Linearna algebra - 2. auditorne vježbe

1. **(Osnovne metode dokazivanja u matematici)**

   (a) Dokažite da je $n^2 - 1$ djeljivo s 3 za sve $n \in \mathbb{N}$ koji nisu djeljivi s 3.

   (b) Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: n je paran broj ako i samo ako je n^2 paran broj.

   (c) Zadan je četverokut $ABCD$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

   i. $ABCD$ je paralelogram (tj. nasuprotne stranice su mu paralelne),

   ii. jedan par nasuprotnih stranica četverokuta $ABCD$ je paralelan i jednake duljine,

   iii. nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$ su jednake duljine,

   iv. dijagonale četverokuta $ABCD$ se međusobno raspolavljaju.

(a) Trebamo dokazati implikaciju oblika

$$\text{ako je } \underbrace{n \text{ prirodan broj koji nije djeljiv s } 3}_{\text{pretpostavka}}, \text{ onda je } \underbrace{n^2-1 \text{ djeljiv s } 3}_{\text{tvrdnja}}.$$

Tvrdnju dokazujemo DIREKTNIM DOKAZOM: pretpostavljamo da je pretpostavka istinita i dokazujemo da u tom slučaju vrijedi tvrdnja.

Pretpostavimo da prirodan broj n nije djeljiv s 3. Tada je n oblika $3k+1$ ili $3k+2$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$.

Ako je $n = 3k+1$, onda

$$n^2 - 1 = (3k+1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 3(3k^2+2k),$$

tj. n^2-1 je djeljiv s 3.

Ako je $n = 3k+2$, onda

$$n^2 - 1 = (3k+2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 = 3(3k^2+4k+1)$$

pa je i u ovom slučaju n^2-1 djeljiv s 3.

Dakle, u oba smo slučaja dokazali da je n^2-1 djeljiv s 3 pa je time tvrdnja dokazana.

(b) Sada dokazujemo ekvivalenciju što znači da treba pokazati dvije implikacije:

$$(n \text{ paran} \Rightarrow n^2 \text{ paran}) \ \& \ (n^2 \text{ paran} \Rightarrow n \text{ paran}).$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je n paran prirodan broj. Tada je $n = 2k$ za neki $k \in \mathbb{N}$ pa je $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, tj. i n^2 je paran broj.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ovu implikaciju dokazujemo METODOM KONTRADIKCIJE: pretpostavimo suprotno, tj. da je tvrdnja neistinita. Iz toga pokušavamo dobiti kontradikciju s pretpostavkom implikacije (zbog čega će slijediti da je početna pretpostavka o neistinitosti tvrdnje bila pogrešna).

Dakle, pretpostavimo suprotno, tj. da je n neparan prirodan broj. Tada je n oblika $2k+1$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$ pa imamo

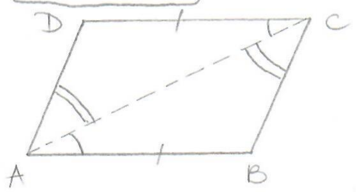
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1,$$

tj. n^2 je neparan broj. To je u kontradikciji s pretpostavkom implikacije (n^2 je paran broj) pa slijedi da je n paran broj.

(c) Treba pokazati niz ekvivalencija: $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$.

Za to je dovoljno pokazati sljedeći niz implikacija: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

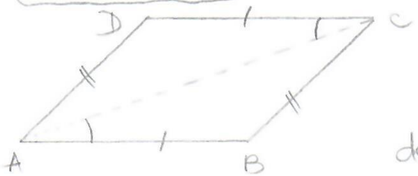
$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$



Neka je $ABCD$ paralelogram. Budući da je prema pretpostavci $AB \parallel CD$, dovoljno je pokazati $|AB| = |CD|$.

Uočimo da je $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$ i $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ (jer su to kutevi s paralelnim kracima). Budući da je $\overline{AC}$ zajednička stranica uz te kuteve, po KSK poučku slijedi $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, a odavde slijedi $|AB| = |CD|$.

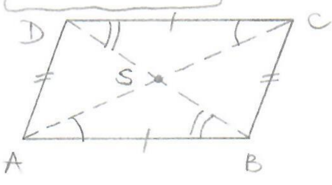
$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$



Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $AB \parallel CD$ i $|AB| = |CD|$. Tada preostaje pokazati $|BC| = |AD|$.

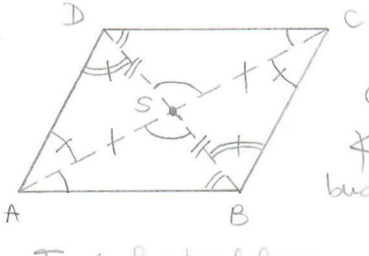
Vrijedi: $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$ (kutevi s paralelnim kracima), a budući da je $|AB| = |CD|$ i $|AC| = |CA|$, po SKS poučku slijedi $\triangle BAC \cong \triangle DCA$. Odavde slijedi $|BC| = |AD|$.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$



Neka je S sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$. Prema SSS poučku o sukladnosti slijedi $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ pa je $\measuredangle CAB = \measuredangle ACD$. Jednako tako prema SSS poučku slijedi $\triangle BAD \cong DCB$ pa je $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$. Zbog $|AB| = |CD|$ prema KSK poučku slijedi $\triangle ASB \cong \triangle CSD$, a odavde slijedi $|AS| = |SC|$ i $|BS| = |SD|$.

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$



Pretpostavimo suprotno, tj. da se pravci AB i CD sijeku u točki E.

Budući da je $\measuredangle ASB = \measuredangle CSD$ i $\measuredangle BSC = \measuredangle DSA$ (vršni kutevi), prema pretpostavci i SKS poučku slijedi $\triangle ASB \cong \triangle CSD$ i $\triangle BSC \cong \triangle DSA$. Odavde slijedi $\measuredangle BAS = \measuredangle DCS$, $\measuredangle ABS = \measuredangle CDS$, $\measuredangle BCS = \measuredangle DAS$, $\measuredangle CBS = \measuredangle ADS$. Zato imamo $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$, a budući da je zbroj kuteva u četverokutu $360°$, slijedi:

$$\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = \measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 180°.$$

To je kontradikcija s pretpostavkom da se AB i CD sijeku (zbroj kuteva u jednom od trokuta ADE ili BCE bi bio veći od $180°$), a na isti se način dokazuje i da su AD i BC paralelni.

2. Dokažite da za svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2$ vrijedi: $\mathbf{A}$ komutira sa svim matricama iz $\mathcal{M}_2$ ako i samo ako je oblika $\lambda\mathbf{I}$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$.

Treba dokazati ekvivalenciju koju pomoću kvantifikatora možemo zapisati na sljedeći način:

$$(\forall A \in \mathcal{M}_2)\Big(\big((\forall X \in \mathcal{M}_2)\, AX = XA\big) \Leftrightarrow \big((\exists \lambda \in \mathbb{R})\, A = \lambda I\big)\Big).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $A = \lambda I$. Tada za svaku matricu $X \in \mathcal{M}_2$ imamo

$$\left.\begin{aligned} AX &= (\lambda I)X = \lambda(IX) = \lambda X \\ XA &= X(\lambda I) = \lambda(XI) = \lambda X \end{aligned}\right\} \Rightarrow AX = XA.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ matrica takva da komutira sa svim matricama reda 2. Tada ona posebno komutira i s matricama $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, odakle slijedi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = d,\ c = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = d,\ b = 0$$

Dakle, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI,$$

pa je A oblika λI (za $\lambda = a$).

3. Za matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ kažemo da je **involutorna** ako je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

(a) Dokažite da je matrica $\mathbf{A}$ involutorna ako i samo ako je $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

(b) Za matricu $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ kažemo da je **idempotentna** ako je $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$. Dokažite da je matrica $\mathbf{A}$ involutorna ako i samo ako je matrica $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ idempotentna.

(a) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
(I-A)(I+A) = 0 &\iff I + I\cdot A - A\cdot I - A\cdot A = 0 \\
&\iff I + A - A - A^2 = 0 \\
&\iff I - A^2 = 0 \\
&\iff A^2 = I \\
&\iff A \text{ involutorna}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\left[\tfrac{1}{2}(A+I)\right]^2 = \tfrac{1}{2}(A+I) &\iff \tfrac{1}{4}(A+I)\cdot(A+I) = \tfrac{1}{2}(A+I) \\
&\iff A^2 + A + A + I = 2(A+I) \\
&\iff A^2 + 2A + I = 2A + 2I \\
&\iff A^2 = I \\
&\iff A \text{ involutorna}
\end{aligned}
$$

Nap. Dakle, ekvivalenciju u nekim slučajevima možemo dokazati i direktno, bez zasebnog raspisivanja implikacija.

4. Dokažite da za sve ulančane matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ vrijedi $(\mathbf{ABC})^\top = \mathbf{C}^\top\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$.

Koristit ćemo dva svojstva matričnog množenja:

1° asocijativnost: $(AB)C = A(BC)$,

2° $(AB)^T = B^T A^T$.

Sada imamo

$$(ABC)^T \overset{1^\circ}{=} ((AB)C)^T \overset{2^\circ}{=} C^T(AB)^T \overset{2^\circ}{=} C^T(B^T A^T) \overset{1^\circ}{=} C^T B^T A^T.$$

$\boxed{\text{DZ}}$ Što sada možemo reći o matrici

$$(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^T,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su ulančane matrice?

Iskažite odgovarajući rezultat i dokažite ga matematičkom indukcijom po n.

5. Dokažite da se svaka matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ može napisati u obliku zbroja simetrične i antisimetrične matrice. Odredite taj rastav za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ 10 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ i pretpostavimo da vrijedi jednakost

$$A = A_s + A_a, \qquad (1)$$

gdje je A_s simetrična, a A_a antisimetrična matrica.

Transponiranjem jednakosti (1) dobivamo

$$A^T = (A_s + A_a)^T = A_s^T + A_a^T$$

$$\Rightarrow A^T = A_s - A_a. \qquad (2)$$

Zbrajanjem i oduzimanjem jednakosti (1) i (2) dobivamo

$$A + A^T = 2A_s \Rightarrow A_s = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad (3)$$

$$A - A^T = 2A_a \Rightarrow A_a = \frac{1}{2}(A - A^T). \qquad (4)$$

Dakle, ako postoje simetrična matrica A_s i antisimetrična matrica A_a takve da vrijedi jednakost (1), onda su one nužno zadane formulama (3) i (4). Preostaje provjeriti da su tim formulama uistinu zadane simetrična, tj. antisimetrična matrica:

$$A_s^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = A_s,$$

$$A_a^T = \left[\frac{1}{2}(A - A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -A_a.$$

Za zadanu matricu A imamo

$$A_s = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ 10 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -7 \end{bmatrix},$$

$$A_a = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ 10 & 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ 10 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$