高等代数第二章

2022 年 5 月 11 日

目录

A 克拉默法则

在那么多前置知识后，我们现在来想办法应用行列式解决线性方程组的问题，我们在这里先考虑一种情况，也就是是**方程个数与未知数个数相等的情况**

A.1 判断线性方程组是否有解

如果线性方程组

$$\begin{cases} la_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式，也就是系数行列式

$$d = |A| \neq 0$$

那么线性方程组是有解的，并且解是唯一的，且可以通过系数表为

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \cdots, x_n = \frac{d_n}{d} \quad (1)$$

其中d_j表示的是把j列换成方程组的常数项$b_1, \cdots b_j$所组成的矩阵的行列式，也就是

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理也告诉了我们三个结论，一、方程组有解；二、解是唯一的；三、解由上述公式（1）给出，因此我们要证明的内容如下。

一、把$\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \cdots, \frac{d_n}{d}$带入到方程组中验证其准确性。

二、假如方程组有界，证明由公式(1)给出。

A.1.1 证明其有解

首先，我们必须把方程组简写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

其中我们展开i行现在我们带入解，可得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j$$

我们对已经给出的行列式给出解：

$$d_j = b_1 A_{1j} + \cdots + b_n A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}$$

其中d_j是把j列替换为b_i元素的矩阵。我们整合一下有

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}$$

我们发现一个有趣的事实，其中A_{ij}虽然是j的代数余子式，但是当我们展开后就我们可以看到有

$$\begin{aligned}\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j &= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}\\ &= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_i A_{ij}\end{aligned}$$

展开来有

$$\frac{1}{d}\left[b_1\left(a_{i1}A_{11} + \cdots + a_{in}A_{1n}\right) + \cdots + b_n\left(a_{i1}A_{n1} + \cdots + a_{nn}A_{nn}\right)\right]$$

我们看到了，每个元素都乘以一个行列式，但是根据行列式的性质我们知道，如果余子式乘以不是它自己的元素的话，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} d & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

。结果就是0。那么只有一种可能，当$a_{in}A_{in}$这样子出现的时候，行列式不为0，那么就只剩下一行了。

$$\frac{1}{d}b_i(a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in})$$

我们一开始对i行展开，因此a_{ij}的i恒不变，变的是j，而b和A都是按照行展开的，变的是i行。现在我们发现b_i乘的就是我们原本的行列式。因此可以简写为d，最后就只剩下一个b_i，这就是我们的解。$Q.E.D$ 现在我们来证明只有唯一解

A.1.2 只有唯一解

现在我们设

$$c_1,\cdots c_n$$

是方程组的解，即对$i=1,2,\cdots,n$有

$$a_{i1}c_1+\cdots a_{in}c_n=b_i$$

然后我们把整个多项式都乘以系数的k列元素的代数余子式。

$$\begin{cases} la_{11}c_1A_{1k}+a_{12}c_2A_{1k}+\cdots+a_{1n}c_n=b_1A_{1k}\\ a_{21}c_1A_{2k}+a_{22}c_2A_{2k}+\cdots+a_{2n}c_n=b_2A_{2k}\\ \cdots\\ a_{n1}c_1A_{nk}+a_{n2}c_2A_{nk}+\cdots+a_{nn}c_n=b_nA_{nk} \end{cases}$$

按照我们刚开始的证明方法，利用性质可以知道这n个等式叠加有

$$\begin{aligned} c_1(a_{11}A_{1k}+\cdots a_{n1}A_{nk})+\cdots+c_n(a_{1n}A_{1k}+\cdots a_{nn}A_{nk})=&b_1A_{1k}+\cdots+b_nA_{nk}\\ c_k(a_{1k}A_{1k}+\cdots a_{nk}A_{nk})=c_kd=&d_k \end{aligned}$$

其中d_k是什么呢？仔细想想，把b_k乘以一个k列余子式，相当于把b这一列全部塞进去，那么自然就是我们一开始讲的d_k，也就是k列为b元素的行列式。只需要简单的变换步骤就有了

$$\begin{aligned} c_kd=&d_k\\ c_k=&\frac{d_k}{d} \end{aligned}$$

证明完毕。

A.2 例子

现在我们来解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4 & =8\\ x_1-3x_2-6x_4 & =9\\ 2x_2-x_3+2x_4 & =-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4 & =0 \end{cases}$$

运用克拉默法则，先算出

$$d=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27,\ d_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81$$

$$d_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,d_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27$$

$$d_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27$$

现在套克拉默法则可以知道，方程组的解为$(3,-4,-1,1)$

B 齐次线性方程组

齐次线性方程组是形如

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

它的系数矩阵$A=(a_{ij})$的行列式$d=|A|\neq 0$，则该线性方程组有唯一解$(0,0,\cdots,0)$

B.1 证明

我们直接套用克拉姆法则。如果齐次线性方程组有唯一解$(\frac{d_1}{d},\cdots,\frac{d_n}{d})$，而对任意的一个矩阵$d_i$,一定是有一行全为0的。故$d_i$全为0，利用行列式性质，转置行列式行列式不变，因此第一行全部变成了0，那么剩下的余子式都是乘以一个0，答案为0。

因此，定理告诉我们，如果齐次线性方程组有非零解，也就是至少有一个x_i不为0，则根据命题成立，逆否命题也成立的思路可得，这些个齐次线性方程组的行列式$|A| = 0$。

B.2 例子

求什么情况下，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = & 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = & 0 \end{cases}$$

有非零解

由上述定理可得，当方程组有非零解的时候

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

由此可得$\lambda = \pm 1$

克拉姆法则的重要意义是给出了解和方程组系数矩阵的关系，但不适合用于计算求解。

$$\begin{gathered} {}_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_1 x_n x_n = 0 \\ a_1 x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ a_{11} x_1 \end{gathered}$$