二项式定理

2023 年 4 月 30 日

目录

1 二项式定理和复数

二项式指的是$(1+x)^n$的展开式，我们要研究的是展开式的系数具有那种形式，对于前几个展开有

$$
\begin{aligned}
(1+x)^0 &=1 \\
(1+x)^1 &=1+1x \\
(1+x)^2 &=1+2x+1x^2 \\
(1+x)^3 &=1+3x+3x^2+1x^3 \\
(1+x)^4 &=1+4x+6x^2+4x^3+1x^4
\end{aligned}
$$

而跟二项式有关的还有我们的帕斯卡三角。帕斯卡三角的主要表达是，由它的上一行俩俩元素加起来就得到了下一行的值。利用多项式，我们可以把二项式表示为

$$(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

其中c_i为二项式系数，我们要研究的正是二项式系数。我们用符号$\binom{n}{r}$来表示二项式的系数，那么

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

但是这个符号，是我们在计数的时候找到的，他有个非常好的解释，即：在n个东西中选r个。

1.1 引理：$\binom{n+r}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

证明：对所有的$n \geq 1$，我们想证明

$$(1+x)^{n+1} = c_0 + \cdots + c_nx^n$$

我们要证明的就是其中x^r的系数为$c_{r-1}+c_r$那么

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} =&(1+x)(1+x)^n\\ =&(1+x^n)+x(1+x)^n\\ =&(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)+x(x_0+x_1x+\cdots+c_nx^n)\\ =&(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)+c_0x+c_1x^2+\cdots+c_nx^{n+1}\\ =&1+(c_0+c_1)x+\cdots+(c_{n-1}+c_n)x^n\end{aligned}$$

而x^r的系数$\binom{n+1}{r}$就是

$$c_{r-1}+c_r=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}$$

1.2 命题：帕斯卡定理-$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

对所有$n\geq 0$和所有r，$0\leq r\leq n$有

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证明：我们先对$n=0$假设，则$n=0$

$$\binom{0}{0}=\frac{0!}{0!0!}=1$$

成立

现在，我们假设对所有r，都对$\binom{n}{r}$成立。那么我们要证明

$$\binom{n+1}{r}=\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$$

若$r=0$，那么有$\binom{n+1}{1}=1$ 如果$r=n+1$，同样的也有$\binom{n+1}{n+1}=1$，

若$0 < r < n+1$，利用引理1.1有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} n+1 \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n \\ r-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{1}{(n-r+1)} + \frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{r+n-r+1}{r(n-r+1)}\right) \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right) \\ &= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}.\end{aligned}$$

证明成立

1.3　推论：$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$

对所有实数x和整数$n \geq 0$有

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} x^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r$$

1.4　推论：二项式定理

对于所有实数a, b和整数$n \geq 1$存在

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} a^{n-r} b^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} b^r$$

证明：我们只需要稍微做点变换，令$x=\frac{b}{a}$,就有

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=\frac{(a+b)^n}{a^n}$$

那么有

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=a^n\frac{(a+b)^n}{a^n}=a_n\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{b^r}{a^r}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

证毕。

1.5 二项式定理的另一种表达

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

这才是二项式定理通俗意义上的解释，给定一个集合X，以一个$r-$子集指的是恰好存在r个元素的X的子集。若X存在n个元素，则它的$r-$子集的个数我们记为

$$[n,r]$$

那么$[n,r]$指的就是盛有n个物体的盒子里面选出r个物体的方法数，即$\binom{n}{r}$。现在我们来计算$[n,r]$

考虑如下问题：我们有一个含有n个互异字母的字母表，以及整数$r(1\leq r\leq n)$一个$r-$变位节指的是r个不重复的字母构成的序列，例如字母表a,b,c的$2-$变位节就是

$$ab,ba,ac,ca,bc,cb\text{（注意其中不含 aa bb cc）}$$

那么，第一个字母我们知道有n种选法，第二个字母存在$n-1$种，那么$r-$变位节的个数就是

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

当$r=n$的时候，上述选择的结果是$n!$

另外，$[n,r]$指的是$r-$变位节含有的元素，我们又有很多种编排的方法，一共有$r!$种，因为用r个字母编排刚刚好就是特殊情况$r=n$，所以$r-$变位节一共可能的总个数有$r![n,r]$，那么比较有

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)=r![n-r]$$

利用帕斯卡定理就有

$$[n, r] = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$$

如何使用上述公式计算，我们首先想，在一个装有5个球的盒子里面取出2个球一共有多少种取法。利用帕斯卡定理主要是分子要取到多少。一般来说，取到r处就够了，例如：

$$\binom{5}{2} = \frac{5\cdot(5-2+1)}{2} = 10$$

也就是10种。

2 复数

现在我们要把二项式定理应用到复数上，但是别忘了，复数和三角函数的关系很大。

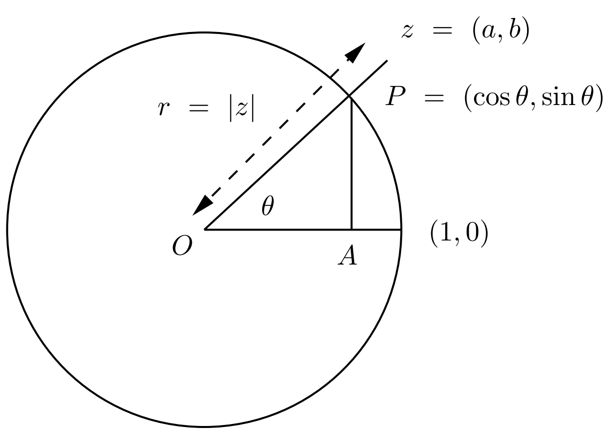
2.1 复数的定义

复数是形如$z = a \pm bi$的数，其中$i = \sqrt{-1}$

一个复数$z = a + ib$的模$|z|$被定义为

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

我们可以把复数和一个平面上的点(a, b)联系起来。那么z的模就是z与原点的距离。模为1的复数z对应着单位圆上的点P



我们在图中构造了一个三角形OAP，由于$|OP|=1$，那么$\cos\theta=|OA|/|OP|=|OA|$，而$\sin\theta=|PA|/|OP|=|PA|$。那么$P$点的坐标就是$(\cos\theta,\sin\theta)$

我们定义复共轭为$\bar{z}=a-ib$，我们有一种求逆元的好方法。注意$z\bar{z}=a^2+b^2$，所以每个$z\neq 0$当且仅当$z\bar{z}\neq 0$，若$z\neq 0$，则

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=(\frac{a}{z\bar{z}})-i(\frac{b}{z\bar{z}})$$

所以不难发现，如果z在单位圆上，那么z^{-1}也在单位圆上。且有$z^{-1}=\bar{z}$ 因为z在单位圆上，则$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1\Rightarrow a^2+b^2=1$，因为$z\bar{z}=a^2+b^2$，所以该逆元就是

$$(\frac{a}{z\bar{z}})-i(\frac{b}{z\bar{z}})=a-ib=\bar{z}$$

而且对复数，下述几个等式成立

1. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$
2. $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$
3. $\bar{z}=z$ 其中$\bar{z}=z$当且仅当z是实数。

2.2 命题：极分解定理

对每个复数z，都存在一个分解

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中$r=|z|\geq 0$，有$0\leq\theta<2\pi$

这是个很直观的证明，我们只是把单位圆复数上的情况经由参数r拓展到整个复数域上。

证明：若$z=0$，那么$|z|=0$，θ任意选取。如果$z=a+bi\neq 0$，那么$|z|\neq 0$，因为$(a/|z|)^2+(b/|z|)^2=(a^2+b^2)/|z|^2=1$，也就是说我们可以通过把复数单位化，使得我们在单位圆上就可以得到每个复数的信息。那么就存在一个角θ满足

$$\frac{z}{|z|}=\cos\theta+\sin\theta$$

所以有$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。

若$z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则$(r,\theta)$称为$z$的极坐标。这也是叫极分解的原因。

2.3 命题：加法定理

若$z=\cos\theta+i\sin\theta,\ w=\cos\psi+i\sin\psi$则有

$$zw=\cos(\theta+\psi)+i\sin(\theta+\psi)$$

证明：

$$\begin{aligned}zw=&(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\psi+i\sin\psi)\\=&(\cos\theta\cos\psi-\sin\theta\sin\psi)+\mathrm{i}(\sin\theta\cos\psi+\cos\theta\sin\psi).\end{aligned}$$

利用和差化积公式就有

$$zw=\cos(\theta+\psi)+i\sin(\theta+\psi)$$

2.4 推论：若z,w为复数，则 $|zw|=|z||w|$

证明：若$|z|=r,|w|=s,|zw|=rs$由极分解定理就有

$$\begin{aligned}z\times w=&r(\cos\theta+i\sin\theta)s(\cos\psi+i\sin\psi)\\=&rs[(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\psi+i\sin\psi)]\\=&rs\cos(\theta+\psi)+i\sin(\theta+\psi)\end{aligned}$$

那么$|z||w|=rs\sqrt{\cos(\theta+\psi)^2+\sin(\theta+\psi)^2}=rs=|zw|$

2.5 定理：棣莫弗

对每个实数x和正整数n都有

$$\cos(nx)+i\sin(nx)=(\cos x+i\sin x)^n$$

又来到喜闻乐见的归纳环节，我们先对$n \geq 1$使用归纳假设。当$n = 1$的时候定理成立，那么

$$\begin{aligned}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{n+1} &= (\cos x + \mathrm{i}\mathrm{sin} x)^n(\cos x + \mathrm{i}\sin x) \\ &= [\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)](\cos x + \mathrm{i}\sin x) \qquad \text{（归纳假设)} \\ &= \cos(nx + x) + i\sin(nx + x) \quad \text{（加法公式）} \\ &= \cos([n+1]x) + \mathrm{i}\sin([n+1]x).\end{aligned}$$

证毕

2.5.1 例子

求$(cos(3°) + i\sin(3°))^{40}$，利用棣莫弗公式我们有

$$(cos(3°) + i\sin(3°))^{40} = (cos(120°) + i\sin(120°)) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.6 推论

1. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
   $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
2. $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
   $\sin(3x) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

2.7 命题：$\cos(nx) = f_n(\cos x)$

对所有$n \geq 1$，存在一个整系数多项式$f_n(x)$满足

$$\cos(nx) = f_n(\cos x)$$

证明：由棣莫弗定理就有

$$\begin{aligned}\cos(nx) + i\sin(nx) =& (\cos x + i\sin x)^n \\ =& \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\cos x)^{n-r}(i\sin x)^r\end{aligned}$$

由复数的性质可知，当$r = 2k, k = 1, 2, 3, \cdots$时，$i^r$为实数由于等式左边的实部$\cos(nx)$必须等于右边的实部，那么

$$\cos(nx) = \sum_{r偶数}^{n} \binom{n}{r} (cosx)^{n-r} (i \sin x)^r$$

若$r = 2k$，$i^r = i^{2k} = (-1)^k$，那么

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} (cosx)^{n-2k} (\sin x)^{2k}$$

其中$\lfloor n/2 \rfloor$指的是$m \leq n/2$的最大整数只要有$\sin^{2k} x = (1 - cos^2 x)^k$，这样子就变成了$\cos x$的一个多项式，然后$\binom{n}{2k}$是一个整数，为此我们找到了一个关于$\cos(nx)$的整系数多项式。

如何计算$f_n(x)$的第一项呢。为此，一般的多项式是形如

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

我们要做的工作是令

$$f_n(\cos x) = f(\cos x)$$

在比较系数就有了。 $n = 1$的时候有

$$f_1(\cos x) = \cos x$$

考虑一个$n = 2$的多项式有

$$cos^2(x) - 1 + cos^2 x = 2cos^2 x - 1$$

而$n = 3$有

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

利用和差化积公式可以得到

$$\cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta) = 2\cos\theta(\cos[(n+1)\theta])$$

所以把$\cos(\theta)$用x替换可以得到

$$f_n(x) + f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x)$$

为此我们可以利用

$$f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

那么我们抽出其中的第一项，由归纳假设可以得到它们的第一项和余项有

$$2^{n+1}x^{n+2}+C=2x(2^{n}x^{n+1})-2^{n-1}x^{n}$$

只要令$-2^{n-1}x^n=C$就可以得到。比较系数即证毕，为此$f_n(x)$的第一项就是$2^{n-1}x^n$

接下来，为了研究复数的性质，我们给出下列几个展开式

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\\ \cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\ \sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\end{aligned}$$

所以，如果把z带入e^x再展开呢。那么我们定义一个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n(c_n,z$是复数)，的收敛性，并且证明级数

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

对每个复数z都收敛。我们定义该级数和为复指数e^z

2.8 欧拉定理

对所有实数x，有

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

证明：我们有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=1+\mathrm{i}x+\frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}+\cdots$$

当$n=0,1,2,3,\cdots$的时候i的n次幂四步循环一次，即

$$i^n=1,i,-1,-i,1,\cdots$$

而ix的偶次幂不含i，奇次含i，为此我们把e^{ix}做如下分解，令e^{ix} =偶次项+奇次项，其中

$$
\begin{aligned}
\text{偶次项} =& 1 + \frac{(1x)^2}{2!} + \frac{(1x)^2}{4!} + \cdots \\
=& 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \cos x \\
\text{奇次项} =& \mathrm{i}x + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}x)^5}{5!} + \cdots \\
=& \mathrm{i}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \mathrm{i}\sin x
\end{aligned}
$$

因此

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

那么我们由极分解定理，又可以把得到的结果写为

$$z = re^{i\theta}$$

其中$r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$

为此，我们还可以把加法定理，和棣莫弗定理写为

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

$$e^{(ix)^n} = e^{inx}$$

2.9 单位根

设$n \geq 1$是整数，若复数ζ满足$\zeta^n = 1$，那么ζ称为n次单位根。

由多项式根的定理可知，一个n次多项式最多存在n个根，但是我们要把这个定理拓展到复数域上。因为在实数域中有一些多项式是不可约的。并且，我们还得知道这些个单位根长什么样。

2.10 推论：n次单位根的表达式

每个n次单位根ζ等于

$$\mathrm{e}^{2\pi ik/n} = \cos(2\pi k/n) + \mathrm{i}\sin(2\pi k/n),$$

证明：若$\zeta = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$，那么由棣莫弗定理可知

$$\begin{aligned}\zeta^n =&[cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)]^n\\ =&\cos(n2\pi/n) + i\sin(n2\pi/n)\\ =&\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\\ =&1\end{aligned}$$

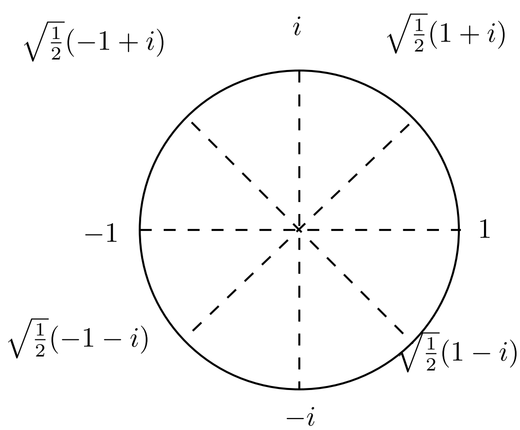
所以ζ为一个n次单位根。

考虑一个更代数化的例子：x^2+1的根，它具备两个根$i, -i$。而它的次数刚刚好是2。所以实际上我们研究的就是类似这种方程的根。

并且我们将在等一下给出一个关于n次单位根的几何直观理解，根据推论2.4$|z||w| = |zw|$可知，我们把一个n次单位根ζ算一下模可知

$$|\zeta|^n = |\zeta^n| = 1$$

所以ζ是一个模为1，且在单位圆上的点。下面是一个8次单位根的在单位圆上的情况



现在，由多项式分解定理可知，每个多项式$f(x)$具有分解

$$
\begin{aligned}
f(x) =& a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
=& p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)
\end{aligned}
$$

其中$p_i(x), i = 1, 2, 3, \cdots, s$是次数和不超过$n$的因式。为此，我们对方程

$$x^n - 1 = 0$$

可知在实数域上只有一根，即$x = 1$，但是由单位根定理可知，它在复数域上应该还存在$n-1$个单位根，为此根据分解式我们构造一个多项式

$$x^n - 1 = \prod_{\zeta^n=1}(x-\zeta)$$

若ζ为一个n次单位根，且n满足$\zeta^n = 1$的最小正整数，那么我们就说ζ是一个n次本原单位根。例如：$\zeta = e^{2\pi i/n}$是一个n次本原单位根。且i^8=1是一个8次单位根，但不是本原的，因为满足的最小整数是4，i^4也是1，所以是一个4次本原单位根。

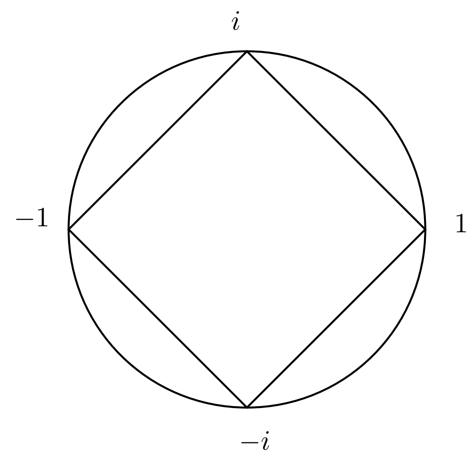
2.11 割圆多项式

若d为一个正整数，我们定义d次分圆多项式为

$$\Phi_d(x) = \prod(x-\zeta)$$

其中ζ取遍所有d次本原单位根。

我们不妨考虑一个圆内接多边形。当我们取4次本原单位根的时候，即i，那么它在圆上的点与点之间的连接起来就是一个正方形。



。所以n次本原单位根就是一个圆内接n边形，这也是割圆多项式名字的由来，每个根与根之间练成的线刚刚好就把圆给分割成一样长的弧了。

2.12 命题：$x^n - 1$的因式分解

对每个$n \geq 1$有

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

其中d取遍n的所有正因子[特别的,$\Phi_1(x), \Phi_n(x)$都出现]

这个很好理解，根据多项式的分解定理，我们只需要把每个关于$d|n$的因子组成的多项式中依次消去d次本原多项式，就可以得到$x^n - 1 | \prod_{d|n} \Phi_d(x)$。

例如，我们可以把$x^n - 1$分解为$(x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1)$。其中

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= x - 1 \\ \Phi_p(x) &= x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \end{aligned}$$

2.13 欧拉$\varPhi-$函数

欧拉$\varPhi-$函数指的是n次分圆多项式的次数，即

$$\phi(n) = deg(\varPhi_n(x))$$

2.14 推论：多项式的次数

对于每个$n \geq 1$，我们有

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

证明：由多项式的积的次数就是其因子的次数的总和可得。

3 习题

3.1 1

对于所有满足$0 < r < 7$的整数r，二项式系数$\binom{7}{r}$为7的倍数

解：对于每个$0 < r < 7$的二项式系数，我们有

$$\binom{7}{r} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (7 - r + 1)}{r!}$$

对于$r = 1$有$\binom{7}{1} = 7$成立对于2，我们检索分子是否存在2的倍数，就有$7 - 2 + 1 = 4$，为此是一个7的倍数。对于3则有$7 - 3 + 1 = 5$，且分子也存在$2, 3$（4，6）的倍数。成立以此类推，到6的时候是 7 所以每个都是7的倍数。

3.2 2

对任意整数n和满足$0 < r < n$的r，二项式系数$\binom{n}{r}$是n的倍数

这是上一题的拓展。考虑当$n=2$的时候，有为$x^2+2xy+y^2$，其中系数$1,2,1$有两个不整除2，即不是2的倍数，因为1/2不是整数。所以命题不成立。

3.3 证明二项式系数是“对称”的

证明二项式系数是“对称”的

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

根据帕斯卡定理，我们有

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}\text{和}\frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r)!)}$$
$$\to\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

所以命题成立。二项式系数都是对称的。

3.4 证明，对每个n，二项式系数的总和为2^n

证明，对每个n，二项式系数的总和为2^n

$$\binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

证明：由

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

对此，我们只需要令$x=1$即可，有

$$2^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$$

证毕。

3.5 二项式系数的交错总和为0

利用命题3.3可知，二项式系数是对称的，那么有
对于n是奇数，二项式系数的个数为偶数，那么根据命题3.3可知。由于

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

且r对应的二项式系数和其对应的“对称”系数是相反数，即

$$\binom{n}{r}, -\binom{n}{n-r}$$

那么和恒0。严格化为：

设n是奇数，则对于$r > 0$的项有

$$-(-a_2) = (-1)^{k-1} a_{n-2}$$

其中a_2指的是二项式系数的第二项。由于当n为奇数时项的个数为$n+1$个，综上所述对于每个n为奇数都有

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0$$

对于n是偶数，我们利用公式，带入$a = 1, b = -1$有

$$\begin{aligned}(1-1)^n &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} (-1)^r \\ &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0\end{aligned}$$

证毕。

3.5.1 r为偶数的时候的系数总和等于r为奇数的系数总和

对于给定的n, r为偶数时所有$\binom{n}{r}$的总和等于r为奇数时所有$\binom{n}{r}$的总和

分析：由于n为偶数，则存在$2n+1$个项，那么中间一项是最大的，并且有命题3.5可知，除了中间的一项之外其他的项加起来的得到结果的刚刚好是-的中间一项。利用这个特性，我们可以把除了中间项之外的项全部加起来，然后移到右边那么就有r为偶数的和加上r为奇数的和为0。为此定理就证明完毕。

由命题3.5可知，n为偶数时存在

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{r-2}-\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}+\cdots+\binom{n}{n}=0\\
\Rightarrow&\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}
\end{aligned}$$

证毕

又例如，求$51x\equiv 10(\mod 94)$的所有解

这里94非常大，我们不可能一个一个去求。为此，利用欧几里得算法。
就有$1=-35\cdot 51+19\cdot 94$