表现

2025年1月3日

目录

0.1	定义:	广义四元群	2
0.2	定义:	自由群	3
0.3	定理:	<mark>线性映射</mark>	3
0.4	定义:	子字	4
0.5	定义:	既约	4
0.6	定义:	并置	4
0.7	命题:		5
0.8	引理		6
0.9	命题:		7
0.10	定义:	秩	7
0.11	命题:		7
0.12	定义:	表现	8
0.13	定义:	有限表现	8
	0.13.1	例子	8
	0.13.2	例子2	8
0.14	定理:	von Dyck 定理	9
0.15	例子		9
0.16	命题:		10
0.17	命题:		10
0.18	命题		11
0.19	定理:		11

很快啊,跳过射影幺模群来到表现着章节。

所以,我们如何描述一个群,利用凯莱定理,有限群G同构于 S_n 的一个子群,其中n = |G|,从而群G可以定义为某种置换生成的 S_n 的子群。这种构造的一例出现在卡迈克尔的群论书中的练习中:

设G是由下面置换生成的 S_{16} 的子群:

$$(a c)(b d), (e g)(f h),$$

 $(i k)(j l),$
 $(m o)(n p)(a c)(e g)(i k)$
 $(a b)(c d)(m o), (e f)(g h)(m n)(o p), (i j)(k l)$

|G|=256,|G'|=16 其中 $a=(i\ k)(j\ l)(m\ o)(n\ p)\in G'$,但a不是换位子。 描述群的第二种方法是,对某个 $n\geq 2$ 和某个域k,用GL(n,k)代替 S_n ,因为一切 $n\times n$ 置换矩阵形成GL(n,k)同构于 S_n 的子群。从而每个n阶群都可

之前定义过4元群Q,我们来试试一种新的方法,我们把群描述为受制于某种关系的元素生成的,例如二面体群 D_{2n} 可以描述为 $a^n = 1$ 和 $bab^{-1} = a^{-1}$ 的两个元素a和b生成的,考虑下面的定义:

0.1 定义:广义四元群

嵌入GL(n,k)。

广义四元数群 Q_n , 其中 $n \geq 3$, 是指由满足

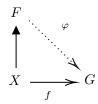
$$a^{2^{n-1}} = 1, bab^{-1} = a^{-1}, b^2 = a^{2^{n-2}}$$

当n = 3,就是阶为8的群Q,但这定义有一个明显的缺陷,就是我们不能判断是否有这么一些群,例如,该定义下是否存在一个阶为16的群,注意的是,我们并不是只要找到一个这样的群是仅仅不够的。

为了使这种描述更加的严格,迪克(W.von Dyck)在19世纪80年代给出了自由群的定义:

0.2 定义: 自由群

若X是F的子集,对每个群G和每个函数 $f:X\to G$,存在唯一的同态 $\varphi:F\to G$ 使得对一切 $x\in X$, $\varphi(x)=f(x)$



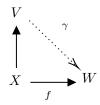
则说F是以X为基的自由群

该定义模仿了线性映射的定义,这就是为什么可以用矩阵来描述线性 变换的理由:

0.3 定理:线件映射

令 $X = v_1, \dots, v_n$ 是向量空间V的基。若W是向量空间且 u_1, \dots, u_n 是W中的表。则这里存在一个唯一的线性映射 $T: V \to W$ 使得 $T(v_i) = u_i$ 对所有i成立

注意到给出W的向量表 u_1, \dots, u_n 和给定映射 $f: X \to W$,其中 $f(v_i) = u_i$ 是同一件事情。毕竟一个函数 $f: X \to W$ 由它在 $v_i \in X$ 上的值决定。所以我们可以画出这个定理的图:



若我们知道自由群是存在的,则我们可以由如下定义 Q_n ,令F是基为 $X = \{x,y\}$ 的自由群,再令R是F由 $\{x^{2^{n-1}},yxy^{-1}x,y^{-2}x^{2^{n-2}}\}$ 生成的正规子群。接着定义 $Q_n = F/R$,它很清楚的解释了,F/R是由xR和yR生成的。但不清楚的是F/R的阶是否为 2^n 。这需要证明。

第一个问题是,我们证明检验自由群是否存在,构造的思路简单,但 检查细节是繁琐的,我们首先看看自由群是什么构成的。 令X是非空集合,再令 X^{-1} 是X的不相交的复制,也就是说X和 X^{-1} 不相交,且存在双射 $X \to X^{-1}$,可以表示为 $X \to X^{-1}$ 。定义X上的字母表为

$$X \cup X^{-1}$$

$$w = X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$$

其中 $x_i \in X$ 且 $e_i = \pm 1$,我们将字的长度表示为| w |。例如:| xx^{-1} |= 2。空字我们记为1,它的长度是0。

0.4 定义: 子字

一个字 $w=x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}$ 的子字不是空字,就是形如 $u=x_r^{e_r}\cdots x_s^{e_s}$,其中 $1\leq r\leq s\leq n$,w的逆定义为 $w^{-1}=x_1^{-e_1}\cdots x_n^{-e_n}$,因此对每个字 $(w^{-1})^{-1}=w$

0.5 定义: 既约

X上的字w是既约的,若w=1或者w不存在任何形如 xx^{-1} 或者 $x^{-1}x$ 的子字,其中 $x\in X$

任意两个X上的字是可相乘的。

0.6 定义: 并置

令 $u = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$, $v = y_1^{e_1} \cdots y_m^{e_m}$ 是X上的字,则并置指的是:

$$uv = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} y_1^{e_1} \cdots y_m^{e_m}$$

若1是空字,则1v = v且u1 = u

我们试着定义自由群是集合X上所有字的集合,且群上运算是并置。其单位元定义为空字1,且逆运算如定义0.4上一样。但有一个问题,若 $x \in X$, $x^{-1}x = 1$ 要怎么处理,这有个矛盾, $x^{-1}x$ 的长度为2,而1是0.一个简单的方

法是,限制X上的字都是既约字,但u,v是既约字,而uv可能不是。可以用消去把uv变成既约字,但这时候证明结合性则会开始棘手。所以我们这样解决这个问题:因为像 $zx^{-1}xyzx^{-1}$ 和 $zyzx^{-1}$ 这样的字必须恒等,则我们利用X上一切字的集合上的一个等价关系是有意义的。若我们定义F的元素是等价类,则结合性就好证明多了,且在每个等价类中有唯一的既约字,所以可以把F的元素看做既约字,且把两个元素的乘积当做并置然后约化。

注意: 这是一个不严谨的说法,但是容易接受的。我们将默认自由群是以上面描述的形式存在。

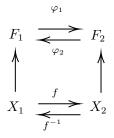
现在,对每个集合X,存在一个自由群以X为基,且我们把X上的自由群F元素看做是约化字,运算是并置接着约化,并把元素[w]简单记为w

我们刚刚构造的以X为基的自由群F是X生成的,那么一个显然的问题是: 任意两个以X为基的自由群是否同构?

0.7 命题:

- 1. 令 X_1 是自由群 F_1 的基和 X_2 是自由群 F_2 的基。若这里有一双射 $f: X_1 \to X_2$,则有一个扩张了f的同构 $\varphi: F_1 \to F_2$
- 2. 若F是以X为基的自由群,则F由X生成

证明: 命题1可以描述成下述的图:



我们可以认为f最终映射到 F_2 上,因为 $X_2 \subseteq F_2$,由于 F_1 是以 X_1 为基的自由群,那么就应该存在一个拓展f的同态, $\varphi_1: F_1 \to F_2$ 。类似的讨论可以得到 $\varphi_2: F_2 \to F_1$ 拓展了映射 f^{-1} 。那么复合映射 $\varphi_2\varphi_1: F_1 \to F_1$ 拓展了f,利用扩张的唯一性,则 $\varphi_2\varphi_1 = 1_{F_1}$ 。同样的讨论使我们得到 $\varphi_2\varphi_1 = 1_{F_2}$ 。所以 φ_1 是一个同构

证明2: 设对某个集合 X_1 有双射 $f: X_1 \to X$ 。若 F_1 是由 X_1 为基的自由群,令其运算为等价类上关系就有 X_1 生成 F_1 ,利用命题1,那么就有一个同构 $\varphi: F_1 \to F$ 使得 $\varphi(X_1) = X$ 。但 $\varphi(X_1)$ 生成 $\operatorname{im}\varphi$,因此X生成F

自由群也有等级的概念,但我们首先来检查自由群中的所有基是否具 有相同数量的元素。

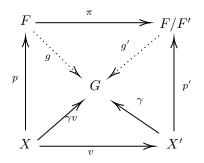
0.8 引理

若F是以 $X = x_1, \dots, x_n$ 为基的自由群,则F/F'是以 $X' = x_1F', \dots, x_nF'$ 为基的自由阿贝尔群。其中F'是F的交换子群

证明: 注意X'生成F/F',注意换位子子群F'是F的正规群且F/F'是阿贝尔群。我们利用如下定理证明F/F'是以X'为基的自由阿贝尔群¹

令A是包含集合 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 的阿贝尔群,再使A是满足自由群定义且以X为基的自由阿贝尔群:即对每个阿贝尔群G和每个函数 $\gamma: X \to G$ 存在唯一的同态 $g: A \to G$ 使得 $g(x_i) = \gamma(x_i)$ 对所有 x_i 成立。则 $A \cong \mathbb{Z}^n$,因此,我们说A是秩为n的自由阿贝尔群:

考虑下图:



图中的G是任意阿贝尔群,p,p'是嵌入映射(inclusions), π 是自然映射, $v: x \to xF'$, $\gamma: X \to G$ 是函数。令 $g: F \to G$ 是自由群定义给出的唯一同态,且 $gp = \gamma v$,并定义 $g': F/F' \to G$ 为 $wF' \to g(w)$,注意g'是well-defined的,因为G是阿贝尔群使得 $F' \leq \ker g$ 成立。

¹自由阿贝尔群是以准素循环群做直积得到的

注意现在 $g'p' = \gamma$,则

$$g'p'v = g'\pi p = gp = \gamma v$$

由于v是满射的,就有 $g'p' = \gamma$,最后,g'是唯一存在的映射,若存在一个g''满足 $g''p' = \gamma$,则g',g''生成集合X',所以他们是等价的。

0.9 命题:

令F是基为X的自由群。若|X|=n,则每个F的基都有n个元素

证明: 利用上述引理,F/F'是秩为n的自由阿贝尔群,另一方面,若 y_1, \cdots, y_m 是 另一组基,则F/F'也是秩为m的阿贝尔群,最后 $F/F' \cong Z^n \cong Z^m$ 有 $n = m_o$

0.10 定义: 秩

自由群F的秩记为rank(F),指的是基的元素个数。

于是,命题0.7可以描述为:两个有限自由群是同构的当且仅当它们具有相同的秩

0.11 命题:

每个群G都是一个自由群的商群。

证明: 令X是集合,且存在一个双射 $f: X \to G$ 。(例如,我们可以取X为 底集和 $f=1_G$),并设F是以X为基的自由群,则存在扩张f的同态 $\varphi: F \to G$,由于f是满的,所以 φ 也是满的。利用引理0.8和第一同构定理, $G \cong F/\ker \varphi$

我们继续描述群

0.12 定义: 表现

群G的表现是有序对

$$G = (X \mid R)$$

其中X是一个集合,R是X上的字的集合。且G = F/N,其中F是以X为基的自由群且N是由R生成的正规子群:即R中元素的一切共轭生成的子群,并把集合X称为生成元,集合R为关系。

0.13 定义: 有限表现

群G是有限生成的,若他有表现 $(X \mid R)$,其中X是有限的。群G称为有限表现,若其有一个表现 $(X \mid R)$,其中X和R是有限的。

0.13.1 例子

一个群有很多表现,例如 $G = \mathbb{I}_6$,就有表现

$$(x | x^6)$$

和

$$(a, b \mid a^3, b^2, aba^{-1}b^{-1})$$

虽然我们可以给出两个不同的表现,但根据不同的表现是否能给出同构群,可证明不存在这种算法。

0.13.2 例子2

以X为基的自由群有如下表现:

$$(X \mid \emptyset)$$

自由群的名称正是来源自有一个与无关系的表现。

另一方面,关于记号,我们经常把表现中的关系写作等式,于是 I_6 中第二个表现的关系

$$a^3, b^2, aba^{-1}b^{-1}$$

可以写为

$$a^3 = 1, b^2 = 1, ab = ba$$

 $若r是x_1, \cdots, x_n$ 上的字,我们可以记 $r = r(x_1, \cdots, x_n)$,若H是群且 $h_1, \cdots, h_n \in H$,则 $r(h_1, \cdots, h_n)$ 表示吧每个 x_i 换做 h_i 得到H中的元素

0.14 定理: von Dyck 定理

设群G有表现

$$G = (x_1, \cdots, x_n \mid r_j, j \in J)$$

即G = F/N,其中F是 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 上的自由群,而N是由 $r_j = r_j(x_1, \dots, x_n)$ 生成的F的正规子群,若 $H = (h_1, \dots, h_n)$ 是群且在H中对一切 $j \in J$ 有 $r_j(h_1, \dots, h_n) = 1$,则对一切i存在满足 $x_i N \to H$ 的满同态 $G \to H$

证明: 若F是以 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为基的自由群,则存在同态 $\varphi:F\to H$ 使得对一切i有 $\varphi(x_i)=h_i$,因为 $r_j(h_1,\cdots,h_n)=1$,从而对所有 $j\in J$ 有 $r_j\leq \ker \varphi$ 。从而 φ 可以导出一个合理定义的同态 $F/N\to H$ 为 $x_iN\to h_i$

0.15 例子

我们先来构造一个具体的矩阵群

我们构造一个群 H_n ,它是定义0.1的广义四元群 Q_n 的一个候选者,其中 $n \geq 3$,考虑复数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{ fil } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中w是 2^{n-1} 次单位原根,并设 $H_n = \langle A, B \rangle \leq \operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$,我们假定A, B满足广义四元群定义中的关系,对一切 $i \geq 1$,

$$A^{2^i} = \begin{pmatrix} w^{2^i} & 0\\ 0 & w^{-2^i} \end{pmatrix}$$

从而 $A^{2^{n-1}} = I$,实际上A确实是阶为 2^{n-1} 。更多的

$$B^{2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{2^{n-2}}, \ BAB^{-1} = \begin{pmatrix} w^{-1} & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = A^{-1}$$

注意A,B不能交换,所以 $B\notin\langle A\rangle$,因此陪集 $\langle A\rangle$ 和 $B\langle A\rangle$ 是不同的。由于A的阶为 2^{n-1} ,由此推出

$$\mid H_n \mid \geq \mid \langle A \rangle \cup B \langle A \rangle \mid = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$$

在下一个定理我们将证明每个这样的 H_n 阶为 2^n

0.16 命题:

对 $n \geq 3$,广义四元数群 Q_n 存在

证明: 令G是下述定义的表现

$$(a, b \mid a^{2^{n-1}}, bab^{-1} = a^{-1}, b^2 = a^{2^{n-2}})$$

 G_n 满足广义四元数定义中的所有要求,但有一个例外,它的阶是否都是 2^n 。利用von Dyck's定理,存在一个满射同态 $G_n \to H_n$,其中 H_n 是上边例子构造的群,那么 $|G_n| \ge 2^n$

另一方面, G_n 中的循环群 $\langle a \rangle$ 阶至多为 2^{n-1} ,因为 $a^{2^{n-1}}=1$,反射 $bab^{-1}=a^{-1}$ 可知 $\langle a \rangle \triangleleft G_n=\langle a,b \rangle$,那么 $G_n/\langle a \rangle$ 是由b的象生成的,最后,由于 $b^2=a^{2^{n-2}}$,那么 $|G_n/\langle a \rangle \leq 2$ 就有

$$|G_n| \le |\langle a \rangle| |G_n/\langle a \rangle| \le 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$$

因此 $|G_n|=2^n$ 且 $G_n\cong Q_n$

这表明了上述例子的群 $H_n \cong Q_n$

0.17 命题:

二面体群 D_{2n} 也有表现:

$$D_{2n} = (a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, bab = a^{-1})$$

证明: 利用von Dyck's定理,构造满射同态 $f: C_{2n} \to D_{2n}$,就有 $|C_{2n}| \ge 2_n$ 。接着为了证明f是同构。只需要像命题0.16一样即可。其循环群 $\langle a \rangle \in C_{2n}$ 阶至多为n,因为 $a^n = 1$,由于 $bab^{-1} = a^{-1}$,则 $\langle a \rangle \triangleleft C_{2n} = \langle a, b \rangle$ 。因此 $C_{2n}/\langle a \rangle$ 是b的像生成的。最后, $b^2 = 1$,则 $C_{2n}/\langle a \rangle = 2$,有

$$|C_{2n}| \le |\langle a \rangle| |C_{2n}/\langle a \rangle| \le 2n$$

因此 $|C_{2n}| = 2n$ 且 $C_{2n} \cong D_{2n}$

现在,我们给出一个定理更简单的证明:

0.18 命题

每个阶为6的非阿贝尔群G同构于 S_3

证明: G首先得包含2阶和3阶的元素a,b。因为 $\langle a \rangle = 2$,那么 $\langle a \rangle \triangleleft G$ 就有 $bab^{-1} = a$ 或者 $bab^{-1} = a^{-1}$ 。但第一种情况不可能发生。因为G不是阿贝尔群,现在G满足 $D_6 \cong S_3$ 的表示条件。那么就有一个映射 $D_6 \to G$ 由于两个群阶一样,所以是同构。

最后,我们对8阶的群进行分类

0.19 定理:

每个阶为8的群都同构于:

$$D_8, Q, \mathbb{I}_8, \mathbb{I}_4 \oplus \mathbb{I}_2, \text{ or } \mathbb{I}_2 \oplus \mathbb{I}_2 \oplus \mathbb{I}_2$$

中的某一个,这些群俩俩之间不同构

证明: 若G是阿贝尔群,由基定理,G自身就是循环群的直和,而基本定理证明这种群只有列出的这些,因此我们假定G是非阿贝尔群。

首先,G不可能有8阶元素,否则其是循环群。因此就是阿贝尔群。此外每个非单位元都可以为2阶的。为避免G变阿贝尔群,则G有一4阶元素a。所以<a>的指数为2。所以这是一个极大子群,从而G=<a,b>,由于G/<a>是2阶的,所以b² \in <a>从而b² = aⁱ,其中0 \leq i \leq 3。注意不可能有b² = a或者b² = a³ = a⁻¹,否则b的阶是8.所以

$$b^2 = a^2, b^2 = 1$$

有这么两种情况,其次,利用b的正规性, $bab^{-1} \in \langle a \rangle$,从而 $bab^{-1} = a$ 或者 $bab^{-1} = a^{-1}$ 。由于a,b可交换。这意味着G是阿贝尔群,所以只有 $bab^{-1} = a^{-1}$ 。所以只有两种可能性

$$a^4 = 1, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1}$$

或

$$a^4 = 1, b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1}$$

利用命题0.16,当n=3的时候是8阶群,正好是第一种表现,命题0.17给出第二种表现。利用von Dyck定理,则存在满同态 $Q\to G$ 或者 $D_8\to G$,然而 $\mid G\mid =8$,所以这是个同态。

最后,Q和 D_8 是不同构的,Q的2阶元唯一,而 D_8 有好几个2阶元素