m+1}(x) - \sum_{i=0}^{m} x^{d_{m+1}-d_i} r_i f_i(x) \\ =& (a_{m+1}x^{d_{m+1}} + \text{其他次数更低的项}) - \sum_{i=0}^{m} r_i a_i x^{d_{m+1}} + \text{其他低次的项} \end{aligned}$$

注意我们一开始已经证明了a_{m+1}是a_1到a_m的线性组合。因此$a_{m+1}x^{d_{m+1}} = \sum_{i=0}^{m} r_i a_i x^{d_{m+1}}$，就有$\deg(f^*) < \deg(f_{m+1})$

1.11 推论

1. 若k是域，则$k[x_1, \cdots, x_n]$是诺特环
2. 环$\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$也是诺特环
3. 对任意$k[x_1, \cdots, x_n]$中的理想I，其中$k = \mathbb{Z}$或者k是域，商环$k[x_1, \cdots, x_n]/I$是诺特环

证明： 我们对$n \geq 1$进行归纳证明。当k是域，那么理想只有k和$\{0\}$，它是诺特环，利用希尔伯特基定理$k[x]$也是诺特环。我们对$n > 1$归纳，定义$R = k[x_1, \cdots, x_{n-1}]$，那么由于$R$是诺特环，现在在重复的利用一次希尔伯特基定理，就有$R[x_n] = k[x_1, \cdots, x_n]$也是诺特环。

证明2： 对于第二个，我们证明每个PID都是诺特环。由于PID不存在严格的上升理想链，那么由于PID的理想都是素理想，而每个理想都是极大理想。这表明他们都是有限生成的。因为Z是特殊的PID，我们只要如法炮制第一个证明，利用归纳即可。

证明3 利用推论1.8，和上述我们已经证明的两个定理归纳即可。