Matematička analiza 1 - Poglavlje 2

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 15. RUJNA 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

2. Funkcije i relacije

S pojmom funkcije susrećemo se već od kraja osnovnoškolskog, a posebno tijekom srednješkolskog obrazovanja. Cilj ovog poglavlja je uvesti osnovne matematičke pojmove funkcije i relacije na jedan sustavan i matematički precizan način. Relacije (sekcija 2.2) su matematički objekti koji proširuju pojam funkcije i od izuzetne su važnosti u računarstvu. Na kraju poglavlja ćemo pojam funkcije, preciznije bijekcije, iskoristiti kao alat za brojenje elemenata skupova (sekcija 2.3).

Ključni pojmovi: funkcija 6, slika funkcije 8, bijekcija 11, kompozicija 15, binarna relacija 21, relacija ekvivalencije 23, klase ekvivalencije 25, ekvipotentni skupovi 28, prebrojivi skupovi 31.

2.1 Funkcije

Pojam funkcije ili preslikavanja jedan je od osnovnih matematičkih pojmova i kao takav sveprisutan je u matematičkoj, prirodnoznanstvenoj i inženjerskoj literaturi. Na primjer, svakom građaninu Hrvatske na jedinstven način možemo pridružiti trenutni broj godina starosti, zatim svakoj točki na zemljopisnoj karti na jedinstven način pridružujemo nadmorsku visinu. U fizici, brzinu tijela koje se giba ili pak temperaturu užarenog tijela možemo shvatiti kao funkcije vremena na način da svakom vremenskom trenutku t pridružimo trenutnu brzinu tijela $v(t)$, odnosno trenutnu temperaturu $T(t)$. U geometriji, površinu kvadrata duljine stranice a možemo shvatiti kao funkciju — površina iznosi a^2. Kako biste opseg i površinu kruga shvatili kao funkcije polumjera? Uočimo u prethodnim primjerima da različitim objektima (npr. ljudima), možemo pridružiti iste vrijednosti (npr. broj godina).

2.1.1 Definicija funkcije

Uvedimo sada preciznu matematičku definiciju pojma funkcije.

Definicija 2.1.1 **Funkcija** ili **preslikavanje**, u oznaci

$$f : D \to K\,,$$

sastoji se od dva neprazna skupa D i K te **pravila pridruživanja** koje *svakom* elementu $x \in D$ pridružuje *točno jedan* element $y \in K$, što označavamo s

$$x \mapsto y = f(x)\,.$$

Skup D zovemo **domena** ili područje definicije, a skup K zovemo **kodomena** ili područje vrijednosti. Elemente domene zovemo **argumenti funkcije** ili **originali**. ■

Kažemo još i da pravilo pridruživanja preslikava argument $x \in D$ u vrijednost $f(x) \in K$. Pravilo pridruživanja može biti zadano na više načina. Neki od tih načina su:

- eksplicitna formula,
- tablica,
- grafički.

Navedimo sada ilustrativne primjere za svaki od načina zadavanja pravila pridruživanja.

■ **Primjer 2.1** Funkcija *sljedbenik prirodnog broja*, s kojom smo se susreli već u prvom poglavlju, definirana je na skupu prirodnih brojeva, $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a pravilo pridruživanja $n \mapsto s(n)$ dano je eksplicitnom formulom

$$s(n) = n + 1\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

■

Vježba 2.1 Navedite primjer funkcije zadane eksplicitnom formulom na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, koja poprima vrijednosti u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

■ **Primjer 2.2** Funkcija $t : \{7,8,9,10,D,B,K,A\} \to \{1,2,3,\ldots,19,20\}$ zadana je svojom domenom $D = \{7,8,9,10,D,B,K,A\}$, kodomenom $K = \{1,2,3,\ldots,19,20\}$ i pravilom pridruživanja $x \mapsto t(x)$, koje je dano tablicom

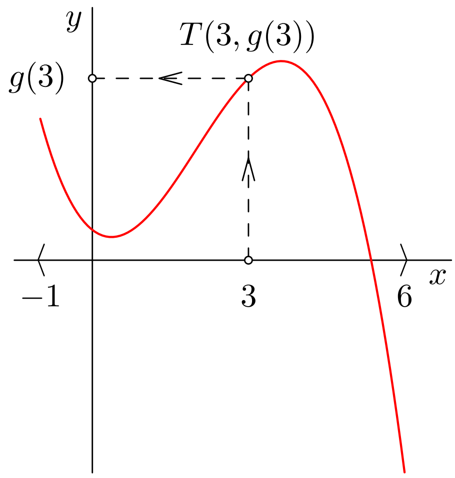
x	7	8	9	10	D	B	K	A
$t(x)$	0	0	14	10	20	3	4	11

.

■

Vježba 2.2 Definirajte funkciju *zamjena slova* $\sigma : \{A,B,C,\ldots\} \to \{A,B,C,\ldots\}$ na skupu svih slova hrvatske abecede i to na način da se nikoja dva različita slova ne preslikavaju u isto slovo.

■ **Primjer 2.3** Funkcija $g : \langle -1,6\rangle \to \mathbb{R}$ u ovom primjeru zadana je grafički pomoću grafa sa Slike 2.1. Domena $D = \langle -1,6\rangle$ označena je na x-osi, a vrijednosti funkcije nalaze se na y-osi. Pravilo pridruživanja $x \mapsto g(x)$ zadano je preko *grafa* (označenog crvenom bojom) na način da za svaki element $x \in D$, pripadni $y = g(x) \in \mathbb{R}$ očitamo na način kako je označeno na slici. ■



Slika 2.1: Primjer grafički zadane funkcije. Npr. za točku $3 \in \langle -1, 6\rangle$, vrijednost funkcije $g(3)$ očitamo na vertikalnoj osi prateći strelice na isprekidanim linijama.

Primjer 2.3 ilustrira jednu **realnu funkciju realne varijable**. To su općenito funkcije $f : D \to K$ kojima su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ (često se radi jednostavnosti uzima $K = \mathbb{R}$), i to je najvažnija klasa funkcija kojima ćemo se baviti u okviru predmeta Matematička analiza 1. U pravilu su realne funkcije realne varijable zadane eksplicitnom formulom, kao npr. *kvadratna funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je zadana s $x \mapsto f(x) = x^2$ ili *razlomljena linearna funkcija* $h : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ zadana s $x \mapsto h(x) = \frac{1}{x}$. "Grafičko zadavanje" funkcije, kao u Primjeru 2.3, može biti rezultat mjerenja jedne fizikalne veličine u ovisnosti o drugoj veličini u nekom eksperimentu. U takvim slučajevima eksplicitne formule najčešće nisu dostupne.

Napomena 2.1 Dvije funkcije su jednake ukoliko se podudaraju u domeni, kodomeni i pravilu pridruživanja. Drugim riječima, ako je jedan od tih elemenata (sastavnica) različit, funkcije su različite. Na primjer kvadratne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ i $g : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ su različite, jer su im domene različite. Skicirajte grafove tih dviju funkcija, time će biti jasnije zašto su različite.

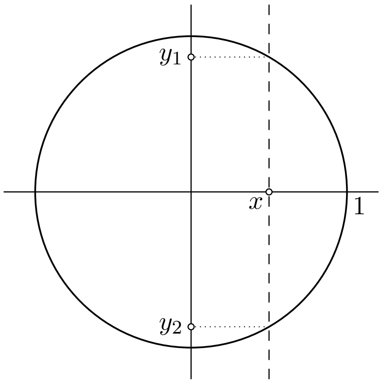
Graf funkcije

Kao što je već naznačeno kroz prethodnu diskusiju, realne funkcije realne varijable u potpunosti su određene svojim grafom. **Graf** realne funkcije realne varijable, u oznaci $\Gamma(f)$, je skup točaka ravnine $\mathbb{R}^2$, tj. skup uređenih parova realnih brojeva $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje vrijedi jednakost $y = f(x)$ za sve $x \in D$. Kraće to zapisujemo u obliku

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\,,\ x \in D\}\,.$$

U tom smislu često se i sama funkcija poistovjećuje i označava s **jednadžbom grafa** $y = f(x)$.

Vježba 2.3 Nacrtajte graf kvadratne funkcije $y = x^2 - 5x + 6$ i razlomljene linearne funkcije $y = \dfrac{5}{x-2}$.



Slika 2.2: Jedinična kružnica.

S druge strane, možemo se pitati kada neki skup točaka ravnine odgovara grafu realne funkcije? Odgovor je formuliran je tzv. *vertikalnim testom*:

> Graf funkcije ima svojstvo da ga svaki pravac paralelan s osi y siječe u najviše jednoj točki.

Vrlo ilustrativan primjer skupa točaka ravnine koji *ne zadovoljava* vertikalni test je kružnica (Slika 2.2). Nasuprot tome, graf funkcije g iz Primjera 2.3 očito zadovoljava vertikalni test.

Vježba 2.4 Navedite još neke primjere skupa točaka u ravnini koji ne zadovoljavaju vertikalni test i time ne mogu biti graf funkcije.

> **Napomena 2.2** Jediničnu kružnicu (Sliku 2.2) možemo prikazati kao *uniju* grafova funkcija $y = \sqrt{1-x^2}$ (gornja polukružnica) i $y = -\sqrt{1-x^2}$ (donja polukružnica). Nacrtajte pripadne grafove i uvjerite se da zadovoljavaju vertikalni test.

Za općenitu funkciju $f : D \to K$, **graf funkcije** je podskup Kartezijevog produkta skupova D i K, odnosno

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in D \times K \mid y = f(x)\,,\ x \in D\} \subseteq D \times K\,.$$

2.1.2 Slika funkcije

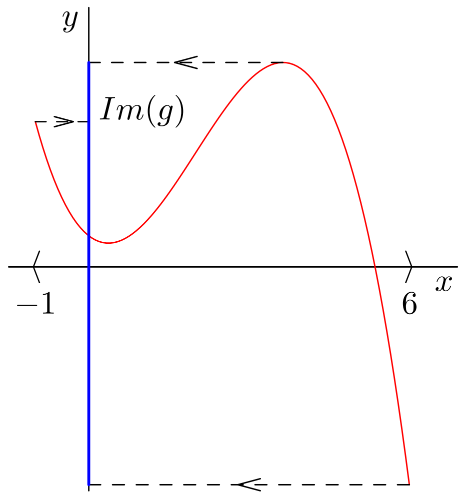
Primijetimo u Primjerima 2.1 - 2.3 da funkcije ne poprimaju sve vrijednosti koje se nalaze u kodomeni, tj. postoje $y \in K$ u koje se niti jedan $x \in D$ ne preslikava. Simbolički to pišemo

$$\exists y \in K\,,\ \forall x \in D\,,\ y \neq f(x)\,.$$

Na primjer, u Primjeru 2.1 funkcija s ne poprima vrijednost $1 \in \mathbb{N}$, u Primjeru 2.2 funkcija t ne poprima vrijednost $15 \in \{1,2,3,\dots,19,20\}$, dok u Primjeru 2.3 funkcija g ne poprima vrijednost $10 \in \mathbb{R}$.

Definicija 2.1.2 **Slika funkcije** $f : D \to K$ je skup svih vrijednosti koje funkcija f poprima. Označava se s $Im(f)$ (engl. image) i simbolički pišemo

$$Im(f) = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq K\,.$$



Slika 2.3: Određivanje slike funkcije — ortogonalna projekcija grafa na y-os.

Dakle, slika je podskup kodomene.

Vježba 2.5 Odredite po definiciji slike funkcija s i t iz Primjera 2.1 i 2.2.

Promotrimo sada kako odrediti sliku funkcije g iz Primjera 2.3? Ideja je vrlo jednostavna i možemo ju primijeniti za sve realne funkcije realne varijable — ortogonalno projiciramo graf funkcije na y-os (na Slici 2.3 $Im(g)$ je označena plavom bojom). Međutim, precizno određivanje slike zahtijeva bolje poznavanje same funkcije. U ovom konkretnom primjeru, treba nam informacija o maksimalnoj vrijednosti funkcije g. Kako odrediti tu vrijednost? Zatim, je li slika zatvoreni ili otvoreni interval? To su općenito vrlo netrivijalna pitanja i potpuni odgovor na njih dat ćemo za određenu klasu funkcija u Poglavlju 10. Navedimo sada nekoliko jednostavnijih primjera, čije slike možemo određivati bez poznavanja naprednijih alata.

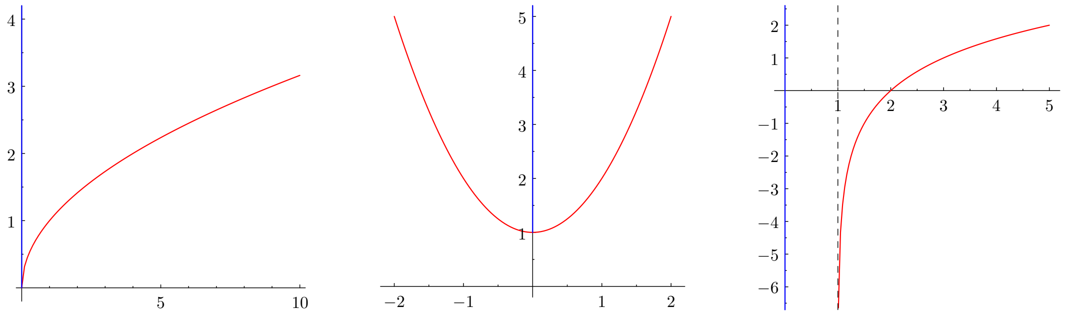
Primjer 2.4 Računski i grafički odredite slike sljedećih funkcija:

(a) $f : [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \sqrt{x}$,
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = x^2 + 1$,
(c) $h : \langle 1,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadana s $h(x) = \log_2(x-1)$.

Rješenje.

(a) Pokažimo da je $Im(f) = [0,+\infty\rangle$.
Jednakost skupova $A = B$ možemo pokazati tako da pokažemo dvije inkluzije, tj. da vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Kako je $f(x) = \sqrt{x} \geq 0$ za sve $x \in D(f)$, zaključujemo da je $Im(f) \subseteq [0,+\infty\rangle$. Obrnuto, uzmimo proizvoljni $y \in [0,+\infty\rangle$, tada postoji $x \geq 0$ takav da je $y = \sqrt{x}$, to je upravo $x = y^2$. Time smo pokazali da svaki nenegativan realan broj možemo prikazati kao korijen nenegativnog realnog broja (njegovog kvadrata), odnosno pokazali smo i drugu inkluziju $[0,+\infty\rangle \subseteq Im(f)$. Stoga je $Im(f) = [0,+\infty\rangle$. Grafički, vidi Sliku 2.4a.

(b) Očito je $g(x) = x^2 + 1 \geq 1$ za sve $x \in D(g) = \mathbb{R}$, iz čega slijedi $Im(g) \subseteq [1,+\infty\rangle$. Obratno, uzmimo proizvoljan $y \in [1,+\infty\rangle$ i tražimo $x \in D(g)$ takav da vrijedi $y = g(x)$, tj. $x^2 = y - 1$. Kako je $y - 1 \geq 0$, jednadžba $x^2 = y - 1$ ima rješenje u skupu



(a) $f(x) = \sqrt{x}$. (b) $g(x) = x^2 + 1$. (c) $h(x) = \log_2(x-1)$.

Slika 2.4: Slike funkcija iz Primjera 2.4.

realnih brojeva, odnosno postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $g(x) = y$. Dakle, svaki $y \in [1, +\infty\rangle$ možemo prikazati kao sliku nekog originala $x \in \mathbb{R}$ po funkciji g, tj. $[1, +\infty\rangle \subseteq Im(g)$. Za grafički prikaz vidi Sliku 2.4b.

(c) Pokažimo da je $Im(h) = \mathbb{R}$. Po definiciji slike je $Im(h) \subseteq \mathbb{R}$. Obratno, neka je $y \in \mathbb{R}$ proizvoljan, tražimo $x \in \langle 1, +\infty\rangle$ takav da je $y = h(x)$, tj. $y = \log_2(x-1)$. Ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = 2^y + 1$ i očito je $x \in \langle 1, +\infty\rangle$. Dakle, $\mathbb{R} \subseteq Im(h)$, odakle slijedi tvrdnja. Grafički je funkcija prikazana na Slici 2.4c.

■

Vježba 2.6 Računski i grafički odredite slike sljedećih funkcija:
(a) $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$,
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -e^{x+1}$,
(c) $h : \langle -\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{1-x}$.

Često je od interesa poznavanje samo dijela slike funkcije, odnosno za dani podskup domene, $A \subset D$, zanima nas **slika skupa A po funkciji** f, što označavamo s $f(A)$ i simbolički pišemo

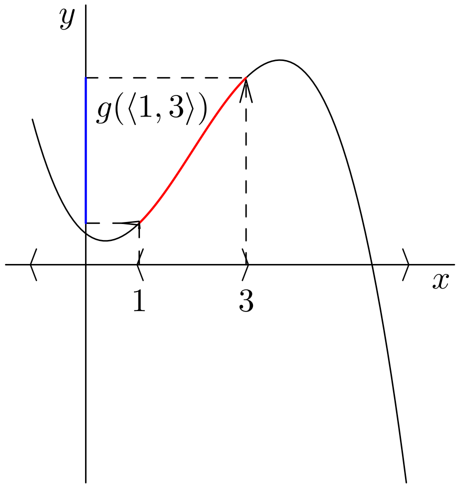
$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Im(f) \subseteq K\,.$$

U smislu prethodne definicije, za funkciju $f : D \to K$ vrijedi $f(D) = Im(f)$, tj. sliku funkcije možemo označavati i s $f(D)$.

Vježba 2.7 Odredite $s(\{1,2,\ldots,10\})$ i $t(\{D,B,K,A\})$ iz Primjera 2.1 i 2.2.

Kako biste odredili $g(\langle 1,3\rangle)$ u Primjeru 2.3? Načelno je to pitanje istovjetno određivanju cijele slike funkcije — najprije projiciramo interval $\langle 1,3\rangle \subset D$ na graf funkcije g, a zatim dobiveni skup projiciramo na y-os (vidi Sliku 2.5). Određivanjem slika funkcija detaljnije ćemo se još baviti u Poglavlju 5.

Vježba 2.8 Računski i grafički odredite sljedeće slike:
(a) $f(\langle 0,1\rangle)$, gdje je $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$;
(b) $g(\langle -1,1])$, gdje je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -e^{x+1}$;
(c) $h([-8,1])$, gdje je $h : \langle -\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{1-x}$.



Slika 2.5: Određivanje dijela slike funkcije (podslike).

2.1.3 Injekcija, surjekcija, bijekcija

Promotrimo sada neka osnovna svojstva koja nas zanimaju kod funkcija.

Definicija 2.1.3 Neka je $f : D \to K$ funkcija.

- Ako funkcija f ima svojstvo da za svaki element kodomene $y \in K$ postoji (barem jedan) element domene $x \in D$ koji se u njega preslikava, tj. $y = f(x)$, onda takvu funkciju zovemo **surjekcija**. Simbolički to pišemo
$$\forall y \in K,\ \exists x \in D,\ y = f(x).$$
- Ako funkcija f različite originale preslikava u različite slike, tj.
$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \tag{2.1}$$
onda funkciju nazivamo **injekcija**.
- Funkciju koja je surjekcija i injekcija zovemo **bijekcija**.

Napomena 2.3

1. Primijetimo da je funkcija $f : D \to K$ surjekcija ako i samo ako joj je kodomena jednaka slici, tj. $K = Im(f)$, što je očito po definiciji.
2. U definiciji injekcije logički iskaz 2.1 ekvivalentan je (primjenom obrata po kontrapoziciji) sljedećem iskazu:
$$(\forall x_1, x_2 \in D),\ (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2). \tag{2.2}$$
Taj iskaz je operativniji i češće se koristi u dokazima injektivnosti.
3. Ako je $f : D \to K$ injekcija, tada je funkcija $f : D \to Im(f)$ bijekcija.
4. Funkcija je bijekcija ako za svaki element y iz kodomene *postoji jedinstveni*

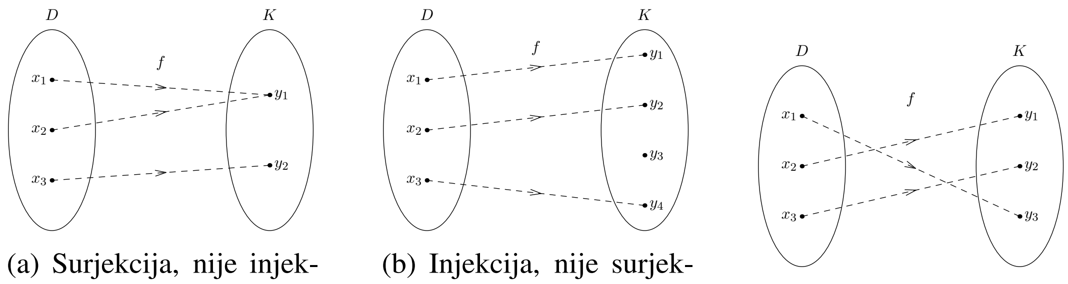
original x koji se u njega preslikava, tj.

$$\forall y \in K\,,\ \exists! x \in D\,,\ y = f(x)\,.$$

Vježba 2.9 Negirajte definicije surjekcije i injekcije te provjerite svojstva injektivnosti i surjektivnosti za funkcije iz Primjera 2.1 - 2.3.

■ **Primjer 2.5** Promotrimo sada nekoliko shematskih primjera funkcija koji ilustriraju svojstva surjektivnosti, injektivnosti i bijektivnosti.

(a) Slika 2.6a prikazuje funkciju koja je surjekcija, jer za svaki y postoji x koji se u njega preslikava. Međutim, nije injekcija, jer se različiti elementi x_1 i x_2 preslikavaju u y_1.
(b) Slika 2.6b prikazuje funkciju koja nije surjekcija, jer postoji element $y_3 \in K$ u kojega se nikoji $x \in D$ ne preslikava, ali jest injekcija jer se različiti x-evi preslikavaju u različite y.
(c) Konačno, slika 2.6c prikazuje funkciju koja je injekcija i surjekcija, dakle, bijekcija.



(a) Surjekcija, nije injekcija.

(b) Injekcija, nije surjekcija.

(c) Bijekcija.

Slika 2.6: Shematski prikaz različitih funkcija.

■

■ **Primjer 2.6** Neka je S skup koji ima konačno mnogo elemenata, npr. $S_8 = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Funkcija $f : S \to S$ koja je bijekcija naziva se još **permutacija**. Primijetimo da svaka permutacija odgovara točno jednom poretku elemenata iz S. Npr. jedna permutacija na S_8 dana je s

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	8	7	6	5	4	3	2	1

.

■

Vezano za prethodni primjer, prirodno se postavlja pitanje koliko ima različitih permutacija na skupu S ili općenito, koliko ima permutacija na skupu od n članova? Odgovor na to pitanje dati ćemo u idućem poglavlju, gdje ćemo se baviti prebrojavanjem različitih objekata. Između ostalog, odgovorit ćemo i na pitanje koliko ima injekcija i općenito funkcija iz nekog n-članog u m-člani skup?

Injektivnost realne funkcije realne varijable lako možemo provjeriti ukoliko nam je poznat graf te funkcije.

Ako je funkcija injekcija, onda njezin graf ima svojstvo da ga svaki pravac paralelan s osi x siječe u najviše jednoj točki i obratno.

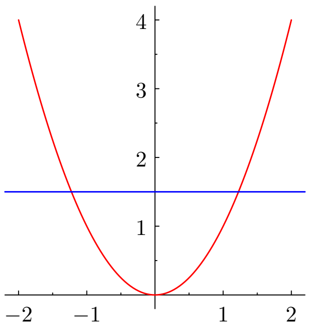
To je tzv. *horizontalni test* za provjeru injektivnosti funkcije. Ekvivalentno, ako neki pravac paralelan s osi x siječe graf funkcije u barem dvije točke, onda to nije graf injekcije. Tako već na Slici 2.1 vidimo da g iz Primjera 2.3 nije injekcija.

■ **Primjer 2.7** Ispitajte injektivnost funkcija:

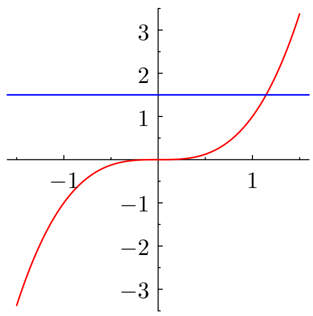
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = x^2$,
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = x^3$,
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $h(x) = \sin(x)$.

Rješenje.

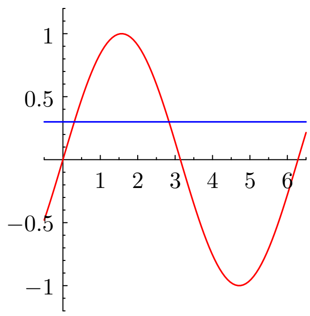
(a) Kvadratna funkcija f nije injekcija, jer za različite $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2) = 1$. Grafčki to vidimo na Slici 2.7a, gdje nam horizontalni test kaže da funkcija f nije injekcija.
(b) Kubna funkcija g jest injekcija. Dokažimo to na sljedeći način. Pretpostavimo da je $g(x_1) = g(x_2)$ za neke $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, odnosno $x_1^3 = x_2^3$. To je ekvivalentno s $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$, a kako je $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$ (osim u slučaju da su oba $x_1 = x_2 = 0$), iz prethodne jednakosti nužno slijedi da je $x_1 = x_2$. Time smo prema (2.2) pokazali da je funkcija g injekcija. Promotrimo graf funkcije g (Slika 2.7b) i uvjerimo se da on zadovoljava horizontalni test, tj. proizvoljni pravac paralelan s x-osi siječe graf funkcije g u najviše jednoj točki.
(c) Funkcija sinus nije injekcija, jer $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$. Općenito periodičke funkcije nisu injekcije. Graf funkcije sinus ne zadovoljava horizontalni test (Slika 2.7c)



(a) $f(x) = x^2$



(b) $g(x) = x^3$



(c) $h(x) = \sin(x)$

Slika 2.7: Ispitivanje injektivnosti funkcija pomoću grafa.

■

Vježba 2.10 Ispitajte injektivnost funkcija:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 1 - x^4$,
(b) $g : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$,
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $h(x) = \cos(x)$.

Promotrimo sada pitanje surjektivnosti za realne funkcije realne varijable. Prisjetimo se, funkcija je surjekcija ako joj je slika jednaka kodomeni.

■ **Primjer 2.8** Ispitajte surjektivnost funkcija:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = x^2$,
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = x^3$,
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $h(x) = \sin(x)$.

Rješenje.
(a) Primijetimo da je $f(x) = x^2 \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga npr. za $y = -1 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x^2 = y$. Dakle, f nije surjekcija. Primijetimo i da je slika funkcije $Im(f) = [0, +\infty\rangle$ različita od kodomene $K = \mathbb{R}$ pa f nije surjekcija. Određivanje slike funkcije može biti teži zadatak, međutim da bismo pokazali da funkcija nije surjekcija, dovoljno je naći jedan element u kodomeni koji nije slika niti jednog elementa iz domene.
(b) Promotrimo graf kubne funkcije (Slika 2.7b) i uočimo da za velike $x > 0$ vrijednosti $x^3 > 0$ postaju sve veće, dok za male $x < 0$ vrijednosti $x^3 < 0$ postaju sve manje. Iz toga naslućujemo da je $Im(g) = \mathbb{R}$. Preciznije, uočimo da za svaki $y \in \mathbb{R}$ jednadžba $y = x^3$ ima (jedinstveno) rješenje $x \in \mathbb{R}$, odnosno g je surjekcija i vrijedi $Im(g) = \mathbb{R}$.
(c) Znamo da vrijedi $-1 \leq \sin x \leq 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, npr. za $y = 5 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $\sin x = y$. Stoga funkcija h nije surjekcija.

■

Napomena 2.4 Primijetimo da se surjektivnost funkcije relativno lako postiže tako da za kodomenu uzmemo upravo sliku funkcije. Stoga je funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ zadana s $f(x) = x^2$ surjekcija, kao i funkcija $h : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ zadana s $h(x) = \sin x$.

Vježba 2.11 Ispitajte surjektivnost funkcija:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 1 - x^4$,
(b) $g : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$,
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $h(x) = \cos(x)$.
Ukoliko zadane funkcije nisu surjekcije, odredite im odgovarajuće kodomene tako da budu surjekcije.

Svojstvo injektivnosti funkcije može se postići na način da funkciju zadamo na manjem skupu.

Definicija 2.1.4 **Restrikcija funkcije** $f : D \to K$ na skup $A \subset D$ je funkcija $f|_A : A \to K$ zadana s $f|_A(x) = f(x)$ za sve $x \in A$. Dakle, funkcija f se od svoje restrikcije $f|_A$ razlikuje *samo u domeni*. ■

■ **Primjer 2.9** (a) Restrikcijom kvadratne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iz prethodnog primjera na skup $A = [0, +\infty\rangle$, dobivamo funkciju $f|_{[0,+\infty\rangle} : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadanu s $f|_{[0,+\infty\rangle}(x) = x^2$, koja je injekcija. Provjerite da graf te nove funkcije zadovoljava horizontalni test.
(b) Restrikcijom funkcije $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na segment $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, dobivamo funkciju $h|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}$ zadanu s $h|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}(x) = \sin x$ koja je injekcija.
Takvim i sličnim problemima detaljnije ćemo se još baviti u Poglavlju 5. ■

Vježba 2.12 Navedite neki primjer skupa $A \subset \mathbb{R}$ tako da restrikcije funkcija
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 1 - x^4$,
(b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $h(x) = \cos(x)$
na skup A budu injekcije.

Napomena 2.5 Primijetimo da je kvadratna funkcija $f|_{[0,+\infty\rangle} : [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ zadana s $f(x) = x^2$ injekcija i surjekcija, dakle bijekcija.

2.1.4 Kompozicija funkcija

Ako su nam zadana dva preslikavanja, onda često od njih možemo formirati treće preslikavanje koje je od interesa. Na primjer, ako su nam zadana dva preslikavanja:

$$\begin{aligned} &\text{preslikavanje 1 :} \;\; \text{građanin Hrvatske} \;\mapsto \text{OIB} \\ &\text{preslikavanje 2 :} \;\; \text{OIB} \;\mapsto \text{naplaćeni porez u proteklој godini} \end{aligned}$$

onda lako formuliramo

$$\text{preslikavanje 3 :} \;\; \text{građanin Hrvatske} \;\mapsto \text{naplaćeni porez u proteklој godini}\,,$$

koje nam kaže koliko je svaki građanin Hrvatske uplatio poreza u protekloj godini.

Promotrimo još jedan ilustrativni primjer.

■ **Primjer 2.10** Uzmimo funkciju t iz Primjera 2.2 i nadodajmo još jedan redak u tablicu tako da elemente drugog retka uvećamo za 1.

x	7	8	9	10	D	B	K	A
y	0	0	14	10	20	3	4	11
z	1	1	15	11	21	4	5	12

(a)

x	7	8	9	10	D	B	K	A
z	1	1	15	11	21	4	5	12

(b)

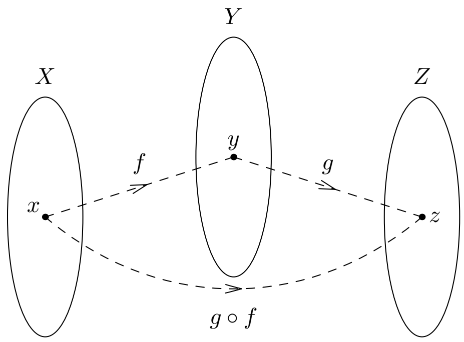
Tablica 2.1: Konstrukcija jednostavne kompozicije.

Tada možemo pisati $z = s(y)$ za sve $y \in \{0,3,4,10,11,14,20\}$, gdje je s funkcija sljedbenik kao iz Primjera 2.1. Ako sada zanemarimo drugi redak u Tablici 2.1a , dobili smo novu funkciju zadanu Tablicom 2.1b, koju označimo s $k : \{7,8,9,10,D,B,K,A\} \to \{1,4,5,11,12,15,21\}$. Kako je $y = t(x)$, onda je $z = s(t(x))$ za sve $x \in \{7,8,9,10,D,B,K,A\}$, odnosno pravilo pridruživanja funkcije k dano je s $k(x) = s(t(x))$ za sve $x \in \{7,8,9,10,D,B,K,A\}$. ■

Za dvije funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ takve da je kodomena prve jednaka domeni druge kažemo da su **ulančane**. Uz taj uvjet možemo definirati kompoziciju funkcija.

Definicija 2.1.5 Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ dvije ulančane funkcije. **Kompozicija funkcija** f i g je funkcija $g \circ f : X \to Z$ s pravilom pridruživanja

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,, \quad \forall x \in X\,. \tag{2.3}$$



Slika 2.8: Ilustrativni prikaz kompozicije.

Napomena 2.6 U gornjoj definiciji kompozicije $g \circ f$ radi jednostavnosti smo pretpostavili da je kodomena funkcije f jednaka domeni funkcije g, tj. da su funkcije ulančane. Zapravo je prema formuli 2.3 dovoljno pretpostaviti da je slika od f sadržana u domeni od g, tj. $Im(f) \subseteq D(g)$.

Primjer 2.11 Zadane su funkcije

(a) $f : \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 1$,
(b) $g : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_2 x$,
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(x)$.

Odredite kompozicije $g \circ f$, $h \circ g$, $f \circ h \circ g$.

Rješenje.

(a) Kompozicija $g \circ f : \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadana je s $g(f(x)) = \log_2(x^4 - 1)$ za sve $x \in \langle 1, +\infty\rangle$. Primijetimo da je $Im(f) = \langle 0, +\infty\rangle = D(g)$ i stoga je kompozicija dobro definirana.
(b) Kompozicija $h \circ g : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadana je s $h(g(x)) = \sin(\log_2(x))$ za sve $x \in \langle 0, +\infty\rangle$.
(c) Kompozicija $f \circ h \circ g : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadana je s $f(h(g(x))) = \sin^4(\log_2(x)) - 1$ za sve $x \in \langle 0, +\infty\rangle$.

■

Napomena 2.7 Primijetimo da u prethodnom primjeru kompozicija $g \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije dobro definirana. Naime, pravilo pridruživanja bilo bi dano s $g(h(x)) = \log_2(\sin(x))$, što nije dobro definirano za one $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin x \leq 0$. Također, kompozicija $f \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije dobro definirana, jer $Im(h) = [-1, 1] \nsubseteq \langle 1, +\infty\rangle = D(f)$. Općenito, kompozicija funkcija $f \circ g$ nije dobro definirana ako slika od g nije sadržana u domeni od f, tj. $Im(g) \nsubseteq D(f)$.

Napomena 2.8 U slučaju kada su obje kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$ dobro definirane, jednakost $f \circ g = g \circ f$ ne mora vrijediti. Drugim riječima, kompozicija funkcija *nije komutativna* operacija. Uzmimo na primjer, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. Tada je $(g \circ f)(x) = 2x + 1 \neq 2x + 2 = (f \circ g)(x)$.
Međutim, za kompoziciju funkcija vrijedi svojstvo *asocijativnosti*, tj. za proizvoljne tri

ulančane funkcije $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to W$ vrijedi jednakost

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,.$$

Vježba 2.13 Zadane su funkcije
(a) $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$,
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$,
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \cos(x)$.
Odredite kompozicije $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ g$, $h \circ g \circ f$.

Vježba 2.14 Zadane su funkcije
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $f(x) = \sin^3(4x)$,
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $g(x) = \ln^2(x^2 + 1)$.
Prikažite ih kao kompoziciju triju funkcija.

Vježba 2.15 Pokažite svojstvo asocijativnosti kompozicije funkcija.

2.1.5 Inverzna funkcija

Neka su X i Y neprazni skupovi i $f : X \to Y$ zadana funkcija $x \mapsto y = f(x)$. Možemo postaviti pitanje o postojanju funkcije $g : Y \to X$ koja preslikava elemente “u suprotnom smjeru” od funkcije f. Preciznije, pitamo se o postojanju funkcije g koja preslikava slike funkcije f u originale, tj. $y \mapsto x = g(y)$. Primijetimo odmah sljedeće:

ako funkcija f nije surjekcija, tj. postoji $y \in Y$ za koji ne postoji $x \in X$ koji se u njega preslikava po pravilu $y = f(x)$, tada takva funkcija g ne može postojati.

Također,

ako f nije injekcija, tada postoje različiti x_1, $x_2 \in X$ takvi da je $y = f(x_1) = f(x_2)$ pa za element y nije moguće jednoznačno definirati preslikavanje g u “suprotnom" smjeru.

Iz ovog razmatranja zaključujemo da ako funkcija f nije surjekcija ili injekcija, dakle bijekcija, onda preslikavanje g “u suprotnom smjeru” ne može postojati.

Prije uvođenja precizne definicije “suprotnog preslikavanja", uvedimo jednu vrlo specifičnu i jednostavnu funkciju. Neka je X neprazan skup, definiramo funkciju $id : X \to X$ koja svakom $x \in X$ pridružuje taj isti x, dakle $id(x) = x$. Tu funkciju nazivamo **identiteta** i označavamo ju s id. U slučaju kada je potrebno naglasiti o kojem se skupu radi, označava se s id_X.

Definicija 2.1.6 Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je funkcija $g : Y \to X$ **inverzna funkcija** funkcije f ako vrijedi:

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in X \qquad \text{i} \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y\,,$$

odnosno

$$g \circ f = id_X \qquad \text{i} \qquad f \circ g = id_Y\,.$$

■

Ako postoji inverzna funkcija od $f : X \to Y$, ona je *jedinstvena* i označavamo ju s $f^{-1} : Y \to X$. Prema definiciji tada vrijedi:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in X \qquad \text{i} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y,$$

odnosno

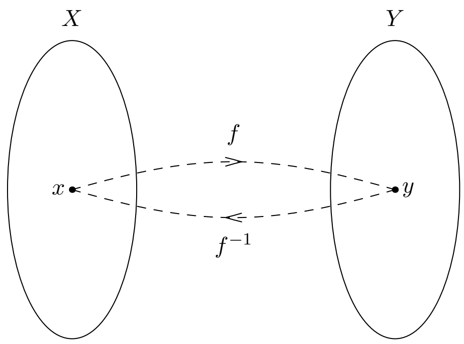
$$f^{-1} \circ f = id_X \qquad \text{i} \qquad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

Drugim riječima, ako $f : X \to Y$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : Y \to X$, tada je

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y). \tag{2.4}$$

Iz relacije (2.4) slijedi da su domena $D(f^{-1})$ i slika $Im(f^{-1})$ inverzne funkcije dane s:

$$D(f^{-1}) = Im(f) \quad \text{i} \quad Im(f^{-1}) = D(f).$$



Slika 2.9: Ilustrativni prikaz inverzne funkcije.

Vježba 2.16 Pokažite jedinstvenost inverzne funkcije. (Uputa: pretpostavite suprotno.)

Napomena 2.9 Direktno iz definicije inverzne funkcije možemo iščitati sljedeću važnu tvrdnju. Ako funkcija f ima inverznu funkciju f^{-1}, tada i f^{-1} ima inverznu funkciju koja je jednaka je upravo funkciji f, tj. $(f^{-1})^{-1} = f$.

Napomena 2.10 Identiteta na skupu funkcija s operacijom komponiranja ima istovjetnu ulogu kao i 1 (jedinica) u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ s obzirom na operaciju množenja, odnosno 0 u skupu $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{Z}$ s obzirom na operaciju zbrajanja. Takve elemente zovemo *neutralni element*. Naime, kao što za sve realne brojeve x vrijedi $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ i $0 + x = 0 + x = x$, tako za sve funkcije $f : X \to X$ vrijedi $id_X \circ f = f \circ id_X = f$.

Već na samom početku smo diskutirali da su surjektivnost i injektivnost nužna svojstva funkcije da bi ona imala inverznu funkciju. U sljedećem teoremu pokazujemo da su ta svojstva i dovoljni uvjeti za postojanje inverzne funkcije.

Teorem 2.1.1 Funkcija $f : X \to Y$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : Y \to X$ ako i samo ako je f bijekcija.

Dokaz. Kako je iskaz teorema u obliku ekvivalencije, onda za dokaz pokazujemo dvije implikacije.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da $f : X \to Y$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : Y \to X$ i dokažimo da je onda f bijekcija.
Surjektivnost. Za svaki $y \in Y$ po definiciji inverzne funkcije vrijedi $f(f^{-1}(y)) = y$. Definiramo $x = f^{-1}(y) \in X$ i tada vrijedi $f(x) = y$. Time smo pokazali da je f surjekcija.
Injektivnost. Neka su $x_1,\ x_2 \in X$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Kako po pretpostavci f ima inverznu funkciju f^{-1}, onda po definiciji slijedi $x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$, tj. $x_1 = x_2$. Time smo pokazali da je f injekcija.

($\Leftarrow$) Obratno, pretpostavimo da je $f : X \to Y$ bijekcija i pokažimo da onda ima inverznu funkciju. Kako je f po pretpostavci surjekcija, onda za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Pokažimo da je takav x jedinstven. Naime, ako su $x_1,\ x_2 \in X$ dva elementa za koje vrijedi $f(x_1) = f(x_2) = y$, onda zbog injektivnosti funkcije f slijedi $x_1 = x_2$. Zbog jedinstvenosti gornjeg x, dobro je definiramo preslikavanje $g : Y \to X$ s pravilom pridruživanja $g(y) = x$. Koristeći jednakosti $y = f(x)$ i $g(y) = x$, onda imamo

$$g(f(x)) = x \quad \text{i} \quad f(g(y)) = y$$

za sve $x \in X$ i $y \in Y$. Time smo pokazali da je g inverzna funkcija of f, a zbog jedinstvenosti inverzne funkcije, onda pišemo $g = f^{-1}$.

$\blacksquare$

Kao važnu posljedicu prethodnog teorema navodimo sljedeći korolar.

Korolar 2.1.2 Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ ulančane funkcije koje su bijekcije. Tada je i funkcija $g \circ f : X \to Z$ bijekcija i njezina inverzna funkcija dana je formulom $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Dokaz. Prema Teoremu 2.1.1, dovoljno je pokazati da je $f^{-1} \circ g^{-1}$ inverzna funkcija od $g \circ f$. Koristeći svojstvo asocijativnosti kompozicije dobivamo:

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_Z\,, \\
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f \circ f^{-1} = id_X\,.
\end{aligned}$$

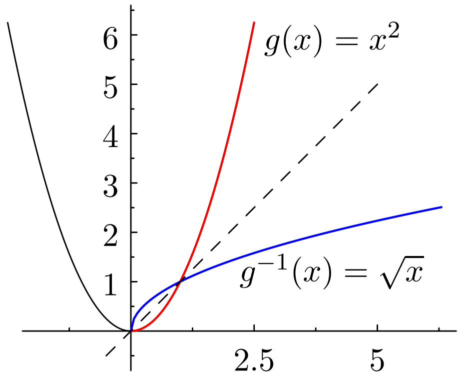
Zbog jedinstvenosti inverzne funkcije, onda zaključujemo $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. $\blacksquare$

Određivanje inverzne funkcije

Kako odrediti inverznu funkciju realne funkcije realne varijable $f : D \to K$, ako takva postoji?

- Da bi f imala inverznu funkciju, nužno je surjekcija, odnosno $K = Im(f)$.
- Nadalje, za svaki $y \in K$ tražimo rješenje jednadžbe

$$f(x) = y \tag{2.5}$$



Slika 2.10: Grafički prikaz kvadratne funkcije i njene inverzne.

u skupu D. Ako za svaki $y \in K$ jednadžba (2.5) ima jedinstveno rješenje $x \in D$, onda je preslikavanje $y \mapsto x$ tražena inverzna funkcija i pišemo $f^{-1}(y) = x$. Ako ne postoji rješenje x u skupu D ili pak ima više rješenja, onda $f : D \to K$ nije bijekcija i prema Teoremu 2.1.1 nema inverznu funkciju.

■ **Primjer 2.12** Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty\rangle$ s $f(x) = x^2$. Je li f bijekcija? Možemo li joj naći inverznu funkciju?

Rješenje. Uočimo da funkcija f nije injekcija (vidi Sliku 2.7a), a time niti bijekcija pa onda nema inverznu funkciju. Međutim, funkcija f jest surjekcija. Injektivnost funkcije f možemo osigurati restrikcijom na skup $[0,+\infty\rangle$. Tada restringirana kvardatna funkcija $g = f|_{[0,+\infty\rangle} : [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ jest bijekcija pa ima inverznu funkciju $g^{-1} : [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ i to je upravo funkcija drugi korijen, $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ za sve $x \in [0,+\infty\rangle$ (Slika 2.10). Restrikcija funkcije f na skup $\langle -\infty, 0]$ je također injekcija, odnosno kvadratna funkcija $h = f|_{\langle -\infty,0]} : \langle -\infty, 0] \to [0,+\infty\rangle$ je bijekcija, a njezina inverzna funkcija je $h^{-1} : [0,+\infty\rangle \to \langle -\infty, 0]$ zadana s $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. ■

■ **Primjer 2.13** Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ s $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Je li f bijekcija? Postoji li inverzna funkcija funkcije $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to Im(f)$?

Rješenje. Najprije uočimo da zadana funkcija f nije surjekcija. Naime, ne postoji $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ takav da je $f(x) = 0$. Međutim, f je injekcija (provjerite to). Odredimo sada sliku funkcije f. Kako je $f(x) \neq 0$ za sve $x \in D(f)$, zaključujemo da je $Im(f) \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pokažimo da vrijedi i obratna inkluzija $\mathbb{R}\backslash\{0\} \subseteq Im(f)$. Uzmimo proizvoljan $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i tražimo rješenje jednadžbe

$$y = \frac{1}{x-1}.$$

Direktnim računom slijedi

$$yx = 1 + y \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{y}.$$

Očito dobiveni x postoji za svaki $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i vrijedi $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} = D(f)$. Time smo pokazali da je $Im(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tada je funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bijekcija i njezina inverzna funkcija dana je formulom

$$f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

■

Vježba 2.17 Odredite (ako postoji) inverznu funkciju funkcija:
(a) $f : \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \log_2(x-1)$,
(b) $g : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

Graf inverzne funkcije

Promotrimo u kojem su odnosu grafovi međusobno inverznih funkcija. Pretpostavimo da realna funkcija f ima inverznu funkciju. Točke na grafu funkcije f imaju koordinate oblika $(x, f(x))$. Ako zamijenimo x- i y-koordinate te točke, dobivamo točku $(f(x), x)$, a zbog postojanja inverzne funkcije imamo jednakost $(f(x), x) = (y, f^{-1}(y))$. Dakle, zamjenom koordinata točaka s grafa funkcije f dobivamo točke koje leže na grafu inverzne funkcije f^{-1}. Stoga su grafovi međusobno inverznih funkcija zrcalno simetrični s obzirom na pravac $y = x$ (vidi Sliku 2.10 iz prethodnog primjera).

2.2 Relacije

2.2.1 Binarne relacije

Relacijom na nekom skupu definira se "odnos" između elemenata tog skupa, preciznije, između prvog i drugog, jer je u relacijama *poredak* elemenata bitan. Navedimo sada neke "relacije" na skupu svih osoba u Hrvatskoj:

- "biti rođen iste godine kao" (npr. Matan je rođen iste godine kao i Lina),
- "biti stariji od" (npr. teta Terezija je starija od nećakinje Mile)
- "imati istu boju očiju kao"
- "biti zaljubljen u",
- "biti brat od", itd.

Kao što vidimo, pojam relacije sveprisutan je u društvu, a u matematici, kao što ćemo vidjeti, predstavlja jedan od temeljnih pojmova.

Definicija 2.2.1 Neka je A neprazan skup. **Relacija** ρ na skupu A je neprazan podskup Kartezijevog produkta $A \times A$, tj. $\rho \subseteq A \times A$. Ako je $(x, y) \in \rho$, onda kažemo da je '*x u relaciji ρ s y*' i kraće pišemo $x\,\rho\,y$. ■

■ **Primjer 2.14** Neka je $A = \{$skup svih studenata 1. godine FER-a$\}$ i relacija ρ definirana na sljedeći način: $x\,\rho\,y$ ako i samo ako su studenti x i y *rođeni isti mjesec neke godine*. Drugim riječima, $\rho \subseteq A \times A$ je skup svih parova studenata koji imaju rođendan u istom mjesecu neke godine. ■

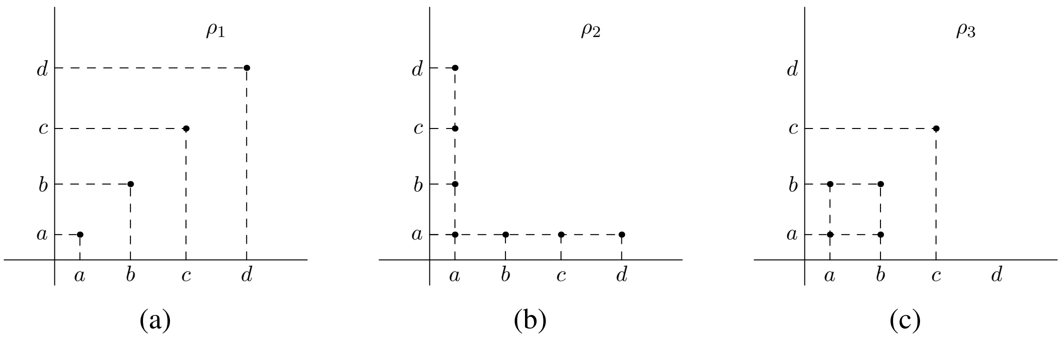
Kako su relacijom ρ vezana dva elementa is skupa A, relaciju ρ još nazivamo **binarna relacija**. Za svaki par $(x, y) \in A \times A$ je ili $(x, y) \in \rho$ (x je u relaciji ρ s y), ili $(x, y) \notin \rho$ (x nije u relaciji ρ s y). Ako za neka dva elementa x i y vrijedi $(x, y) \notin \rho$ i $(y, x) \notin \rho$, onda kažemo da su x i y *neusporedivi* elementi (s obzirom na relaciju ρ).

Napomena 2.11 Poredak elemenata u relaciji je bitan. Drugim riječima, postoje relacije ρ za koje vrijedi $(x,y) \in \rho$ (x je u relaciji ρ s y), dok $(y,x) \notin \rho$ (y nije u relaciji ρ s x).

■ **Primjer 2.15** Neka je $A = \{a,b,c,d\}$ četveročlani skup. Na skupu A možemo zadati npr. sljedeće relacije:
(a) $\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} \subseteq A \times A$;
(b) $\rho_2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(a,d),(d,a)\} \subseteq A \times A$;
(c) $\rho_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$.

■

Slično kao i realne funkcije realne varijable, relacije na skupovima $A \subseteq \mathbb{R}$ možemo zadavati njihovim grafičkim prikazom u $\mathbb{R}^2$. Pretpostavimo da su elementi skupa A iz prethodnog primjera zadani realni brojevi, tada je grafički prikaz relacija ρ_1, ρ_2 i ρ_3 dan na Slici 2.11.



Slika 2.11: Grafički prikaz relacija iz Primjera 2.15.

Napomena 2.12 Za razliku od grafa funkcije, koji mora zadovoljavati vertikalni test, *svaki* skup točaka u $\mathbb{R}^2$ predstavlja *graf* neke binarne relacije na $\mathbb{R}$. Npr. jedinična kružnica (Slika 2.2), koja ne može biti graf funkcije, predstavlja jednu relaciju na skupu $\mathbb{R}$. Preciznije, $x \in \mathbb{R}$ je u relaciji "biti na jediničnoj kružnici" s $y \in \mathbb{R}$ ako vrijedi $x^2 + y^2 = 1$. Iz ovog naslućujemo da je pojam relacije općenitiji od pojma funkcije, odnosno da su funkcije specijalni slučaj relacije.

Vježba 2.18 Napišite i skicirajte dvije relacije na skupu $A = \{a,b,c,d,e,f\} \subset \mathbb{R}$.

■ **Primjer 2.16** Neka je $A = \mathbb{Z}$, skup cijelih brojeva. Na skupu $\mathbb{Z}$ možemo definirati razne relacije ρ. Mnoge su već dobro poznate, iako ne pod pojmom relacije.

(a) $x \rho y$ ako je $x = y$, tj. $\rho := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x = y\}$ (relacija jednakosti);

(b) $x \rho y$ ako je $x \leq y$, tj. $\rho := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x \leq y\}$ (relacija manje ili jednako);

(c) $x \rho y$ ako $x < y$, tj. $\rho := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x < y\}$ (relacija strogo manje);

(d) $x \rho y$ ako je razlika $x - y$ paran broj (tj. oba su parni ili su oba neparni);

(e) $x \rho y$ ako je razlika $x - y$ djeljiva s m, gdje je $m \geq 2$ unaprijed zadani prirodan broj (npr. za $m = 2$ dobivao relaciju iz (d));

(f) $x \rho y$ ako je x djelitelj od y, tj. y je djeljiv s x;
Skicirajte odgovarajuće podskupove ρ u $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ■

2.2.2 Relacija ekvivalencije i relacija parcijalnog poretka

Definicija 2.2.2 Za relaciju ρ zadanu na nepraznom skupu A kažemo da je:
(1) **refleksivna**, ako za sve $x \in A$ vrijedi $x \rho x$, tj. svaki je element u relaciji sam sa sobom. Simbolički to pišemo $(\forall x \in A)(x \rho x)$.
(2) **simetrična**, ako za svaki $x, y \in A$ vrijedi da iz $x \rho y$ slijedi $y \rho x$, tj. ako je x u relaciji s y, onda je y u relaciji s x.
Kraće pišemo, $(\forall x, y \in A)(x \rho y \Rightarrow y \rho x)$.
(2') **antisimetrična**, ako za sve $x, y \in A$ vrijedi da iz $x \rho y$ i $y \rho x$ slijedi $x = y$, ili kraće $(\forall x, y \in A)(x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y)$.
(3) **tranzitivna**, ako za sve $x, y, z \in A$ vrijedi da ako je x u relaciji ρ s y i y u relaciji ρ sa z, onda je i x u relaciji ρ sa z, odnosno $(\forall x, y, z \in A)(x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$. ■

Napomena 2.13 Diskutirajmo sada geometrijsku interpretaciju svojstva refleksivnosti i simetričnosti relacije. Neka je $A \subset \mathbb{R}$ i ρ binarna relacija na A:
(1) ρ je refleksivna ako i samo ako ρ sadrži dijagonalu kvadrata $A \times A$, koja leži na simetrali I. i III. kvadranta, tj. na pravcu $y = x$.
(2) ρ je simetrična ako i samo ako je skup ρ simetričan obzirom na pravac $y = x$.

Nadalje, obratom po kontrapoziciji zaključujemo da je relacija antisimetrična ako i samo ako za svaka dva različita elementa $x, y \in A$ $(x \neq y)$ ne može biti istodobno $x \rho y$ i $y \rho x$, tj. za $x \neq y$ ili x nije u relaciji s y ili y nije u relaciji s x.

■ **Primjer 2.17** Pokažimo sada neka svojstva relacija iz Primjera 2.16.
(a) Relacija *jednakosti* "$=$" na skupu $\mathbb{Z}$ očito je refleksivna ($x = x$ za sve $x \in \mathbb{Z}$), simetrična (za sve $x, y \in \mathbb{Z}$, ako $x = y$, onda i $y = x$) i tranzitivna (za sve $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ako $x = y$ i $y = z$, tada je i $x = z$).
(b) Relacija *manje ili jednako* "$\leq$" na $\mathbb{Z}$ je refleksivna ($x \leq x$ za sve $x \in \mathbb{Z}$), antisimetrična (za sve $x, y \in \mathbb{Z}$, ako $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je nužno $x = y$) i tranzitivna (za sve $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ako $x \leq y$ i $y \leq z$, tada je i $x \leq z$).

■

Vježba 2.19 Provjerite koje su od preostalih relacija iz Primjera 2.16 refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne.

Vježba 2.20 Skicirajte binarnu relaciju na $\langle 0, 1 \rangle$ koja je istovremeno simetrična i antisimetrična.

Definicija 2.2.3 Relaciju koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna nazivamo **relacija ekvivalencije**. Relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna naziva se **relacija parcijalnog poretka (ili uređaja)**. ■

■ **Primjer 2.18** U Primjeru 2.17 pokazali smo da je relacija jednakosti "$=$" na $\mathbb{Z}$ relacija ekvivalencije, dok je relacija "$\leq$" relacija parcijalnog poretka. Analogne relacije jednakosti "$=$" i manje ili jednako "$\leq$" s istim svojstvima imamo i na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. ■

■ **Primjer 2.19** Relacija iz Primjera 2.16(d): $x\,\rho\,y$ ako je razlika $x-y$ paran broj, je relacija ekvivalencije. Provjerimo redom zadovoljava li ρ svojstva relacije ekvivalencije:

- refleksivnost: za sve $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $x\,\rho\,x$, jer $x-x=0$, što je po definiciji paran broj.
- simetričnost: uzmimo proizvoljne $x,y \in \mathbb{Z}$ takve da $x\,\rho\,y$, tj. $x-y$ je paran broj (djeljiv s 2). Tada je i $y-x$ djeljiv s 2, odnosno paran pa vrijedi $y\,\rho\,x$.
- tranzitivnost: neka su $x,y,z \in \mathbb{Z}$, takvi da je $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,z$, tj. $x-y$ i $y-z$ su parni brojevi. Tada je i njihov zbroj $x-y+y-z=x-z$ paran, tj. $x\,\rho\,z$.

Pokazali smo da je relacija ρ refleksivna, simetrična i tranzitivna, stoga je ona relacija ekvivalencije. ■

Vježba 2.21 Pokažite da je relacija iz Primjera 2.16(e) relacija ekvivalencije, a relacija (f) relacija parcijalnog poretka.

Napomena 2.14 Za razliku od relacije "$\leq$", relacija *strogo manje* "$<$" na skupu $\mathbb{R}$, nije relacija parcijalnog poretka. Naime, relacija "$<$" nije refleksivna, jer $x<x$ nije istina. Međutim, relacija "$<$" jest antisimetrična i tranzitivna. Antisimetrična je, jer $x<y$ i $y<x$ je uvijek laž pa je prema tablici istinitosti implikacija "$x<y$ i $y<x \Rightarrow x=y$" uvijek istinita, bez obzira na istinitost tvrdnje $x=y$. Provjerite tranzitivnost.

■ **Primjer 2.20** Neka je X bilo koji skup. Skup svih podskupova od X (uključujući prazan skup $\emptyset$ i cijeli skup X) zove se **partitivni skup** skupa X i označavamo ga s $\mathscr{P}(X)$ ili 2^X. Npr. za tročlani skup $X=\{a,b,c\}$, njegov partitivni skup jednak je

$$\mathscr{P}(X)=\big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\big\}. \tag{2.6}$$

Primijetimo da $\mathscr{P}(X)$ ima $2^3=8$ elemenata. Općenito vrijedi: ako skup X ima n elemenata, onda njegov partitivni skup ima 2^n elementa i to je smisao oznake 2^X. Na partitivnom skupu $\mathscr{P}(X)$ (kao skupu skupova) možemo gledati relaciju *"biti podskup"* tj. relaciju inkluzije, za koju koristimo oznaku $\subseteq$. Provjerimo da je to relacija parcijalnog poretka:

- refleksivnost: po definiciji uvijek vrijedi da je $A \subseteq A$ za svaki $A \in \mathscr{P}(X)$, tj. za svaki $A \subseteq X$;
- antisimetričnost: za svaka dva skupa $A,B \in \mathscr{P}(X)$, ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, onda slijedi da je $A=B$;
- tranzitivnost: za svaka tri skupa $A,B,C \in \mathscr{P}(X)$, ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, tada vrijedi i $A \subseteq C$.

■

Primijetite da su skupovi $A:=\{a\}$ i $B:=\{b\}$ koji se pojavljuju u (2.6) kao elementi od $\mathscr{P}(X)$ (tj. podskupovi od X), međusobno neusporedivi obzirom na relaciju $\subseteq$, jer niti je $A \subseteq B$ niti $B \subseteq A$. Zato se i takve relacije nazivaju relacije *parcijalnog* poretka. Ako su svaka dva različita elementa nekog parcijalno poredanog skupa A s relacijom ρ usporediva, tj. za svaka dva elementa x i y je ili $x\,\rho\,y$ ili $y\,\rho\,x$, onda kažemo da je na A zadana *relacija linearnog (ili potpunog) poretka*, te se za skup A kaže da je *potpuno uređen skup (ili lanac)*.

■ **Primjer 2.21** Relacija manje ili jednako "$\leq$" na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ je relacija potpunog poretka, odnosno, $\mathbb{R}$ je potpuno uređen skup. ■

Dodatak

Relacija *sličnosti* na skupu svih trokuta u ravnini (sličnost trokuta) poznata je još od antičkog doba. Pretpostavlja se da ju je uveo starogrčki matematičar *Tales*, koji je živio oko 625.–547. g. prije Krista. Uvjerite se da je to relacija ekvivalencije.

Relacije ekvivalencije mogu se naći i u glazbi. Poistovjećivanjem tonova koji se u dur-ljestvici razlikuju za oktavu ili njen višekratnik (npr. tona C_1 s tonom C_2 itd.) dobivamo zapravo samo sedam različitih stupnjeva dijatonske dur-ljestvice: C, D, E, F, G, A, H.

2.2.3 Relacija ekvivalencije i particija skupa

■ **Primjer 2.22** Neka je $A = \{$skup svih studenata 1. godine FER-a$\}$ i relacija ρ označava pripadnost predavačkoj grupi iz Matematičke analize I, tj. $x\,\rho\,y$, ako $x, y \in A$ pripadaju istoj predavačkoj grupi. Uvjerite se da se radi o relaciji ekvivalencije. Predavačke grupe P_1, P_2, $\ldots$, P_N su podskupovi od A, koji sadrže točno one elemente koji su međusobno u relaciji ρ. Preciznije, svaka dva studenta x, y iz grupe P_i $(i = 1, \ldots, N)$ su u relaciji ρ, a bilo koja dva studenta iz različitih grupa, $x \in P_i$ i $y \in P_j$ za $i \neq j$, nisu u relaciji. Kako svaki student pripada točno jednoj predavačkoj grupi, skupovi P_1, $\ldots$, P_N su međusobno disjunktni, a u uniji daju cijeli skup A, odnosno

$$P_i \cap P_j = \emptyset \quad \text{za sve } i \neq j \qquad \text{i} \qquad \bigcup_{i=1}^{N} P_i = A\,.$$

■

Definicija 2.2.4 Neka je A neprazan skup i I skup indeksa. Familiju podskupova $A_i \subset A$, $i \in I$, koji su međusobno *disjunktni*, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i \neq j \in I$, a unija im je cijeli skup A, tj. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$, nazivamo **particija skupa** A. ■

Napomena 2.15 Predavačke grupe $P_1, \ldots, P_N$ iz Primjera 2.22 čine particiju skupa svih studenata 1. godine FER-a.

Od relacije ekvivalencije do particije skupa

Neka je sada ρ proizvoljna relacija ekvivalencije zadana na nepraznom skupu A. Kao u Primjeru 2.22, svakom elementu $x \in A$ možemo pridružiti njegov **razred (ili klasu) ekvivalencije**, definiran kao skup $[x]$ koji se sastoji od svih elemenata $y \in A$ koji su u relaciji ρ s x, tj.

$$[x] := \{y \in A \;:\; y\,\rho\,x\} \subseteq A\,. \tag{2.7}$$

Za elemente iz istog razreda kažemo da su *ekvivalentni*, a bilo koji element y iz razreda $[x]$ naziva se *reprezentantom* tog razreda. Svaki reprezentant (predstavnik) nekog razreda ekvivalencije jednoznačno određuje razred u kojem se on nalazi.

Propozicija 1 Za svaka dva elementa $x, y \in A$ vrijedi točno jedna od sljedećih tvrdnji:

- $[x] \cap [y] = \emptyset$, tj. odgovarajući razredi ekvivalencije su disjunktni,
- $[x] = [y]$, tj. odgovarajući razredi ekvivalencije su jednaki.

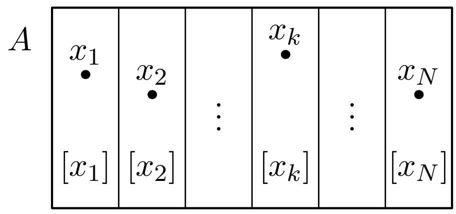
Dokaz. Ako x i y nisu u relaciji ρ, onda je $[x] \cap [y] = \emptyset$. Pretpostavimo sada da je presjek $[x] \cap [y]$ neprazan, tj. postoji $z \in [x] \cap [y]$. Tada vrijedi $x \,\rho\, z$ i $z \,\rho\, y$. Uzmimo sada proizvoljni $x_1 \in [x]$, tj. $x_1 \,\rho\, x$. Zbog tranzitivnosti relacije ρ iz $x_1 \,\rho\, x$, $x \,\rho\, z$ i $z \,\rho\, y$ slijedi $x_1 \,\rho\, y$, tj. $x_1 \in [y]$. Time smo pokazali $[x] \subseteq [y]$. Na potpuno analogni način možemo pokazati da je i $[y] \subseteq [x]$. Dakle, iz pretpostavke da je $[x] \cap [y]$ neprazan slijedi $[x] = [y]$. ■

Iz prethodne propozicije zaključujemo da u skupu A sa zadanom relacijom ekvivalencije ρ postoje elementi x_k, gdje je $k \in I$ (pri čemu I označava skup indeksa), takvi da su im odgovarajući razredi ekvivalencije disjunktni, a unija im je cijeli skup A, tj.

$$[x_i] \cap [x_j] = \emptyset \;\text{ za sve } i \neq j \in I\,, \qquad \bigcup_{k \in I} [x_k] = A\,. \tag{2.8}$$

Na taj način razredi ekvivalencije $[x_k]$, $k \in I$, čine particiju skupa A.

Definicija 2.2.5 Skup svih razreda ekvivalencije $\{[x_k] : k \in I\}$ naziva se **kvocijentni skup** skupa A po relaciji ρ i označava s A/ρ. ■



Slika 2.12: Skup A na kojem je zadana relacija ekvivalencije generira particiju skupa A na odgovarajuće razrede ekvivalencije $[x_k]$, $k \in I$.

■ **Primjer 2.23** U Primjeru 2.16(e) uveli smo sljedeću relaciju ρ na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Neka je $m \geq 2$ zadan prirodan broj, cijeli brojevi x i y su u relaciji ρ ako je $x - y$ djeljivo s m, odnosno, x i y daju isti ostatak pri dijeljenju s m. Ova relacija na $\mathbb{Z}$ ima posebno ime i oznaku. Za $x \,\rho\, y$ kažemo da je "*x* **kongruentan** *y* **modulo** *m*" i pišemo $x \equiv y \pmod{m}$. Kako pri dijeljenju s m imamo m mogućih ostataka: 0, 1, ..., $m-1$, onda relacija kongruencije modulo m generira m razreda ekvivalencije:

- $[0] := \{mk \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$ – skup svih cijelih brojeva koji pri dijeljenju s m daju ostatak 0;
- $[1] := \{mk + 1 \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$ – skup svih cijelih brojeva koji pri dijeljenju s m daju ostatak 1;
- ...
- $[m-1] := \{mk + (m-1) \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$ – skup svih cijelih brojeva koji pri dijeljenju s m daju ostatak $m-1$.

Tih m skupova čini particiju skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, a pripadni kvocijentni skup je $\{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$. ■

Vježba 2.22 Na skupu $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ zadana je relacija

$$\rho = \{(1,1), (2,2), (2,1), (3,3), (3,5), (4,5), (6,6)\}$$

Nadopunite ρ do $\tilde{\rho}$ najmanjim brojem parova tako da $\tilde{\rho}$ bude relacija ekvivalencije na S. Odredite zatim klase ekvivalencije i kvocijentni skup za relaciju $\tilde{\rho}$.

Od particije skupa do relacije ekvivalencije

Neka je na nepraznom skupu A (bez ikakve relacije na njemu) zadana neka particija, tj. dani su podskupovi A_k ($k \in I$) skupa A, koji zadovoljavaju

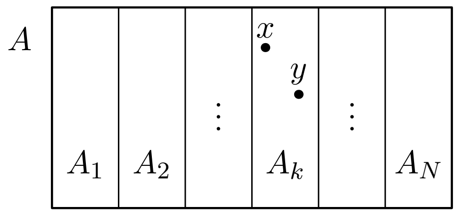
$$A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ za sve } i \neq j \in I, \qquad \bigcup_{k \in I} A_k = A. \tag{2.9}$$

Na skupu A tada definiramo relaciju ρ na sljedeći način:

> $x \rho y$ ako i samo ako x i y pripadaju *istom* skupu particije, tj. postoji $k \in I$ tako da su $x, y \in A_k$.

Vježba 2.23 Provjerite da je ρ relacija ekvivalencije na A.

Prema tome, svaka particija skupa A na prirodan način generira pripadnu relaciju ekvivalencije, a odgovarajući kvocjentni skup A/ρ jednak je danoj particiji $\{A_k : k \in I\}$.



Slika 2.13: Skup A na kojem je zadana particija $\{A_k : k \in I\}$. Particija definira relaciju ekvivalencije ρ čiji su razredi ekvivalencije upravo skupovi A_k. Elementi $x, y \in A$ su u relaciji ρ, jer postoji $k \in I$ takav da su $x, y \in A_k$.

> **Napomena 2.16** Iz svega prethodnog zaključujemo da je zadavanje relacije ekvivalencije na skupu A ekvivalentno zadavanju particije na tom istom skupu.

■ **Primjer 2.24** Na tročlanom skupu $A = \{a, b, c\}$ nađite sve njegove particije.

Rješenje. Particija skupa A koja kao svoje elemente sadrži samo jednočlane podskupove od A je $\mathscr{P}_1 = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\big\}$. Particije skupa A koje sadrže i dvočlane podskupove skupa A su:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_2 &= \big\{\{a,b\}, \{c\}\big\}, \\
\mathscr{P}_3 &= \big\{\{a\}, \{b,c\}\big\}, \\
\mathscr{P}_4 &= \big\{\{a,c\}, \{b\}\big\}.
\end{aligned}$$

Tu je još i particija $\mathscr{P}_5 = \{A\}$ koja sadrži samo jedan element, naime cijeli skup A. Svaka od navedenih pet particija jednoznačno definira odgovarajuću relaciju ekvivalencije na A. Npr. relacija ρ_2 koja odgovara particiji $\mathscr{P}_2$ dana je s

$$\rho_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}.$$

■

Vježba 2.24 Zadan je skup $S = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ i na njemu particija skupa $\mathscr{P} = \{\{a,b,c\},\{e,f\},\{g\},\{h\}\}$. Odredite pripadnu relaciju ekvivalencije.

2.2.4 Općenite relacije

Dosad smo promatrali binarne relacije $\rho \subseteq A \times A$ definirane na nekom nepraznom skupu A.

Definicija 2.2.6 Neka su A i B proizvoljni neprazni skupovi. Svaki podskup Kartezijevog produkta $A \times B$, tj. skup uređenih parova $(a,b) \in A \times B$ nazivamo **relacija iz A u B**. ■

Prisjetimo se, graf funkcije $f : A \to B$ je podskup skupa $A \times B$, odnosno možemo reći da je graf funkcije $\Gamma(f)$ relacija iz A u B. Na taj način funkcije možemo promatrati kao specijalni slučaj relacija, odnosno pojam relacije poopćuje pojam funkcije.

2.3 Ekvipotentni skupovi i kardinalni brojevi

Brojenje elemenata nekog skupa vjerojatno spada u same početke razvoja matematičke misli. Ljudi su pred tisuće godina imali potrebu brojiti npr. stoku koju posjeduju, oružje s kojim raspolažu za obranu, zatim prijatelje (a možda i neprijatelje). Za većinu djece brojenje do 10 spada među najranije savladane vještine. Predodžba o tome što bi bili konačni skupovi i kako ih brojiti, intuitivno je svima jasna. Međutim, kako brojiti "beskonačne skupove", i kakvi bi to uopće bili? Svi bismo rekli da je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ beskonačan, ali što to zapravo znači? Ima li skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ više elemenata od skupa $\mathbb{N}$? To su samo neka od pitanja na koja ćemo dati odgovore u ovom poglavlju. Krenimo redom.

Umjesto odgovora na pitanje: *"Koliko elemenata ima neki skup?"*, najprije ćemo odgovoriti na pitanje *"Kada dva skupa imaju jednako mnogo elemenata?"*. Ispostavlja se da je ovo drugo pitanje osnovnije, a tome u prilog govori i sljedeća povijesna crtica.

Crtica

Tim američkih arheologa pronašao je u mjestu Nuzi (u blizini današnjeg Kirkuka u Iraku) glinenu posudicu s popisom od 48 ovaca i koza, a u posudici je bilo 48 glinenih kuglica. Posudica s kuglicama služila je pastiru za brojenje stada. Naime, u stadu je moralo biti onoliko jedinki koliko je bilo kuglica u posudici. Sâm broj 48 pritom uopće nije važan. Pastir vjerojatno nije znao brojiti u današnjem smislu, možda brojevi tada nisu ni postojali, ali je znao svakoj ovci ili kozi pridružiti točno jednu kuglicu iz posudice, odnosno znao je konstruirati bijekciju sa skupa ovaca i koza na skup kuglica.

Definicija 2.3.1 Za skupove X i Y kažemo da su **ekvipotentni (ili jednakobrojni)** ako postoji bijekcija $f : X \to Y$. Za ekvipotentne skupove kažemo da imaju jednak **kardinalni broj** (kardinalitet) i pišemo $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ ili $|X| = |Y|$. Ako postoji injekcija $f : X \to Y$, onda kažemo da X ima *manje ili jednako* elemenata od Y i pišemo $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$. ■

■ **Primjer 2.25** Pokažite da su skupovi $X = \mathbb{N}$ i $Y = \mathbb{N}\backslash\{1\} = \{2,3,4,\dots\}$ ekvipotentni.

Rješenje. Funkcija sljedbenik iz Primjera 2.1, $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}$ zadana sa $s(n) = n+1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, očito je jedna bijekcija iz $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}\backslash\{1\}$. Njezina inverzna funkcija $s^{-1} : \mathbb{N}\backslash\{1\} \to \mathbb{N}$ zadana je sa $s^{-1}(m) = m-1$ za sve $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. ■

Crtica

Hilbertov hotel. U vezi s prethodnim primjerom poznata je priča (misaoni pokus) o Hilbertovom hotelu. Radi se o hotelu koji ima beskonačno[1] soba i sve sobe su zauzete. U hotel tada dolazi još jedan gost i traži smještaj. Lukavi recepcionar brzo se dosjeti kako smjestiti gosta u puni hotel. Zamolit će gosta iz sobe broj 1 da se preseli u sobu broj 2, onog iz sobe 2 da se preseli u sobu 3, itd., i tada će novopridošlog gosta smjestiti u sobu broj 1.

Vježba 2.25 Pokažite da su skupovi $X = \mathbb{N}$ i $Y = \mathbb{N}\backslash\{1,2,\dots,n_0\}$ za neki $n_0 \in \mathbb{N}$ ekvipotentni.

Vježba 2.26 Pokažite da je skup parnih prirodnih brojeva ekvipotentan skupu neparnih prirodnih brojeva.

■ **Primjer 2.26** Pokažite da su skupovi $X = \langle -1,1\rangle$ i $Y = \mathbb{R}$ ekvipotentni.

Rješenje. Pokažimo da je funkcija $f : \langle -1,1\rangle \to \mathbb{R}$, definirana s $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ bijekcija.

- injektivnost: pretpostavimo da za neke $x_1, x_2 \in \langle -1,1\rangle$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$, tj.

$$\frac{x_1}{1-x_1^2} = \frac{x_2}{1-x_2^2}.$$

  Unakrsnim množenjem ova jednakost ekvivalentna je s $x_1 - x_1x_2^2 = x_2 - x_1^2x_2$, odakle slijedi $(x_1 - x_2)(1 + x_1x_2) = 0$. Kako su $x_1, x_2 \in \langle -1,1\rangle$, onda zaključujemo da je $x_1x_2 > -1$, tj. $1 + x_1x_2 > 0$ i stoga je nužno $x_1 = x_2$ da bi prethodna jednakost vrijedila. Time smo pokazali da je f injekcija.
- surjektivnost: za proizvoljni $y \in \mathbb{R}$, tražimo rješenje jednadžbe

$$y = \frac{x}{1-x^2} \tag{2.10}$$

  u skupu $\langle -1,1\rangle$. Ako je $y = 0$, onda je $x = 0 \in \langle -1,1\rangle$ jedino rješenje. Za $y \neq 0$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $yx^2 + x - y = 0$ koja ima dva realna rješenja

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4y^2}}{2y}, \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}.$$

  Pokažimo da za $y > 0$ vrijedi $0 < x_2 < 1$. Zbog $y > 0$ slijedi

$$x_2 = -\frac{1}{2y} + \sqrt{\frac{1}{4y^2}+1} < -\frac{1}{2y} + \sqrt{\left(\frac{1}{2y}+1\right)^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} + 1 = 1.$$

[1] Beskonačnost se u ovom primjeru podrazumijeva kao prebrojiva beskonačnost, odnosno došlo je onoliko ljudi koliko ima prirodnih brojeva.

S druge strane vrijedi

$$x_2 = -\frac{1}{2y} + \sqrt{\frac{1}{4y^2} + 1} > -\frac{1}{2y} + \sqrt{\frac{1}{4y^2}} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} = 0\,.$$

Vježba 2.27 Analogno pokažite da za $y < 0$ vrijedi $-1 < x_2 < 0$.

Time je pokazana surjektivnost funkcije f.

■

Napomena 2.17 U prethodnom primjeru mogli smo koristiti i funkcije $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ ili $g : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}x)$. Obje su bijekcije s $\langle -1, 1\rangle$ na $\mathbb{R}$.

Napomena 2.18 Primjerom 2.26 pokazali smo da skupovi $\langle -1, 1\rangle$ i $\mathbb{R}$ imaju "jednako mnogo" elemenata. Općenito se na taj način može pokazati da svaki interval oblika $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ sadrži jednako mnogo elemenata kao i cijeli $\mathbb{R}$.

Vježba 2.28 Pokažite da su skupovi $[0, 1]$ i $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ekvipotentni.

U praksi je ponekad teško konstruirati bijekciju između dva skupa. Međutim, da bi pokazali da su skupovi ekvipotentni, dovoljno je konstruirati injekcije među njima, o čemu govori sljedeći teorem, koji navodimo bez dokaza.

Teorem 2.3.1 — Cantor-Bernstein-Schröder. Neka su X i Y skupovi. Ako postoje injekcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$, tada su skupovi X i Y ekvipotentni, tj. $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$.

Napomena 2.19 U prethodnom teoremu funkcije f i g nisu nužno inverzne jedna drugoj. S obzirom na to da su $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ injekcije, onda po Definiciji 2.3.1 znamo da vrijedi $\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{card}\, Y$ i $\mathrm{card}\, Y \leq \mathrm{card}\, X$. Teorem 2.3.1 nam kaže da je tada $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$. Drugim riječima, $\leq$ je relacija parcijalnog poretka i na skupu kardinalnih brojeva.

Definicija 2.3.2 Kažemo da je skup X **konačan**, ako postoji prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ takav da su skupovi X i $\{1, \dots, n\}$ ekvipotentni i definiramo $\mathrm{card}\, X = n$. ■

Za prazan skup $\emptyset$ kažemo da je konačan i definiramo $\mathrm{card}\, X = 0$. Primijetimo da je brojenje elemenata nekog konačnog skupa X zapravo uspostavljanje bijekcije iz skupa $\{1, \dots, n\}$ na X, a kardinalni broj $\mathrm{card}\, X = n$ predstavlja upravo ono što nazivamo *broj elemenata skupa*.

Bez dokaza navodimo sljedeću karakterizaciju konačnih skupova, koja će nam pomoći u boljem razumijevanju beskonačnih skupova.

Propozicija 2 Skup X je konačan ako i samo ako *ne postoji* bijekcija s X na niti jedan njegov pravi podskup.

2.3.1 Beskonačni skupovi, prebrojivost i neprebrojivost

Definicija 2.3.3 Skup X je **beskonačan** ako nije konačan. ■

Obratom po kontrapoziciji tvrdnje iz Propozicije 2 slijedi — ako postoji bijekcija sa skupa X na njegov pravi podskup, onda je X beskonačan.

■ **Primjer 2.27** Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je beskonačan.

Dokaz. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu s $f(n) = 2n$, tj. funkcija f prirodnom broju n pridružuje n-ti parni broj. Funkcija $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, gdje $2\mathbb{N}$ označava skup parnih brojeva je bijekcija (pokažite to), a kako je $2\mathbb{N}$ pravi podskup od $\mathbb{N}$, slijedi da je $\mathbb{N}$ beskonačan. Ovime smo pokazali i da su skupovi $\mathbb{N}$ i $2\mathbb{N}$ ekvipotentni, tj. prirodnih brojeva ima "jednako mnogo" kao i samo parnih. ■

Vježba 2.29 Pokažite da je skup neparnih prirodnih brojeva beskonačan.

Definicija 2.3.4 Za skup X koji je ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ kažemo da je **prebrojiv** (prebrojivo beskonačan), a kardinalni broj takvog skupa označavamo simbolom $\operatorname{card} X = \aleph_0$ (čita se "alef nula"). ■

■ **Primjer 2.28** Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ je prebrojiv.

Dokaz. Ideja je da neparne prirodne brojeve preslikamo u negativne cijele brojeve, a parne prirodne brojeve u nenegativne cijele brojeve. Možemo reći i da ćemo negativne cijele brojeve prebrojiti s neparnim prirodnim brojevima, a nenegativne s parnim prirodnim brojevima. U tu svrhu konstruiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiranu s

$$f(n) = \begin{cases} -\dfrac{n+1}{2}, & n \text{ neparan}, \\ \dfrac{n}{2} - 1, & n \text{ paran}. \end{cases}$$

Tablični prikaz te funkcije je

n	1	2	3	4	5	6	...
$f(n)$	-1	0	-2	1	-3	2	...

.

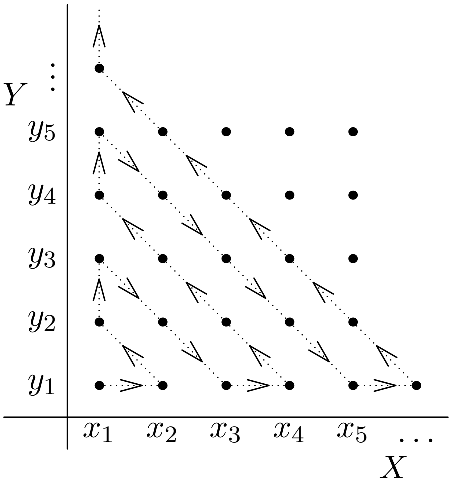
Očito različitim prirodnim brojevima pridružujemo različite cijele brojeve, odnosno f je injekcija. S druge strane svaki cijeli broj biti će prebrojen, tj. za svaki $k \in \mathbb{Z}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f(n) = k$, odnosno f je surjekcija. Stoga je f bijekcija i time je $\mathbb{Z}$ prebrojiv. ■

Vježba 2.30 Pokažite da je skup svih kvadrata prirodnih brojeva $K = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv.

> **Napomena 2.20** Ako je skup X ekvipotentan s $\mathbb{N}$, odnosno prebrojiv, tada postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to X$ i skup X možemo zapisati u obliku $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, gdje je $x_n = f(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Takav zapis često koristimo za prebrojive skupove.

■ **Primjer 2.29** Neka su X i Y prebrojivi skupovi, tada je i Kartezijev skup $X \times Y$ prebrojiv.

Dokaz. Označimo $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ i $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$, tada se $X \times Y$ sastoji od svih mogućih parova (x_i, y_j) za $i, j \in \mathbb{N}$, odnosno pišemo $X \times Y = \{(x_i, y_j) \ : \ i, j \in \mathbb{N}\}$. Parove možemo brojiti na način kako je označeno na Slici 2.14: počnemo od para (x_1, y_1) i dalje pratimo strelice. Tako je svakom prirodnom broju pridružen točno jedan par i svi parovi će biti prebrojeni. Prema tome konstruirali smo bijekciju iz $\mathbb{N}$ na $X \times Y$. ■



Slika 2.14: Elemente skupa $X \times Y$ brojimo redom kako je naznačeno strelicama.

Napomena 2.21 Kao posljedicu tvrdnje iz prethodnog primjera imamo — ako je skup X prebrojiv i $n \geq 2$ bilo koji prirodan broj, tada je i skup $X^n = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ puta}}$ prebrojiv. Pokažite to matematičkom indukcijom.

■ **Primjer 2.30** Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.

Dokaz. Prisjetimo se da je $\mathbb{Q}$ skup svih (do kraja skraćenih) razlomaka $\frac{m}{n}$, gdje su $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Ako razlomcima pridružimo parove na način $\frac{m}{n} \mapsto (m,n)$, onda smo konstruirali injektivno preslikavanje iz $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. S druge strane, kako je $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ prebrojiv skup, onda postoji injekcija $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Nadalje, preslikavanje $e : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (ulaganje) zadano s $e(n) = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ je injektivno. Kako je kompozicija dviju injekcija opet injekcija (Zadatak 2 (a) iz 2.4), funkcija $e \circ f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je injekcija. Prema Teoremu 2.3.1 skupovi $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ su ekvipotentni, odnosno $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \aleph_0$. ■

Vježba 2.31 Neka su X i Y prebrojivi skupovi, pokažite da je tada i skup $X \cup Y$ prebrojiv. Indukcijom pokažite i općenitiju tvrdnju da je konačna unija prebrojivih skupova prebrojiv skup.

Dodatak

Algebarski brojevi. Realni brojevi koji se mogu dobiti kao nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima zovu se *realni* algebarski brojevi. Svaki racionalan broj $x = \frac{m}{n}$, gdje su $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ je algebarski broj, jer je on nultočka polinoma $P(x) = nx - m$. Brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ su algebarski brojevi, koji nisu nisu racionalni. Oni su redom nultočke polinoma $x^2 - 2$, $x^2 - 3$ i $x^2 - 5$. Algebarskih brojeva ima (samo) prebrojivo mnogo. Svaki polinom stupnja $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jednoznačno je određen s $n+1$ koeficijenata. Stoga prema Napomeni

2.21, za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je skup svih polinoma n-tog stupnja s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv. Nadalje, korištenjem činjenice da je prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiv skup, zaključujemo da je skup realnih algebarskih brojeva prebrojiv.

Još u Primjeru 2.26 pokazali smo da je skup realnih brojeva beskonačan. Naime, konstruirali smo bijekciju iz $\mathbb{R}$ na njegov pravi podskup $\langle -1, 1\rangle$. Kao i za prethodne primjere, možemo se pitati je li i skup $\mathbb{R}$ prebrojiv? Zbog inkluzije $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ slijedi da je $\operatorname{card} \mathbb{R} \geq \aleph_0$.

■ **Primjer 2.31 — G. Cantor.** Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije prebrojiv. Njegov kardinalni broj naziva se **kontinuum**, a označava se s $\operatorname{card} \mathbb{R} = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Pokazat ćemo da skup $\langle 0, 1\rangle \subset \mathbb{R}$ nije prebrojiv, iz čega očito slijedi da ni $\mathbb{R}$ ne može biti prebrojiv. Pretpostavimo suprotno tj. da je interval $\langle 0, 1\rangle$ prebrojiv. Tada možemo pisati $\langle 0, 1\rangle = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, a realne brojeve b_i možemo zapisati u decimalnom obliku

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 0.b_{11}b_{12}b_{13}\ldots \\
b_2 &= 0.b_{21}b_{22}b_{23}\ldots \\
b_3 &= 0.b_{31}b_{32}b_{33}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

pri čemu svaki b_i ima beskonačno mnogo (prebrojivo) decimala različitih od 0. Npr. broj 0.025 pišemo u obliku 0.02499999.... Na taj način osigurali smo jednoznačnost prikaza realnog broja u decimalnom zapisu. Sada konstruiramo broj

$$a = 0.a_1a_2a_3\ldots$$

korištenjem tzv. *dijagonalnog postupka*: za svaki $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$
a_i = \begin{cases} b_{ii} + 1\,, & \text{ako je } b_{ii} \in \{0, 1, \ldots, 8\}\,, \\ 1\,, & \text{ako je } b_{ii} = 9\,. \end{cases}
$$

Ovako konstruirani broj a nalazi se u intervalu $\langle 0, 1\rangle$ i različit je od svih realnih brojeva b_i, jer se po konstrukciji od svakog od njih razlikuje na i-tom decimalnom mjestu. Međutim, to je u kontradikciji s pretpostavkom da elemente intervala $\langle 0, 1\rangle$ možemo prebrojiti. Time smo zapravo pokazali da je $\mathfrak{c} > \aleph_0$. ■

Definicija 2.3.5 Za skup brojeva X koji je beskonačan i nije prebrojiv kažemo da je **neprebrojiv** (beskonačno neprebrojiv). ■

■ **Primjer 2.32** Skup uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{R}^2$ ekvipotentan je skupu $\mathbb{R}$, odnosno $\operatorname{card}(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Ponovno je dovoljno pokazati da su skupovi $\langle 0, 1\rangle^2$ i $\langle 0, 1\rangle$ ekvipotentni, odnosno da jedinični kvadrat ima jednako mnogo elemenata kao i samo jedna njegova stranica. Uzmimo proizvoljan par $(a, b) \in \langle 0, 1\rangle^2$ i zapišimo ih u decimalnom zapisu s beskonačno mnogo decimalnih znamenki kao i u prethodnom primjeru. Ilustrirajmo to na jednom primjeru realnih brojeva

$$
\begin{array}{lllllll}
a & = & 0.5 & 004 & 3 & 7 & 05 \quad \ldots \\
b & = & 0.02 & 4 & 05 & 1 & 008 \quad \ldots
\end{array}
$$

Decimalne znamenke brojeva a i b separirali smo u grupe koje sadrže točno po jednu znamenku različitu od 0 i s tom znamenkom grupe završavaju. Na ovom primjeru konstruirajmo sada realni broj c koji dobivamo "stapanjem" grupa znamenki brojeva a i b na sljedeći način:

$$c = 0.5\ 02\ 004\ 4\ 3\ 05\ 7\ 1\ 05\ 008\ldots$$

Dakle, u decimalni zapis broja c alternirano upisujemo grupe znamenki od a i b. S druge strane, za dani realni broj c u ovakvom decimalnom zapisu, na jednoznačan način možemo odrediti od kojeg para realnih brojeva je on sastavljen. Na primjer broj

$$c = 0.6\ 5\ 03\ 04\ 2\ 008\ 2\ 01\ 5\ 8\ldots$$

dobiven je od para

$$\begin{array}{ccccccccc} a & = & 0.6 & 03 & 2 & 2 & 5 & \ldots \\ b & = & 0.5 & 04 & 008 & 01 & 8 & \ldots \end{array}$$

Stoga je preslikavanje $(a,b) \mapsto c$ bijekcija i time je tvrdnja pokazana. ∎

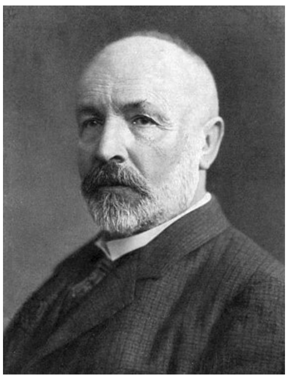
Napomena 2.22 Kao posljedicu prethodnog primjera imamo $\operatorname{card}\mathbb{C} = \mathfrak{c}$. Naime, lako se vidi da je $\operatorname{card}\mathbb{C} = \operatorname{card}(\mathbb{R}^2)$, jer je preslikavanje $(x,y) \mapsto z = x + iy$ bijekcija.

Vježba 2.32 Odredite kardinalitet skupa svih dužina u ravnini.

Dodatak

Hipoteza kontinuuma. Kroz prethodne primjere pokazali smo da za kardinalne brojeve skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ vrijedi $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. Postavlja se pitanje: Postoji li skup X koji je "između" skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$, čiji kardinalni broj zadovoljava $\aleph_0 < \operatorname{card} X < \mathfrak{c}$, tj. postoji li skup koji nije prebrojiv, ali nije ni ekvipotentan s $\mathbb{R}$. Kroz godine istraživanja, osobito u prvoj polovici 20. stoljeća, nastala je hipoteza (slutnja) da takav skup *ne postoji*, i to je tzv. *hipoteza kontinuuma*. Pitanje o postojanju takvog skupa formulirao je Georg Cantor još 1878. godine, a 1900. njemački matematičar David Hilbert uvrstio ga je kao prvog na popis od 23 neriješena matematička problema koji će predstavljati velike izazove i imati značajan utjecaj na razvoj matematike u 20. stoljeću. Pitanje hipoteze kontinuuma riješio je 1963. godine američki matematičar Paul Cohen tako što je pokazao da niti hipotezu niti njenu negaciju nije moguće dokazati u okviru standardne (općeprihvaćene) teorije skupova i za taj rezultat dobio je 1966. godine Fieldsovu medalju, najveće matematičko odlikovanje.

Crtica



Georg Cantor (1845.-1918.), njemački matematičar rođen u Sankt Petersburgu, smatra se osnivačem teorije skupova, matematičke grane koja spada u same temelje moderne matematike. Cijeli svoj radni vijek proveo je kao profesor na Sveučilištu u Halleu (SR Njemačka). Početci Cantorovog znanstvenog rada spadaju u matematičku analizu i značajan rezultat u tom području je njegov dokaz jedinstvenosti prikaza funkcije pomoću trigonometrijskog reda. Za početak teorije skupova uzima se objavljivanje Cantorovog članka *"Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" (O jednom svojstvu skupa realnih algebarskih brojeva)* iz 1874. godine, u kojem Cantor po prvi put dolazi do zaključka o postojanju *različitih* beskonačnosti. Cantor uvodi pojam bijekcije i pomoću njega definira pojam ekvipotentnosti skupova. Dijagonalni postupak koji smo koristili u Primjeru 2.31 originalna je Cantorova ideja, kao i dokaz ekvipotentnosti skupova $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$. Cantor je bio čovjek, čak i za područje matematike, daleko ispred svojega vremena. Njegova teorija nailazila je u početku na žustar otpor matematičke zajednice. Nakon niza kritika, sam je za jedan svoj rad izjavio: "ovo sam trebao objaviti za 100 godina". Neprihvaćanje njegovih ideja i brojne kritike od strane kolega narušile su Cantorovo zdravlje. Umro je u 73. godini života u jednom sanatoriju.

2.4 Zadatci za vježbu

1. Neka je S konačan skup. Dokažite tvrdnju: ako je funkcija $f : S \to S$ injekcija, tada je f i surjekcija.
2. Zadane su ulančane funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Pokažite sljedeće tvrdnje:
   (a) ako su f i g injekcije, tada je i $g \circ f$ injekcija;
   (b) ako su f i g surjekcije, tada je i $g \circ f$ surjekcija;
   (c) ako je funkcija $g \circ f$ injekcija, tada je f injekcija;
   (d) ako je funkcija $g \circ f$ surjekcija, tada je g surjekcija.
3. Ispitajte injektivnost funkcije $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.
4. Ispitajte injektivnost funkcije $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$. Je li ta funkcija surjekcija?
5. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = x^2 - 1$ i $g : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Odredite ako postoji $g^{-1} : Im(g) \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ i izračunajte $f \circ g^{-1}$.
6. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \log_2(x^2+4)$ i $g : \mathbb{R}\backslash\{-5\} \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$. Je li funkcija f injekcija? A surjekcija? Odredite ako postoji $g^{-1} : Im(g) \to \mathbb{R}\backslash\{-5\}$ i izračunajte $(g^{-1} \circ f)(2)$.
7. Računski i grafički odredite sliku funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = 3 - (x-2)^2$. Odredite i slike $f([0,1])$ i $f(\langle 1,3\rangle)$.
8. Računski i grafički odredite sliku funkcije $f : [-2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$. Odredite i sliku $f(\langle 2,7])$.
9. Na skupu $S = \{1,2,3,4,5\}$ zadana je binarna relacija
$$\rho = \{(2,2),(1,5),(4,2),(3,1),(5,5),(5,1),(5,3)\}.$$
   Proširite relaciju ρ najmanjim mogućim brojem parova do relacije $\tilde{\rho}$ na način da $\tilde{\rho}$ bude refleksivna i simetrična. Ispitajte tranzitivnost dobivene relacije $\tilde{\rho}$. Ako je $\tilde{\rho}$ relacija ekvivalencije, odredite pripadne klase ekvivalencije i zapišite kvocijentni skup.

10. Na skupu $A = \{a,b,c,d\}$ zadana je binarna relacija

$$\rho = \{(a,a),(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(d,a),(d,b),(d,d)\}.$$

Ispitajte refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Ako je potrebno proširite relaciju ρ do relacije $\tilde{\rho}$ najmanjim mogućim brojem parova tako da $\tilde{\rho}$ bude relacija ekvivalencije. Odredite zatim pripadne klase ekvivalencije i zapišite kvocijentni skup.

11. Na skupu $\mathbb{R}$ definirane su binarne relacije ρ_0 i ρ_1 s

$$x\rho_0 y \Leftrightarrow xy = 0,$$
$$x\rho_1 y \Leftrightarrow xy = 1.$$

Ispitajte refeksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost relacija ρ_0 i ρ_1.

12. Neka je S neprazan skup. Na partitivnom skupu $\mathscr{P}(S)$ definirana je relacija ρ s $A\rho B$ ako i samo ako $A \cap B = \emptyset$. Ispitajte refeksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Ovise li ta svojstva o skupu S?

13. Neka je S neprazan skup. Na partitivnom skupu $\mathscr{P}(S)$ definirana je relacija ρ s $A\rho B$ ako i samo ako $A \backslash B = \emptyset$. Ispitajte refeksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Ovise li ta svojstva o skupu S?

14. Binarna relacija ρ na $\mathbb{Z}$ zadana je s

$$x\rho y \Leftrightarrow (x^3 - y^3) \text{ djeljivo s } 4.$$

Je li ρ relacija ekvivalencije?

15. Binarna relacija ρ na $\mathbb{R}^2$ zadana je s

$$(x,y)\rho(u,v) \Leftrightarrow (x < u \text{ ili } (x = u \text{ i } y \leq v)).$$

Je li ρ relacija parcijalnog poretka?

16. Napišite relaciju ekvivalencije na skupu $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ čije su klase ekvivalencije $k_0 = \{0,5\}$, $k_1 = \{1,6\}$, $k_2 = \{2,7\}$, $k_3 = \{3\}$, $k_4 = \{4\}$.

17. Binarna relacija $\sim$ na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ zadana je s

$$\varphi \sim \psi \;\Leftrightarrow\; \varphi - \psi = 2k\pi \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}.$$

Pokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathbb{R}$ te da se pripadne klase ekvivalencije podudaraju s definicijom argumenta kompleksnog broja z, odnosno da vrijedi $\arg z \in \mathbb{R}/\!\sim$ za sve $z \in \mathbb{C}$.

18. Konstruirajte bijekciju sa skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ na skup prirodnih brojeva koji su djeljivi s 10.

19. Konstruirajte injekcije među skupovima $\mathbb{Z}$ i $2\mathbb{N}$, gdje $2\mathbb{N}$ označava skup svih parnih prirodnih brojeva.

20. Konstruirajte bijekciju između proizvoljnog otvorenog intervala $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a < b$ i intervala $\langle -1,1\rangle$.

21. Neka je skup $A \subset X$ konačan i skup X prebrojiv. Pokažite da je skup $X \setminus A$ prebrojiv.
22. Neka je skup $X \subset Y$ prebrojiv, a skup Y neprebrojiv. Pokažite da je tada skup $Y \setminus X$ neprebrojiv.
23. Koji je kardinalitet skupa svih konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva koji su oblika $\{k, \ldots, l\}$, gdje su $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $k \leq l$?
24. Koji je kardinalitet skupa svih otvorenih intervala oblika $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$, pri čemu je $a < b$?
25. Koji je kardinalitet skupa svih trokuta u ravnini?

2.4.1 Pitanja za ponavljanje i razumijevanje gradiva

Točno ili **N**etočno? Svoje tvrdnje obrazložite.

1. Funkcija neke elemente domene preslikava u elemente kodomene.
2. Postoji funkcija koja nekim elementima domene pridružuje isti element kodomene.
3. Svaki element kodomene ima svoj original koji se u njega preslikava.
4. Svaka funkcija ima inverznu funkciju.
5. Postoji funkcija koja nije surjekcija, a ima inverznu funkciju.
6. Simetrična i antisimetrična relacija nužno je refleksivna. koja nije tranzitivna.
7. Simetrična i tranzitivna relacija je nužno i refleksivna.
8. Svaka funkcija je relacija.
9. Klase ekvivalencije čine particiju skupa.
10. Particija skupa određuje relaciju parcijalnog poretka.
11. Svaki prebrojiv skup ekvipotentan je sa skupom cijelih brojeva.
12. Svaki neprebrojiv skup ekvipotentan je sa skupom realnih brojeva.
13. Jednakostraničnih trokuta u ravnini ima isto koliko i svih raznostraničnih trokuta.

Rješenja zadataka

1. Bez smanjenja općenitosti uzmimo $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavka injektivnosti funkcije $f : S \to S$, tj. različiti elementi iz S preslikavaju se u različite elemente u S, implicira $Im(S) = S$, odnosno f je surjekcija.
2. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$.
   (a) Neka su f i g injekcije. Pretpostavimo $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ za neke $x_1, x_2 \in X$. Zbog injektivnosti od g slijedi $f(x_1) = f(x_2)$, a zbog injektivnosti of f dalje slijedi $x_1 = x_2$. Dobili smo da iz pretpostavke $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$, odnosno da je $g \circ f$ injekcija.
   (b) Neka su f i g surjekcije. Kako je g surjekcija, tada za proizvoljan $z \in Z$ postoji $y \in Y$ takav da je $z = g(y)$. Za taj y, zbog surjektivnosti of f, postoji $x \in X$ takav da je $y = f(x)$. Dakle, za prizvoljan $z \in Z$, postoji $x \in X$ takav da je $z = g(f(x))$, odnosno $g \circ f$ je po definiciji surjekcija.

(c) Pretpostavimo da je $g\circ f$ injekcija. Kada f ne bi bila injekcija, tada bi postojali $x_1 \neq x_2$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$, odakle bi slijedilo $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Time bismo dobili da $g\circ f$ nije injekcija, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, f je nužno injekcija.

(d) Pretpostavimo da je $g\circ f$ surjekcija. Kada g ne bi bila surjekcija, tada bi postojao $z \in Z$ takav da je $z \neq g(y)$ za sve $y \in Y$. Kako je $f(x) \in Y$, onda bi vrijedilo i $z \neq g(f(x))$ za sve $x \in X$, što bi značilo da $g\circ f$ nije surjekcija pa smo opet u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, g je nužno surjekcija.

3. Krenimo od pretpostavke $f(x_1) = f(x_2)$, tj. $\dfrac{2x_1+3}{x_1-1} = \dfrac{2x_2+3}{x_2-1}$ za neke $x_1,x_2 \in R\backslash\{1\}$. Raspisivanjem ove jednakosti dobivamo da je tada nužno $x_1 = x_2$, odnosno f je injekcija.
4. Pretpostavimo $f(x_1) = f(x_2)$, odnosno $\sqrt{\dfrac{x_1}{x_1+1}} = \sqrt{\dfrac{x_2}{x_2+1}}$. Zbog injektivnosti funkcije $\sqrt{\cdot} : [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$, slijedi $\dfrac{x_1}{x_1+1} = \dfrac{x_2}{x_2+1}$, odakle dobivamo $x_1 = x_2$, odnosno f je injekcija. Funkcija f nije surjekcija, jer postoje $y \in \mathbb{R}$ takvi da je $y \neq f(x)$ za sve $x \in [0,+\infty\rangle$. Na primjer $y = -1$.
5. Funkcija g jest injekcija, ali nije surjekcija, jer ne postoji $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ takav da je $g(x) = 0$. Međutim, funkcija $g : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, čija je kodomena jednaka slici jest surjekcija pa je i bijekcija, odnosno ima inverz g^{-1}. Za određivanje inverza uzmimo proizvoljan $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i riješimo jednadžbu $y = g(x)$ u varijabli x:
$$y = \frac{1}{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad yx+y = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{y} - 1\,.$$
Time smo dobili pravilo pridruživanja za inverznu funkciju: $y \mapsto x = g^{-1}(y)$. Dakle, $g^{-1}(y) = \dfrac{1}{y} - 1$. Konačno $f(g^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$.
6. Funkcija f nije injekcija, jer $f(-1) = f(1)$, a nije ni surjekcija jer $f(x) \geq 2$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Funkcija $g : \mathbb{R}\backslash\{-5\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$ je bijekcija i $g^{-1}(y) = \dfrac{5y+1}{2-y}$. Direktnim računom $(g^{-1}\circ f)(2) = -16$.
7. $Im(f) = \langle-\infty,3]$. $f([0,1]) = [-1,2]$. $f(\langle1,3\rangle) = \langle2,3]$.
8. $Im(f) = [-1,+\infty\rangle$. $f(\langle2,7]) = \langle1,2]$.
9. Da bi postigli refleksivnost moramo dodati parove: $(1,1), (3,3), (4,4)$. Da bi postigli simetričnost moramo dodati parove: $(2,4)$, $(1,3)$, $(3,5)$. Relacija je tranzitivna. Klase ekvivalencije: $[1] = \{1,3,5\}$, $[2] = \{2,4\}$. Kvocijentni skup $S/\tilde{\rho} = \{[1],[2]\}$.
10. ρ nije refleksivna, jer $(c,c) \notin \rho$; nije simetrična, jer $(a,b) \in \rho$, ali $(b,a) \notin \rho$; nije antisimetrična, jer za $a,d \in A$ vrijedi $(a,d) \in \rho$ i $(d,a) \in \rho$; nije tranzitivna, jer $(b,d),(d,a) \in \rho$, ali $(b,a) \notin \rho$. $\tilde{\rho} = \rho \cup \{(c,c),(b,a)\}$ je relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije: $[a] = \{a,b,d\}$, $[c] = \{c\}$. Kvocijentni skup $A/\tilde{\rho} = \{[a],[c]\}$.
11. ρ_0 nije refleksivna, jer $x\rho_0 x \Rightarrow x^2 = 0$, tj. $x = 0$; simetrična je; nije antisimetrična; nije tranzitivna, jer $(1,0) \in \rho_0$ i $(0,1) \in \rho_0$, ali $(1,1) \notin \rho_0$.
ρ_1 nije refleksivna, jer $x\rho_1 x \Rightarrow x^2 = 1$, tj. $x = \pm 1$; simetrična je; nije antisimetrična; nije tranzitivna, jer $(2,1/2) \in \rho_1$ i $(1/2,2) \in \rho_1$, ali $(2,2) \notin \rho_1$.
12. ρ nije refleksivna, jer $A\rho A \Rightarrow A\cap A = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$; simetrična je; nije antisimetrična; nije tranzitivna, jer za neprazne disjunktne skupove A i B je $A\rho B$ i $B\rho A$, međutim $(A,A) \notin \rho$.

13. Refleksivna je jer $A \backslash A = \emptyset$ za sve $A \subset S$; nije simetrična; antisimetrična je, jer $A\rho B$ i $B\rho A$ implicira $A \backslash B = \emptyset$ i $B \backslash A = \emptyset$, odnosno $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, odakle je $A = B$; tranzitivna je, jer za $A\rho B$ i $B\rho C$ imamo $A \cap B^c = \emptyset$ i $B \cap C^c = \emptyset$. Kako je $A \cap C^c = A \cap (B^c \cup B) \cap C^c = A \cap B^c \cup B \cap C^c = \emptyset$ zaključujemo $A\rho C$.
14. ρ je relacija ekvivalencije: refleksivna je, tj. $x, \rho\, x$, jer 0 je djeljivo s 4; simetrična je; tranzitivna je, jer je zbroj dva broja koja su djeljiva s 4 također djeljiv s 4.
15. ρ je relacija parcijalnog poretka: refleksivna je, antisimetrična i tranzitivna.
16. $\rho = \{(0,0),(5,5),(0,5),(5,0),(1,1),(6,6),(1,6),(6,1),(2,2),(7,7),(2,7)(7,2),$ $(3,3),(4,4)\}$.
17. refleksivnost: $\varphi \sim \varphi$ jer $\varphi - \varphi = 0 \cdot 2\pi$, simetričnost: ako $\varphi \sim \psi$, tj. $\varphi - \psi = 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, onda vrijedi i $\psi - \varphi = 2(-k)\pi$, tj. $\psi \sim \varphi$, tranzitivnost: ako $\varphi \sim \psi$, tj. $\varphi - \psi = 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$ i $\psi \sim \vartheta$, tj. $\psi - \vartheta = 2l\pi$ za neki $l \in \mathbb{Z}$, onda zbrajanjem slijedi $\varphi - \vartheta = 2(k+l)\pi$, tj. $\varphi \sim \vartheta$.
    Klase ekvivalencije su oblika
    $$[\varphi] = \{\psi \;:\; \psi = \varphi + 2k\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}\} \text{ za sve } \varphi \in [0, 2\pi\rangle\,.$$
    $[\varphi] = \arg(x + iy)$, pri čemu vrijedi $\operatorname{tg}(\varphi) = y/x$.
18. Npr. $f : \mathbb{N} \to 10\mathbb{N}$, $f(n) = 10n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(m) = m/10$ za sve $m \in 10\mathbb{N}$.
19. Npr. $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{N}$ i $g : 2\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ zadane s
    $$f(k) = \begin{cases} 4k+2\,, & k \geq 0\,, \\ -4k\,, & k < 0\,, \end{cases} \qquad g(l) = \begin{cases} -l/4\,, & \text{ako je } l \text{ djeljiv s } 4\,, \\ (l-2)/4\,, & \text{ako } l \text{ nije djeljiv s } 4\,. \end{cases}$$
20. Npr. $f : \langle -1, 1\rangle \to \langle a, b\rangle$ zadana s $f(x) = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{a+b}{2}$.
21. $A \subset X$ konačan i X prebrojiv. Uspostavimo bijekciju između skupa A i skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$ te između skupova X i $\mathbb{N}$. Tada očito imamo bijekciju između skupova $X \backslash A$ i $\mathbb{N} \backslash \{1, 2, \ldots, n\}$ za koji znamo da je prebrojiv.
22. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $Y \backslash X$ prebrojiv. Tada je i skup $Y \backslash X \cup X$, kao unija dva prebrojiva skupa, prebrojiv skup. Kako je $Y = Y \backslash X \cup X$, slijedi da je Y prebrojiv, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je Y neprebrojiv.
23. Kardinalitet zadanog skupa podskupova jednak je kardinalitetu skupa $S = \{(k, l),$ $k, l \in \mathbb{N},\, k \leq l\}$. Kako je $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ očito imamo injekciju iz S u $\mathbb{N}^2$, stoga je $\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} \mathbb{N}^2 = \aleph_0$. S druge strane, očito imamo i injekciju iz $\mathbb{N}$ u S (npr. $n \mapsto (1, n) \in S$) pa je $\aleph_0 \leq \operatorname{card} S$. Stoga je $\operatorname{card} S = \aleph_0$.
24. Kardinalitet skupa svih otvorenih intervala jednak je kardinalitetu skupa $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a, b \in \mathbb{R}\,,\; a < b\}$. Kao i u prethodnom zadatku imamo injekciju iz S u $\mathbb{R}^2$ odakle slijedi $\operatorname{card} S \leq \mathfrak{c}$. S druge strane, zbog injekcije iz $\mathbb{R}$ u S imamo $\mathfrak{c} \leq \operatorname{card} S$. Stoga je $\operatorname{card} S = \mathfrak{c}$.
25. $\mathfrak{c}$

2.5 Literatura

[1] A. Aglić Aljinović, I. Brnetić, V. Ćepulić, N. Elezović, Lj. Marangunić, M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović. Matematika 1. Element, Zagreb, 2013.

[2] S. Kurepa. Matematička analiza 1. Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[3] D. Veljan. Kombinatorna i diskretna matematika. Algoritam, Zagreb, 2001.

[4] B. Pavković, D. Veljan. Elementarna matematika 1. Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.

[5] M Vuković. Teorija skupova - skripta s predavanja. Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, 2015.