高等代数第二章

2022 年 4 月 17 日

目录

1 范德蒙行列式

一个范德蒙行列式是形如下面这样子的：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

其中，n级范德蒙行列式等于$a_1, a_2, \cdots a_n$ 这n个数的所有可能的差$a_i - a_j(i \leq j < i \leq n)$的乘积。

我们可以用归纳法来证明成立

1.1 范德蒙行列式证明

首先我们对$n = 2$的情况进行证明。

当$n=2$时

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

我们发现结果是对的，因此对于$2-1$行的假设是成立的。现在我们看看$n=1$的情况。我们利用余子式来分解剩下的行列式。

我们利用n行减去$n-1$行，然后让$n-1$行减去$n-2$行得到

那么有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1-1 & a_2-1 & a_3-1 & \cdots & a_n-1 \\ a_1^2-a_1 & a_2^2-a_2 & a_3^2-a_3 & \cdots & a_n^2-a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}-a_1^{n-2} & a_2^{n-1}-a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

其实我们发现第一列做差后都相差一个a_1，那么我们采取的方法是，让$n-1$行减去$n-2$行的a_1倍。这样子就可以消去第一列的全部元素了。得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1-a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_1^2-(a_1\cdot a_1) & a_2^2-a_2a_! & a_3^2-a_3a_1 & \cdots & a_n^2-a_na_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}-(a_1^{n-2}\cdot a_1) & a_2^{n-1}-(a_2^{n-2}\cdot a_1) & a_3^{n-1}-(a_3^{n-2}\cdot a_1) & \cdots & a_n^{n-1}-(a_n^{n-2}a_1) \end{vmatrix}$$

化简一下可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_2a_1 & a_3^2-a_3a_1 & \cdots & a_n^2-a_na_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}-(a_2^{n-2}\cdot a_1) & a_3^{n-1}-(a_3^{n-2}\cdot a_1) & \cdots & a_n^{n-1}-(a_n^{n-2}a_1) \end{vmatrix}$$

我们可以利用余子式来分解行列式了。现在我们再敢一件准备工作，我们发现每一列的因子都是其第一项的元素，例如第一列的公因子是

(a_2-a_1)，我们看$(a_2^2-a_2a_1)=a_2(a_2-a_1)$，$a_2^{n-1}-a_1^{n-2}a_1=a_2^{n-2}(a_2-a_1)$，因此我们全部的公因子提出来，就是把原行列式的第二行的元素全部拿出来得到

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

这个剩下的行列式恰好是$n-2$级的范德蒙行列式，由归纳法可得行列式分解跟如上步骤一样，所以我们可以得到

范德蒙行列式等于所有可能差$a_i-a_j(2\le j<i\le n)$的乘积，但是其中可以简写为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

因此我们可以得出，**如果范德蒙行列式为零，那么这个充分必要条件就是在众多的**$a_1,\cdots,a_n$**，其中至少有两个是相等的。** Q.E.D

2 证明此行列式分解成立

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

第一眼看起来，像极了把二阶行列式的元素用矩阵代替。不是吗

2.1 证明

首先，看到这种累积到n的，我们的直觉告诉我们，这种带有某种直觉规律的写法，我们可以用归纳法证明。因此我们尝试对其使用归纳法。

首先我们看$k=1$的情况有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

其中c方块是按照a的列的多少而排列的，行取决于块b。因此当$k=1$的时候就说明只有1列r行。按第一行分解行列式，我们就得到了

$$a_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

因此$k=1$的时候情况成立。

现在我们假设对$k=m-1$的情况成立，然后证明对$k=m$的情况成立。现在我们对第一行行列式展开为$a_{11}A_{11}+\cdots+a_{1m}A_{1m}$，其中的$A_{1j}$是去掉1行，$j$列的代数余子式。那么$A_{1i}$长什么样子呢？是这样子的：

$$A_{1i}=(-1)^{1+i}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{12} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r2} & \cdots & c_{r,i-1} & c_{r,i+1} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

其中我们发现这个剩下来的余子式，刚刚好是一个$m-1$级行列式，由归纳假设可得刚刚好就是元素a的那部分乘以一个元素b的行列式，也就是。

$$\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

那么我们分解的式子$a_{11}A_{11}+\cdots+a_{1m}A_{1m}$展开来是

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

那么我们发现的是每次都乘以一个行列式B_{ij}，那就提出去吗，**剩下的只有**

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

这个不就是我们元素a的行列式的分解嘛，这给他还原回去不就是整一块a_{11}到a_{mm}的行列式。所以证明完毕也就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ c_{r1} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$Q.E.D$