数学工具—卷积和变量替换

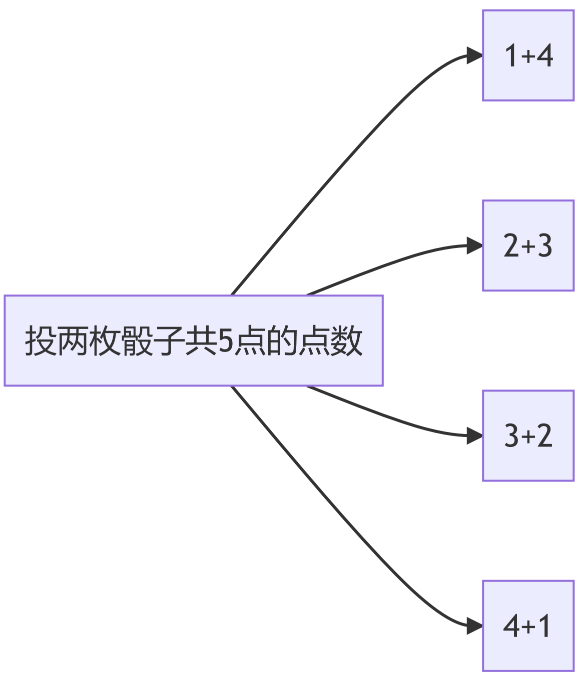
卷积这个东西曾经头疼了我好久。卷积是个什么吊玩意呢？我们设想下面的事情。

你有两枚骰子，我们想知道两枚骰子加起来为11点的概率为多大。这个时候我们想一下组成11点的组合有多少种呢？

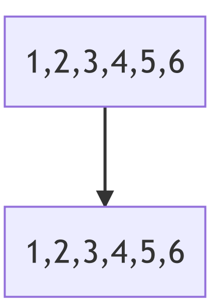
在这里注意的是，我们发现事件都是独立的，所以又得想办法了。

认识卷积之前，我们经常能看到描述，即：翻转、平移、相加。我们都来一一解释一下。

既然是概率论，我们应该从概率论上的例子来理解，这个和信号处理是大相庭径的。我们来想一下这个东西。

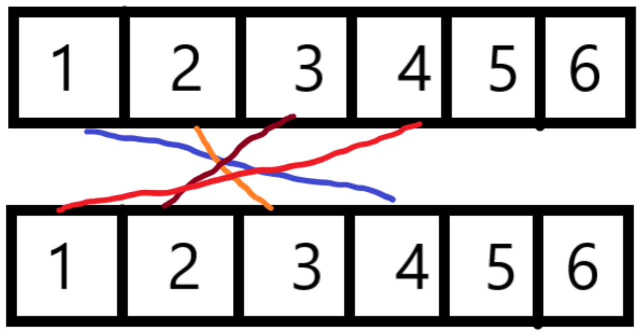


这四种情况，现在我们来讲讲平移这个概念。
为什么是平移呢？我们把上面的例子化成横条。

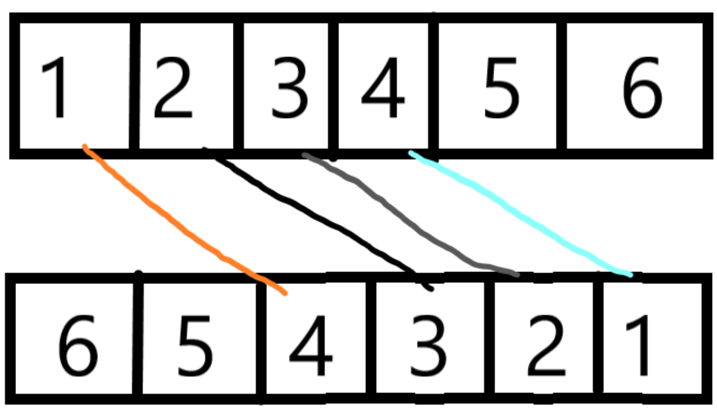


我们可以看到，上面是第一颗骰子可以掷的点数，下面是第二颗的。

那么掷出点数共为5的方法如下组对。



对吧，头尾组队，那么我们第一个事情就是，**翻转**，变成这个样子



那么这第一步就是翻转。把他们对应起来往两边拉，上面的往右边拉，下边的往左边拉，让数值能够一一对应，这个我们叫做平移。相加就很好理解了，就是两个对应数值相加起来等于一个特定的常数，这就是相加的意思。

那么我们把第一颗骰子的概率密度函数设为$f(x)$，那么第二个骰子的概率密度函数设为$g(x)$

那么我们知道：第一种有：$z(5) = f(1) * g(5-1)$那么我们可以有如下这种形式

$$z(5)=\sum_{i=1}^{4} f(i)g(5-i)$$

还记得我们概率论的定理吗，**可数可加性和独立事件的概率是单事件们的乘积**

那么我们推广到更一般的形式，把目标值给换了，换成一个τ，把其他换成x那么得到

$$z(\tau)=\sum f(x)g(\tau-x)$$

同样，对于连续的卷积，只需要替换和符号就行，变成

$$\int f(x)g(\tau-x)dx$$

多变量的卷积

这么久没有严格定义函数，我们必须重新声明一下，事件X是一个有着概率空间Ω且定义在σ代数上的一个函数f_X，我们把f_X说作事件X的概率密度函数。然后接下来我们来定义一个。函数是一种规则，记为f

根据前面的公式

$$z(x)=f_X\times f_g$$

当然，我们可以把第一个骰子的概率空间设为X，第二颗设为Y。这样子容易很多。

那么我们可以知道z的概率空间其实就是$X+Y$第一颗和第二颗骰子按照某个条件组成的。所以我们也可以记为f_{X+Y}
那么三个变量的卷积就是

$$f_{X+Y+Z}=\int(f_X*f_Y*f_Z)(x)$$

对此我们给出更一般的卷积公式，

设$X_1, X_2, ...X_n$是随机变量，且相互独立。它们的概率密度函数分别是$f_{X_1}, f_{X_2}, ...f_{X_n}$，则 $$f_{X_1+...+X_n} = (f_{X_1} * f_{X_2} * ... * f_{X_n})(x)$$ **根据乘法交换律我们也可以证明** $$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$$ **，所以卷积是可以做交换的。那么我们可以用n重积分求得n个变量的卷积。其中有：** $$(f_1 * f_2 * ... * f_n) = (f_1 * (f_2 * ... * (f_{n-2} * (f_{n-1} * f_n))...))(x)$$
n个变量的卷积可以是 $$\int ... \int f_{1+2..+n}(x) dx_1 * ... * d_{x_n}$$