# 一阶微分方程

2023 年 12 月 11 日

## 目录

ok，今天必须立刻马上开始学习常微分方程。

一个常微分方程可以这样子描述，它可以是多变量或者单变量的函数，并且在方程中含有本身和其导函数。若方程中的未知数为多变量函数，我们称其是偏微分方程，但在接下来的计划中，我们只想讨论单变量函数，也就是常微分方程。

若我们用$t$表示自变量，再用一些$x, y, z$表示未知函数，函数关于$t$的倒数一般用点表示

$$x'(t) = \frac{dx}{dt},\ x''(t) = \frac{d^2x}{d^2t}$$

首先我们着手讨论一个一阶微分方程，即包含一个未知函数的一阶导数的方程，它可以用如下记号表示：

$$F(t, x, x') = 0$$

其中$t$是自变量，$x$是关于$t$的未知函数，而$x'$是$x$的导数。最后函数$F$是由这三个变量给定的函数。

注意的是，函数$F$可能不是对其变量的所有值都存在定义，因此要讨论$F$的定义域$B$。其中$B$指的是三个变量$t, x, x'$坐标空间中的点集。

当自变量$t$的函数$x = \varphi(t)$在某个区间$r_1 < t < r_2$上有定义，显然当我们能够成功的把$x$替换为$\varphi(t)$时，我们说这个函数$x = \varphi(t)$是一个方程的解，并称这个区间为$\varphi$解的定义区域。同样的当$\varphi(t)$在$r_1 < t < r_2$上存在导数时才可以在等式中$F(t, x, x') = 0$中做替换，为了保证可以替换，那就必须保证$t \in (r_1, r_2)$中取任何值时$(t, \varphi(t), \varphi'(t))$为坐标的点也应该在$F$的定义集合$B$中。

关系式子$F(t, x, x') = 0$在某些情况下可以把$x'$确定为自变量$t, x$的单值隐函数，这时候可以等价为

$$x' = f(t, x)$$

的微分方程，这个微分方程我们称为已解出导数的微分方程，这和我们一开始提出的微分方程相比，在某些方面较容易研究。

其次，以此作为出发点，我们则不再讨论由怎么从$x'$去解出$f(t, x)$，而是从给定的两个自变量$t, x$得到的函数$f(t, x)$作为出发点研究。

# 1 存在和唯一性定理

代数学在回答代数方程组解的个数问题的定理起了很多作用，例如代

数基本定理，$n$次多项式至多有$n$个根。若定义在复数域则每个方程都存在$n$个根。有关微分方程的解的问题也是非常主要的理论问题，结果是对每个微分方程都有一个无限多解的集合。

所以我们的重点在于怎么给定所有解的集合而不是关于解的个数问题。

### 1.1 定理1

给定微分方程

$$x' = f(t,x) \tag{1}$$

设函数$f(t,x)$在变量$(t,x)$确定的平面$P$上的某个开集$\Gamma$上存在定义，并且在整个$\Gamma$上函数$f$本身及其偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$都是$t,x$的连续函数，则我们断定：

1. 对于$\Gamma$上任意一点$(t_0,x_0)$,方程(1)都存在解$x=\varphi(t)$满足条件

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

2. 若$x=\psi(t)$和$x=\chi(t)$为方程(1)的两个解，只要在某个点$t=t_0$使得

$$\psi(t_0) = \chi(t_0)$$

则我们说对两者都有定义的变量$t$值，它们是恒等的。

其中$t_0,x_0$被我们称为解$x=\varphi(t)$的初始值，而关系式(2)被我们称为解的初始条件。

定理1告诉我们，$\Gamma$上的任一点$(t_0,x_0)$有且只有一个函数匹配。

但额外的情况是，在完全确定区间$r_1<t<r_2$上有定义的解函数$x=\varphi(t)$上，可能还存在另一个函数$x=\psi(t)$也具备同样的初始值$t_0,x_0$，但是它在另一个区间$s_1<t<s_2$上也存在定义，而定理1的第二部分断定，仅在两者都有定义的区间上$\varphi(t)$和$\psi(t)$才是完全相同的，但并没有说它们区间$r_1<t<r_2$和$s_1<t<s_2$上的函数也是一样的。如果区间中之一，例如$(s_1,s_2)$完全包含另一个区间，那么我们称定义在$(s_1,s_2)$上的解$x=\psi(t)$为$x=\varphi(t)$的延拓。那么我们自然会想关注不能向左和右继续延拓的解。这种我们叫“不可延拓的解”是真正关注的地方，因为每个解都可以用唯一的方法延拓到不可延拓解。

为了说明定理1的第二部分，我们求解微分方程

$$x' = ax$$

其中$a$是实数，则

$$f(t, x) = ax$$

利用定理1，函数$f$和$f' = a$都是连续函数，则有一个解。我们把函数

$$x = ce^{at} \tag{3}$$

带入方程中，容易验证(3)就是方程的解，其中$c$是任一实数。而由于(3)定义在整条直线$(-\infty, +\infty)$上，所以它是不可延拓的。现在我们验证定理1的第二部分，我们取$c = x_0 e^{-at_0}$，那么就得到另一个解$x = x_0 e^{a(t-t_0)}$，带入方程中不难验证当$t = t_0$就有$x = x_0$得到$(t_0, x_0)$也是方程和$x = ce^{at}$有相同的初始值。由定理2，我们知道它们其实是同一个解，但公式(3)给出的是所有解的集合。

# 2 一些初等的求积方法

当我们研究微分方程到时候，主要问题就是如何求出解，开始的时候我们试图使用初等函数以及它们的积分来表示出解，但我们都知道不是所有的积分都是有初等函数表示的，在我们弄清少数类型方程存在真正意义下的解时，我们的研究就应该转移到解的性态的一般规律性上研究。

在这一节，我们对最简单的一阶方程的求积方法做介绍。

## 2.1 全微分方程

我们求解方程

$$x' = \frac{g(t, x)}{h(t, x)} \tag{1}$$

右边是函数$g$和$h$的商形式，我们假设函数$g, h$在以变量$x, t$为变量的平面$P$上的某个开集$\Gamma$上有定义且连续。且在$\Gamma$上任意一点都有$h(t, x) \neq 0$。而且表达式$h(t, x)dt - g(t, x)dx$在$\Gamma$上是全微分。最后这个假设意味着存在一个定义在$\Gamma$上的函数$F(t, x)$满足条件

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = h(t, x), \;\; \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = -g(t, x)$$

因此我们把方程(1)写成如下形式;

$$h(t,x)dx - g(t,x)dt = 0$$

因此，对方程(1)的每个解$x = \varphi(t)$都有恒等式

$$F(t,\varphi(t)) \equiv c$$

成立，其中c是常数。

反之，每一个由方程

$$F(t,x) = c \tag{2}$$

确定的且定义在某个区间上的隐函数$x = \varphi(t)$都是(1)在区间$(r_1, r_2)$上的解。

因此在这区间内所有点都满足

$$\varphi'(t) = \frac{g(t,\varphi(t))}{h(t,\varphi(t))}$$

就有

$$h(t,\varphi(t))\varphi'(x) - g(t,\varphi(t)) = 0$$

这个式子就是$F(t,\varphi(t))$对$t$的全导数。我们就得到

$$\frac{d}{dt}F(t,\varphi(t)) = 0$$

可知$F(t,\varphi(t))$是区间上的常数。

只需要对等式

$$F(t,\varphi(t)) \equiv c$$

求导即可有

$$h(t,\varphi(t))\varphi'(x) - g(t,\varphi(t)) = 0$$

得到$x = \varphi(x)$就是微分方程(1)的解。

## 2.2 线性方程

我们来求解方程

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1}$$

其中$a, b$是定义在某个区间$r_1 < t < r_2$上的连续函数。那么这样子就满足了定理1的内容，设$t_0$是区间上的一个点，记

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau \tag{2}$$

函数$A(t)$在整个区间上都存在定义，那么方程(1)的解集可以被写成公式

$$x = \left( x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(\tau)} \tag{3}$$

其中的$x_0$是任意常数。

现在我们来证明其包含了方程1的所有解。令$x = \varphi(t)$是方程1定义在$s_1 < t < s_2$上的任意解，这个区间被$r_1 < t < r_2$包含，由于方程1等式右边只在$r_1 < t < r_2$上有定义，令$r_0, \zeta_0$是$x = \varphi(t)$的初始值。即满足条件

$$\left( x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(r_0)} = \zeta_0 \tag{4}$$

现在对等式两边分别对$t$求导并带入积分上限$t = \tau_0$可得

$$\begin{aligned} & A'(\tau_0) x_0 e^{A(\tau_0)} + \left( e^{A(\tau_0) - A(\tau_0)} b(\tau_0) + A'(\tau_0) e^{A(\tau_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) \\ = & A'(\tau_0) e^{A(\tau_0)} \left( x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) + b(\tau_0) \\ = & A'(\tau_0) \zeta_0 + b(\tau_0) \\ = & a(\tau_0) \zeta_0 + b(\tau_0) = \zeta_0 \end{aligned}$$

所以我们就证明了解$x = \varphi(t)$和我们得到的等式4在整个区间$s_1 < t < s_2$上是完全一样的。

上述公式3有一个便于记忆的推导，首先考虑齐次方程

$$y' = a(t) y \tag{1}$$

这是一个全微分，为了看出这一点我们可以改写式子为

$$\frac{dy}{y} - a(t) dt = 0$$

于是对应的函数$F(t, x)$可以由如下公式给出

$$F(t, x) = \ln \mid y \mid - A(t)$$

给出，那么该齐次方程的解利用全微分一节中的证明有

$$\ln \mid y \mid - A(t) = c_1$$

的隐函数给出，其中$c_1$是常数。那么我们可以解出

$$\mid y \mid = e^{A(t)+c} = ce^{A(t)}$$

其中$c$是任意常数值。

### 2.2.1 例题

我们来求解所谓的可分离变量方程

$$x' = f(t)g(x)$$

假设函数$f(t)$在区间$r_1 < t < r_2$上有定义且连续，而$g(x)$在区间$q_1 < x < q_2$上有定义、连续且不等于零，由于我们考虑的方程也是一个全微分方程，那么可以约定的写为

$$\frac{dx}{g(x)} - f(t)dt = 0$$

其对应的函数$F(t,x)$用公式

$$F(t,x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$$

那么我们讨论的方程的一切解就由关系式

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + c$$

确定。

## 2.3 存在和唯一性定理的叙述

这小节我们讨论一下一般的常微分方程组。

常微分方程组

$$x'^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n), i = 1, 2, 3, \cdots, n \tag{4}$$

叫做标准的，其中$t$是自变量，而$x^1, \cdots, x^n$是关于这个变量的未知函数。而函数$f^1, \cdots, f^n$是定义在$n+1$维空间上的某个开集$\Gamma$上存在$n+1$个变量

的函数。这个空间的基就是$t, x^1, \cdots, x^n$，若无标注，之后我们都假设函数$f(t, x', \cdots, x^n)$都是在$\Gamma$上连续的，同时我们也设它的偏导数

$$\frac{\partial f^i(t, x', \cdots, x^n)}{\partial x^j}, i, j = 1, \cdots, n$$

在开集$\Gamma$上存在且连续。

就像我们一开始做的一样，若连续函数组

$$x^i = \varphi^i(t), i = 1, 2, \cdots, n$$

在区间$r_1 < t < r_2$上存在定义，且满足方程(4)，则我们说它是方程组(4)的解。其中$r_1 < t < r_2$为解的定义区间。

## 2.4 定理2

现在叙述标准的方程组(1)的存在和唯一性定理。

设存在一个标准的常微分方程组

$$x^{'i} = f^i(t, x^1, \cdots, x^n), i = 1, 2, \cdots, n$$

在某个开集$\Gamma$上存在定义，且偏导数和$f$存在且连续。

那么我们可以证明对集合$\Gamma$的每一点

$$t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n \tag{5}$$

存在着标准方程组的定义在含有$t_0$的某个区间上的解

$$x^i = \varphi^i(t), i = 1, 2, \cdots, n$$

且满足条件

$$\varphi^i(t_0) = x_0^i, i = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

其次，若标准微分方程方程组存在任何两个解

$$x^i = \psi^i(t), i = 1, 2, \cdots, n$$
$$x^i = \chi^t(t), i = 1, 2, \cdots,$$

满足条件

$$\varphi^i(t_0) = \chi^i(t_0) = x_0^i$$

并且每个解的定义区域都有$t_0$被包含，那么这两个解在其共同的定义区间上处处相等。

并且我们把(5)称为解的初始值。而(6)称为解的初始条件。我们可以说解具有初始值，或者说满足初始条件。

现在，我们引入不可延拓的定义。

假设

$$x^i = \varphi^i(t), i = 1, \cdots, n \tag{7}$$

是的意义在$r_1 < t < r_2$上的解，若存在另一个区间$s_1 < t < s_2$包含上述区间，那么且解在$r_1 < t < r_2$中的完全相同，那么我们说区间$(s_1, s_2)$是$(r_1, r_2)$的延拓。当$s_1 = r_1$和$s_2 = r_2$的时候，我们说解是不可延拓的。

### 2.4.1 例题

我们求解标准线性方程组

$$x' = -\omega y, y' = \omega x$$

的解是：

$$x = c_1 \cos(\omega t + c_2),\ y = c_1 \sin(\omega t + c_2)$$

我们设

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = x_0,\ \ c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = y_0$$

设$\rho$和$\varphi$是以点$(x_0, y_0)$的极坐标，那么

$$x_0 = \rho \cos\varphi, y_0 = \rho \sin\varphi$$

重写方程有

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = \rho \cos\varphi$$

和

$$c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = \rho \sin\varphi$$

只需要令

$$c_1 = \rho, c_2 = \varphi - \omega t_0$$

求导后得到一开始的线性方程组。由定理2，该公式就是所有解的集合。