高等代数第三章

2022 年 4 月 21 日

目录

Part I

消元法

现在我们来讨论一般线性方程组，所谓一般线性方程组是形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$代表n个未知量，s是方程的个数，$a_{ij}, i = 1, 2, \cdots s, j = 1, 2, \cdots, n$是方程组的系数。而$b_j, j = 1, 2, \cdots, s$是常数项。注意的是，在其中方程组的未知数的个数$n$不一定于方程的个数$s$相等。里面的$a_{ij}$，$i$表示在$i$行方程，$j$表示是第$j$个未知量$x_j$的系数

上述方程组的解，一般是由n个数$k_1, \cdots, k_n$组成的有序数组$(k_1, \cdots, k_n)$，若当$x_1, \cdots, x_n$用$k_1, \cdots, k_n$代替后每个等式都变成恒等式，那么我们把这一组解叫**解集合**。如果出现了两个方程组有相同的解，那么我们说是**同解**的。

如果我们知道了方程组的全部系数和常数项，那么这个方程组基本就确定了。我们可以把一个方程组用这种矩阵的方法表示，例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$$

现在我们求解的方法有：利用加减消元法或者代入消元法解二元、三元线性方程组。例如

0.1 例子

解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

我们利用第二个方程减去第一个方程的两倍，或者说用第一个方程的-2倍加到第二行，然后利用第三个方程减去第一个方程，即用-1倍的第一个方程加到第三个上。变成

$$\begin{cases} 2x_1 - \quad x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad 4x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad\quad 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

最后我们利用第二个方程减去第三个方程的2倍，然后互换次序即可得到

$$\begin{cases} l2x_1- & x_2+ & 3x_3 & =1 \\ & 2x_2- & x_3 & =4 \\ & & x_3 & =-6 \end{cases}$$

我们只需要回代$x_3=-6$可以得出一组解为$(9,-1,-6)$