Neuronske mreže: Radijalne mreže

Prof. dr. sc. Sven Lončarić

Fakultet elektrotehnike i računarstva

https://www.fer.unizg.hr/predmet/neumre_c

Pregled predavanja

- Uvod
- Coverov teorem o separabilnosti uzoraka
- Problem interpolacije
- Interpolacija radijalnom mrežom
- Generalizirane radijalne mreže
- Učenje pod nadzorom kao loše postavljeni problem rekonstrukcije hiperplohe
- Teorija regularizacije
- Regularizacijske mreže
- XOR problem

Pregled predavanja

- Usporedba višeslojnih i radijalnih mreža
- Strategije učenja
- Diskusija
- Zadaci

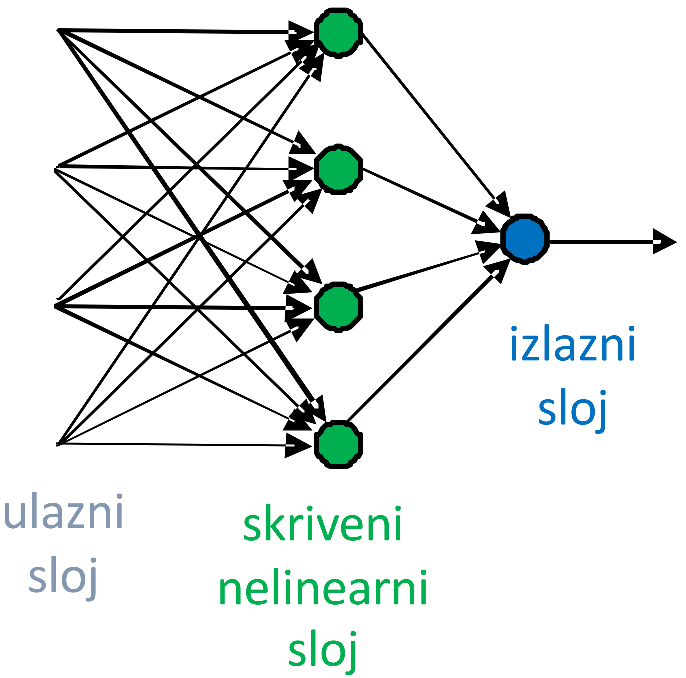
Uvod

- Eng. *radial-basis function* (RBF) *networks*
- Kod višeslojnih mreža koje koriste algoritam unazadne propagacije učenje se interpretira kao problem optimizacije (minimizacija srednje kvadratne greške)
- Kod radijalnih mreža učenje se interpretira kao problem aproksimacije funkcije s više argumenata
- Funkcija koju treba aproksimirati je ulazno-izlazna funkcija definirana parovima za učenje

Struktura radijalne mreže

- Osnovna RBF mreža ima tri sloja:
  - ulazni sloj
  - skriveni sloj koji ima drugačiju ulogu nego kod višeslojnih mreža
  - izlazni sloj
- Transformacija ulaznog sloja u skriveni sloj je *nelinearna*
- Transformacija skrivenog sloja u izlazni sloj je *linearna*

Struktura radijalne mreže



Coverov teorem I.

- Kod upotrebe RBF mreže problem klasifikacije uzoraka rješava se nelinearnom transformacijom ulaznih uzoraka u prostor s više dimenzija nego što ih ima ulazni prostor
- Motivacija je Coverov teorem o razdvojivosti ili separabilnosti uzoraka koji kaže:

  Veća je vjerojatnost da nelinearno transformirani vektori u višedimenzionalnom prostoru budu linearno separabilni nego u originalnom nižedimenzionalnom prostoru

Coverov teorem II. Interpretacija

- Iz teorije perceptrona poznato je da klasifikacijski problem jednostavno rješiv kada su uzorci linearno razdvojivi
- Interpretacija radijalne mreže kao klasifikatora:

1. Skriveni sloj nelinearno transformira ulazne uzorke tako da klase postanu linearno razdvojive
2. Izlazni sloj je linearan i kao takav može jednostavno obaviti klasifikaciju dvaju linearno razdvojivih klasa

Coverov teorem III.

- Neka je X = { $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_N$ } skup ulaznih uzoraka gdje svaki uzorak pripada jednoj od dviju klasa X^+ i X^-
- Neka je ulazni vektor **x** *P*-dimenzionalan
- Za svaki vektor **x** formiramo novi vektor:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_M(\mathbf{x})]^T$$

- Tada je $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ transformacija ulaznog vektora iz ulaznog prostora u novi *M*-dimenzionalni skriveni prostor
- Funkcija $\varphi_i(\mathbf{x})$ zove se skrivena funkcija
  - Njena uloga je slična skrivenom neuronu u višeslojnoj mreži

Coverov teorem IV.

- Za dvije klase ulaznih uzoraka X^+ i X^- kaže se da su φ-razdvojive ako postoji *M*-dimenzionalni vektor **w** takav da vrijedi:

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in X^+$$

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \in X^-$$

- Hiperravnina definirana jednadžbom

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$$

definira plohu razdvajanja u φ (skrivenom) prostoru

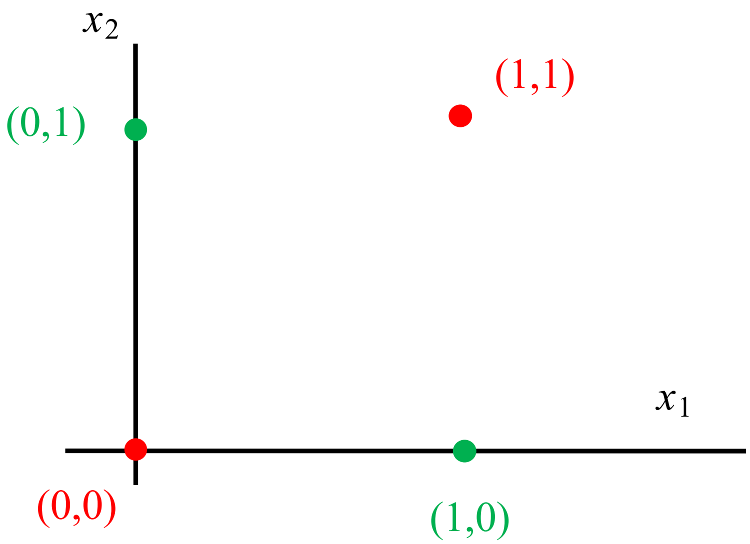
Coverov teorem V.

- Inverzna slika ove hiperravnine definira plohu razdvajanja u ulaznom prostoru (prostoru ulaznih uzoraka):

$$\left\{\mathbf{x} : \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0\right\}$$

Primjer: Funkcija XOR I.

- 0 XOR 0 = 0
- 1 XOR 1 = 0
- 0 XOR 1 = 1
- 1 XOR 0 = 1



Primjer: Funkcija XOR II.

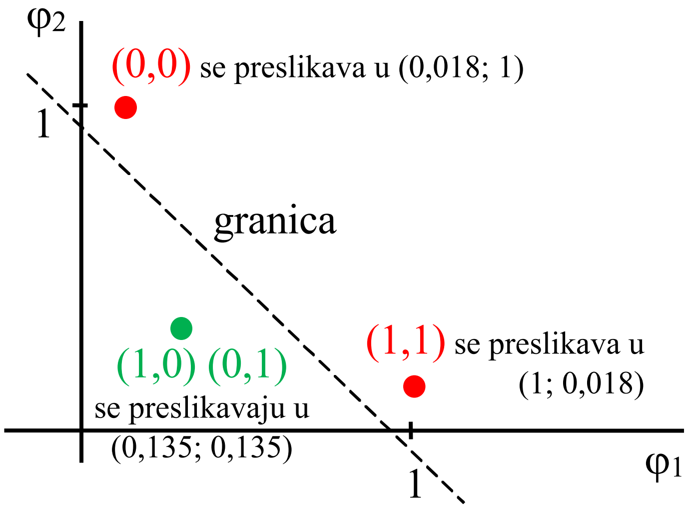
- Definirajmo skrivene funkcije kao:

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_1\|^2}, \quad \mathbf{t}_1 = [1,1]^T$$
$$\varphi_2(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_2\|^2}, \quad \mathbf{t}_2 = [0,0]^T$$

- Ulazni vektori se preslikavaju u φ (skriveni) prostor na slijedeći način (sljedeća prikaznica)

Primjer: Funkcija XOR III.

- Svi uzorci su linearno razdvojivi u novom prostoru
- Prema tome problem klasifikacije se može riješiti linearnim klasifikatorom kao što je perceptron (izlazni sloj radijalne mreže)



Interpolacijski problem I.

- Razmotrimo mrežu s ulaznim slojem, jednim skrivenim slojem i izlaznim slojem koji sadrži samo jedan neuron
- Takva mreža vrši *nelinearno preslikavanje* ulaza u skriveni sloj te *linearno preslikavanje* skrivenog sloja u izlazni sloj
- Sveukupno, takva mreža realizira preslikavanje
$$s: \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$$
- Preslikavanje se može interpretirati i kao hiperploha
$$\Gamma \subset \mathbb{R}^{P+1}$$

Interpolacijski problem II.

- Treniranje mreže se sada interpretira kao optimizacija neke aproksimacijske funkcije koja bi trebala biti što sličnija željenoj plohi Γ i koja je određena pomoću ulazno-izlaznih točaka za učenje
- Faza generalizacije je ekvivalentna interpolaciji između zadanih ulazno-izlaznih točaka
- Takva interpretacija vodi na teoriju *multivarijabilne interpolacije* u visko dimenzionalnom prostoru
- Unutar tog okvira problem se postavlja na sljedeći način (sljedeća prikaznica):

Interpolacijski problem III.

- Za zadani skup od *N* različitih točaka
$$\{\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^P | i = 1,2,\dots,N\}$$
i pripadni korespondentni skup od *N* realnih brojeva
$$\{d_i \in \mathbb{R} | i = 1,2,\dots,N\}$$
nađi funkciju
$$F: \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$$
takvu da zadovoljava interpolacijski uvjet
$$F(\boldsymbol{x}_i) = d_i, \qquad i = 1,2,\dots,N$$

Interpolacija radijalnom mrežom I

- Za radijalne mreže funkcija *F* je ograničena na oblik:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \varphi\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\right\|\right)$$

  gdje je

$$\left\{\varphi\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\right\|\right) \mid i = 1,2,\ldots,N\right\}$$

  skup proizvoljnih (općenito nelinearnih) funkcija koje zovemo radijalnim funkcijama (eng. *radial-basis functions*)

- Zadane točke $\mathbf{x}_i$ se uzimaju kao centri radijalnih funkcija

Interpolacija radijalnom mrežom II

- Ako interpolacijski uvjet izrazimo preko izraza za oblik funkcije *F* radijalne mreže onda dobivamo:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

gdje je

$$\varphi_{ji} = \varphi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|), \quad j,i = 1,2,\ldots,N$$

Interpolacija radijalnom mrežom III

- Neka su **d** i **w** vektori željenog odziva i težina:

$$\mathbf{d} = \left[d_1, d_2, \ldots, d_N\right]^T$$
$$\mathbf{w} = \left[w_1, w_2, \ldots, w_N\right]^T$$

- Neka je **Φ** matrica dimenzija N×N s elementima φ_{ij}:

$$\mathbf{\Phi} = \left\{\varphi_{ji}\right\}, \quad j, i = 1, 2, \ldots, N$$

- Tu matrica nazivamo interpolacijskom matricom
- Ranije dobiveni sustav linearnih jednadžbi sad možemo zapisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{\Phi w} = \mathbf{d}$$

Interpolacija radijalnom mrežom IV

- Pretpostavimo da su $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ međusobno različiti.
- Promatrajmo klasu radijalnih funkcija koje imaju svojstvo da je pripadna interpolacijska matrica Φ pozitivno definitna
- Neki primjeri takvih radijalnih funkcija (često korištenih u praksi) su:

$$\varphi(r) = \frac{1}{(r^2 + c^2)^{1/2}}, \quad c > 0, \quad r \geq 0$$

$$\varphi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0, \quad r \geq 0$$

Interpolacija radijalnom mrežom V

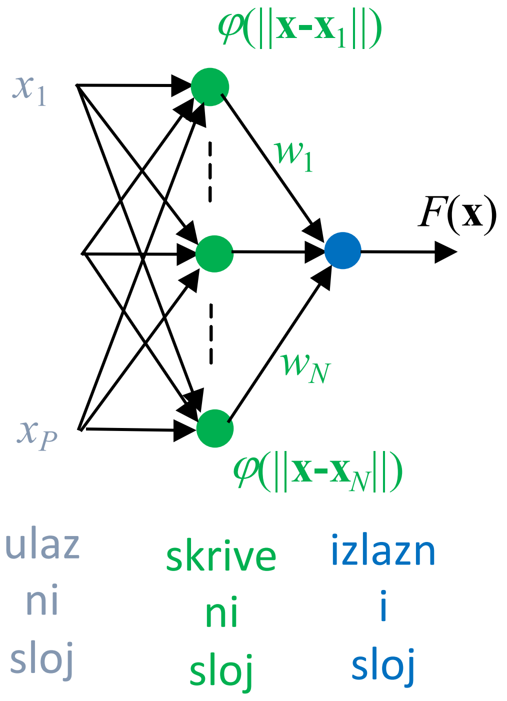
- Istraživanja su pokazala postoji veliki izbor nelinearnih funkcija za koje je $\mathbf{\Phi}$ invertibilna i/ili pozitivno definitna
  - Za detalje vidi Micchellijev teorem (1986)
- Ako je matrica $\mathbf{\Phi}$ pozitivno definitna onda postoji inverzna matrica pa nepoznati vektor težina možemo izračunati kao:

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{d}$$

- U praksi rješenje može biti numerički nestabilno ako je matrica $\mathbf{\Phi}$ bliska singularnoj matrici
- Taj problem se može riješiti korištenjem rezultata teorije regularizacije
  - O tome više malo kasnije

Interpolacija radijalnom mrežom VI.

- *i*-ti neuron skrivenog sloja realizira funkciju $\varphi(||\mathbf{x}\text{-}\mathbf{x}_i||)$
- Izlazni neuron računa linearnu kombinaciju svojih ulaza



Generalizirana radijalna mreža I

- Iz ranije izloženoga vidi se da svaki ulazni uzorak $\mathbf{x}_i$ traži jedan neuron u skrivenom sloju
- Za veliki broj ulaznih uzoraka to može postati problem
- U tom slučaju se umjesto N koristi samo $M << N$ radijalnih funkcija

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$$

Generalizirana radijalna mreža II

- Dobivena interpolacijska matrica $\mathbf{\Phi}$ u slučaju reduciranja broja radijalnih funkcija ima dimenzije *N*×*M* tako da inverzna matrica ne postoji
  - Problem je preodređen

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1M} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{i1} & \varphi_{i2} & \cdots & \varphi_{iM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \cdots & \varphi_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

- Težine za ovaj slučaj računamo pomoću pseudoinverzne matrice od matrice $\mathbf{\Phi}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^{+}\mathbf{d} = (\mathbf{\Phi}^{T}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{T}\mathbf{d}$$

Modifikacije

- Osim smanjenja broja radijalnih funkcija moguće su i druge korisne modifikacije:

1. Centri radijalnih funkcija ne moraju biti određeni vrijednostima ulaznih vektora nego mogu imati i neke druge vrijednosti.
2. Ako se koriste Gausove funkcije onda svaka funkcija može imati različiti parametar širine σ.
3. Izlaznom neuronu se može dodati prag.

- Ako modifikacija dodaje parametre onda se svi ti nepoznati parametri moraju odrediti tijekom procesa učenja

Učenje kao inverzni problem

- *Učenje* se može promatrati kao problem rekonstrukcije neke plohe koja je zadana skupom točaka koje mogu biti i jako razmaknute
- U toj interpretaciji *učenje* je inverzni problem
    - Znamo samo konačan broj ulazno-izlaznih točaka iz kojih treba odrediti cijelu plohu odnosno funkciju *F*
- Inverzni problem može biti dobro postavljen (eng. *well-posed*) ili loše postavljen (eng. *ill-posed*)
- Pretpostavimo nepoznato preslikavanje

$$F : X \to Y$$

gdje je *X* domena, a *Y* kodomena

Dobro postavljeni problem

- **Definicija**: Problem rekonstrukcije funkcije *F* je dobro postavljen ako su zadovoljena slijedeća tri uvjeta:

  1. Egzistencija: za svaki ulaz **x** postoji izlaz *y* = *F*(**x**)
  2. Jedinstvenost: *F*(**x**)=*F*(**t**) ako i samo ako **x=t**
  3. Kontinuiranost:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid \rho_x(\mathbf{x}, \mathbf{t}) < \delta \Rightarrow \rho_y(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{t})) < \varepsilon$$

  gdje su ρ_x i ρ_y mjere udaljenosti između vektora u pripadnim prostorima

Loše postavljeni problem

- **Definicija**: Problem rekonstrukcije funkcije *F* je loše postavljen onda i samo onda ako nije dobro postavljen.

Nadzirano učenje

- Nadzirano učenje je loše postavljen problem rekonstrukcije neke plohe:

1. Nema dovoljno informacija u primjerima za učenje tako da jedinstvenost ne vrijedi.
2. Zbog šuma i neodređenosti uvjeti kontinuiranosti i egzistencije ne moraju biti zadovoljeni.

- Da bi problem učenja učinili dobro postavljenim potrebno je dodatno **a priori** znanje o traženom preslikavanju *F*
- Takvo znanje može biti sadržano u redundantnosti uzoraka za učenje

Teorija regularizacije

- Andrej Tikhonov, 1963
- Teorija regularizacije omogućuje nalaženje prihvatljivog rješenja za loše postavljene inverzne probleme
- Ideja regularizacije jest stabilizacija rješenja uvođenjem dodatnog člana koji u sebi sadrži *a priori* informaciju o preslikavanju F (npr. kontinuiranost, glatkoća)
- Nepoznata funkcija F se sada određuje minimizacijom funkcije cijene $E(F)$ koja se sastoji od dva člana

Teorija regularizacije

- Standardni član interpolacijske greške mjeri odstupanje između željenog odziva d_i i dobivenog odziva $F(x_i)$ za ulaz x_i:

$$E_s(F) = \sum_{i=1}^{N} [d_i - F(\mathbf{x}_i)]^2$$

- Regularizacijski član ovisi o geometrijskim svojstvima funkcije F

$$E_c(F) = \left\| \mathbf{P} F \right\|^2$$

Ovdje je **P** linearni diferencijalni operator koji djeluje na F.

Rješenje regularizacijom I.

- U teoriji regularizacije minimiziramo veličinu

$$E(F) = E_s(F) + \lambda E_c(F)$$

  pri čemu je λ regularizacijski parametar

- Za određeni izbor operatora **P** može se izračunati optimalno rješenje *F* koje minimizira *E*(*F*) je oblika:

$$F_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}[d_i - F(\mathbf{x}_i)]G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

  gdje je *G* (. ; .) Greenova funkcija koja ovisi o izboru operatora **P**

Rješenje regularizacijom II.

- Opće rješenje regularizacijskog problema je oblika

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$$

  gdje je $G(\mathbf{x},\mathbf{x}_i)$ Greenova funkcija

- Ako je **P** translacijski invarijantan onda Greenova funkcija ovisi samo o razlici:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

- Ako je **P** i translacijski i rotacijski invarijantan onda Greenova funkcija mora biti **radijalna funkcija**:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$$

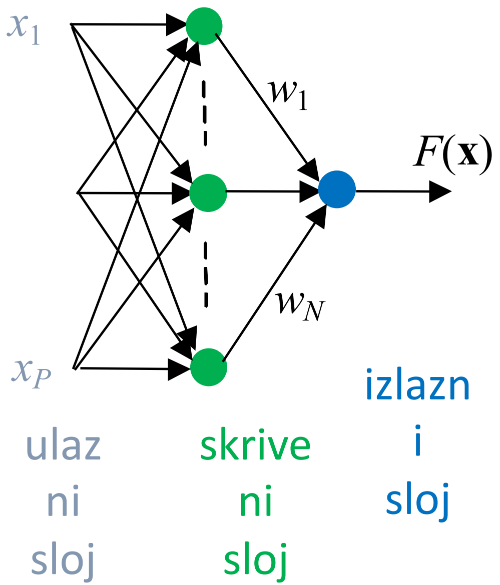
Regularizacijske mreže

- Zaključak: regularizacija problema interpolacije prirodno vodi do radijalnih mreža kao rješenja.
- Radijalne mreže su arhitektura koja omogućuje rješenje interpolacijskog problema uz poželjna svojstva:

1. One su univerzalni aproksimatori u smislu da mogu aproksimirati bilo koju multivarijantnu neprekinutu funkcij uz dovoljno mnogo skrivenih neurona.
2. Imaju svojstvo najbolje aproksimacije u smislu da za fiksiranu arhitekturu mreže postoji izbor parametara koji aproksimira F bolje od svih preostalih izbora.
3. Dobiveno rješenje je **optimalno** u smislu da minimizira funkcional cijene s prikaznice 33.

Radijalna mreža

- Skriveni sloj sadrži N Greenovih funkcija $G(||\mathbf{x} - \mathbf{x}_i||)$ koje moraju biti pozitivno definitne
  - Jedan mogući izbor su Gaussove funkcije
- Izlazni sloj realizira linearnu kombinaciju



Primjer: funkcija XOR (drugi put) I

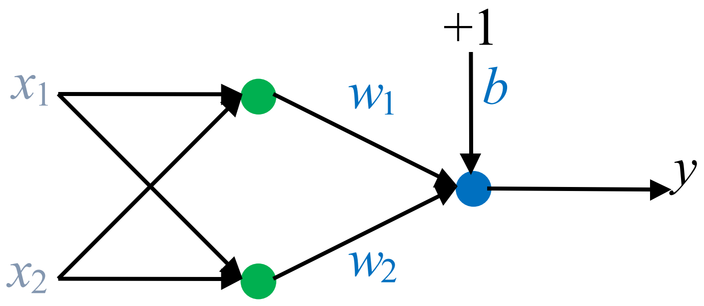
- Neka radijalna funkcija bude ne-normalizirana Gaussova funkcija:

$$G\left(\left\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_i\right\|\right)=\exp\left(\tfrac{1}{2}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_i\right\|^2\right), \quad i=1,2$$

  gdje su centri $\mathbf{t}_1 = [1 \;\; 1]^T$ i $\mathbf{t}_2 = [0 \;\; 0]^T$ fiksirani
- Neka izlazni neuron uz to ima i prag *b*

Primjer: funkcija XOR (drugi put) II

- Struktura radijalne mreže je:



Primjer: funkcija XOR (drugi put) III

- Ulazno-izlazna jednadžba je:

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2} w_i G\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\right\|\right) + b$$

- Interpolacijski uvjet mora vrijediti za sve primjere:

$$y(\mathbf{x}_j) = d_j, \quad j = 1,2,3,4$$

- Neka je:

$$g_{ji} = G\left(\left\|\mathbf{x}_j - \mathbf{t}_i\right\|\right), \quad j = 1,2,3,4; \quad i = 1,2$$

Primjer: funkcija XOR (drugi put) IV

- Sada dobivamo matričnu jednadžbu

$$\mathbf{G}\mathbf{w} = \mathbf{d}$$

gdje je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 1 \\ g_{21} & g_{22} & 1 \\ g_{31} & g_{32} & 1 \\ g_{41} & g_{42} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1353 & 1 \\ 0{,}3679 & 0{,}3679 & 1 \\ 0{,}1353 & 1 & 1 \\ 0{,}3679 & 0{,}3679 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x_1=(1,1) \\ \leftarrow x_2=(0,1) \\ \leftarrow x_3=(0,0) \\ \leftarrow x_4=(1,0) \end{array}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & b \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Primjer: funkcija XOR (drugi put) V

- Ovaj sustav jednadžbi je preodređen jer ima više jednadžbi nego nepoznanica
- Matrica **G** nije kvadratna
- Rješenje nalazimo pomoću pseudoinverzne matrice:
  $$\mathbf{w} = \mathbf{G}^{+}\,\mathbf{d} = (\mathbf{G}^{T}\,\mathbf{G})^{-1}\,\mathbf{G}^{T}$$
- Dobivamo $\mathbf{w} = [2{,}5027 \;\; 2{,}5027 \;\; -1{,}8413]^{T}$
- Prve dvije dobivene težine su jednake zbog simetrije problema radi fiksiranih centara $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2$

Usporedba radijalnih mreža (RBF) i višeslojnog preceptrona (MLP)

1. RBF mreža ima samo jedan skriveni sloj dok MLP ima više slojeva
2. Svi neuroni MLP-a obično koriste isti model dok skriveni neuroni RBF mreže mogu biti različiti.
3. Skriveni sloj RBF mreže je nelinearan, a izlazni linearan; kod MLP-a su svi neuroni nelinearni.
4. Argument aktivacijske funkcije kod RBF mreže je udaljenost između ulaznog uzorka i centra radijalne funkcije; kod MLP-a argument aktivacijske funkcije je skalarni produkt ulaznog vektora i vektora težine.

Strategije učenja

- Postoji više različitih strategija učenja kod radijalnih mreža koje se tipično razlikuju u tome kako se tretiraju centri radijalnih funkcija

- Neke od mogućih strategija su:

1. Fiksni centri koji su slučajno odabrani
2. Samo-organizirani odabir centara
3. Odabir centara pod nadzorom

Fiksni centri

- U ovom pristupu centri RBF funkcija su nasumično postavljeni su na unaprijed određene vrijednosti $\mathbf{t}_i$

$$G\left(\left\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_i\right\|\right)=\exp\left(-\frac{M}{d^2}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_i\right\|^2\right), \quad i=1,2,\ldots,M$$

  gdje je *M* broj odabranih centara i gdje je *d* najveća udaljenost između centara.

- Ovakav odabir postavlja standardnu devijaciju Gausovih funkcija u

$$\sigma=\frac{d}{\sqrt{2M}}$$

Fiksni centri

- Takav odabir standardne devijacije garantira da Gausove funkcije neće biti niti preuske ni preširoke
- Nepoznati parametri mreže koje trebamo naučiti su težine **w**
- Težine se mogu izračunati pseudoinverznom metodom:

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}^{+}\mathbf{d}$$

gdje je matrica **G**={g_{ji}} i gdje je

$$g_{ji} = \exp\left(-\frac{M}{d^2}\left\|\mathbf{x}_j - \mathbf{t}_i\right\|^2\right), \quad j = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, M$$

Samo-organizirani centri

- U ovom pristupu centri radijalnih funkcija nisu fiksirani nego se mogu pomicati na samoorganizirani način
- Samoorganizacija omogućuje da se centri funkcija postave samo u područjima gdje ima puno ulaznih vektora

Samo-organizirani centri

- Položaji centara mogu se računati algoritmom grupiranja s *K* srednjih vrijednosti
- Iznosi težina *w* se računaju kroz proces učenja pod nadzorom
- Za učenje pod nadzorom može se koristiti LMS algoritam
- Izlazi skrivenih neurona služe kao ulazi za LMS algoritam

Učenje pod nadzorom

- Ovo je najopćenitiji slučaj gdje se svi slobodni parametri mreže određuju učenjem pod nadzorom (korekcijom pogreške)
- U ovom pristupu promatramo pogrešku mreže za sve parove ulaz-izlaz:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} e_j^2$$

gdje je N broj parova za učenje i gdje je e_j signal pogreške

Učenje pod nadzorom

- Pogreška e_j definirana je kao:

$$\begin{aligned} e_j &= d_j - F(\mathbf{x}_j) \\ &= d_j - \sum_{i=1}^{M} w_i G\left(\left\|\mathbf{x}_j - \mathbf{t}_i\right\|_A\right) \end{aligned}$$

gdje je:

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{A}}^2 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{A}} = \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z}$$

i gdje je matrica **A** pozitivno definitna.

Učenje pod nadzorom

- U ovom pristupu slobodni parametri radijalne mreže koje treba odrediti da bi se minimizirala trenutna vrijednost pogreške su:
  - izlazne težine $\mathbf{w}_i$
  - centri radijalnih funkcija $\mathbf{t}_i$
  - matrica skalarnih produkta $\mathbf{A}$
- Iterativnom metodom najbržeg spusta izvode se korekcije gornjih parametara

Učenje pod nadzorom

- Eksperimentalna studija Wettschercka i Dietthericha (1992) je pokazala da:

  1. Radijalna mreža sa samo-organizirajućim centrima i učenjem izlaznih težina pod nadzorom nije generalizirala toliko dobro kao višeslojni perceptron.

  2. Generalizirane radijalne mreže za koje se svi parametri određuju nadziranim učenjem su generalizirale bolje od višeslojnog perceptrona.

Primjene radijalnih mreža

- Obrada slike
- Prepoznavanje govora
- Adaptivna ekvalizacija
- Medicinska dijagnostika
- Lokalizacija izvora kod radara
- Analiza stohastičkih signala

Zadaci

- Zadatak 7.3
- Težine **w** dobivene u primjeru za rješenje XOR problema (prikaznice 37-47) predstavljaju samo jednu moguću realizaciju uz odabrane fiksne centre
- Pronađite barem još jedno rješenje težina **w** koje rješava XOR problem i koje je različito od prikazanih rješenja