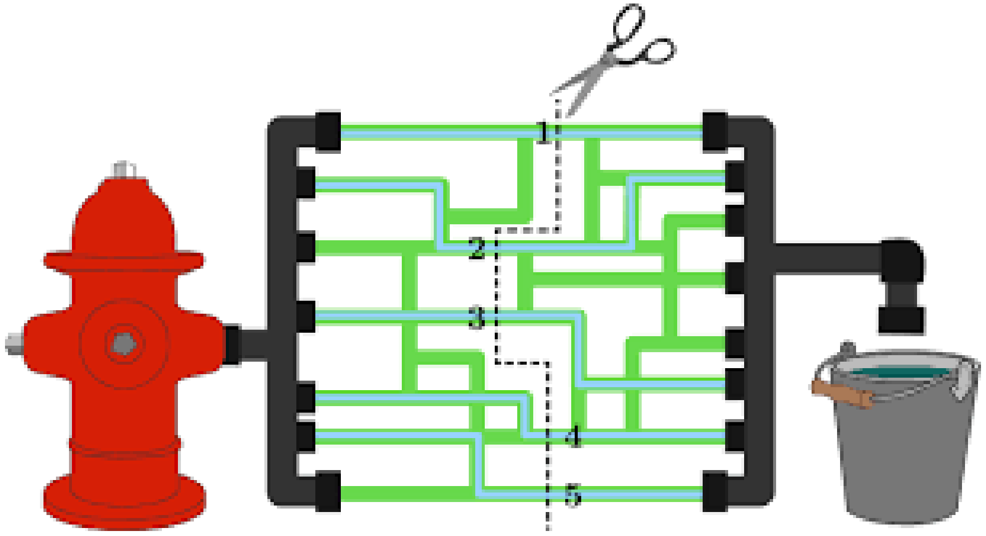
Operacijska istraživanja

6. predavanje: Traženje maksimalnog toka.
Ford-Fulkersonova metoda. *Max-flow min-cut* teorem.

Sažetak predavanja

- Ford-Fulkersonova metoda.
- *Max-flow min-cut* teorem.



Mreže toka

- usmjereni graph G = (V, E)
- samo jedan izvorni čvor *s* (*engl. source*) i jedan završni t (engl. *sink*)
- težina na svakoj grani = kapacitet grane
- ako $(u, v) \in E$, kapacitet je ne-negativan, tj. $c(u, v) \geq 0$
- ako $(u, v) \notin E$, kapacitet je nula, *tj.* $c(u, v) = 0$

Mreža toka i tokovi

- *flow(f)* u mreži toka*(G)* je realna funkcija *f*: $V \times V \to R$
  - *f(u, v) je tok* iz čvora *u* u čvor *v*.
  - *tok f(u, v)* može biti positivan, negativan ili nula

Ograničenja toka:

1. **kapacitet:**

   $f(u, v) \leq c(u, v)$, za sve $u, v \in V$

2. **simetrija:**

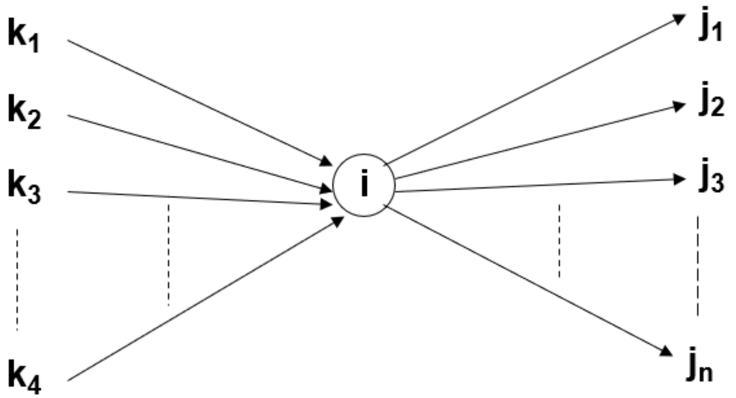
   $f(u, v) = -f(v, u)$

Ulazni tok jedan je izlaznom toku.

3. očuvanje toka:

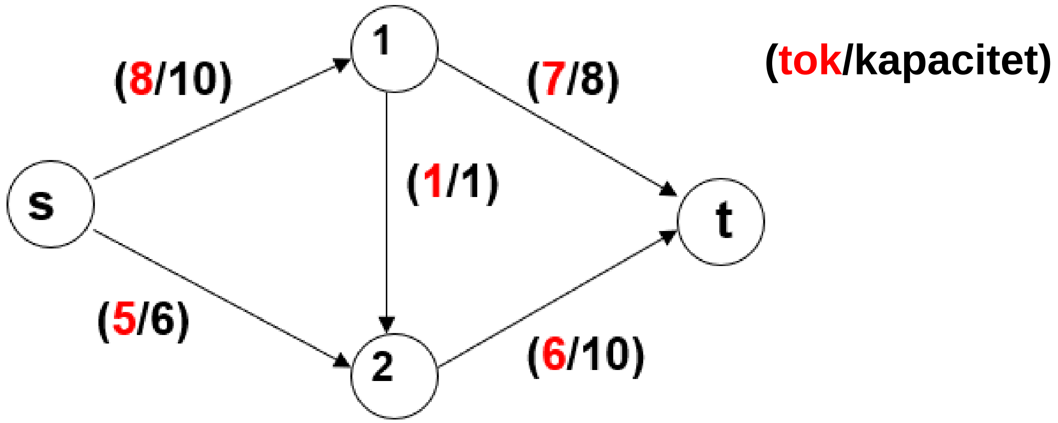
ukupni tok u čvoru mora biti *0*.

$\sum_j f(i, j) - \sum_k f(k, i) = 0$ for all $i \in V - \{s, t\}$



Maksimalni tok

- Tok f je maksimalan ako je izvediv i makimizira $\sum_k f(s, k)$, gdje je $f(s, k)$ tok iz izvora s.
- Problem:



- Cilj: naći maksimalni tok

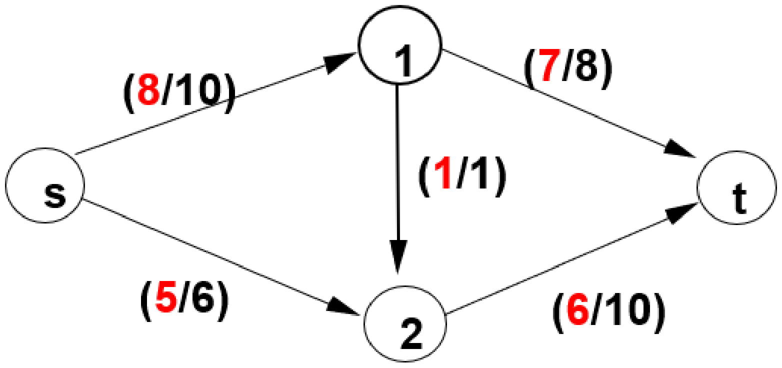
Ford-Fulkerson algoritam za maksimalni tok

- glavni sastojci:
  - rezidualne mreže
  - dodavanje puteva
  - rez

- ograničenja:
  - protok treba biti cjelovit
  - pri svakoj iteraciji treba dodati rezidualnu mrežu

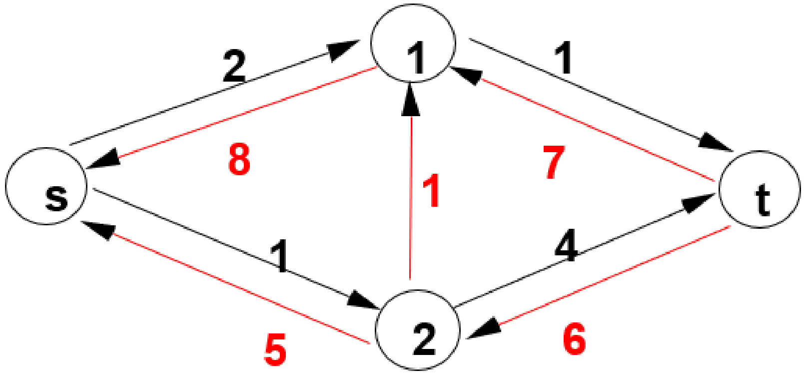
Rezidualna mreža

mreža toka

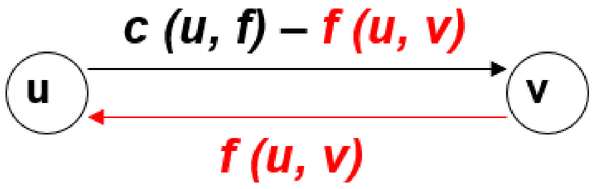


(tok / kapacitet)

rezidualna mreža



rezidualni kapacitet r (u ,v)



Dodavanje puteva

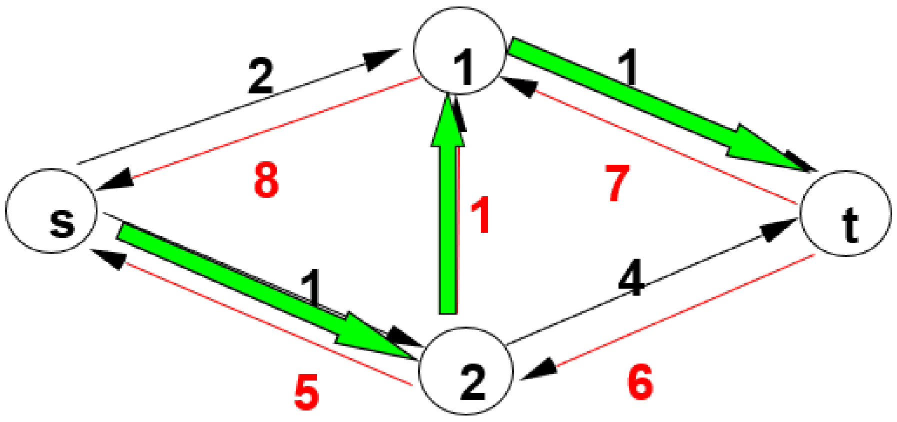
- Dodani put je put od *s* do *t* u rezidualnoj mreži.
- Rezidualni kapacitet dodanog puta P je:

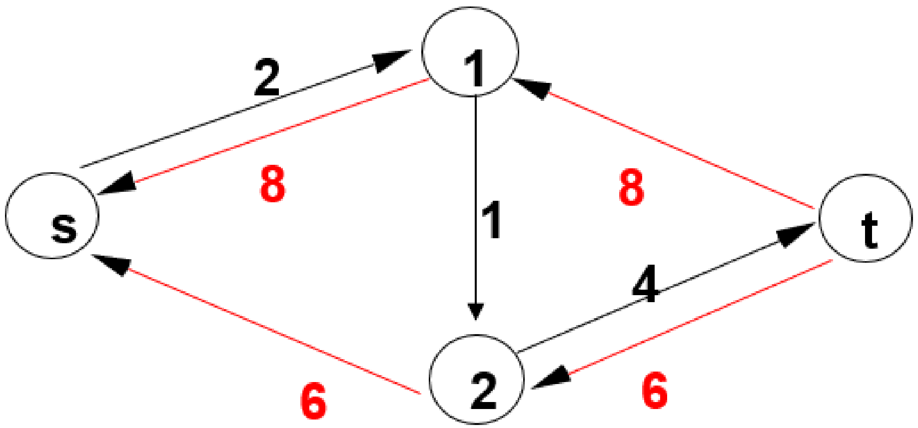
$$\delta(P) = \min \{r(i, j) : (i, j) \in P\}$$

- Dodavanje P-a:
  - dodati $\delta(P)$ na svaku strelci duž P u mreži toka
  - modificirati rezidualne kapacitete u rezidualnoj mreži:

$$r(u, v) = r(u, v) - \delta(P)$$
$$r(v, u) = r(v, u) + \delta(P) \text{ za } u, v \in P$$

Primjer dodavanja puteva





Ford-Fulkersonova metoda maksimalnog toka

početak

    x := 0;

    napraviti rezidualnu mrežu $G(x)$;

    dok postoji usmjereni put od *s* do *t* u $G(x)$:

    početak

        neka je *P* put od *s* do *t* u $G(x)$;

        $\Delta := \delta(P)$;

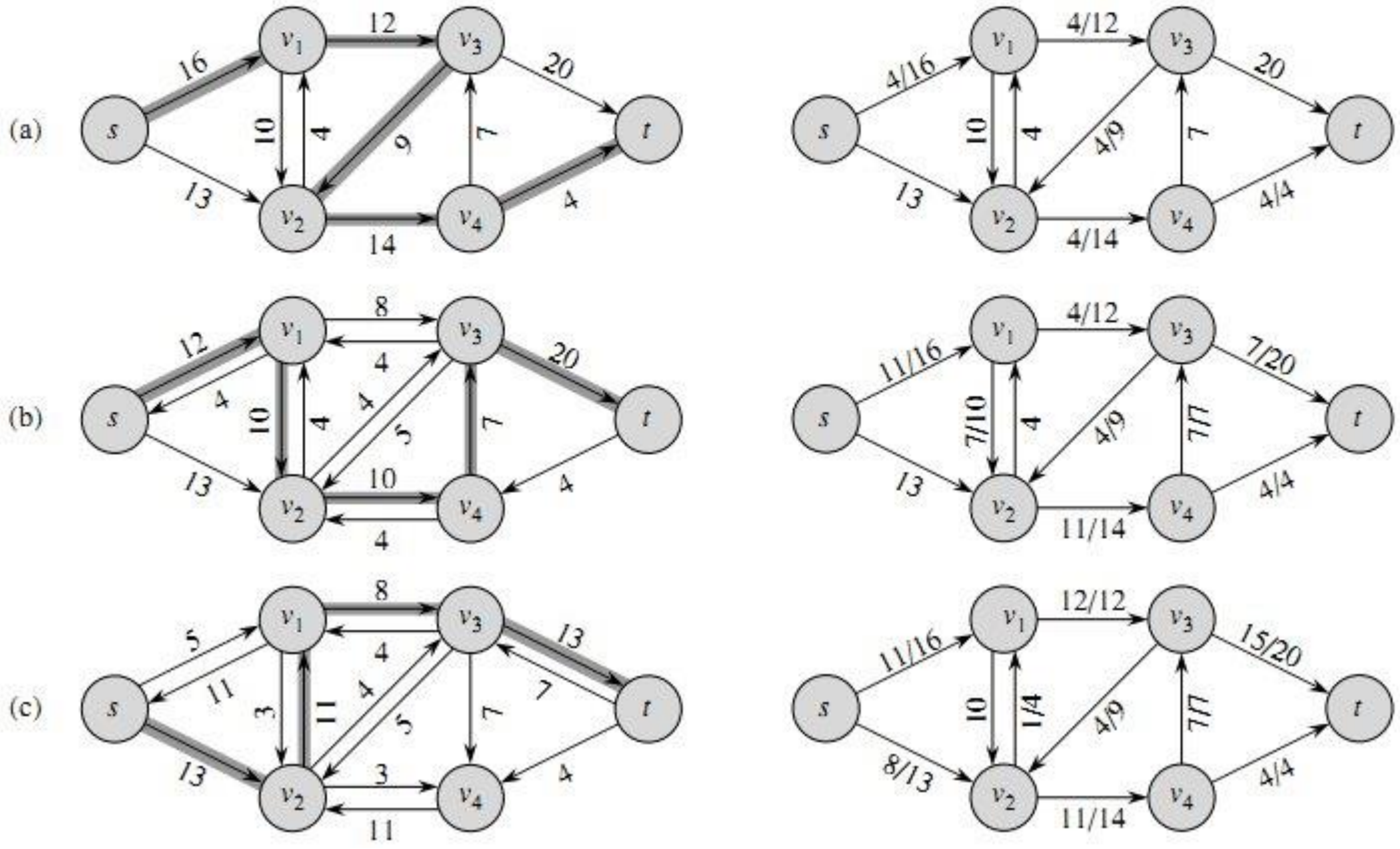
        poslati Δ jedinica toka duž *P*;

        ažurirati rezidualne kapacitete;

    kraj

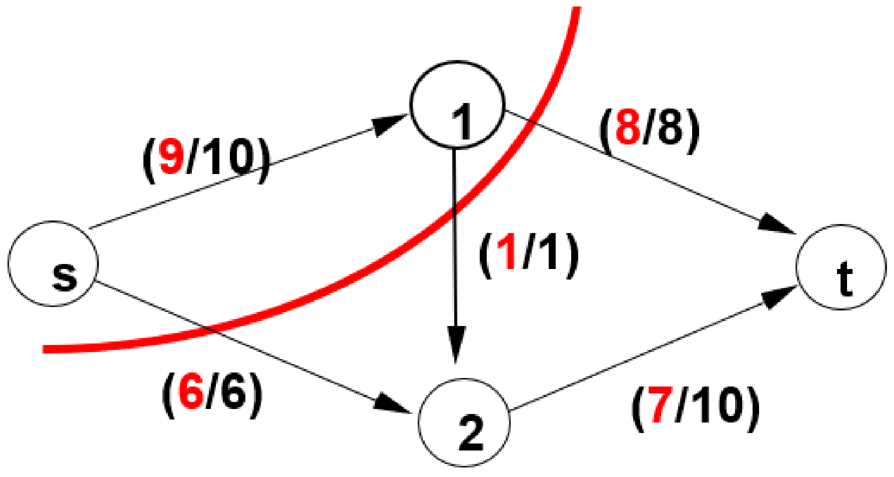
kraj {tok je maksimalan}.

Primjer



Rez u mreži toka (engl. *cut*)

- (S,T)-rez u mreži toka G = (V,E) je particija čvorova V u dva disjunktna podskupa S i T tako da je $s \in S$, $t \in T$, tj. S = { s, 1 } i T = { 2, t }.
- kapacitet reza (S,T) je CAP(S,T) $= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$

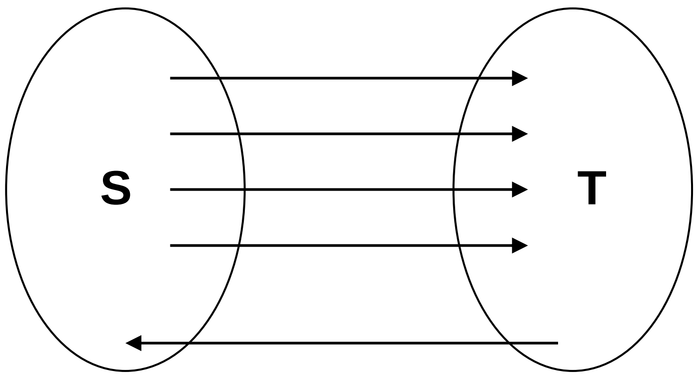


Max Flow Min Cut Teorem

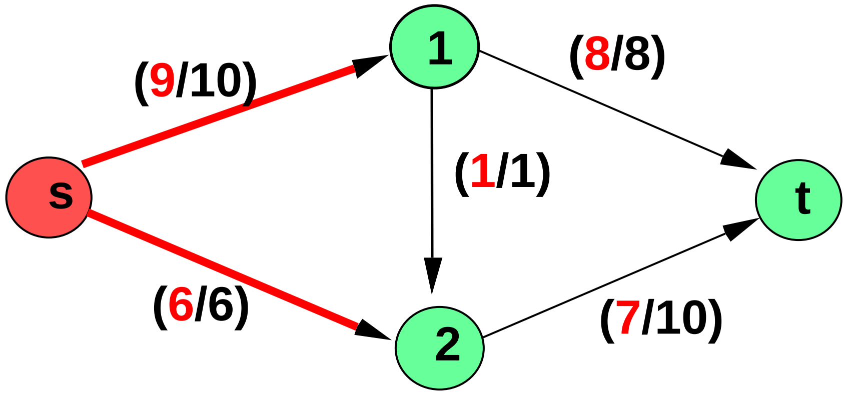
- Protok kroz mrežu jednak je kapacitetu nekog rezanja.
- *Teorem* oslabljenje dualnosti za *max flow* problem:

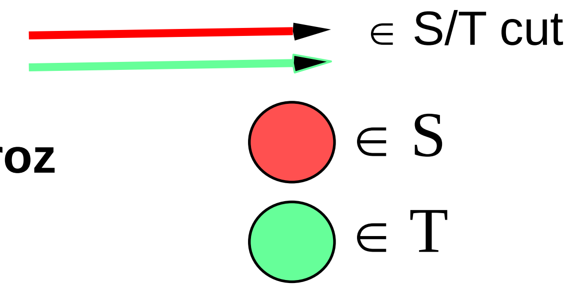
  Ako je f neki izvediv tok, a (S,T) je (s,t)-rez, onda tok |f| od izvora prema odrdištu ima maksimalno kapacitet CAP(S,T).

  dokaz: Neka je *tok kroz rez* (S,T): $f(S,T) = \sum_{i \in S}\sum_{j \in T} f(i, j) - \sum_{i \in S}\sum_{j \in T} f(j, i)$



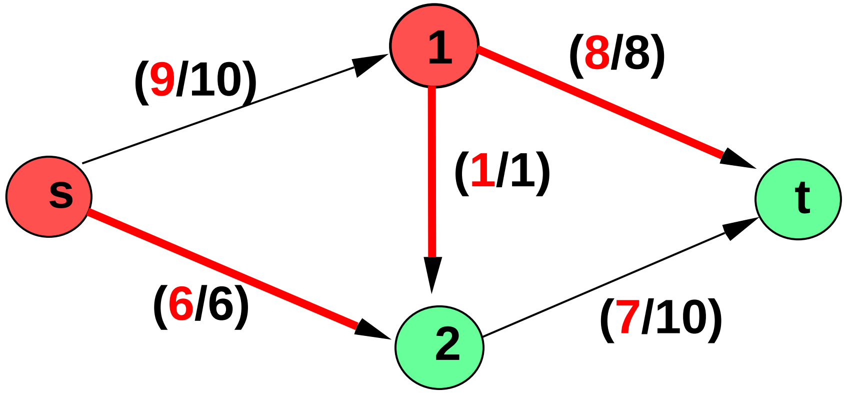
Tok kroz različite rezove

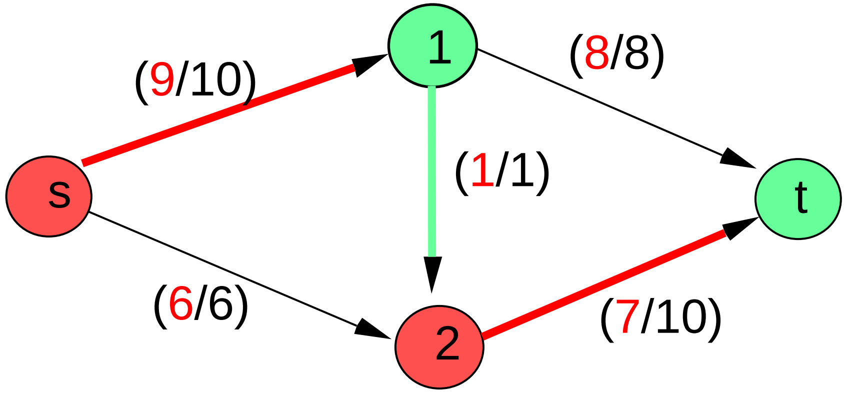




za S = {s} tok kroz
(S, T) je
9 + 6 = 15

za S = {s,1} tok kroz
(S, T) je
8 + 1 + 6 = 15





za S = {s,2} tok kroz
(S, T) je
9 + 7 – 1 = 15

Tok kroz rezove

Tvrdnja:

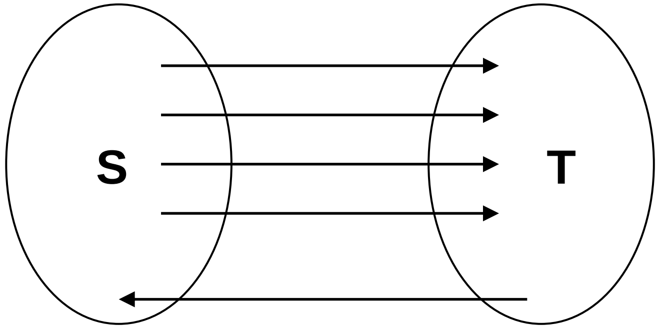
Ako je (S,T) bilo koji s-t rez, onda je f(S,T) = |f| = tok prema t.

dokaz:

Ako se doda ograničenje očuvanja toka za svaki čvor $i \in S - \{s\}$ na ograničenje da je odlazni tok s jednak $|f|$, onda vrijedi $f(S,T) = |f|$.

$\Sigma_j f(i, j) - \Sigma_k f(k, i) = 0$ za svaki $i \in \{S\} - s$

$\Sigma_j f(s, j) = | f |$



Veza toka i kapaciteta

Tvrdnja:

Tok kroz (S,T) jednak je kapacitetu reza.

dokaz:

ako su $i \in S$, $j \in T$, onda vrijedi $f(i, j) \leq c(i, j)$.

ako su $i \in T$, $j \in S$, onda vrijedi $f(i, j) \geq 0$.

$$f(S,T) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} f(i, j) - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} f(j, i)$$

$$CAP(S,T) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} c(i, j) - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} 0$$

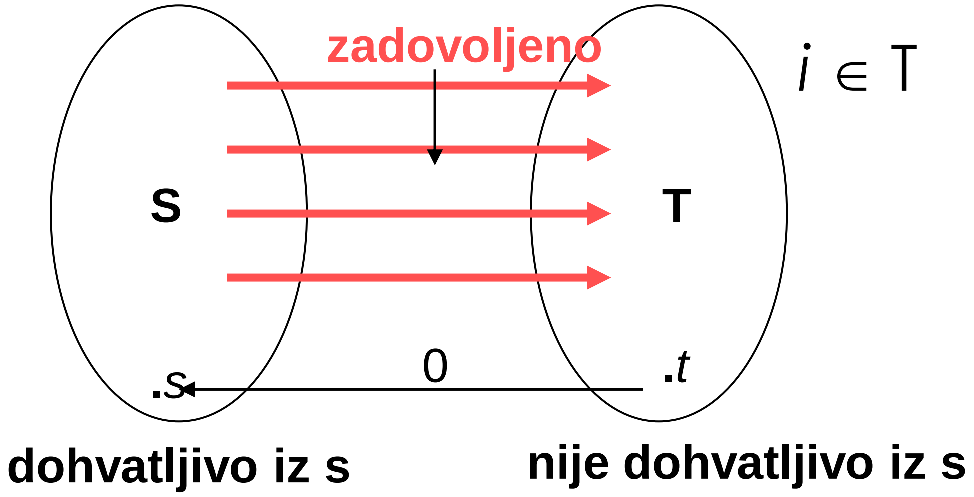
Max-flow Min-Cut

Teorem (uvjeti optimalnosti za maksimalni tok). Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. Tok x je maksimalan.
2. U G(x) nema puta povećanja.
3. Postoji s-t rez skupa (S, T) čiji kapacitet je tok vrijednosti x.

korolar (*Max-flow Min-Cut*). Vrijednost maksimalnog toka jednaka je minimalnog vrijednosti reza.

Max-flow Min-Cut



$i \in S$ and $j \in T \Rightarrow f(i, j) = c(i, j)$

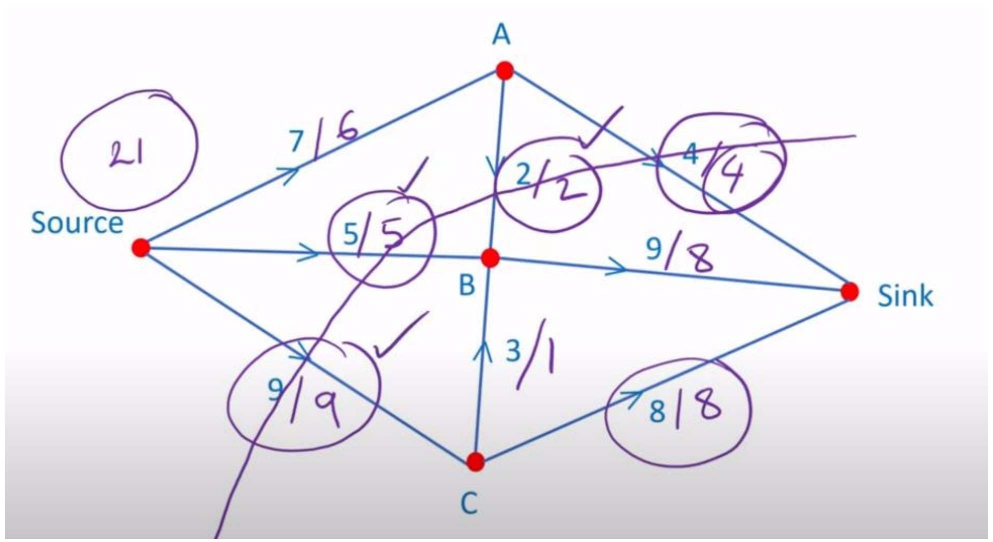
$i \in T$ and $j \in S \Rightarrow f(i, j) = 0.$

nema strelice iz S prema T u G(x)

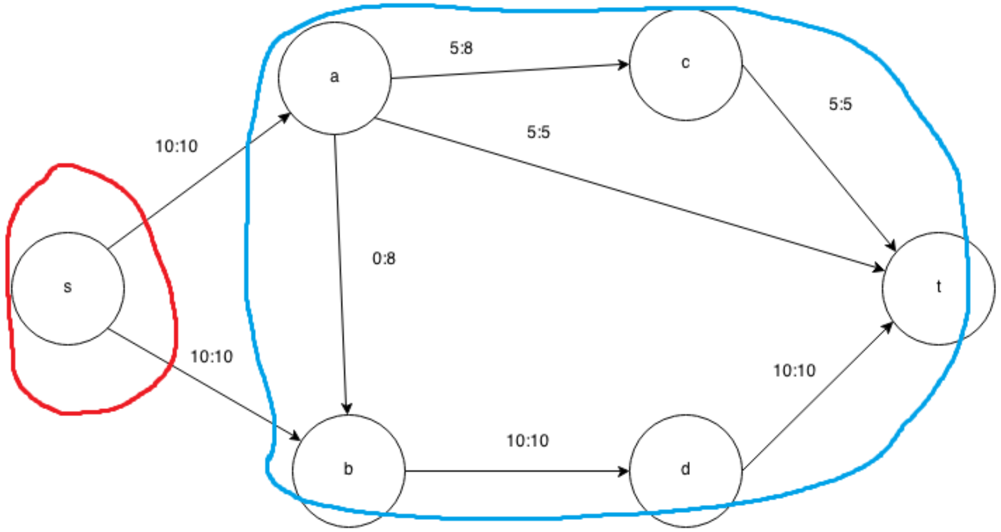
$$F_x(S,T) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} f(i,j) - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} f(j,i)$$

$$= \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} c(i,j) - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} 0 = CAP(S,T)$$

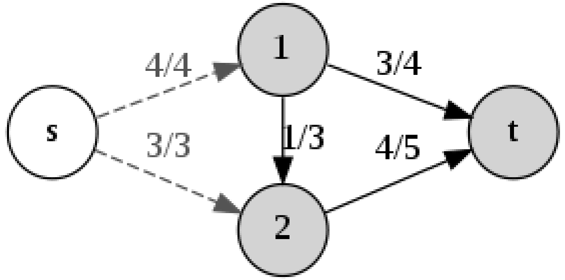
Primjeri



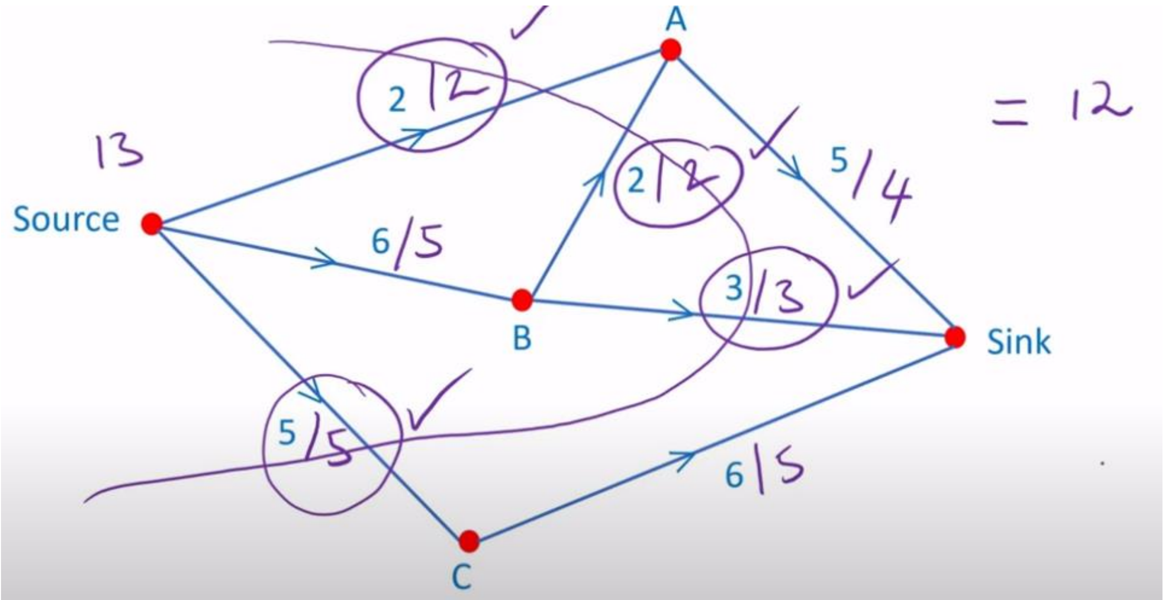
A
Source
Sink
B
C
7/6
5/5
2/2
4/4
9/8
3/1
9/9
8/8
21



a
c
s
t
b
d
5:8
5:5
5:5
10:10
0:8
10:10
10:10
10:10



s
1
2
t
4/4
3/3
3/4
1/3
4/5



A
Source
Sink
B
C
13
= 12
2/2
2/2
5/4
6/5
3/3
5/5
6/5