高等代数第三章

2022 年 5 月 26 日

目录

1 线性相关

定义9

如果一个有向量α，它如果是由向量组$\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_s$组成的一个线性组合。那么我们说有数域$P$中的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$使得$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s$。

当$s = 1$的时候,$\alpha = k_1\beta_1$，α和β_1成比例

任一一个n维向量α可以表示成如下的情况：

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \cdots + a_n\epsilon_n$$

其中ϵ可以看做是另一个分量如果

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0) \\ \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$

现在想象，每一个分量都是一根轴上的点，当$\epsilon_i, i = 3$的时候就是一个3维向量，有三条轴x, y, z。其中的一个分量$(0, 1, 0)$代表的是y轴上的一个附着点，表示为$y = 1$。因此这个分量组我们说是一个n维单位向量，因为它代表的是每个n维空间中的一个标准单位。

那么这个式子表达的是，我们知道二维下直线的表达式为$y = kx + b$，而n维向量中可以由这种表达式表达出。所以我们说是一个线性组合。因为在我们可以观察的角度上来看，二维上这东西像一条线。而三维像一个面，四维是体积的关系以此类推。

定义10

如果α是向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的一个线性组合时，也称$\alpha$可以经过$\beta_1, \cdots, \beta_s$表出。

我们如何判断向量是否等价呢、

向量组中的每一个向量$\alpha_i, i = 1, 2, 3\cdots$如果都可以经过另一个向量组$\beta_k, k = 1, 2, 3, \cdots$线性表出。那么我们说向量组$\alpha_i, i = 1, 2, 3\cdots$可以经过向量组$\beta_k, k = 1, 2, 3\cdots$表出，如果两个向量组都彼此能表示出彼此，那么我们说这两个向量组是等价的。它有三个不错的性质

自反性：向量组$\{\alpha_i\}$跟自己等价。

对称性：向量组$\{\alpha_i\}$与$\{\beta_j\}$等价，则$\{\beta_j\}$与$\{\alpha_i\}$等价。

传递性：向量组$\{\alpha_i\}$与$\{\beta_j\}$等价，而$\{\beta_j\}$与$\{\gamma_k\}$等价，则$\{\alpha_i\}$与$\{\gamma_k\}$等价。

1.0.1 定义11：线性相关

如果向量组$\alpha_{1i}\alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$中有一个向量是可以由其他向量线性表出，则说$\alpha_{1i}\alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$是线性相关的。

两个线性相关的几何意义为两个向量共线，即利用方程$y = kx + b$，那么用向量表示为$\alpha_1 = k\alpha_2$

三个线性相关的几何意义为三个向量共面$\alpha_1 = k\alpha_2 + l\alpha_3$

但这表示我们无法定义一个向量的线性相关吗？不是的，回想一下向量是什么，向量是一个有长度的有方向的线，而零向量是什么呢？长度为0，那不就是一个点吗。因此我们可以定义如下

线性相关等价定义

向量组$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, (s \geq 1)$是线性相关的，如果有数域$P$中不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$成立，其中0是零向量。

现在证明，当$s \geq 2$的时候两个定义等价。

证明：

当$s \geq 2$的时候，存在$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s$成立的时候是线性相关的。

则我们把a_i移过去可以得到$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + (-1)\alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s$ $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + (-1)\alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s$

其中我们把向量组分为两段，一段在i之前，一段在之后。其中a_i的系数是-1，因此这个向量其实是不全为0的。所以这是一种证明方法。

另一种是，假设其中的某个向量k_ja_j不全为0，即$k_ja_j \neq 0$，我们只需要解方程得到

$$\alpha_j = -\frac{k_1}{k_j}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{j-1}}{k_j}\alpha_{j-1} - \frac{k_{j+1}}{k_j}\alpha_{j+1} - \cdots - \frac{k_s}{k_j}\alpha_s$$

现在只需要a_j不全为0，那么它就可以被其他的向量组线性表示。

线性无关的定义很简单。

1.0.2 线性无关

一组向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, (s \geq 1)$是线性无关的，如果**没有**数域$P$中不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$也就是说

如果向量组$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$是线性无关的，那么当$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，则$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 由此我们可以推出：

单个向量α线性相关当且仅当$\alpha = 0$

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关时则它的子集向量也线性无关。如果子集向量线性相关则向量组也线性相关。

单位向量组$k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \cdots + k_n\epsilon_n = (k_1, k_2 \cdots, k_n) = 0$可解出：$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，因此向量组$\epsilon$线性无关。

1.1 例子

判断向量组$\alpha_1=(2,-1,3,1)$，$\alpha_2=(4,-2,5,4)$，$\alpha_3=(2,-1,4,-1)$的线性相关性

第一步，我们看看是否有不为零的未知数k来解出为0的时候方程是否有解，因此列出方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3=0 \\ -x_1-2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+4x_3=0 \\ x_1+4x_2-x_3=0 \end{cases}$$

由矩阵性质可得，当方程的数量大于未知数的变量时，存在无穷多解。例如$(3,-1,-1)$是方程的一组解，使得$3\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0$，因此线性相关。我们总结一般判断方法

1.2 判断线性相关的一般步骤

第一步：把给定向量组$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$补充完整成一个表达式，例如第一行：$a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=0$。如果有$n$组向量组，那么就组$n$个这种表达式。然后组成一个方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{s2}x_s=0 \\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+\cdots+a_{s3}x_s=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{14}x_1+a_{24}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=0 \end{cases}$$

第二步：列出方程组的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{s3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

列出其增广矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{s3} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} & 0 \end{bmatrix}$$

第三步：解矩阵是否有非零解存在，有非零解说明线性相关，如果仅有0解成立即为线性无关

注意的是：当方程组只有零解的时候在加一个方程上去，即在矩阵下面增加一行也是一样的线性无关，也就是说不管扩大维数好还是缩小，只要发现线性无关，则扩大和缩小维数后也是线性无关。同样，根据命题成立其逆否命题成立，线性相关减少维数也线性相关。

1.3 定理2

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$和$\beta_1, \cdots, \beta_s$是两个向量组，如果前者可以由后者线性表出且$r > s$，则$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$必然线性相关。

证明

现在我们把每个α_i线性表出。它的表达式为

$$\alpha_i = t_{1i}\beta_1 + t_{2i}\beta_2 + \cdots + t_{si}\beta_s, i = 1, 2, 3, \cdots, r$$

由于α线性相关，那么 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r = 0$，按照$\beta$向量展开来可以得到

$$x_1\alpha_1 5x_1(t_{11}\beta_1 + \cdots + t_{1s}\beta_s)$$

$$\therefore \alpha_i = x_1(\cdots)$$

因此我们只需要整理一下合并同类项得到

$$(t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1r}x_r)\beta_1 + \cdots + (t_{s1}x_1 + t_{s2}x_2 + \cdots + t_{sr}x_r)\beta_s = 0$$

现在我们有一个不错的处理方法。如果我们能找到一个不全为0的数就能证明完成了现在令B_j的系数全部为0，得到一个s个方程r个未知数的齐次线性方程组，根据矩阵特性，当$s < r$知道一定是有非零解的因为此时有无穷多的解。那么我们就证明完毕了。

根据这个定理，我们有如下推论

推论1

如果向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$可以通过向量组$\beta_1, \cdots, \beta_s$线性表出，且$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关，则$r \leq s$

证明：

利用刚才的推论，假设$r > s$复合定理2的条件，可得$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性相关，这和我们假设的矛盾，因此$r \leq s$

推论2

任意$n+1$个n维向量必定线性相关。

证明

设$n+1$个n维向量为$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$，那么我们根据定义9可知一个$n$维向量可以由一个单位向量线性表出，并且是关于$\epsilon_i$线性相关的。也就是说可以由这些单位向量表示出，并且我们发现$n+1 > n$这说明我们可以组出来$n+1$个变量和n个方程组，因此有无穷多解使得$\alpha_k, k = 1, \cdots, k_{n+1}$其线性相关。

推论3

两个线性无关的等价向量组必定含有相同个数的向量

证明

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$和$\beta_1, \cdots, \beta_s$是线性无关的等价向量，根据之前的定义10，等价方程组之间是可以线性表示彼此之间。因此向量组α_r可以被β_s表示，而β_s也可被α_r表示出来。由推论1可得$r \geq s$，以此类推而由推论1发现$s \geq r$，因此$r = s$成立，定理得证

定义13

向量组的一个部分称为一个极大线性无关组，如果这个部分组线性无关且再加入任一个部分组补集的向量，所得的向量组都线性相关。

定理告诉了我们一个东西，这个极大线性无关组，是一个临界点，加一点点就线性相关了。

命题1

向量组的极大线性无关组与向量组自身等价。

证明：

我们设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\cdots,\alpha_r$的一个极大线性无关组为$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，而对于任意的$i=1,2,\cdots,s$可以用$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+1\alpha_i+0\alpha_r$表示，因此极大线性无关组可以用它自身来表示。

另一方面，由于我们已经给出了一个极大线性无关组，因此对于任意的$j=s+1,\cdots,r$都存在$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_j$线性相关，我们知道极大线性无关组已经变成线性相关，因此也可以被表示出来。这就发现了有意思的地方，自己被自己表示了。因此我们证明完毕。两个向量组是等价的。

定理3

向量组的任一极大线性无关组含有的向量个数相同。

由定理2和推论3我们可以证明其成立，由等价关系的传递性，我们知道取出任意的线性极大向量组和向量组本身是等价的，由传递关系可以证明两个极大线性无关组的向量是相同的。

1.3.1 定义14 秩的定义

定义：向量组的极大线性无关所含的向量个数称为向量组的秩

很明显的有：向量组自身线性无关的充分必要条件为向量组所含向量的个数等于它的秩。

线性等价的两个向量组的极大线性无关组等价，所以他们的秩相同。

现在我们把结论拓展到方程组上。

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=d_1(A_1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=d_2(A_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=d_s(A_s) \end{cases}$$

的增广矩阵的行向量记为$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},d_i,i=1,2,3,\cdots,s)$

现在记方程B为$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=d$，我们说如果$\beta$可以由向量组$\alpha$线性表出当且仅当方程$B$可以表述为方程$(A_1)$到$A_s$的线性组和，那么方程$(A_1)$到$(A_s)$的解也一定是方程$B$的解。