Vektoroperation: Kreuzprodukt

Was ist ein Kreuzprodukt?

Du kennst vielleicht bereits

- die **skalare Multiplikation**, hier wird ein **Vektor** mit einem **Skalar**, also einer Zahl multipliziert, das Ergebnis ist ein Vektor:
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$
- oder das **Skalarprodukt** zweier Vektoren, das Ergebnis ist ein Skalar, oder eine Zahl: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

Das **Kreuzprodukt** hat als Ergebnis einen **Vektor**. Daher kommt der Name. Es wird auch als **vektorielles Produkt**, **Vektorprodukt** oder **äußeres Produkt** bezeichnet.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist wie folgt definiert:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Ein Trick zur Berechnung des Kreuzproduktes

Die obige Definition sieht schon recht kompliziert aus. Du kannst mit einem einfachen Trick das Vektor- oder auch Kreuzprodukt zweier Vektoren berechnen. Dies siehst du hier an einem Beispiel. Berechnet werden soll das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, für die gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann kannst du das Kreuzprodukt folgendermaßen, berechnen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Schreibe zunächst die jeweils ersten beiden Koordinaten der Vektoren noch einmal unter die Vektoren:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 3 & & 2 \\ 4 & & -1 \end{array}$$

- Nun kannst du, Koordinate für Koordinate, das Kreuzprodukt berechnen, das bedeutet die Koordinaten des resultierenden Vektors:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{pmatrix} \\ 3 & & 2 & & \\ 4 & & -1 & & \end{array}$$

- Multipliziere die Koordinaten von links oben nach rechts unten (hier rot) und ziehe davon das Produkt der Koordinaten von links unten nach rechts oben (hier grün) ab.
- Ebenso machst du dies mit den nächsten beiden Koordinaten. Das siehst du hier:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \\ \\ \end{pmatrix} \\ 3 & & 2 & & \\ 4 & & -1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ 3 & & 2 & & \\ 4 & & -1 & & \end{array}$$

- Zuletzt berechnest du die jeweiligen Differenzen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Du hast damit das Kreuzprodukt berechnet:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Wofür benötigst du eigentlich das **Kreuzprodukt**?

Wenn du den Ergebnisvektor mit jedem der beiden Vektoren multiplizierst, erhältst du:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} = 27 - 16 - 11 = 0$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} = 18 + 4 - 22 = 0$$

Wenn das **Skalarprodukt** zweier Vektoren 0 ergibt, bedeutet dies, dass die Vektoren orthogonal, also senkrecht, zueinander sind.

Der resultierende Vektor des **Kreuzproduktes** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht also senkrecht auf den beiden Vektoren. Es gilt:

- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$
- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

Wenn durch die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine **Ebene** aufgespannt wird, steht also der aus dem Kreuzprodukt resultierende Vektor senkrecht zu der Ebene. Man bezeichnet den Vektor dann als **Normalenvektor** der Ebene. Dieser Vektor wird mit $\vec{n}$ bezeichnet.

Quelle: https://www.sofatutor.com/mathematik/lineare-algebra-und-analytische-geometrie/vektorrechnung/kreuzprodukt?sofa_cn=[T]_Dynamic_topic_test_(SP)&sofa_ct=topic_text&gclid=EAIaIQobChMIy5ijju3u3QIVwud3Ch1JiAWGEAAYASAAEgIh1PD_BwE