秩的应用

2022 年 5 月 26 日

目录

1 线性方程组有解判定定理

定义15

齐次线性方程组我们有太多太多的结论可以用了，作为一些特殊的方程组，我们现在研究的是一般的方程组，也就是不一定齐次的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21_{x_1}} + a_{22_{x_2}} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

我们把方程组表示为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix}, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}$$

那么可以改写成向量方程$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

由线性相关我们知道，如果该方程组有解，那么这表明向量β可以被向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表出。用秩的概念可以这样子叙述：

1.1 定理7

线性方程组有解的充分必要条件为它的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

和增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$$

存在相同的秩

证明：必要性

线性方程组有解说明β可以由向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表出，这说明矩阵$A$和增广矩阵$\bar{A}$是等价的，因此$A$和$\bar{A}$存在相同的秩。

证明：充分性 系数矩阵A和增广矩阵$\bar{A}$存在相同的秩，这说明β可以由$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$的极大线性无关组表出。因为极大线性无关组与自身等价。所以当然也可以由原来的向量$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$表出，也就是说既然原方程是有解的，而且$\beta$也可以由原方程组的向量组表出，那么就是有解的。

增广矩阵$\bar{A}$只比A多一列，所以秩相等或者多1，即两者的阶梯型非零行数相同或者差1，这发现一个很有趣的事实，思考一个分量的情况，即$x_i a_{ik} = b_i$，这样子是可以的，可以解出x_i的，那么我们发现它的矩阵就是$|a_{ik} \ \ b_i|$，那么这就说明非零行数是相同的。而线性无关的时候总会出现矛盾点，即$x_i a_i = 0 = b_i \Rightarrow 0 = b_i$，这个时候会多出一行非零行，因此矛盾且秩加一。也就是这样子

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{有解} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{无解}$$

因此，有解的时候相当于是r个方程n个未知数，所以有$n-r$个自由变量，记为$x_{r+1},\cdots,x_n$，并且可以利用克拉默法则求出