Linearna algebra - 9. auditorne vježbe

1. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $W = \{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \mid \mathbf{AX} = \mathbf{XA}\}$. Dokažite da je W potprostor od $\mathcal{M}_2$ i nađite mu dimenziju.

Neka su $X, Y \in W$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Trebamo dokazati da je i $\alpha X + \beta Y \in W$.

Imamo

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = \left[\begin{array}{l} \text{zbog } X, Y \in W \text{ imamo } AX = XA \\ \text{i jednako tako } AY = YA \end{array}\right]$$

$$= \alpha XA + \beta YA = (\alpha X + \beta Y)A$$

pa po definiciji skupa W slijedi $\alpha X + \beta Y$, tj. W je potprostor od $\mathcal{M}_2$.

Nap. Uočimo da u ovom dokazu nije bitno kako točno izgleda matrica A, tj. W će biti potprostor od $\mathcal{M}_2$ neovisno o odabiru matrice A. Skup W zovemo **centralizator** matrice A (u prostoru $\mathcal{M}_2$).

Da bismo odredili dimenziju od W, naći ćemo jednu bazu za W, i to kroz dva koraka:

1° odredit ćemo jedan skup vektora koji razapinje W,

2° taj ćemo skup reducirati do linearno nezavisnog skupa u $\mathcal{M}_2$ ukoliko to bude potrebno (i na taj način dobiti bazu).

1° Neka je $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in W$ proizvoljna matrica. Imamo

$$X \in W \Rightarrow AX = XA$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+y \\ z & z+w \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x}+z=\cancel{x} \\ \cancel{y}+w=x+\cancel{y} \\ z=z \\ \cancel{w}=z+\cancel{w} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=w, \quad z=0$$

Dakle, matrica X je oblika

$$X=\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=x\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A_1}+y\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:A_2}, \quad x,y\in\mathbb{R},$$

tj., svaka se matrica iz W može zapisati kao linearna kombinacija A_1 i A_2.

Budući da vrijedi $A_1, A_2 \in W$:

$$AA_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=A_1A, \qquad AA_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=A_2A,$$

te dvije matrice razapinju potprostor W, $W=L(A_1,A_2)$.

2° Uočimo da je skup $\{A_1,A_2\}$ linearno nezavisan u M_2: naime, neka su $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ proizvoljni skalari takvi da $\alpha A_1+\beta A_2=0$. Imamo:

$$\alpha A_1+\beta A_2=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha=\beta=0.$$

Dakle, $\{A_1,A_2\}$ je baza za W pa je $\dim W=2$.

2. Neka je

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Dokažite da je V potprostor od $\mathbb{R}^n$, nađite mu (jednu) bazu i odredite dimenziju.

Neka su $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha \underbrace{(x_1 + x_2)}_{=0} + \beta \underbrace{(y_1 + y_2)}_{=0} = 0,$$

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=0} + \beta \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{=0} = 0,$$

$$\vdots$$

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}_{=0} + \beta \underbrace{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}_{=0} = 0.$$

Dakle, po definiciji slijedi i da je vektor

$$(\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n) = \alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

također element skupa V pa je V potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Bazu za V nalazimo na isti način kao i u prethodnom zadatku:

1° Neka je $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ proizvoljan vektor. Imamo:

$$\vec{x} \in V \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & \Rightarrow x_2 = -x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \\ \vdots & \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 0 & \Rightarrow x_{n-1} = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0 & \Rightarrow x_n = 0 \end{cases}$$

Dakle, svi vektori iz V su oblika

$$\vec{x} = (x_1, -x_1, 0, \ldots, 0) = x_1 (1, -1, 0, \ldots, 0), \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

pa je $V = L((1, -1, 0, \ldots, 0))$. (Uočimo da je uistinu $(1, -1, 0, \ldots, 0) \in V$.)

2° Skup $\{(1,-1,0,\dots,0)\}$ je linearno nezavisan u $\mathbb{R}^n$: za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\alpha(1,-1,0,\dots,0) = (\alpha,-\alpha,0,\dots,0) = (0,0,\dots,0) \Rightarrow \alpha = 0.$$

Dakle, taj je skup baza za V i $\dim V = 1$.

3. Dokažite da je
$$V = \{p \in \mathcal{P}_4 \mid p'(1) = 0\}$$
potprostor vektorskog prostora $\mathcal{P}_4$ te mu nađite neku bazu i dimenziju. Nadopunite dobivenu bazu do baze vektorskog prostora $\mathcal{P}_4$.

Neka su $p, q \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo

$$(\alpha p + \beta q)'(1) = \left[\begin{matrix}\text{svojstva derivacije} \\ \text{funkcije}\end{matrix}\right] = \alpha \underbrace{p'(1)}_{\substack{=0 \\ (p \in V)}} + \beta \underbrace{q'(1)}_{\substack{=0 \\ (q \in V)}} = 0,$$

tj. $\alpha p + \beta q \in V$ pa je V potprostor od $\mathcal{P}_4$.

Za polinom $p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \in V$ imamo

$$p \in V \Rightarrow p'(1) = 0$$
$$\Rightarrow 4a + 3b + 2c + d = 0$$
$$\Rightarrow d = -4a - 3b - 2c.$$

$$p'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d$$
$$p'(1) = 4a + 3b + 2c + d$$

Dakle, polinomi iz V su oblika

$$\begin{aligned} p(t) &= at^4 + bt^3 + ct^2 + (-4a - 3b - 2c)t + e \\ &= a\underbrace{(t^4 - 4t)}_{=: p_1(t)} + b\underbrace{(t^3 - 3t)}_{=: p_2(t)} + c\underbrace{(t^2 - 2t)}_{=: p_3(t)} + e \cdot \underbrace{1}_{=: p_4(t)}, \quad a, b, c, e \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Budući da je svaki od polinoma p_1, p_2, p_3, p_4 uistinu element skupa V:

$$p_1'(1) = 4 - 4 = 0, \quad p_2'(1) = 3 - 3 = 0, \quad p_3'(1) = 2 - 2 = 0, \quad p_4'(1) = 0,$$

slijedi $V = L(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

Nadalje, skup $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ je linearno nezavisan u $\mathcal{P}_4$: za sve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) + \gamma p_3(t) + \delta p_4(t) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha t^4 + \beta t^3 + \gamma t^2 + (-4\alpha - 3\beta - 2\gamma)t + \delta = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \qquad \text{(teorem o jednakosti polinoma)}$$

Dakle, $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ je baza za V i $\dim V = 4$.

Nadopunu ove baze do baze za $\mathcal{P}_4$ radimo tako da promatramo uniju

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4\} \cup \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$$

dobivene baze za V i neke baze za $\mathcal{P}_4$ (u ovom slučaju kanonske). Ovu uniju treba reducirati do linearno nezavisnog skupa u $\mathcal{P}_4$.

Konstantni polinom 1 se već nalazi u dobivenoj bazi za V. Nadalje, skup $\{p_1, p_2, p_3, p_4, t\}$ je linearno nezavisan u $\mathcal{P}_4$: za sve $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) + \gamma p_3(t) + \delta p_4(t) + \varepsilon t = 0$$

$$\Rightarrow \alpha t^4 + \beta t^3 + \gamma t^2 + (-4\alpha - 3\beta - 2\gamma + \varepsilon) t + \delta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \\ -4\alpha - 3\beta - 2\gamma + \varepsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = 0$$

Dakle, skup $\{p_1, p_2, p_3, p_4, t\}$ je baza za $\mathcal{P}_4$.

4. Zadan je vektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

te skup

$$M = \{\mathbf{v} \in V^3 \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

(a) Dokažite da je M vektorski prostor te mu odredite bazu i dimenziju.

(b) Odredite geometrijsku interpretaciju skupa M te vektora njegove baze.

(c) Nadopunite bazu za M do baze prostora V^3. Odredite potprostor L razapet vektorima iz te nadopune te odredite njegovu geometrijsku interpretaciju.
(Kažemo da je L **direktni komplement** potprostora M u vektorskom prostoru V^3.)

(a) Neka su $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in M$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo

$$\vec{n}\cdot(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \begin{bmatrix}\text{svojstva skalarnog} \\ \text{produkta}\end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{v}_1}_{\substack{=0 \\ (\vec{v}_1 \in M)}} + \beta \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{v}_2}_{\substack{=0 \\ (\vec{v}_2 \in M)}} = 0,$$

pa je $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in M$ i M je vektorski prostor (potprostor prostora V^3).

Za $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in M$ imamo

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0 \implies x - 2y + 3z = 0$$

$$\implies x = 2y - 3z$$

pa su vektori iz M oblika

$$\vec{v} = (2y-3z)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$= y\underbrace{(2\vec{i} + \vec{j})}_{=:\vec{a}_1} + z\underbrace{(-3\vec{i} + \vec{k})}_{=:\vec{a}_2}, \qquad y, z \in \mathbb{R}.$$

Budući da je $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in M$:

$$\vec{n}\cdot\vec{a}_1 = 2 - 2 + 0 = 0, \quad \vec{n}\cdot\vec{a}_2 = -3 + 0 + 3 = 0,$$

slijedi $M = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, a kako je skup $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ linearno nezavisan u V^3:

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 = \vec{0} \implies (2\alpha - 3\beta)\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = 0,$$

taj je skup baza za M i $\dim M = 2$.

(b) Skup M čine svi vektori iz V^3 koji se mogu zapisati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ – dakle, M je ravnina u prostoru koja prolazi ishodištem i ima vektore smjera $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$. Uočimo i da je $\vec{n}$ vektor normale te ravnine.

(c) Nadopunit ćemo bazu za M do baze prostora V^3 na dva različita načina.

1. način

Standardno nadopunjavamo bazu za M do baze za V^3, tj. reduciramo skup

$$\{2\vec{i}+\vec{j},\ -3\vec{i}+\vec{k},\ \vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$$

do linearno nezavisnog skupa u V^3.

Uočimo da je već skup $\{2\vec{i}+\vec{j},\ -3\vec{i}+\vec{k},\ \vec{i}\}$ linearno nezavisan u V^3: za sve $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ imamo

$$\alpha(2\vec{i}+\vec{j})+\beta(-3\vec{i}+\vec{k})+\gamma\vec{i}=(2\alpha-3\beta+\gamma)\vec{i}+\alpha\vec{j}+\beta\vec{k}=\vec{0}$$

$$\begin{cases} 2\alpha-3\beta+\gamma=0 \implies \gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

Dakle, taj je skup tražena baza za V^3 i u ovom je slučaju $L=L(\vec{i})$ upravo x-os.

Nap. Dobivenu bazu za M smo mogli nadopuniti i s bilo kojim od vektora $\vec{j}$ i $\vec{k}$ te bismo tada dobili i da su y-os i z-os direktni komplementi od M u V^3. Općenito, direktni komplement od M će biti bilo koji pravac u prostoru koji prolazi ishodištem, a koji nije sadržan u M.

2. način

Znamo da je $\vec{n}\perp\vec{a}_1$ i $\vec{n}\perp\vec{a}_2$. Tvrdimo da je $\{\vec{n},\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$ linearno nezavisan skup u V^3. Naime, za sve $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ imamo

$$\alpha\vec{n}+\beta\vec{a}_1+\gamma\vec{a}_2=\vec{0} \quad |\cdot\vec{n}$$

$$\implies \alpha(\vec{n}\cdot\vec{n})+\beta\underbrace{(\vec{a}_1\cdot\vec{n})}_{=0}+\gamma\underbrace{(\vec{a}_2\cdot\vec{n})}_{=0}=0 \implies 14\alpha=0 \implies \alpha=0$$

$$\implies \beta\vec{a}_1+\gamma\vec{a}_2=\vec{0} \implies \beta=\gamma=0 \quad (\text{jer su } \vec{a}_1 \text{ i } \vec{a}_2 \text{ linearno nezavisni}).$$

Dakle, jedna baza za V^3 je i skup $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{n}\}$.

U ovom je slučaju $L=L(\vec{n})$ pravac kroz ishodište s vektorom smjera $\vec{n}$. Taj je pravac okomit na ravninu M i zovemo ga ortogonalni komplement od M u V^3 (za razliku od direktnog komplementa, ortogonalni je komplement jedinstven).

5. Zadan je skup

$$S = \{1+t,\ 1-t,\ t^2+\lambda t+1,\ t^3-t^2\}.$$

Odredite nužne i dovoljne uvjete uz koje je S baza prostora $\mathcal{P}_3$. Zatim zapišite proizvoljni polinom

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

u toj bazi.

Znamo da je $\dim \mathcal{P}_3 = 4$. Budući da skup S ima 4 elementa, dovoljno je provjeriti za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ je skup S linearno nezavisan, tj. za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ jednakost

$$\alpha(1+t) + \beta(1-t) + \gamma(t^2+\lambda t+1) + \delta(t^3-t^2) = 0$$

nužno povlači $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Dakle, treba odrediti za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ homogeni sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \lambda\gamma = 0 \\ \gamma - \delta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje, tj. za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ je determinanta matrice tog sustava različita od nule:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dakle, S je baza za $\mathcal{P}_3$ za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sada za proizvoljni polinom $p \in \mathcal{P}_3$ gornjeg oblika tražimo skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takve da

$$\alpha(1+t) + \beta(1-t) + \gamma(t^2+\lambda t+1) + \delta(t^3-t) = p(t),$$

tj.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = d \\ \alpha - \beta + \lambda\gamma = c \\ \gamma - \delta = b \\ \delta = a \end{cases}$$

Rješavamo sustav Gaussovim eliminacijama:

$$
\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & d \\ 1 & -1 & \lambda & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]
\begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ + \\ |\cdot 1 \end{array}
\sim
\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & -2 & \lambda-1 & 0 & c-d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]
\begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(1-\lambda) \quad |\cdot(-1) \\ \end{array}
\sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -(a+b)+d \\ 0 & -2 & 0 & 0 & (1-\lambda)(a+b)+c-d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ |:(-2) \\ \\ \end{array}
\sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -(a+b)+d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda-1)(a+b)-\frac{1}{2}(c-d) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]
\begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda+1)(a+b)+\frac{1}{2}(c+d) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda-1)(a+b)-\frac{1}{2}(c-d) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]
\begin{array}{l} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}(\lambda+1)(a+b)+\frac{1}{2}(c+d) \\ \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(\lambda-1)(a+b)-\frac{1}{2}(c-d) \\ \Rightarrow \gamma = a+b \\ \Rightarrow \delta = a \end{array}
$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
p(t) &= at^3+bt^2+ct+d \\
&= a\left(t^3-t\right)+(a+b)\left(t^2+\lambda t+1\right)+\left(\frac{1}{2}(\lambda-1)(a+b)-\frac{1}{2}(c-d)\right)(1-t) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}(\lambda+1)(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)\right)(1+t).
\end{aligned}
$$