用群计算

2023 年 9 月 5 日

目录

0.1 定理：

1. 令群G作用在集合X上，若$x \in X$和$\sigma \in G$，则$G_{\sigma x} = \sigma G_x \sigma^{-1}$
2. 若有限群G作用在有限集X上且x, y位于同一轨道上，则$\mid G_y \mid = \mid G_x \mid$

证明： 若$\tau \in G_x$，则$\tau x = x$，若$\sigma x = y$，那么我们有

$$\sigma \tau \sigma^{-1} y = \sigma \tau \sigma^{-1} \sigma x = \sigma \tau x = \sigma x = y$$

因此，$\sigma \tau \sigma^{-1}$固定y，那么$\sigma G_x \sigma^{-1} \leq G_y$，那么因为$x = \sigma^{-1} y$，反包含也是容易证明的。那么$G_y = G_{\sigma x} = \sigma G_x \sigma^{-1}$

对第二个命题，若x, y在同一轨道，则这里有$\sigma \in G$带有$y = \sigma x$。利用第一个命题

$$\mid G_y \mid = \mid G_{\sigma x} \mid = \mid \sigma G_x \sigma^{-1} \mid = \mid G_x \mid$$

0.2 定理：伯恩赛德引理

设G作用在有限集合X上，若N是轨道的个数，则

$$N = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{r \in G} F(\tau)$$

其中$F(\tau)$是通过τ固定$x \in X$的个数。

证明： 列出X的元素：选择$x_1 \in X$，并列出所有轨道$\mathcal{O}(x_1)$的元素，记为$\mathcal{O}(x_1) = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$，任何选择$x_{r+1} \notin \mathcal{O}(x_1)$并列出$\mathcal{O}(x_{r+1})$的元素：$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots$；任何继续这个过程直到$X$全都被列出。现在，列出$G$的元素$\tau_1 \cdots, \tau_n$并组成下列一个由$0, 1$构成的矩阵，其中

$$f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \tau(x_j) = x_j \\ 0 & \tau_{xj} \neq x_j \end{cases}$$

$F(\tau_i)$指的是τ_i固定x的个数，它是矩阵中的第i行1的个数。根据这个定义，我们知道$\sum_{r \in G} F(\tau)$是阵列中1的个数。我们再回过头看看列，第一列中1的个数是固定x_1的τ_i的个数，根据定义，这些τ_i构成G_{x_1}，因此，容易得到第一列1的个数就是$\mid G_{x_1} \mid$，类似的，像第二列1的个数叫$\mid G_{x_2} \mid$。由于x_1, x_2处

在同一轨道，利用定理0.1我们有$\mid G_{x_1} \mid = \mid G_{x_2} \mid$，那么$x_i \in \mathcal{O}(x_1)$的$r$个列中的1的个数就是

$$r \mid G_{x_1} \mid = \mid \mathcal{O}(x_1)] \mid \cdot \mid G_{x_1} \mid = (\mid G \mid / \mid G_{x_1} \mid) \mid G_{x_1} \mid = \mid G \mid$$

并且对其他轨道也是一样的，恰好有$\mid G \mid$个1.所以，若存在N个轨道，则有$N \mid G \mid$个1。那么

$$\sum_{r \in G} F(\tau) = N \mid G \mid$$

现在我们利用伯恩塞德定理解决下列问题：一面棋子上有6个条纹（长度相同），其中每个条纹可以染成红、白或者蓝色。那么这种带条纹的棋子有多少种？现在，对于下面的旗子：

r	w	b	r	w	b
b	w	r	b	w	r

明显是一样的，因为下面的旗子只是翻转了上面的旗子。

令X是由颜色构成的所有6元组组成的集合，若$x \in X$，则

$$x = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$$

其中每个c_i是红、白或者蓝色。令τ是一个翻转所有指标的置换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$$

循环群$G = \langle \tau \rangle$作用在X上。并且$\mid G \mid = 2$，所以对任意6元组x的轨道由1个或者2个元素构成，τ固定x或者不固定。由于意面棋子不会因为被翻转有所该阿扁，那么我们把棋子和一个轨道等同起来是完全合理的。例如：

$$(r, w, b, r, w, b)$$

$$(b.w.r, b, w, r)$$

构成的轨道就是我们刚才说的旗子。所以旗子的数量就是轨道的个数N。利用伯恩赛德引理，就有

$$N = \frac{1}{2}[F((1)) + F(\tau)]$$

恒等置换固定每个$x \in X$，所以$F((1)) = 3^6$种，那么当τ固定6元组的时候，置换称为“回文” 它的意思是x的颜色正着读还是反着读都一样。例如：

$$x = (r, r, w, w, r, r)$$

就被τ固定，反之。若

$$x=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)$$

被$\tau=(1\,6)(2\,5)(3\,4)$固定，那么c_1,c_2,c_3都有三种选择，且x是一个回文，那么$F(\tau)=3^3$。那么旗子的数量就是

$$N=\frac{1}{2}(3^6+3^3)=378$$

0.3 定义：染色

给定G在$X=\{1,2,\cdots,n\}$上的一个作用，且C是由q种颜色构成的集合，则G通过

$$\tau(c_1,\cdots,c_n)=(c_{\tau 1},\cdots,c_{\tau n}),\tau\in G$$

在集合C^n上作用，其中C^n是由颜色组成的所有n元组构成的集合，且把$(c_1,\cdots,c_n)\in C^n$的轨道称为X的(q,G)染色。

例1

在4×4的每个方格中染上红或者黑色，也许我们可以在相邻的方块涂上同一种颜色，所以一种特殊的情况是，整个正方形都是黑或者是红的。

若X是由网格中的16个正方形组成的且若C是由两种颜色：红、黑组成的。则阶为4的循环群$G=\langle R\rangle$作用在X上，其中R是顺时针旋转90度，我们来看看是怎么作用的：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

旋转90度：

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

那么，写成置换就是：

$$\begin{aligned}R &=(1,4,16,13)(2,8,15,9)(3,12,14,5)(6,7,11,10)\\ R^2 &=(1,16)(4,13)(2,15)(8,9)(3,14)(12,5)(6,11)(7,10)\\ R^3 &=(1,13,16,4)(2,9,15,8)(3,5,14,12)(6,10,11,7)\end{aligned}$$

一个红黑棋盘并不会因为旋转而发生变换，是被固定的，所以只是观察它的角度不同罢了，所以一个棋盘实际上就是X的$(2,G)$染色。一个16元组的轨道对应观察棋盘的四个方式。那么利用伯恩赛德引理，这种棋盘的个数就是

$$\frac{1}{4}[F((1))+F(R)+F(R^2)+F(R^3)]$$

$F((1))=2^{16}$，因为每个16元组都被恒等函数固定，为了计算$F(R)$，由于是2种颜色构成的棋盘，那么我们知道四个顶点的颜色是一样的，以此类推就知道$1,4,16,13$具备相同的颜色，$2,8,15,9$也是一样的等等、所以我们就知道每种可能是2^4，并且注意4是循环中的完全分解个数，接下来$F(R^2)=2^8$，这是因为R^2具备8个完全分解。那么对于R^3就是2^4，所以棋盘的个数是

$$N=\frac{1}{4}[2^16+2^4+2^8+2^4]=16456$$

如果不用群论，我们用普通的统计原理来做是相当麻烦的，必须考虑所有规律和不规律的。并且很可能会把相同的棋盘至少计算两次！这是经常会犯的致命弱点。

现在我们来看怎么用置换τ的循环结构去计算$F(\tau)$的。

0.4 定理：

令C是q种颜色组成的集合，再令$\tau \in S_n$

1. 若$F(\tau)$是被τ固定的$x \in C^n$的个数，且若$t(\tau)$是τ完全分解得到的置换个数，则
$$F(\tau) = q^{t(\tau)}$$

2. 若有限群G作用在$X = \{1, \cdots, n\}$上，则(q, G)染色的个数N是
$$N = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{r \in G} q^{t(\tau)}$$

其中$t(\tau)$是τ的完全分解的置换个数。

证明： 对第一个命题，我们设$\tau \in S_n$，并且$\tau = \beta_1 \cdots \beta_t$是一个完全分解，其中每个$\beta_j$都是一个$r_j$循环，若$i_1, \cdots, i_{r_j}$是被$\beta_j$移动的符号，则$i_{k+1} = \tau^k(i_1)$，其中$k < r_j$，因此$\tau(c_1, \cdots, c_n) = (c_{\tau 1}, \cdots, c_{\tau n})$。其中$c_{\tau i_1} = c_{i_1}$是具备相同颜色的。也许$\tau^2 i_1$是和$i_1$具备相同颜色的；事实上，对所有的$k$，$\tau^k i_1$和$i_1$具备相同的颜色[1]。我们用另一种视角来看这种观点，对于点$\tau^k i_1$是恰好被β_j移动的。那么$\beta_j = (i_1, i_2, \cdots, i_{r_j})$，因此，若$(c_1, \cdots, c_n)$被$\tau$固定，对每个$j$，其中对于下标$k$来说，被$\beta_j$移动所有符号$c_k$都拥有相同的颜色。所以存在$q$种颜色和$t(\tau)$个$\beta_j$，因此，每个置换中的颜色都是一样的，这意味着对$q$种颜色，都存在$q^{t(\tau)}$个$n$元组被$\tau$固定。

对于第二个命题，我们利用伯恩赛德引理，轨道就是一个我们确定的q染色(q, G)，并且利用我们刚才证明的命题，$q^{t(\tau)}$就是被置换τ固定的个数，所以我们就得到
$$N = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{r \in G} q^{t(\tau)}$$

[1]因为此时我们由题设可知存在被固定的置换，而且恰好就是完全分解的个数

例2

我们来简单的重新简化例1的计算，一个群G作用在4个元素$1, R, R^2, R^3$组成的所有4×4格子的集合X上，我们已经在例1给出了这些元素的完全分解，并且有

$$\tau(1) = 16,\ \tau(R) = 4 = \tau(R^3),\ \tau(R^2) = 8$$

利用刚才的定理就有

$$N = \frac{1}{4}[2^{16} + 2 \cdot 2^4 + 2^8]$$

0.5 定义：指数

若$\tau \in S_n$的完全分解有$e_r(\tau) \geq 0$个r循环，则τ的指数是指单项式

$$\mathrm{ind}(\tau) = x_1^{e_1(\tau)} x_2^{e_2(\tau)} \cdots x_n^{e_n(\tau)}$$

若G是S_n的子群，则G的循环指数指的是系数在有理数域Q中的有n个变量的多项式：

$$P_G(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{r \in G} \mathrm{ind}(\tau)$$

例如，对于一开始旗帜的例子，是一个阶为2的群G，其中的置换$\tau = (1\,6)(2\,5)(3\,4)$，所以，对于恒等置换的指数就是$\mathrm{ind}((1)) = x_1^6$，而$\mathrm{ind}(\tau) = x_2^3$，以及

$$P_G(x_1, \cdots, x_6) = \frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^3)$$

0.5.1 命题：

若$\mid X \mid = n$且G是S_n的子群，则X的(q, G)染色个数是多项式$P_G(q, \cdots, q)$，其中$P_G(x_1, \cdots, x_n)$是循环指数。

证明： 利用定理0.4，我们知道X的(q, G)染色个数就是

$$\frac{1}{\mid G \mid} \sum_{r \in G} q^{t(\tau)}$$

其中$t(\tau)$是τ完全分解的个数，对于其他方面

$$\begin{aligned}P_G(x_1,\cdots,x_n)=&\frac{1}{\mid G\mid}\sum_{r\in G}\mathrm{ind}(\tau)\\=&\frac{1}{\mid G\mid}\sum_{r\in G}x_1^{e_1(\tau)}\cdots x_n^{e_n(\tau)}\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}P_G(q,\cdots,q)=&\frac{1}{\mid G\mid}\sum_{r\in G}q^{e_1(\tau)+\cdots e_n(\tau)}\\=&\frac{1}{\mid G\mid}\sum_{r\in G}q^{t(\tau)}\end{aligned}$$

让我们重新计算那个16个格子组成的红-黑棋盘，由于

$$P_G(x_1,\cdots,x_{16})=\frac{1}{4}(x_1^{16}+x_2^8+2x_4^4)$$

那么利用定理我们就知道棋盘个数就是

$$P_G(2,\cdots,2)=\frac{1}{4}(2^{16}+2^8+2\cdot 2^4)$$

注解 ：对于一个$X=\{1,2,\cdots,n\}$上的作用，不妨假设G是置换群，那么对于轨道，就有$\mathcal{O}(i)=\sigma^k(i)$，其中$\sigma$是一个置换。现在，对那个棋盘中的例子，它含有四个元素，那么就存在一个四元组，利用定理0.4的命题2，我们就得到了结果。然后在利用定理0.5.1就是我们想要的东西。

0.6 定理：波利亚

令$G\leq S_X$，其中$\mid X\mid=n$，并令$\mid C\mid=q$，对每个$i\geq 1$，定义$\sigma_i=c_1^i+\cdots+c_q^i$。对每个$r$，$X$含有$f_r$个颜色$c_r$的$(q,G)$染色的数量，恰好就是循环指数$P_G(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$的系数$c_1^{f_1}c_2^{f_2}\cdots c_q^{f_q}$

现在利用这个定理来解决旗子问题，注意到拥有两种颜色和9个条纹的旗子的循环指数是

$$P_G(x_1,\cdots,x_9)=\frac{1}{2}(x_1^9+x_1x_2^4)$$

参考定理0.2中的例子，我们对一个6个条纹的旗子进行置换，那么现在我们把这种操作运用在拥有9个条纹的旗子上，不难看出除了恒等置换x_1之外，对翻转的操作，我们可以有如下的分解：对x_1到x_9，一定存在一个被固定

的常数，不妨设为x_5，那么剩下的数由于被翻转，则可以分解为4个二元的置换，因此，对这种操作下的置换的完全分解的指数就可以表示为$x_1x_2^4$。这样子就得到了我们的指数。那么由于颜色有两种，只需要利用定理0.5.1，那么就有

$$P_G(2,\cdots,2)=\frac{1}{2}(2^9+2^5)=272$$

如果我们要利用波利亚定理，那么有4个蓝色条纹和5个白色条纹的旗子的个数可以这样子计算：

利用波利亚定理，我们定义符号$\sigma_i=b+w$，其中b是蓝色，w是白色，对第一个置换恒等置换我们知道$\sigma_1=b+w$，并且由于只有两个置换且第二个置换为$x_1x_2^4$，那么根据波利亚定理，第二个置换就是$\sigma_2=b^2+w^2$，最后，由波利亚定理，我们就知道有

$$P_G(\sigma_1,\cdots,\sigma_9)=\frac{1}{2}[(b+w)^9+(b+w)(b^2+w^2)^4]$$

那么我们要的东西，是循环指数中的系数$c_1^{f_1}\cdots$，根据一开始的提议，一面旗子含有4个蓝色条纹和5个白色条纹，那么这里的系数$f_1=4,f_2=5$，我们要的东西就是多项式中的系数b^4w^5，利用二项式定理不难得到就是66