交换环2

2024 年 5 月 29 日

目录

1 簇

在解析几何中，我们给出了方程的图像是什么样的，例如，方程$f: R\to R$的图像就由平面上所有有序对$(a,f(a))$构成，即f是方程

$$g(x,y)=y-f(x)=0$$

的所有解$(a,b)\in R^2$的一个集合。有些方程的图像并不是函数的曲线，我们也可以画出，例如

$$h(x,y)=x^2+y^2-1$$

是单位圆。除此之外，我们还可以描述两个变量的多项式的两个联立解。的确，藉此还可以拓展到R^n上的n变量多项式。

记号： 令k是域和k^n是n元组的集合。

$$k^n=\{a=(a_1,\cdots,a_n):a_i\in k\text{对所有i}\}$$

接下来，我们考虑$f(x_1,\cdots,x_n)\in k[x_1,\cdots,x_n]$作为$k^n\to k$这个函数的准确定义。

1.1 定义：多项式函数

定义$X=x_1,\cdots,x_n$，多项式$f(X)\in k[X]$用如下的方法确定了一个明显的多项式函数$f^\flat: k^n\to k$

$$f^\flat:(a_1,\cdots,a_n)\to f(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{e_1,\cdots,e_n} b_{e_1,\cdots,e_n}a_1^{e_1}\cdots a_n^{e_n}$$

1.2 命题

令k是无限域和$k[X]=k[x_1,\cdots,x_n]$。若$f(X),g(X)\in k[x]$满足$f^\flat=g^\flat$，则$f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)$

证明： 我们对$n\geq 1$进行归纳，当$n=1$时，我们做$f(x)-g(x)$，由于k是无限域。不妨假设$f\neq g$，那么由于对$f^b(x)=g^b(x)$对某个幂次成立，其中有$f^b(a)=g^b(a)$对所有$a\in k$成立。则k的元素实际上都是$f(x)-g(x)$的根。由代数基本定理，这种根最多只有n个，我们得到了矛盾，因此$f(x)=g(x)$

接下来我们做归纳，记

$$f(X,y)=\sum_i p_i(X)y^i$$

和

$$g(X,y)=\sum_i q_i(X)y^i$$

其中X是$(x_1,\cdots,x_n)$的记号。若$f^b=g^b$，那么我们有$f(a,\alpha)=g(a,\alpha)$对每个$a\in k^n$和$\alpha\in k$成立。固定$a\in k^n$，我们定义$F_a=\sum_i p_i(a)y^i$和$G_a(y)=\sum_i q_i(a)y^i$。由于$F_a(y),G_a(y)\in k[y]$，则$n=1$的情况告诉我们$p_i(a)=q_i(a)$对所有$a\in k^n$成立。由归纳假设，$p_i(X)=q_i(X)$对所有i成立。因此

$$f(X,y)=\sum_i p_i(X)y^i=\sum_i q_i(X)y^i=g(X,y),$$

1.3 定义：零点

若$f(X)\in k[X]=k[x_1,\cdots,x_n]$和$f(a)=0$，其中$a\in k^n$，则$a$称为$f(X)$的零点。若$f(X)$是多项式，我们也称为一个根。

1.4 命题

若k是代数闭域，且$f(X)\in k[X]$非常量，则$f(X)$有零点

证明： 像刚才一样，我们对$n\geq 1$归纳，其中$X=(x_1,\cdots,x_n)$，基本步骤可以由其是代数闭域得到。我们依然记

$$f(X,y)=\sum_i g_i(X)y^i$$

对每个$a\in k^n$，定义$f_a(y)=\sum_i g_i(a)y^i$。若$f(X,y)$是非零的，则每个$f_a(y)\in k[y]$是非零的。因此，$g_i(a)=0$对每个$n\geq 1$和$a\in k^n$成立。由于代数闭域是无限的，因此$g_i(X)=0$对全部$i>0$成立，所以$f(X,y)=g_0(X)y^0=g_0(X)$。由归纳，$g_0(X)$是非零常量。

1.5 定义：代数集

若$F\subseteq k[X]=k[x_1,\cdots,x_n]$，则由$F$定义的代数集合为

$$\mathrm{Var}(F)=\{a\in k^n; f(a)=0\text{对每个}f(X)\in F\}$$

因此，$\mathrm{Var}(F)$是由每个$f(X)\in F$中的零点$a\in k^n$组成的。

1.5.1 例子

1. 我们定义两个变量的代数集如下：

$$\mathrm{Var}(x,y)=\{(a,b)\in k^2 : x=0\text{和}y=0\}$$

那么他就是

$$\mathrm{Var}(x,y)=x\text{轴}\cup y\text{轴}$$

1.6 命题

1. 若$F\subseteq G\subseteq k[X]$，则$\mathrm{Var}(G)\subseteq \mathrm{Var}(F)$

2. 若$F\subseteq k[X]$和$I=(F)$是由F生成的理想，则

$$\mathrm{Var}(F)=\mathrm{Var}(I)$$

并且每个代数集可以由有限个方程定义。

证明： 若$a\in \mathrm{Var}(G)$，则$g(a)=0$对所有$g(X)\in G$成立。由于$F\subseteq G$，特别的，就有$f(X)\in F$，$f(a)=0$对所有f成立。

证明2： 由于$F\subseteq (F)=I$那么我们有$\mathrm{Var}(I)\subseteq \mathrm{Var}(F)$。对于反包含，令$a\in \mathrm{Var}(F)$，那么对每个$f(X)\in F$有$f(a)=0$。若$g(X)\in I$，则$g(X)=\sum_i r_i f_i(X)$，其中$r_i\in k$和$f_i(X)\in F$。因此$\sum_i r_i f_i(a)=0$且$a\in \mathrm{Var}(I)$

若I是$k[X]$中的理想，则希尔伯特基定理告诉我们I是有限生成的，因此这里存在有限集合$F\subseteq I$使得$\mathrm{Var}(I)\subseteq \mathrm{Var}(F)$

1.7 命题

若k是域

1. 有$\mathrm{Var}(x_1,x_1-1)=\emptyset$和$\mathrm{Var}(0)=k^n$，其中0是零多项式

2. 若I和J是$k[X]$中的理想，则

$$\mathrm{Var}(IJ)=\mathrm{Var}(I\cap J)=\mathrm{Var}(I)\cup\mathrm{Var}(J),$$

其中$IJ=\{\sum_i f_i(X)g_i(X)\colon f_i(X)\in I\text{且}g_i(X)\in J\}$.

3. 若$I_\ell\colon \ell\in L$是是所有$k[X]$中理想的族，则

$$\mathrm{Var}(\sum_\ell I_\ell)=\bigcap_\ell \mathrm{Var}(I_\ell),$$

其中$\sum_\ell I_\ell$是所有形如$r_{\ell_1}+\cdots+r_{\ell_q}$的有限和构成的集合，其中$r_{\ell_i}\in I_{\ell_i}$.

证明： 若$a=(a_1,\cdots,a_n)\in \mathrm{Var}(x_1,x_1-1)$，则$a_1=0$且$a_1=1$，很明显，这样的点是不存在的，因此$\mathrm{Var}(x_1,x_1-1)=\emptyset$。那么$\mathrm{Var}(0)=k^n$表明是零多项式。

证明2： 由于$IJ\subseteq I\cap J$，从而$\mathrm{Var}(IJ)\supseteq \mathrm{Var}(I\cap J)$。由于$IJ\subseteq I$，藉此可以推出$\mathrm{Var}(IJ)\supseteq \mathrm{Var}(I)$，因此

$$\mathrm{Var}(IJ)\supseteq \mathrm{Var}(I\cap J)\supseteq \mathrm{Var}(I)\cup \mathrm{Var}(J).$$

只差最后一步，我们要证明$\mathrm{Var}(IJ)\subseteq \mathrm{Var}(I)\cup \mathrm{Var}(J)$。若$a\notin \mathrm{Var}(I)\cup \mathrm{Var}(J)$，则这里存在$f(X)\in I$和$g(X)\in J$，其中$f(a)\neq 0$和$g(x)\neq 0$。但$f(X)g(X)\in IJ$，且$fg(a)=f(a)g(a)\neq 0$。由于$k[X]$是整环，这使得$a\notin \mathrm{Var}(IJ)$。

证明3： 对每个ℓ，包含$I_\ell\subseteq\sum_\ell I_\ell$给出了$\mathrm{Var}(\sum_\ell I_\ell)\subseteq\bigcap_\ell \mathrm{Var}(I_\ell)$

对反包含，若$g(X)\in\sum_\ell I_\ell$，则这里有有限个ℓ使得$g(X)=\sum_\ell h_\ell f_\ell$是有限生成的，其中$h_\ell\in k[X]$而$f_\ell(X)\in I_\ell$。因此，若$a\in\cap_\ell \mathrm{Var}(I_\ell)$，则$f_\ell(a)=0$对全部$\ell$成立，就有$g(a)=0$，因此$a\in \mathrm{Var}(\sum_\ell I_\ell)$

1.8 定义：拓扑

一个集合X上的拓扑是X的子集构成的集合$\mathcal{F}$，称其是闭集，若它满足下面的公理

1. $\emptyset\in\mathcal{F}$且$X\in\mathcal{F}$
2. 若$F_1,F_2,\in\mathcal{F}$，则$F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$，即两个子集的并也是闭的
3. 若$\{F_\ell:\ell\in L\}\subseteq\mathcal{F}$，则$\cap_\ell F_\ell\in\mathcal{F}$，即闭集的交也是闭的。

一个拓扑空间是有序的对$(X,\mathcal{F})$，其中X是集合，而$\mathcal{F}$是X上的一个拓扑

1.9 定义：坐标环

若$A \subseteq k^n$，其中k是域，定义坐标环$k[A]$是所有多项式函数$f : k^n \to k$上的一个限制$f \mid A$的交换环。其运算像点的运算一样。

多项式$f(x_1, \cdots, x_n) = x_i \in k[X]$，当被视作多项式函数时，它是这样定义的：

$$x_i : (a_1, \cdots, a_n) \to a_i$$

因此，x_i从k^n挑选出第i个坐标的点。我们把这个东西叫坐标环的原因是，若$a \in k^n$，那么$(x_1(a), \cdots, x_n(a))$就是在描述a

限制函数$res : k[X] \to k[A]$由函数$f(X) \to f \mid A$给定。它是一个环同态，核为$k[X]$中理想。

1.10 定义：Id

若$A \subseteq k^n$，其中k是域，定义

$$\mathrm{Id}(A) = \{f(X) \in k[X] = k[x_1, \cdots, x_n] : f(a) = 0\text{对每个}a \in A\}$$

希尔伯特基定理告诉我们$\mathrm{Id}(A)$是有限生成的

1.11 命题：

若$A \subseteq k^n$，其中k是域，则这里存在同构

$$k[X]/\mathrm{Id}(A) \cong k[A]$$

证明： 限制映射$res : k[X] \to k[A]$本身就是一个核为$\mathrm{Id}(A)$的满映射，利用第一同构定理，我们就得到了要证明的东西。最后注意的是，A上两个相等的多项式一定在$\mathrm{Id}(A)$的同一个陪集中

1.12 命题

令k是域

1. $\mathrm{Id}(\emptyset) = k[X]$，若$k$是代数闭的，则$\mathrm{Id}(k^n) = (0)$
2. 若$A \subseteq B$是k^n的子集，则$\mathrm{Id}(B) \subseteq \mathrm{Id}(A)$

3. 若$\{A_\ell : \ell \in L\}$是k^n的一些子集构成的集合，则

$$\mathrm{Id}\left(\bigcup_\ell A_\ell\right) = \bigcap_\ell \mathrm{Id}(A_\ell)$$

证明： 若$f(X) \in \mathrm{Id}(A)$对某个子集$A \subseteq k^n$，则$f(a) = 0$对所有$a \in A$成立。因此，若$f(X) \notin \mathrm{Id}(A)$，那就存在$a \in A$使得$f(a) \neq 0$。特别的，若$A = \emptyset$，则每个$f(X) \in k[X]$必须位于$\mathrm{Id}(A)$中，但由于是空集，所以$\mathrm{Id}(A)(\emptyset) = k[X]$

证明2： 若$f(X) \in \mathrm{Id}(B)$则$f(b) = 0$对每个$b \in B$成立，特别的$f(a) = 0$对所有$a \in A$成立，由于$A \subseteq B$，就有$f(X) \in \mathrm{Id}(A)$

证明3： 因为$A_\ell \subseteq \bigcup_\ell A_\ell$，我们有$\mathrm{Id}(A\ell) \supseteq \mathrm{Id}(\bigcup_\ell A_\ell)$，因此$\bigcap_\ell \mathrm{Id}(A_\ell) \supseteq \mathrm{Id}(\bigcup_\ell A_\ell)$，对于反包含，令$f(X) \in \bigcap_\ell \mathrm{Id}(A_\ell)$，那么对所有$\ell$和$a_\ell \in A_\ell$，$f(a_\ell) = 0$。若$b \in \bigcup_\ell A_\ell$，则存在某个$\ell$使得$b \in A_\ell$，就有$f(b) = 0$，即$f(X) \in \mathrm{Id}(\bigcup_\ell A_\ell)$

1.13 定义：根理想

若I是理想，则它的根记为$\sqrt{I}$，定义为：

$$\sqrt{I} = \{r \in R : r^m \in I, \text{对某个整数} m \geq 1\}$$

我们称一个理想I为根理想的时候，它满足下列条件：

$$\sqrt{I} = I$$

1.14 定义：幂零

交换环R中的元a称为幂零的，若它对于某个$n \geq 1$存在$a^n = 0$

1.15　命题

若理想$I = \mathrm{Id}(A)$对某个$A \subseteq k^n$成立，其中k是一个域，则它是一个根理想。因此，坐标环$k[A]$没有幂零元。

证明：　由于$I \subseteq \sqrt{I}$总是成立，则我们验证反包含就行，由假设，对某个$A \subseteq k^n$有$I = \mathrm{Id}(A)$，因此。若$f \in \sqrt{I}$，那么$f^m \in \mathrm{Id}(A)$使得$f(a)^m = 0$，对所有$a \in A$成立。但$f(a)^m$在k中，由$f^m(a) = 0$可以得到$f(a) = 0$，就有$f \in \mathrm{Id}(A) = I$。那么我们已经证明了唯一的幂零元素就是0本身。

1.16　命题

1. 若I, J是理想，则$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$
2. 若I和J是根理想，则$I \cap J$也是。

证明：　若$f \in \sqrt{I \cap J}$，则$f^m \in I \cap J$对某个$m \geq 1$成立。因此$f^m \in I$和$f^m \in J$就有$f^m \in \sqrt{I}$和$f^m \in \sqrt{J}$。即$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

证明2：　若I, J是根理想，则$I = \sqrt{I}$和$J = \sqrt{J}$。那么

$$I \cap J \subseteq \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = I \cap J$$

我们现在来证明希尔伯特零点定理，$\sqrt{I} = \mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I))$，对每个理想$I \subseteq C[X]$成立。换句话说，$f(X)$在$\mathrm{Var}(I)$上取零值当且仅当$f^m \in I$对某个$m \geq 1$成立。该定理实际上对$k[X]$中的理想都成立。其中$k$是代数闭域。

1.17　引理

令k是域和$\varphi : k[X] \to k$是满射环同态并逐点固定k。若$J = \ker \varphi$，则$\mathrm{Var}(J) \neq \emptyset$

证明：　对每个i，我们有$x_i \in k[X]$，令$\varphi(x_i) = a_i \in k$，且令$a = (a_1, \cdots, a_n) \in$

k^n。若$f(X) = \sum_{e_1,\cdots,e_n} c_{e_1,\cdots,e_n} \in k[X]$，则

$$\begin{aligned}\varphi(f(X)) =& \sum_{e_1,\cdots,e_n)} c_{e_1,\cdots,e_n}\varphi(x_1)^{e_1}\cdots\varphi(x_n)^{e_n} \\ =& \sum_{e_1,\cdots,e_n} c_{e_1,\cdots,e_n} a_1^{e_1}\cdots a_n^{e_n} \\ =& f(a_1,\cdots,a_n)\end{aligned}$$

因此，$\varphi(f(X)) = f(a) = \varphi(f(a))$，由于$f(a) \in k$和$\varphi$固定$k$的每个点。我们可以得到$f(X) - f(a) \in J$对每个$f(X)$成立。若$f(X) \in J$，则$f(a) \in J$，但$f(a) \in k$，由于$J$是真理想，它不含非零常量。因此只有$f(a) = 0$且$a \in \mathrm{Var}(J)$

1.18　定理：弱零点定理

若$f_1(X), \cdots, f_t(X) \in \mathbb{C}[X]$，则理想$I = (f_1, \cdots, f_t)$是$\mathbb{C}[x]$中的真理想当且仅当

$$\mathrm{Var}(f_1, \cdots, f_t) \neq \emptyset$$

证明：　有一个我们确定的事情，就是当$\mathrm{Var}(I) \neq \emptyset$时，$I$是一个真理想。由于$\mathbb{C}$是代数闭域，因此$\mathrm{Var}(\mathbb{C}[X]) = \emptyset$，实际上我们可以把$\mathbb{C}$拓展到任意代数闭域上，我们待会再说这个事情。

对于反包含，设I是$\mathbb{C}[x]$的真理想，由于每个诺特环都有包含I的极大理想M，那么我们构造的$K = \mathbb{C}[X]/M$是域。那么自然映射$\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]/M = K$把$\mathbb{C}$映射到自身，那么$K/\mathbb{C}$显然是一个扩域。所有的首一多项式构成其一组基，那么我们就能得到$\mathbb{C}[X]$的维数。

我们设K是$\mathbb{C}$的真扩张，即存在$t \in K$使得$t \notin \mathbb{C}$，由于$\mathbb{C}$是代数闭的，所以t不可能是代数元，它是超越元，考虑K的子集B，

$$B = \{1/(t-c) : c \in \mathbb{C}\}$$

由于$t \notin \mathbb{C}$，那么$t - c \neq 0$。集合B是不可数的，因为他的指标集$\mathbb{C}$是不可数的，所以B在$\mathbb{C}$上线性无关，那么这与$K/\mathbb{C}$可数矛盾。其次，若B是线性相关的，这意味着存在非零的$a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{C}$使得$\sum_{i=1}^r a_i/(t-c_i) = 0$，我们消掉分布，就有$\sum_i a_i(t-c_1)\cdots\widehat{(t-c_i)}\cdots(t-c_r) = 0$，然后我们用这个式子定义一个多项式$h(x) \in \mathbb{C}[X]$

$$h(x) = \sum_i a_i(t-c_1)\cdots\widehat{(t-c_i)}\cdots(t-c_r)$$

由t的超越性可以得到$h(t)=0$为零多项式，另一方面，对于c_i，$h(c_i)\neq 0$。这有一个矛盾，$h(t)\neq 0$。自然映射$\mathbb{C}[X]\to K=\mathbb{C}[X]/M=C$满足1.17的内容。所以$\mathrm{Var}(M)\neq 0$。利用$I\subseteq M$，就有$\mathrm{Var}(M)\subseteq\mathrm{Var}(I)$

1.19 推论

对$\mathbb{C}[X]$中的每个真理想I，对所有$f\in I$存在$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{C}^n$使得$f(a)=0$

证明： 由于$\mathrm{Var}(I)$非空，我们选择其中的任意一个元a即可。

1.20 定理：零点定理

若I是$\mathbb{C}[X]$中的理想，则

$$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I))=\sqrt{I}$$

因此，f在$\mathrm{Var}(I)$上为零当且仅当存在某个$m\geq 1$使得$f^m\in I$

证明： 若$f^m(a)=0$对某个$m\geq 1$以及所有的$a\in\mathrm{Var}(I)$，那么由$f(a)\in\mathbb{C}$可知，对所有的$a\in\mathbb{C}$有$f(a)=0$，则$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I))\geq\sqrt{I}$

反之，我们设$h\in\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I))$，其中$I=(f_1,\cdots,f_t)$。因此，若$f_i(a)=0$对所有$i$成立，其中$a\in\mathbb{C}^n$，则$h(a)=0$。我们要证明的就是对某些$h$的幂次在$I$中。我们可以假设$h$非零，考虑

$$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]\subseteq\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n,y]$$

我们把每个$f(x_1,\cdots,x_n)$视作不依赖于变量y的$n+1$个变量的多项式。我们说$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n,y]$中的多项式

$$f_1,\cdots,f_t,1-yh$$

不存在共同的零点。若$(a_1,\cdots,a_n,b)\in\mathbb{C}^{n+1}$是公共零点，则$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{C}^n$是一个$f_1,\cdots,f_t$的零点。故$h(a)=0$，但$1-bh(a)=1\neq 0$，应用弱零点定理可知$(f_1,\cdots,f_t,y)\in\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n,y]$不是一个真理想。那么就存在一些$g_1,\cdots,g_{t+1}\in\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n,y]$使得

$$1=f_1g_1+\cdots+f_tg_t+(1-yh)g_{t+1}$$

做替换$y=1/h$，那么关于g_{t+1}的项就消失了，此时我们可以将多项式$g_i(X,y)$清楚的表示

$$g_i(X,y)=\sum_{j=0}^{d_i}u_j(X)y^i$$

其中d_i是对每个i，g的线性组合长度，那么$g_i(X,h^{-1})=\sum_{j=0}^{d_i}u_j(X)h^{-1}$。我们就有

$$h^{d_i}g_i(X,h^{-1})\in\mathbb{C}[X]$$

其次，由于I是由t个f生成，我们证明的事情只有一件，选择$m=\max\{d_1\cdots d_t\}$，令

$$\begin{aligned}1=&f_1g_1+\cdots+f_tg_t+(1-yh)g_{t+1}\in I\\ h^m=&h^m(f_1g_1+\cdots+f_tg_t+(1-yh)g_{t+1})\in I\end{aligned}$$

我们就得到了h^m的某个幂次在I中，由于$h\in\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I))$，就有$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I))\subseteq\sqrt{I}$

1.21 定理

每个$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$中的极大理想$M$形如

$$M=(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$$

其中$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{C}^n$，那么在$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$中存在一个在$\mathbb{C}^n$和$M$之间双射

证明： 由于M是真理想，因此$\mathrm{Var}(M)\neq\emptyset$，那么这里有$a=(a_1,\cdots,a_n)\in k^n$ 使得对所有$f\in M$有$f(a)=0$.因此，$\mathrm{Var}(M)=\{b\in k^n:f(b)=0$对所有$f\in M\}$，那么$\{a\}\subseteq\mathrm{Var}(M)$，那么我们就有

$$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(M))\subseteq\mathrm{Id}(\{a\})$$

零点定理告诉了我们$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(M))=\sqrt{M}$，但$\sqrt{P}=P$对每个素理想成立。[1]由于素理想是极大理想，那么$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(M))=M$。注意$\mathrm{Id}(\{a\})$是真理想。所以它不含非零常数[2]。由$M$的极大性就得到了反包含，就有$\mathrm{Id}(\{a\})=M$

[1]左证包含，设k是域，设$I,J\in k$是素理想和根理想。取$a\in I$，那么对于其中的元素a有$a^2\in I$，就有$I\subseteq J$。其次取$b\in J$，由k的性质可知对$b^m\in J$有$b\neq 0$，因此$J\subseteq I$。就有$\sqrt{J}=I$

[2]真理想不含1，多项式环中单位是常数，所以真理想不含常数

然后我们计算$\mathrm{Id}(\{a\})$，若对每个i存在$f_i(x_1,\cdots,x_n)=x_i-a_i$，则$f_i(a)=0$且$x_i-a_i\in\mathrm{Id}(\{a\})$，那么就有$(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)\subseteq\mathrm{Id}(\{a\})$。利用如下推论：

> 若k是域，则$(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$是$k[x_1,\cdots,x_n]$中的极大理想，$a_i\in k, i=1,\cdots,n$

我们利用$(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$的极大性，就可以知道

$$(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)=\mathrm{Id}(\{a\})=M$$

1.22 命题

令k是域

1. 对每个子集$A\subseteq k^n$
$$\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(A))\supseteq A$$
2. 对每个理想$I\subseteq k[X]$
$$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I))\supseteq I$$
3. 若V是k^n的代数集，则
$$\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(V))=V$$

证明： 若$a\in A$，则$f(a)=0$对所有$f(X)\in\mathrm{Id}(A)$成立。由$\mathrm{Id}(A)$的定义，则$f(X)\in\mathrm{Id}(A)$在A上为零，那么$a\in\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(A))$，就有$\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(A))\supseteq A$

证明2： 若$f(X)\in I$，则$f(a)=0$对所有$a\in\mathrm{Var}(I)$成立。因此，$f(X)$当然是$\mathrm{Var}(I)$上的零多项式。

证明3： 若V是代数集，则$V=\mathrm{Var}(J)$对某个$J\in k[X]$成立。那么利用命题1的部分，
$$\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(J)))\supseteq\mathrm{Var}(J)$$
而命题的第二个给出了$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(J))\supseteq\mathrm{Var}(J)$，利用命题1.6的第一个小题，就有反包含
$$\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(J)))\subseteq\mathrm{Var}(J)$$

那么就有$\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(J))) = \mathrm{Var}(J) = V$[3]

1.23 推论：

1. 若V_1, V_2是两个代数集，且$\mathrm{Id}(V_1) = \mathrm{Id}(V_2)$，则$V_1 = V_2$
2. 若I_1和I_2是根理想，且$\mathrm{Var}(I_1) = \mathrm{Var}(I_2)$，则$I_1 = I_2$

证明： 若$\mathrm{Id}(V_1) = \mathrm{Id}(V_2)$，则$\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(V_1)) = \mathrm{Var}(\mathrm{Id}(V_2))$，利用命题1.22的第三小题，就有$V_1 = V_2$

证明2： 若$\mathrm{Var}(I_1) = \mathrm{Var}(I_2)$，则$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I_1)) = \mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I_2))$。利用零点定理，则$\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$。由于$I_1, I_2$都是根理想，就有$I_1 = I_2$

1.24 定理：逆包含

函数$V \to \mathrm{Id}(V)$和$I \to \mathrm{Var}(I)$保逆包含序的双射

$$\{\text{代数集} \subseteq \mathbb{C}^n\} \rightleftarrows \{\text{根理想} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]\}$$

证明： 由命题1.22，对每个代数集V有$\mathrm{Var}(\mathrm{Id}(V)) = V$。零点定理告诉我们$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I)) = \sqrt{I}$对每个理想$I$成立。

有一个问题是，我们如何看一个代数集是否可以分解为一些更小的代数集呢？

1.25 定义：不可约

代数集V是不可约的，若它不是两个真代数子集的并，即$V \neq W' \cup W''$，其中W', W''是V的真子集的代数集。一个簇指的是不可约的代数集

1.26 命题

每个k^n中的代数集V都是有限多个簇并起来的

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m$$

[3]不太注意这部分

证明： 我们称代数集$W \in k^n$是好的，若其是不可约的，或者是有限多个簇的并，另一方面，我们说它是坏的，我们就得证明它不是不可约的。现在$W = W' \cup W''$，其中W'和W''是真的代数子集，但好的代数子集并也是好的，那么我们就假设W'或者W''中有一个是坏的，我们设为W'。我们对其继续做分解，就有$W' = W_1$，然后对W_1重复这种过程，简单的归纳可以得到一个严格下降的序列

$$W \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots$$

由于Id翻转包含关系，那么就存在一个严格的上升链

$$\mathrm{Id}(W) \subsetneq \mathrm{Id}(W_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Id}(W_s) \subsetneq \cdots$$

在诺特环的那个章节我们知道诺特环实际上是一个ACC，这意味着这种严格上升链是不存在的，在某个时刻t将会使得$\mathrm{Id}(W_t) = \mathrm{Id}(W_{t+1})$。与希尔伯特基定理矛盾，因此代数集是好的。

1.27 命题

k^n中的代数集V是一个簇当且仅当$\mathrm{Id}(V)$是$k[X]$中的一个素理想，因此簇V的坐标环$k[V]$是一个整环。

证明： 设V是簇，只需要证明$f_1(X), f_2(X) \notin \mathrm{Id}(V)$，则$f_1(X)f_2(X) \notin \mathrm{Id}(V)$即可。对$i = 1, 2$定义

$$W_i = V \cap \mathrm{Var}(f_i(X))$$

那么每个W_i就是一个V的代数子集。进一步，由于$f_i(X) \notin \mathrm{Id}(V)$，就存在某个$a_i \in V$使得$f_i(a_i) \neq 0$，因此$W_i$是一个真代数子集。由于$V$是不可约的，因此不能有$V = W_1 \cup W_2$。那么存在一个$b \in V$但$b \notin W_1 \cup W_2$。也就是$f_1(b) \neq 0 \neq f_2(b)$。因此就有$f_1(X)f_2(X) \notin \mathrm{Id}(V)$。得到$\mathrm{Id}(V)$是一个素理想。

反之，我们设$\mathrm{Id}(V)$是素理想，设$V = V_1 \cup V_2$，其中V_1和V_2是代数子集，若$V_2 \subsetneq V$。我们要证明的的就是$V = V_1$，我们引入习题

1. 若I,J是交换环R中的理想，定义

$$IJ=\{\sum_t a_t b_t : a_t\in I, b_t\in J\}$$

试证IJ是R中的理想，并且$IJ\subseteq I\cap J$

2. 令$R=k[x,y]$，其中k是域，且$I=(x,y)=J$，证明$I^2=IJ\subsetneq I\cap J=I$

证明： IJ是关于a,b的线性组合，设$u,v\in IJ$，那么$u=0$或者$v=0$可以得到$uv=0\in IJ$，其次，对于$u+v=\sum_i a_i b_i+\sum_i a_j b_j=\sum_{i+j} a_k b_k\in IJ$。对乘法的验证是很自然的，由于$ra, rb\in I,J$成立，那么对$rIJ$一样在$IJ$内。因此是理想。

证明2： 由题设，$I=J$，因此$I^2=IJ$，且有$IJ\subseteq I\cap J$。设$a\in I$但$a\notin IJ$，那么$I^2=(x^2,xy,yx,y^2)$的次数最低是2，但对于I，其生成元得到的多项式次数最低为1，那么我们就有

$$IJ\subsetneq I$$

回到证明，由命题1.12我们有$\mathrm{Id}(V)=\mathrm{Id}(V_1)\cap\mathrm{Id}(V_2)$。利用习题2的结论，我们就有$\mathrm{Id}(V_1)\cap\mathrm{Id}(V_2)\supseteq\mathrm{Id}(V_1)\mathrm{Id}(V_2)$。由于$\mathrm{Id}(V)$是素理想，不难得到$\mathrm{Id}(V_1)\subseteq\mathrm{Id}(V)$或者$\mathrm{Id}(V_2)\subseteq\mathrm{Id}(V)$。但我们已经假设了$V_2\subsetneq V$，因此就有$\mathrm{Id}(V_2)\supsetneq\mathrm{Id}(V)$，那么我们就只有结论$\mathrm{Id}(V_1)\subsetneq\mathrm{Id}(V)$。其次，由于$V_1\subseteq V$，则$\mathrm{Id}(V_1)\supseteq\mathrm{Id}(V)$。那么就有$V_1=V$。所以$V$是不可约的。

1.28 定义：不可缩短的并

若分解$V=V_1\cup\cdots\cup V_m$是不可缩短的，若其中没有一个V_i是可以删去的。因此，对所有i有

$$V\neq V_1\cup\cdots\cup\widehat{V_i}\cup\cdots\cup V_m$$

1.29　命题

每个代数集V是簇的一个不不可缩短的并

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$$

进一步的，这些簇V_i是由V唯一确定的。

证明：　由命题1.26，我们知道V是有限多个簇的并，我们设为$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$。若$m$是是上述式子成立的最小数，则此并是不可缩短的。

现证唯一，设存在另一个分解$V = W_1 \cup \cdots \cup W_s$。令$X = \{V_1, \cdots, V_m\}$和$Y = \{W_1, \cdots, W_s\}$，我们开始证明$X = Y$，若$V_i \in X$，我们有

$$V_i = V_i \cap V = \bigcup_j (V_i \cap W_j)$$

那么对某个j，就有$V_i \cap W_j \neq \emptyset$。由于$V_i$是不可约的，这里就只有唯一的一个$W_j$与其对应。因此$V_i = V_i \cap W_j$。得到$V_i \subseteq W_j$。对其使用相同的思路我们便可以得到反包含$V_\ell \subseteq V_\ell$。因此

$$V_i \subseteq W_j \subseteq V_\ell$$

由于$V_1 \cup \cdots \cup V_m$是不可约的，就有$V_i = V_\ell$因此$V_i \in Y$。得到$X \subseteq Y$。用同样的办法可以证明$Y \subseteq X$。

1.30　定义：不可缩短的交

一个交集$I = J_1 \cap \cdots \cap I_m$是不可缩短的交，若$J_i$是不可省略的，那么对所有$i$有

$$I \neq J_1 \cap \cdots \cap \widehat{J_i} \cap \cdots \cap J_m.$$

1.31　推论

每个$k[X]$中的根理想J是素理想的不可缩短的交集构成的

$$J = P_1 \cap \cdots \cap P_m$$

更多的，素理想P_i是由J唯一确定的。

证明： 由于J是根理想，由零点定理则这里有簇V使得$J = \mathrm{Id}(V)$。由于V是不可约的，那么有

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$$

用命题1.12就有

$$J = \mathrm{Id}(V) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Id}(V_i)$$

由命题1.27，簇是素理想，那么每个$\mathrm{Id}(V_i)$都是素的，所以J就是一些素理想的交。

现在我们证明它不可缩短，若存在$J = \mathrm{Id}(V) = \cap_{j\neq\ell}\mathrm{Id}(V_j)$，则

$$V = \mathrm{Var}(\mathrm{Id}(V)) = \bigcup_{j\neq\ell} \mathrm{Var}(\mathrm{Id}(V_j)) = \bigcup_{j\neq\ell} V_j$$

矛盾。

对于唯一性，我们令$J = \mathrm{Id}(W_i) \cap \cdots \cap \mathrm{Id}(W_s)$。由于每个$\mathrm{Id}(W_i)$是素理想，每个$W_i$都是不可约的簇，最后将Var作用于$J$上就有

$$\mathrm{Var}(J) = \bigcup_{i} \mathrm{Var}(\mathrm{Id}(W_i)) = V$$

由于该分解是唯一的，因此素理想的交由此映射可以得到也是唯一的。

2 后记

一些比较自然的问题是，簇的维数是什么？要解决这个问题需要用到素理想，若V是一个簇，则它的维数就是它的坐标环$k[V]$中最长的的素理想链的长度。其次，代数集的定义表明了一些曲线对某些元都有$f_i(a) = 0$成立，这意味着代数集是一个次数为d的多项式得到的曲面。

另一个问题是，若$\mathrm{Var}(f)$是次数为d的多项式得到的曲面，则有多少个点在V和一根直线的交中？Bezout定理告诉我们存在d个根，但我们应该关注代数闭域，否则有$\mathrm{Var}(f) = \emptyset$的问题。但重根的问题使得我们不得不把一些交也算成带有一定的重数。