域

多项式的根的研究和域的研究是密切相关的。若$f(x)\in k[x]$，其中k是域，则很自然的要去考虑域k和其扩域E的一个关系，其中E是从k中包含$f(x)$的所有根得到的。例如，若$E=k$，则$f(x)$是$k[x]$中的线性因子乘积得到的。我们将看到E，k域一个迦罗瓦群，记为$\mathrm{Gal}(E/k)$ 。这个群确定了是否存在关于$f(x)$的根的方程，而且该方程推广了二次公式。

1 经典公式

比萨的莱昂那多（另称斐波那契）在1225年给出了方程$x^3+2x^2+10x-20$的具有比较好的精度的近似根，求一个给定的三次方程

$$X^3+\mathrm{b}\mathrm{X}^2+\mathrm{c}\mathrm{X}+d=0$$

的根的问题经常被提出，其中a,b,c是实数，通常来说是整数。

但在1500年，我们还没有这些数学记号，所以在那个年代，寻找三次方程的根不仅仅要数学上的聪明才智，还需要克服语言上的困难。

我们现在给出二次公式的一个不同的推导方法，它是从将给定的多项式替换成一个更简单的多项式开始的。

定义 1. 一个n次多项式$f(x)\in R[x]$说是**简化的**，若它不含有x^{n-1}项，即$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0$

引理 2. 用解$X=x-\frac{1}{n}a_{n-1}$做替换

$$f(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+h(X)$$

其中$h(x)=0$或者deg(h)$\leq$ n-2，则将得到简化多项式

$$\tilde{f}(x)=f\left(x-\frac{1}{n}a_{n-1}\right)$$

更多的，若u是$\tilde{f}$的根，则$u-\frac{1}{n}a_{n-1}$是f的一个根

证明. 我们做替换，由解$X=x-\frac{1}{n}a_{n-1}$去替换得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{f(x)} &= f\left(x-\frac{1}{n}a_{n-1}\right)\\
&= \left(x-\frac{1}{n}a_{n-1}\right)^n+a_{n-1}\left(x-\frac{1}{n}a_{n-1}\right)^{n-1}+h\left(x-\frac{1}{n}a_{n-1}\right)\\
&= (x^n-a_{n-1}x^{n-1}+g_1(x)\,)+a_{n-1}(x^{n-1}+g_2(x))+h\left(x-\frac{1}{n}a_{n-1}\right)\\
&= x^n+g_1(x)+a_{n-1}g_2(x)+h\left(x-\frac{1}{n}a_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

其中$g_1,g_2,h(X)$和$g_1+a_{n-2}g_2+h(X)$中的每一个是0或者次数$\leq n-2$，这是因为我们抵消了x^{n-1}。明显的它是一个简化多项式。
最后，若u是一个$\tilde{f}$的根，则$0=\tilde{f}(u)=f\left(u-\frac{1}{n}a_{n-1}\right)$，因此$u-\frac{1}{n}a_{n-1}$是$f$的一个根。

□

定理（韦达） 3. 二次公式
若$f(X)=X^2+\mathrm{bX}+c$，则它的一个根是

$$\frac{1}{2}(-b\pm\sqrt{b^2-4c})$$

证明. 定义$X=x-\frac{1}{2}b$，现在

$$\tilde{f}(x)=\left(x-\frac{1}{2}b\right)^2+b\left(x-\frac{1}{2}b\right)+c$$

得到简化多项式

$$\tilde{f}(x)=x^2-\frac{1}{4}(b^2-4c)$$

那么简化多项式的根就是$u=\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}$， 由引理2， 我们知道$u-\frac{1}{2}b$是一个$\tilde{f}(x)$的根， 因此，$f(X)$ 的根是$\frac{1}{2}(-b\pm\sqrt{b^2-4c})$ □

我们将利用二次公式的结论来推导三次公式

推论 4. 给定数c,d，则这里存在数α,β使得$\alpha+\beta=c$和$\alpha\beta=d$

证明. 若$d=0$，我们令$\alpha=0$和$\beta=c$即可。若$d\neq 0$，则$\alpha\neq 0$，设$\beta=d/\alpha$，用其做替换，则 $c=\alpha+\beta=\alpha+d/\alpha$，那么

$$\alpha^2-c\alpha+d=0$$

接着只需呀利用二次公式即可保证定理中数的存在性，只需要做$\beta=d/\alpha$的替换即可，当然。α和β也可以是复数。 □

引理2简化了原来的多项式，且控制了其根。特别的，当$n=3$，则简化多项式$\tilde{f}(x)$形如$x^3+\mathrm{qx}+r$。

解决简化三次方程的“技巧”就是把该方程的根u写为

$$u=\alpha+\beta$$

然后我们在去寻找α和β

例如：

$$\begin{aligned} 0 &= u^3+\mathrm{qu}+r \\ &= (\alpha+\beta)^3+q(\alpha+\beta)+r \end{aligned}$$

接着我们展开第一项就得到 $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta u$

整合到上面的公式就有

$$0=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta u+\mathrm{qu}+r \tag{1}$$

利用推论4，我们可以假设第二个条件：

$$\alpha\beta=-\frac{1}{3}q \tag{2}$$

则使得u在方程(1)中消去，剩下

$$\alpha^3+\beta^3=-r \tag{3}$$

在利用(2)，我们做三次方有

$$\alpha^3\beta^3 = -\frac{1}{27}q^3 \tag{4}$$

则(3)和(4)使得α和β两个未知数可以求解。我们作替换$\beta^3 = -q^3/(27\alpha^3)$在方程(3)中得到

$$\alpha^3 - \frac{q^3}{27\alpha^3} = -r$$

重写方程得到

$$\alpha^6 + r\alpha^3 - \frac{1}{27}q^3 = 0 \tag{5}$$

我们把6次方看成是α^3的二次公式，这样子我们利用定理3便可以得到其一个根

$$\alpha^3 = \frac{1}{2}(-r + \sqrt{D}) \tag{6}$$

其中$D = r^2 + \frac{4}{27}q^3$，那么$\beta^3$也同样是一个(5)中的根，解得

$$\beta^3 = \frac{1}{2}(-r - \sqrt{D}) \tag{7}$$

那么我们只需要取一个立方根就能得到α了，那么顺便可以解出β，则$u = \alpha + \beta$我们就找到了。

但问题是，其他两个根呢？为了找到他们，首先，若u是$f(x)$这个多项式的根，那么就有$f(x) = (x-u)g(x)$对某个多项式$g(x)$成立。当我们找到一个根$u = \alpha + \beta$，只需要用$x - u$去除这个三次多项式，然后再用二次根式去求$g(x)$的根就行。

我们给出另一种求两个根的直接公式，3次单位方根有3个，即$1, \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$和$\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$。他们分别是三次方程的根。当我们得到第一个根$\alpha^3$和$\beta^3$后，求出二次方程的根就是$\omega\alpha$和$\omega^2\alpha$[1]最后，利用方程(2)，我们就有$\beta = -q/(3\alpha)$，得到$\omega\alpha$的相伴元是$\omega^2\beta$，而$\omega^2\alpha$是$\omega\beta$。则它三个根分别是

$$\alpha + \beta, \omega\alpha + \omega^2\beta, \omega^2\alpha + \omega\beta$$

这个方程被我们称为卡尔达诺方程。

定理 5：卡尔达诺. 方程$x^3 + \mathrm{qx} + r$的根是

$$\alpha + \beta, \omega\alpha + \omega^2\beta, \omega^2\alpha + \omega\beta$$

其中$\alpha^3 = \frac{1}{2}(-r + \sqrt{D})$，$\beta = -\frac{1}{3}\frac{q}{a}$，$D = r^2 + \frac{4}{27}q^3$，且$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$是三次本原根

证明. 我们刚才已经证明了$\alpha \neq 0$的情况，若$\alpha = 0$，则方程就被简化为$x^3 + r$，有$\beta^3 = -r$，它的三个根就分别是$\beta, \beta\omega, \beta\omega^2$ □

好的例子.

我们来寻找多项式$x^3 - 15x - 126$的根。这个多项式是简化多项式，因为它没有x^2的项。所以我们可用三次公式来求解。其中$q = -15, D = (-126)^2 + \frac{4}{27}(-15)^3 = 15376$，因此$\sqrt{D} = 124$，因此$\alpha^3 = \frac{1}{2}[-(-126) + 124] = 125,$ 得到$\alpha = 5$，藉此得到$\beta = -q/3\alpha = 15/(3 \cdot 5) = 1$，那么根就是$\alpha + \beta = 6, \omega\alpha + \omega^2\beta = 3 \mp 2i\sqrt{3}$和$\omega^2\alpha + \omega\beta = -3 - 2i\sqrt{3}$，那么它的因式分解就是

$$x^3 - 15x - 126 = (x-6)(x^2 + 6x + 21)$$

但，二次和三次公式在任意数域上不成立，注意F_2中2=0。

1. α^3和β^3是方程的解，按照惯例，几次方几个解，因此在复平面上只需要乘本原三次根的三个元就能得到三个其他的解。

定义（根的判别式） 5. 若u,v和w是$f(x)=x^3+\mathrm{qx}+r$的根，再令$\Delta=(u-v)(u-w)(v-w)$，定义

$$\Delta^2=[(u-v)(u-w)(v-w)]^2$$

则数Δ^2称为$f(x)$根的判别式。

引理 6. $f(x)=x^3+\mathrm{qx}+r$的判别式Δ^2是

$$\Delta^2=-27r^2-4q^3=-27D$$

证明. 若u,v,w是$f(x)$的三个根，那么我们知道他三个根具备形式$u=\alpha+\beta, v=\omega\alpha+\omega^2\beta, w=\omega^2\alpha+\omega\beta$，其中$\omega$是三次本原根，而$D=r^2+\frac{4}{27}q^3$，那么$\alpha=\left[\frac{1}{2}(-r+\sqrt{D})\right]^{1/3}$，并且$\beta=-\frac{1}{3}\frac{q}{\alpha}$
只需要做替换，就能得到

$$\Delta=-\omega^3(1-\omega)^3(\alpha-\beta)(\alpha-\omega\beta)(\alpha-\omega^2\beta)$$

当然，$-\omega^3=-1$，而$\omega^2=\bar{\omega}$是其共轭元。简单的计算就有

$$-\omega^3(1-\omega)^3=i3\sqrt{3}$$

剩下的那堆东西可以得到

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\omega\beta)(\alpha-\omega^2\beta)=\alpha^3-\beta^3=\sqrt{D}$$

因此，$\Delta^2=-27D=-27r^2-4q^3$ □

现在我们用判别式检验三次方根是否是实数。

引理 7. 每个奇次多项式$f(x)\in\mathbb{R}[x]$都有实数根

注意. 该证明我们通过假设存在一个复根（由代数基本定理得到）

证明. 我们对$n\geq 0$归纳证明，然后$\deg(f)=2n+1$，当$n=0$时基础步骤成立，现在我们设$n\geq 1$且u是一个f的复根，若u是实数，则定理成立。否则有$u=a+\mathrm{ib}$，但u的复共轭也是一个根，进一步的，由于u不是实数，所以$u\neq\bar{u}$，那么$x-u$和$x-\bar{u}$都是f的因子且互素。即f在$\mathbb{C}$[x]中分裂：

$$f(x)=(x-u)(x-\bar{u})g(x)$$

其次，$(x-u)(x-\bar{u})=x^2-2\mathrm{ax}+a^2+b^2\in\mathbb{R}[x]$，由除法，我们知道g(x)=$f(x)/(x-u)(x-\bar{u})\in\mathbb{R}[x]$。由于$\deg(g)=2n+1-2=2(n-1)+1$，归纳假设就告诉我们g(x)有一个实根。从而$f(x)$有一个实根。 □

定理（韦达） 8. $x^3+\mathrm{qx}+r\in\mathbb{R}[x]$的所有根u,v,w是实数当且仅当判别式$\Delta^2\geq 0$，那么$27r^2+4q^3\leq 0$

证明. 若u,v,w是实数，则$\Delta=(u-v)(u-w)(v-w)$也是实数。那么$\Delta^2=-27r^2-4q^3\geq 0\Rightarrow 27r^2+4q^3\leq 0$

反之，我们设$w=s+\mathrm{ti}$是复数，其中$t\neq 0$。那么由于复数的共轭也是根，不妨设其是另一个根$v=s-\mathrm{ti}$。那么由引理6，u是实数，那么

$$\begin{aligned}\Delta &= (u-s+\mathrm{ti})(u-s-\mathrm{ti})(s-\mathrm{ti}-[s+\mathrm{ti}])\\ &= (-2\mathrm{ti})[(u-s)^2+t^2]\end{aligned}$$

其中u,s,t是实数。那么

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (-2\mathrm{ti})^2[(u-s)^2+t^2]^2 \\ &= -4t^2[(u-s)^2+t^2]^2\leq 0\end{aligned}$$

因此$0>\Delta^2=-27r^2-4q^3$。那么我们看到，若根全为实数，则$\Delta^2\geq 0$，反之$\Delta^2<0$

□

例.

在上一个例子，我们用三次公式得到方程$x^3-15x-126$的根。现在让我们试试下面这个多项式

$$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$$

我们明显的看到三个不错的根是$1,2,-3$，但现在，如果我们使用三次公式，就会得到：
$\alpha^3=\frac{1}{2}\left(-6+\sqrt{-\frac{400}{27}}\right)$，$\beta^3=\frac{1}{2}\left(-6-\sqrt{-\frac{400}{27}}\right)$，最简单的根都是如此复杂的，更别说剩下的两个了。

这个例子说明了为什么我们不常用三次公式求根。尽管给出来的是正确的解，但它的形式是丑陋的。

现在我们给出四次公式的推导

定理（韦达） 9. 这里有一个计算四个四次多项式

$$X^4+\mathrm{b}\mathrm{X}^3+\mathrm{c}\mathrm{X}^2+\mathrm{d}\mathrm{X}+e$$

的根的方法

证明. 就像我们在三次方程做的简化一样，通过$X=x-\frac{1}{4}b$来得到四次方程

$$x^4+\mathrm{q}\mathrm{x}^2+\mathrm{r}\mathrm{x}+s \tag{8}$$

更多的，若u是一个根，则$u=\frac{1}{4}b$是一个根

我们对方程(8)做因式分解，就得到

$$(x^2+jx+\ell)(x^2-jx+m) \tag{9}$$

里面没有x^3，注意。若j,ℓ和m被确定，则四次方程可以用二次公式来求得根。展开等式右边的系数，可以得到方程组

$$\begin{aligned} m+\ell-j^2 &= q \\ j(m-\ell) &= r \\ \ell m &= s \end{aligned} \tag{10}$$

我们把方程组前两个方程加起来，和减，即可得到两个方程

$$\begin{aligned} 2m &= j^2+q+r/j \\ 2\ell &= j^2+q-r/j \end{aligned} \tag{11}$$

然后把这两个方程带入(10)的第三个方程，就有

$$\begin{aligned} 4s=4\ell m &= (j^2+q+r/j)(j^2+q-r/j) \\ &= (j^2+q)^2-r^2/j^2 \\ &= j^4+2j^2q+q^2-r^2/j^2 \end{aligned}$$

现在把分母消掉就得到方程

$$j^6+2\mathrm{qj}^4+(q^2-4s)j^2-r^2=0 \tag{12}$$

它是关于j^2的三次方程，我们只需要使用三次公式就可以找到它j^2，把j^2带入方程(11)就能找到ℓ, m. □

例 10. 考虑多项式

$$x^4-2x^2+8x-3=0$$

其中$q=-2, r=8, s=-3$，对其进行因式分解（形如上述定理）有

$$(x^2+jx+\ell)(x^2-jx+m)$$

则由方程(12)有

$$j^6-4j^4+16j^2-64=0$$

我们可以三次公式来求，但这非常冗杂，在计算之前我们先想办法去掉j^4，在这种情况下观察得到$j=2$是一个根。那么方程重写为：

$$j^6-4j^4+16j^2-64=j^6-2^2j^4+2^4j^2-2^6=0$$

由“观察法”可知$j=2$确实是根，现在让我们把2带入方程(11)找ℓ, m有

$$\begin{aligned}2\ell &= 4-2+8/2=6\\ 2m &= 4-2-(8/2)=-2\end{aligned}$$

那么我们要找的方程就是

$$(x^2-2x+3)(x^2+2x-1)$$

那么它的四个根就是

$$-1+i\sqrt{2}, -1-i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2}$$

2 韦达三次方程

含有开方的三次根式并不是最好的解决方法，现在我们给出$x^3+\mathrm{qx}+r$的根的另一种求法。我们用余弦的赋值代替开方运算。

$$\cos(3\theta)=4\cos^3\theta=3\cos\theta$$

那么三次方程

$$y^3-\frac{3}{4}y-\frac{1}{4}\cos(3\theta) \tag{13}$$

的一个根就是$u=\cos\theta$，自然的，由于是三次多项式，其他两个根就是$\cos(\theta+120°)$和$\cos(\theta+240°)$

现在，令$f(x)=x^3+\mathrm{qx}+r$为所有根都是实数的三次方程。我们来试着将其转换为方程(13)的形式，令

$$v=\mathrm{tu}$$

其中t, u待定，带入方程得到

$$0=f(u)=t^3u^3+\mathrm{qtu}+r$$

那么

$$u^3+(q/t^2)u+r/t^3=0$$

因此，我们选择的u就是$g(y)=y^3+(q/t^2)y+r/t^3$。若我们选择t使得

$$q/t^2=-\frac{3}{4} \tag{14}$$

和

$$r/t^3 = -\frac{1}{4}\cos(3\theta) \tag{15}$$

对某个θ成立，那么它的根就是

$$u = \cos\theta, u = \cos(\theta + 120°), u = \cos(\theta + 240°)$$

但，若$u^3 + (q/t^2) + r/t^3 = 0$，这是在说明$t^3u^3 + q\,t\,u + r = 0$，因此，$f = x^3 + \mathrm{qx} + r = 0$根$v = \mathrm{tu}$就是

$$v = \mathrm{tu} = t\cos\theta, v = \mathrm{t}\cos(\theta + 120°), v = \mathrm{t}\cos(\theta + 240°)$$

我们现在来找t, u，对于方程(14)，它给出了$t^2 = -4q/3$，那么

$$t = \sqrt{-4q/3} \tag{16}$$

由定理8则知$27r^2 + \mathrm{rq}^3 \leq 0$，有

$$4q^3 \leq -27r^2$$

右边是非负的，q也必须是非负的，因此$-4q/3$是正的，有$\sqrt{-4q/3}$是实数。带入方程(15)，则

$$\cos(3\theta) = -4r/t^3$$

若$|-4r/t^3| \leq 1$，我们就可以确定θ的值。现在$27r^2 \leq -4q^3$，我们有$9r^2/q^2 \leq -4q/3$。所以有

$$\left|\frac{3r}{q}\right| \leq \sqrt{\frac{-4q}{3}} = t$$

由方程(16)，我们可以得到$t^2 = -4q/3$，那么

$$\left|\frac{-4r}{t^3}\right| = \left|\frac{-4r}{(-4q/3)\,t}\right| = \left|\frac{3r}{q}\cdot\frac{1}{t}\right| \leq \frac{t}{t} = 1$$

如我们刚才假设的，我们在这个过程证明了下面的这个定理：

定理（韦达） 11. 令$f(x) = x^3 + \mathrm{qx} + r$是三次多项式，且$27r^2 + 4q^3 \leq 0$。若$t = \sqrt{-4q/3}$且$\cos(3\theta) = -4r/t^3$，则$f(x)$的根是

$$\mathrm{t}\cos\theta, \mathrm{t}\cos(\theta + 120°), \mathrm{t}\cos(\theta + 240°)$$

例 12.
再次考虑三次方程$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$，根为$1, 2, -3$。求根公式给出的解很复杂，涉及到复数的三次方根。现在让我们用定理11来求根。首先我们来计算t, θ：

$$t = \sqrt{-4q/3} = \sqrt{-4(-7)/3} = \sqrt{28/3} \approx 3.055$$

和

$$\cos 3\theta = -4r/t^3 \approx -24/(3.055)^3 \approx -0.842$$

用计算机算一下，大概有$3\theta = 148°$，因此$\vartheta \approx 49°$，那么三个近似根就是

$$\begin{aligned} \cos 49° \approx 0.656 \quad &\text{和} \quad 3.055\cos 49° \approx 2 \\ -0.982 \quad &\text{和} \quad -3 \\ 0.326 \quad &\text{和} \quad 1 \end{aligned}$$