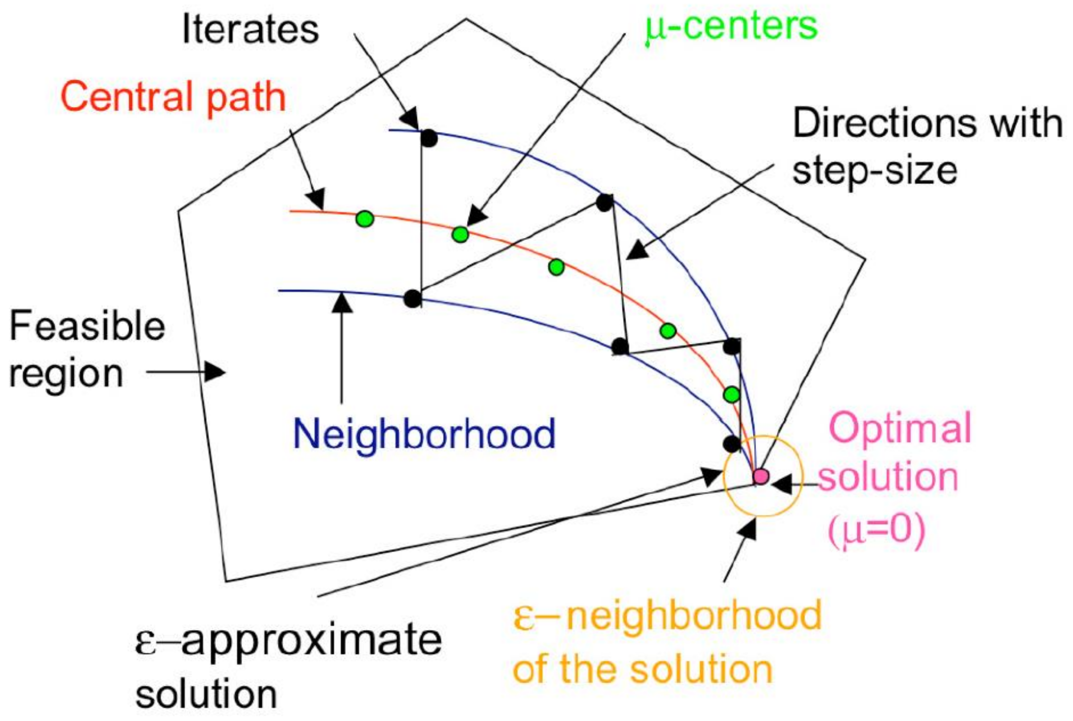
Operacijska istraživanja

3. predavanje: Metode unutarnje točke.
Dualno-primalna metoda centralnog puta.

Sažetak predavanja

- Uvod: Metoda Lagrangeovih multiplikatora, Newtonova metoda
- Primalno-dualna metoda unutarnje točke



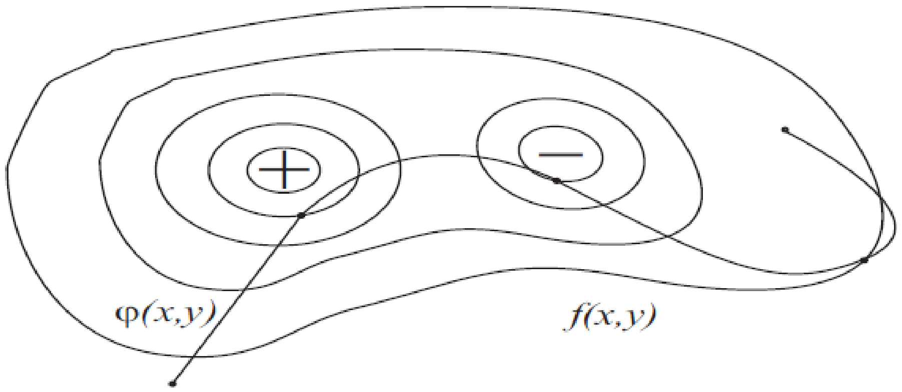
Operacijska istraživanja
3. predavanje: Metoda unutarnje točke

Metoda Lagrangeovih multiplikatora

18. listopada 2021.

Problem uvjetnog ekstrema

- Zadan je problem traženja uvjetnog ekstrema.
- Neka je zadana funkcija f(x) za koju treba naći ekstreme uz zadane uvjete φ(x, y) .
- Ekstremi na stazi su tamo gdje ona dira izohipse, tj. paralelna je s njima.
- Paralelnost krivulja znači paralelnost tangenata, a komponente vektora smjera tangenata su parcijalne derivacije.
- Dakle, tražimo točke u kojima su parcijalne derivacije od f(x, y) i φ(x, y) proporcionalne.



Lagrangeov multiplikator

- Uvodimo veličinu λ koju zovemo Lagrangeov multiplikator (množitelj) i formiramo Lagrangeovu funkciju:

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$$

- Nakon toga tražimo stacionarne točke funkcije F(x, y) koje zadovoljavaju traženi uvjet:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = 0$$

Ekstremi funkcija više varijabli

- Nađemo λ i koordinate (x_0, y_0) moguće točke ekstrema.
- Ako je $d^2F < 0$ imamo uvjetni maksimum, ako je $d^2F > 0$ imamo uvjetni minimum.
- Poopćenje za funkciju više varijabli:

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$
$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\dots$$
$$\varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$F(x_1, \dots, x_n;\ \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

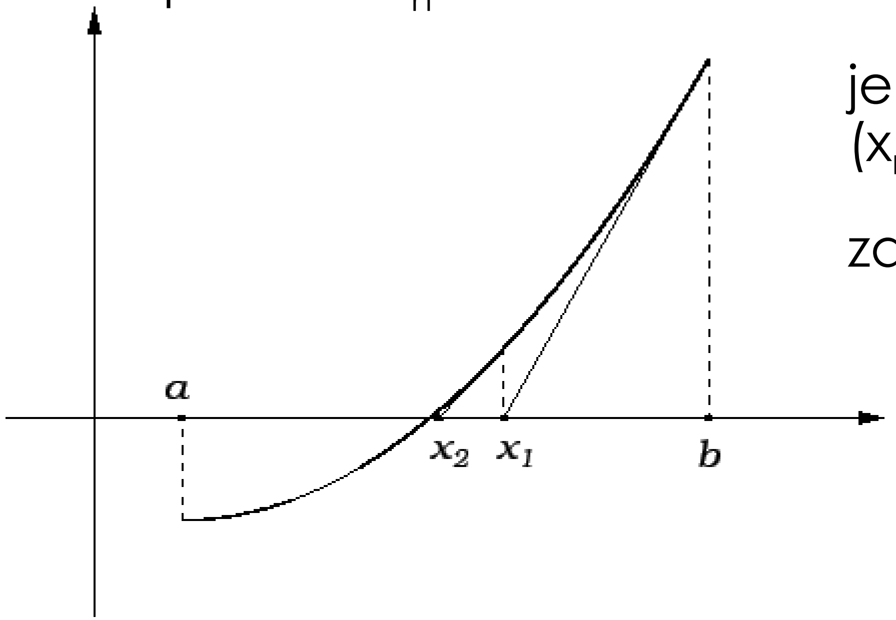
Operacijska istraživanja
3. predavanje: Metoda unutarnje točke

Newtonova metoda

18. listopada 2021.

Newtonova metoda

- Neka je $f:[a,b]\rightarrow R$ klase C^2 na $[a,b]$, a zadana jenadžba $f(x) = 0$.
- Newtonova metoda, ili metoda tangente, sastoji se u tome da se (n+1). aproksimacija x_{n+1} odredi kao sjecište tangente na graf funkcije f u točki s apscisom x_n sa osi x.



jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(x_n,f(x_n))$ je $y = f(x_n) + f'(x_n)(x- x_n)$

za $y = 0$ slijedi $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

Algoritam Newtonove metode

- izabrati x_0 iz [a,b], te računati niz x_n za n=1,2,3,… po formuli

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = - f(x_n)/f'(x_n)$$

$$\Delta x = - f(x_n)/f'(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

- Ako je $F(x_k) = 0$ za neki k, onda je rješenje x_k. U protivnom nastaviti računanje daljnih članova niza.

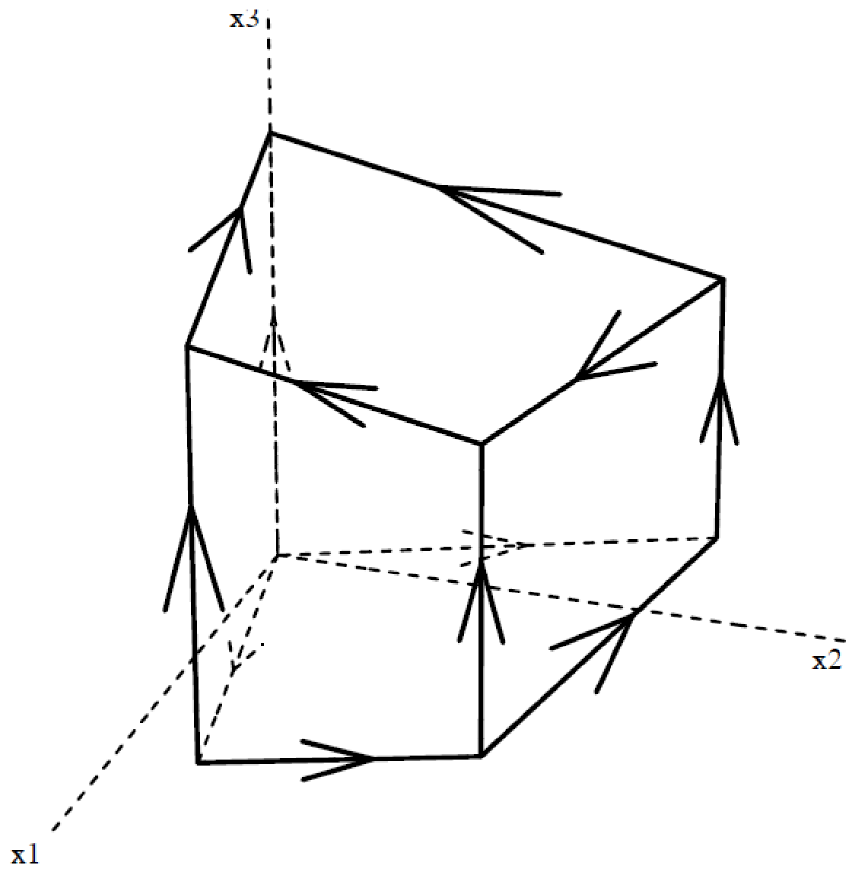
Operacijska istraživanja
3. predavanje: Metoda unutarnje točke

Metode unutarnje točke

18. listopada 2021.

Metode unutarnje točke

- vrsta algoritama koji se koriste u rješavanju linearnih i nelinearnih konveksnih optimizacijskih problema
- računska složenost im je **polinomijalna**, a ne eksponencijalna kao kod simpleksne metode
- kod rješavanja problema velikih dimenzija, proračunski su potvrđene kao najefikasnije metode u teoriji linearne optimizacije
- danas su gotovo svi komercijalni softverski paketi opremljeni opcijom za računski izbor s ovim metodama



Princip metoda unutarnje točke

- oslanja se na LP model s funkcijom cilja i ograničenjima koja su kontinuirana i dvostruko derivabilna
- pretpostavlja se da je problem izvediv, te ima optimalni dual koji zadovoljava Karush-Kuhn-Tucker (KKT) uvjete
- problem se rješava ili iterativno rješavajući KKT uvjete ili rješavanjem jednokosti originalnog problema umjesto ograničenja nejednakosti primjenom Newtone metode

Primalno-dualna metoda unutarnje točke

- Neka je zadan LP problem u standardnoj formi sa svojim dualom:

$$\begin{aligned} &\max \quad c^T x \\ &\text{uz ograničenja } Ax = b \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min \quad b^T y \\ &\text{uz ograničenja } A^T y - s = c \\ &\qquad\qquad\qquad\quad s \geq 0 \end{aligned}$$

gdje su zadani $A \in Z^{m \times n}$, $b \in Z^m$, $c \in Z^n$

Pretpostavke algoritma

- Komplementarnost (engl. *complementary slackness*): Ako su x i (y,s) optimalna rješenja primala i duala, onda su x i s ortogonalni, tj. vrijedi:

$$x^T s = \sum_j x_j s_j = 0.$$

- Neka su $X := \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, $S := \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$, dijagonalne matrice.
- Dualni par x i (y, s) je optimalan ako i samo ako vrijedi:

$$x \geq 0,\ s \geq 0$$

$$F(x, y, s) = 0$$

gdje je $F(x, y, s) := \begin{bmatrix} A^T y - s - c \\ Ax - b \\ XSe \end{bmatrix}$

Opći primalno-dualni algoritam unutarnje točke

- Neka je zadan X, skup vektora (x, y, s), gdje je x primalno izvediv, (y, s) dualno izvediv te skup X^0 relativna unutrašnjost od X;

$$X := \{(x, y, s) : A^T y - s = c,\ Ax = b,\ x \geq 0,\ s \geq 0\}$$

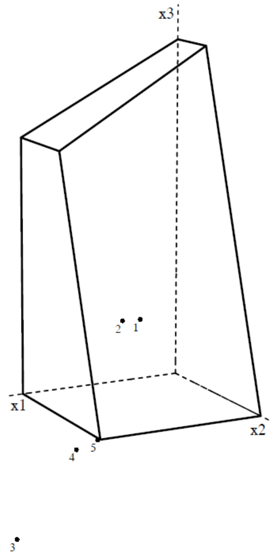
$$X^0 := \{(x, y, s) \in X : x > 0,\ s > 0\}$$

- Koraci algoritma su:
  - započeti s točkom $(x, y, s) \in X^0$
  - generirati novu točku $(x, y, s) + \alpha\cdot(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$, gdje se traženi smjer $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ dobije Newtonovom metodom, a $\alpha \leq 1$ je duljina koraka.
  - ponavljati prethodni korak
- Nalaženje točke u X^0 je netrivijalan problem.

Naivni primalno-dualni algoritam unutarnje točke

- posebni slučaj gdje je Newtonova metoda direktno primijenjena na F, a α=1, ima korak pomaka (Δx, Δy, Δs) prema sljedećem izrazu:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -XSe \end{bmatrix}$$



- Koraci algoritma su:
  – započeti točkom (x, y, s) $\in X^0$
  – generirati novu točku (x, y, s) + $\alpha\cdot$(Δx, Δy, Δs), gdje se traženi smjer (Δx, Δy, Δs) dobiven iz gornje jednakosti
  – ponavljati prethodni korak
- No, nema garancije da će sljedeća točka ostati u X^0 ili X jer N.m. traži korijene neovisno o predznaku x i s.

Centralni put

- Da bi naivni primalno-dualni algoritam radio, potrebno je modificirati F tako da točke iz X^0 koje zadovoljavaju uvjet F = 0 nisu daleko od trenutne točke.

- Parametrizacijom se dobije:

$$F_\tau(x, y, s) := \begin{bmatrix} A^T y - s - c \\ Ax - b \\ XSe - \tau e \end{bmatrix} \quad \tau \geq 0$$

što implicira $x_j s_j = \tau$ za $\forall j = 1, \ldots, n$, što je manje stroga komplementarnost

- Centralni put je skup svih izvedivih rješenja koja zadovoljavaju gornje jednadžbe za neki τ:

$$C := \{(x, y, s) \in X^0 : \exists \tau \geq 0 \text{ tako da je } x_j s_j = \tau \text{ za } \forall j = 1, \ldots, n\}$$

Primalno-dualni algoritam

- za točku (x, y, s) $\in X^0$ treba izračunati prosječno dualno rastojanje (tzv. *average duality gap*) da bi se kontroliralo da algoritam slijedi centralni put:

$$\mu(x, s) := \left(\sum_j x_j s_j\right)/n$$

Ovakav primalno-dualni algoritam primjenjuje Newtonovu metodu na $F_{\sigma\mu(x,s)}$ što rezultira rješavanjem:

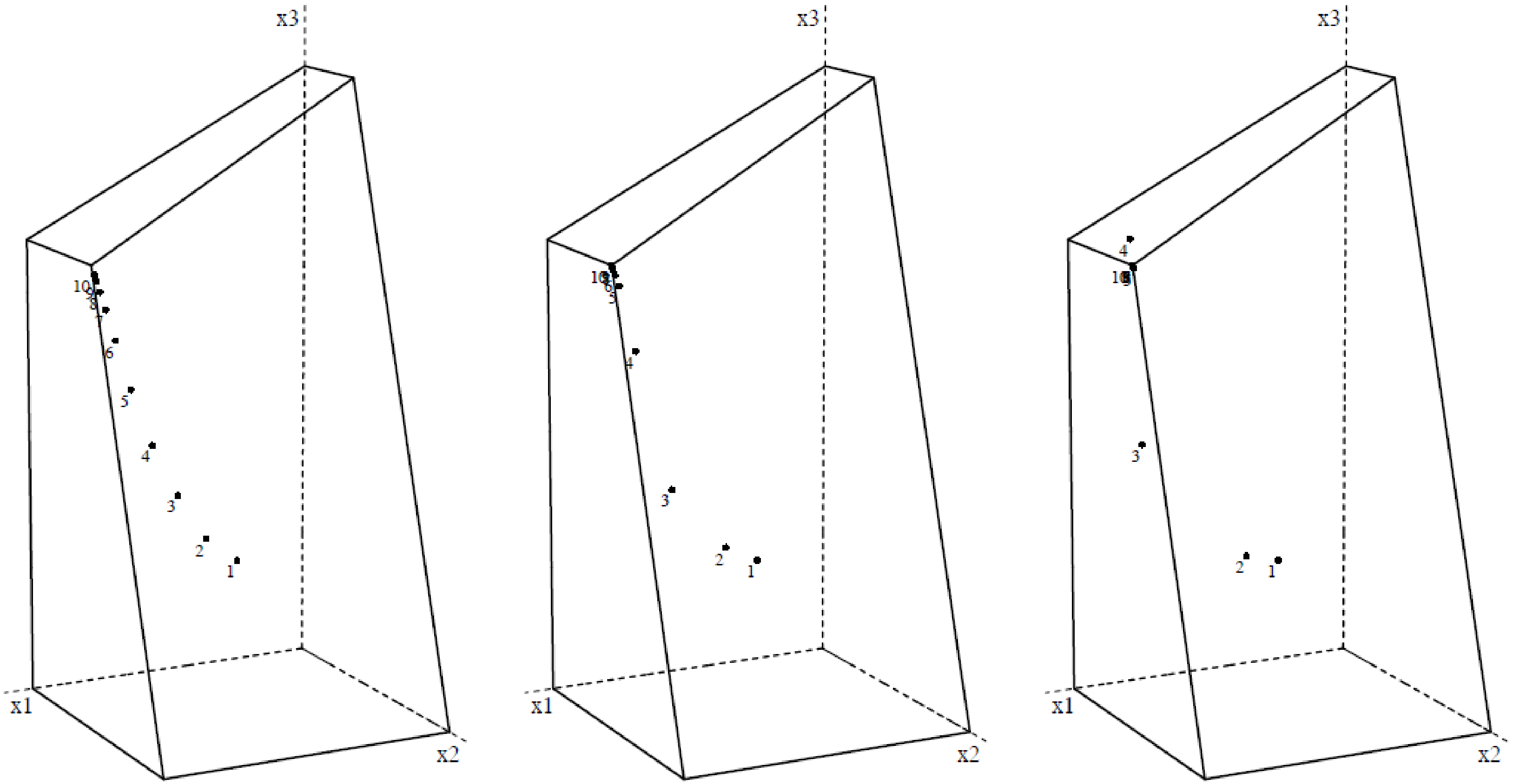
$$x_j s_j = \sigma\mu(x, s) \qquad \forall j = 1, \ldots, n,\ 0 \le \sigma \le 1$$

Koraci algoritma (σ)

- započeti točkom $(x, y, s) \in X^0$
- generirati novu točku $(x, y, s) + (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$, gdje se traženi smjer $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ dobije Newtonovom metodom za $F_{\sigma\mu(x,s)} = 0$.
- ponavljati prethodni korak

- Ako je $\sigma = 0$, algoritam postaje naivni primalno-dual algoritam.
- Ako je $\sigma = 1$, algoritam traži točku C u kojoj su sve $x_j s_j$ jednake prosječnom dualnom rastojanju trenutne točke.
- Algoritam ne garantira da je nova točka $(x, y, s) + (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ dopustiva, ali teži ostati u X^0 jer se pokušava približiti centralnom putu.

Primalno-dualni algoritam za σ= 0.6, 0.4, 0.2



Operacijska istraživanja
3. predavanje: Metoda unutarnje točke

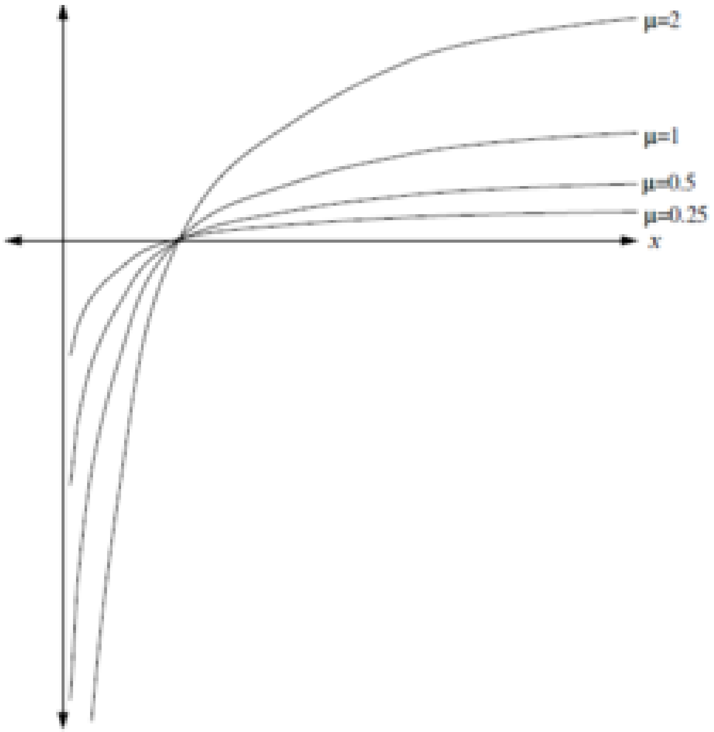
Implementacija metode unutarnje točke

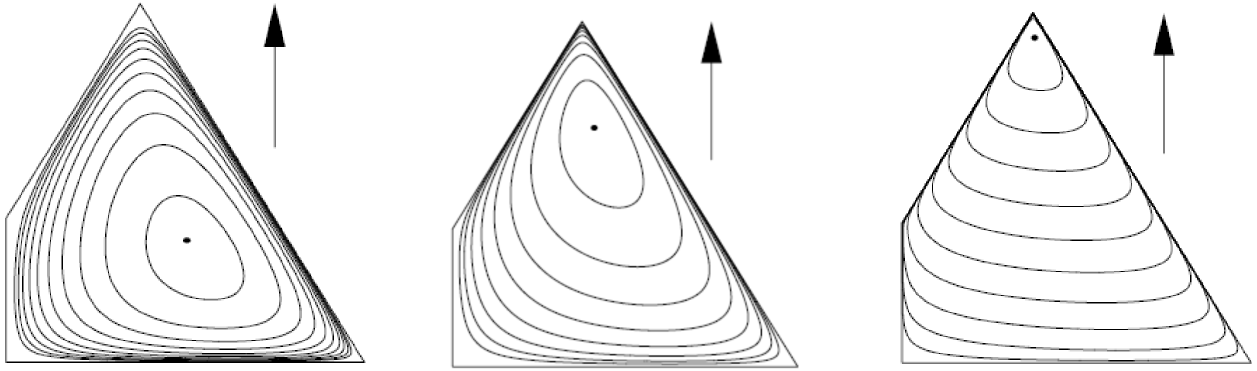
18. listopada 2021.

Logaritamska barijera

max $c^T x + \mu \sum_{i=1}^{m} lnx$

uz ograničenja $Ax = b$





μ=100 μ=1 μ=0.01

Primjena logaritamske barijere

primal

- min. $c^T x$

  uz ograničenja $Ax = b$

  $x \geq 0$

- min. $c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} ln x_i$

  uz ograničenja $Ax = b$

dual

- max. $b^T y$

  uz ograničenja $A^T y + s = c$ tj. $A^T y \leq c$

  $(y, s) \geq 0$

- max. $b^T y + \mu \sum_{i=1}^{n} ln s_i$

  uz ograničenja $A^T y + s = c$

Lagrangeova funkcija

- min. $c^T x$ uz ograničenja $Ax = b$, $x \geq 0$
- $L(x, y) = c^T x \; - \; \mu \sum_{j=1}^{m} ln x_j \; - \; y^T(Ax - b)$

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial xj} = c_j - \mu \frac{1}{x_j} - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{j}} y = c_j - \mu \frac{1}{x_j} - \sum_{i=1}^{n} y_i a_{ij}$$

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = b_i - \mathrm{A}_{\mathrm{i}} x = b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

u vektorskoj notaciji:

$$\nabla_x L(x, y) = \; c - \mu \frac{1}{X} - \mathrm{A}^{\mathrm{T}} y = 0$$

$$\nabla_y L(x, y) \; = \; b - Ax = 0, x \; \geq \; 0$$

Uvjeti optimalnosti

- uvodeći s = $\mu X^{-1}e$ slijedi:

$$c - s - A^{\mathsf{T}}y = 0$$

$$b - Ax = 0, x \geq 0$$

odnosno:

$A^{\mathsf{T}}y + s = c$	dopustivost dualnog rješenja
$Ax = b$, $x \geq 0$	dopustivost primalnog rješenja
$Xs = \mu e$	uvjet komplementarnosti

Primjena Newtonove metode

- $F_\tau(x, y, s) := \begin{bmatrix} Ax-b \\ A^\top y + s - c \\ XS - \tau\mu e \end{bmatrix}$ $\tau \geq 0$, parametar centriranja

- Za startnu točku (x^0, y^0, s^0) jedna iteracija Newtonove metode daje:

$$\nabla F_\tau(x^0, y^0, s^0) \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_s \end{bmatrix} = -F_\tau(x^0, y^0, s^0)\,, \qquad \nabla F_\tau(x^0, y^0, s^0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S^0 & 0 & X^0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S^0 & 0 & X^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^0{}_p \\ r^0{}_d \\ X^0 S^0 - \tau\mu^0 e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax^0 \\ c - s - A^\top y \\ X^0 S^0 - \tau\mu^0 e \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x^+ \\ y^+ \\ s^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ s^0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_s \end{bmatrix}$$

Primjer

- max $x_1 + 2x_2$

uz ograničenja:

$$x_1 \geq 2.3$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2.2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$