Matematička analiza 1 - Poglavlje 5

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 15. RUJNA 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

5. Nizovi

Ključni pojmovi: niz, omeđenost niza, gomilište, konvergencija niza, limes niza, monotonost niza

5.1 Pojam niza

Pojam niza ili slijeda nekih objekata intuitivno je vrlo jasan koncept. Međutim, valja odmah naglasiti da u nizu imamo *beskonačno* mnogo i to prebrojivo beskonačno mnogo elemenata, iako se kolokvijalno često za neki konačni slijed elemenata kaže da je niz. U nizu točno znamo koji element je prvi, koji je drugi, treći itd. Tako prirodni brojevi poredani na način $1,2,3,\ldots$ čine niz, decimalne znamenke broja $\pi = 3.1415926\ldots$ čine niz. Međutim, zvijezde naše galaksije poredane po veličini ne čine niz, jer ih je samo konačno mnogo.

Najvažnija uloga nizova u matematičkoj analizi jest *aproksimacija*. Kompliciraniji objekt aproksimiramo nizom jednostavnijih objekata na način da sve daljnji objekti u nizu sve vjernije opisuju taj "kompliciraniji objekt". Na primjer, realan broj π aproksimiramo nizom racionalnih (decimalnih) brojeva, gdje je n-ti član niza decimalni broj s točnošću od prvih n decimalnih znamenaka broja π. Dakle, $a_1 = 3.1$, $a_2 = 3.14$, $a_3 = 3.141$, $a_4 = 3.1415$, ...

Krenimo od jednog jednostavnog primjera niza kakav se javlja u prirodi.

■ **Primjer 5.1** Na odlagalištu se nalazi radioaktivni materijal čija količina opada s vremenom. Početna količina materijala je 5 grama. Ako se početkom svakog sljedećeg tjedna količina smanji za polovicu trenutne količine, koliko će biti radioativnog materijala početkom 10. tjedna?

Označimo s a_n količinu radioaktivnog otpada početkom n-tog tjedna. Budući da se količina radioaktivnog otpada smanjuje za polovicu početkom svakog određenog tjedna imamo:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{5}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{2^2} = \frac{5}{4}, \quad a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{a_1}{2^3} = \frac{5}{8}, \quad \ldots$$

Iz ovog pravila, možemo zaključiti da je početkom n-tog tjedna količina radioaktivnog materijala dana izrazom:

$$a_n = \frac{a_1}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Time dobivamo da je $a_{10} = \dfrac{5}{2^9}$. ■

Niz iz prethodnog primjera $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ je niz realnih brojeva.

■ **Primjer 5.2** Označimo sa S skup simbola $S = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ i promotrimo jedan njihov beskonačni slijed zadan kroz ponavljanje

$$\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \ldots$$

Na taj način zadali smo jedan niz elemenata skupa S. ■

Vježba 5.1 Zadajte neki novi niz realnih brojeva i neki novi niz elemenata is gornjeg skupa S.

Ono što je karakteristično za niz jest to da točno znamo koji element je prvi, drugi, odnosno, općenito n-ti član niza. Drugim riječima propisano je neko pravilo prema kojem elemente nekog skupa smještamo u niz. Tom diskusijom dolazimo do formalne definicije niza.

Definicija 5.1.1 Neka je S neprazan skup. Niz elemenata skupa S je funkcija $a : \mathbb{N} \to S$. ■

U radu s nizovima koristimo sljedeće oznake:

- $a(n)$ – označava n-ti član niza, a češće se koristi oznaka a_n,
- (a_n) – označava cijeli niz,
- $\{a_n\}$ – označava skup vrijednosti niza, odnosno sliku niza.

Napomena 5.1 U daljnjem gradivu bavimo se gotovo isključivo nizovima realnih brojeva, i ako nije drugačije navedeno, ona prema prethodnoj definiciji podrazumijevamo da je skup $S = \mathbb{R}$. Ako uzmemo $S = \mathbb{C}$, onda govorimo o nizu kompleksnih brojeva. Većina rezultata koje ćemo navesti za realne nizove, analogno vrijede i za kompleksne nizove, ali se njima nećemo posebno baviti.

■ **Primjer 5.3** (a) Niz (a_n) zadan je eksplicitnom formulom $a_n = n^2$, za sve $n \in \mathbb{N}$. To je niz kvadrata prirodnih brojeva

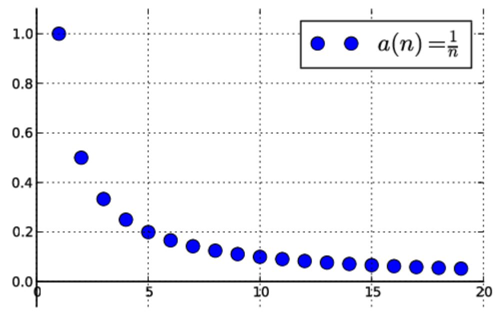
$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots.$$

(b) Niz (b_n) zadan je formulom $b_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. To je zapravo niz

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$$

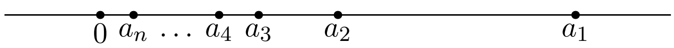
■

Nizove realnih brojeva možemo prikazivati grafički kao realne funkcije. Kako je domena niza skup $\mathbb{N}$, onda su grafovi nizova "točkasti". Na primjer, za niz (a_n) zadan općim članom $a_n = \frac{1}{n}$ imamo grafički prikaz:



Slika 5.1: Grafički prikaz niza (a_n).

Nizove realnih brojeva možemo prikazivati i samo na realnom brojevnom pravcu na kojem označimo vrijednosti niza $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.



Slika 5.2: Grafički prikaz niza (a_n) na brojevnom pravcu.

Napomena 5.2 Osim eksplicitnom formulom, niz može biti zadan i rekurzivno. To znači da je opisano pravilo kako iz prethodnih članova niza formiramo sljedeći član. Npr. poznati niz Fibonaccijevih brojeva zadan je rekurzijom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,, \quad \forall n > 2\,.$$

Dakle, n-ti član niza dobiven je zbrajanjem prethodna dva člana niza. Da bi niz bio jednoznažno određen, moramo još posebno zadati prva dva člana. U slučaju Fibonnacijevog niza oni se definiraju s $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$. Konkretno, tada imamo niz: $1, 1, 2, 3, 5, 7, \ldots$

Promotrimo opet niz recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

i među njima uočimo recipročne vrijednosti parnih prirodnih brojeva. Od tih brojeva možemo opet formirati niz koji je zadan formulom $b_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Taj niz prirodno je onda nazvati *podnizom* niza (a_n). Preciznije imamo sljedeću definiciju.

Definicija 5.1.2 Kažemo da je niz realnih brojeva (b_n) **podniz** niza (a_n) ako postoji strogo rastuća funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $b_n = a_{f(n)}$. ■

Napomena 5.3 U prethodnom primjeru niza recipročnih vrijednosti ta strogo rastuća funkcija je $f(n) = 2n$.

■ **Primjer 5.4** Pogledajmo niz (a_n) čiji je opći član dan formulom $a_n = \frac{n}{n+1}$. Neka je dana rastuća funkcija $f(n) = 2n+1$. Niz (b_n), čiji je opći član $b_n = \frac{2n+1}{2n+2}$, je podniz niza (a_n) za kojega vrijedi $b_n = a_{2n+1}$, odnosno on se sastoji od članova niza (a_n) s neparnim indeksima. ■

Vježba 5.2 Niz (a_n) zadan je općim članom $a_n = \frac{1}{n^2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Zapišite podniz (b_n) niza (a_n) kojeg određuje strogo rastuća funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$.

Prisjetimo se sada dvaju dobro poznatih primjera nizova iz srednjoškolske matematike.

■ **Primjer 5.5 — Aritmetički niz.** Neka je d fiksan realan broj, a $a_1 \in \mathbb{R}$ zadan. Niz (a_n) je **aritmetički** ako je razlika svaka dva uzastopna člana niza nepromijenjena i iznosi d, tj.

$$a_n - a_{n-1} = d\,, \quad \forall\, n \geq 2\,.$$

Broj d naziva se **diferencija** aritmetičkog niza. Prethodna definicija je rekurzivna, a **opći član niza** može se eksplicitno izraziti formulom

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \quad n \geq 2\,.$$

Gaussova dosjetka za aritmetički niz (a_n) daje nam

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_n + a_1\,,$$

odakle slijedi da je zbroj $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ prvih n članova aritmetičkog niza dan formulom

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n\,.$$

■

Vježba 5.3 Odredite aritmetički niz (a_n) za koji vrijedi $a_2 = 4$ i $a_3 = 3a_1$.

■ **Primjer 5.6 — Geometrijski niz.** Neka je $0 \neq q$ fiksan realan broj i $a_1 \neq 0$ zadan. Niz (a_n) je **geometrijski** ako je omjer svaka dva uzastopna člana niza stalan i iznosi q, odnosno

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q\,, \quad \forall\, n \geq 2\,.$$

Broj q se naziva **kvocijent** geometrijskog niza. Kao i u slučaju aritmetičkog niza, ovo je rekurzivna definicija, a **opći član niza** dan je izrazom

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad n \geq 2\,.$$

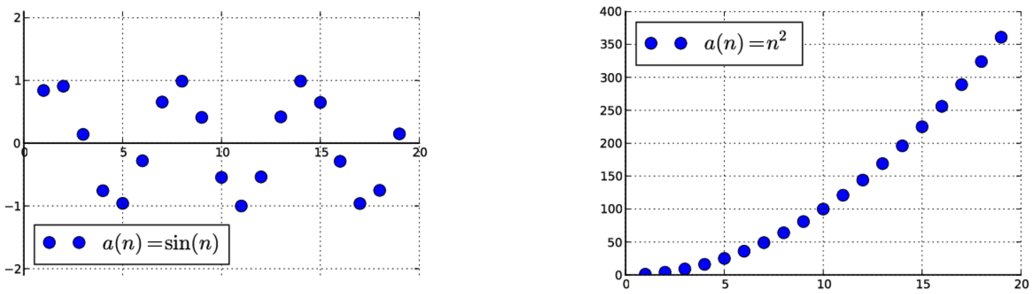
Iz izraza za opći član lako dolazimo do formule za zbroj $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ prvih n članova geometrijskog niza s kvocijentom $q \neq 1$. Naime $S_n = a_1(1 + q^2 + \ldots + q^{n-1})$, odakle direktnom provjerom slijedi

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}\,.$$

■

Vježba 5.4 Matematičkom indukcijom pokažite formulu za sumu prvih n članova geometrijskog niza.

■ **Primjer 5.7** Promotrimo sada grafove nizova (a_n) i (b_n) zadanih formulama $a_n = \sin n$ i $b_n = n^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$.



(a) Niz (a_n). (b) Niz (b_n).

Slika 5.3: Grafički prikaz nizova iz Primjera 5.7.

Za niz (a_n) rekli bismo da je **omeđen**, jer je skup vrijednosti koje niz poprima omeđen. Dok ćemo za niz (b_n) prikazan desno reći da je omeđen odozdo, ali nije omeđen odozgo pa stoga nije omeđen. Tu intuitivnu definiciju formaliziramo u nastavku teksta. ■

Definicija 5.1.3 Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) **omeđen odozgo** ako

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tako da je } a_n \leq M, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Svaki takav broj M nazivamo **gornja međa** niza (a_n).
Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) **omeđen odozdo** ako

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \text{ tako da je } a_n \geq m, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Svaki takav broj m nazivamo **donja međa** niza (a_n).
Niz realnih brojeva (a_n) je **omeđen** ako je omeđen odozgo i odozdo, odnosno, ako postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

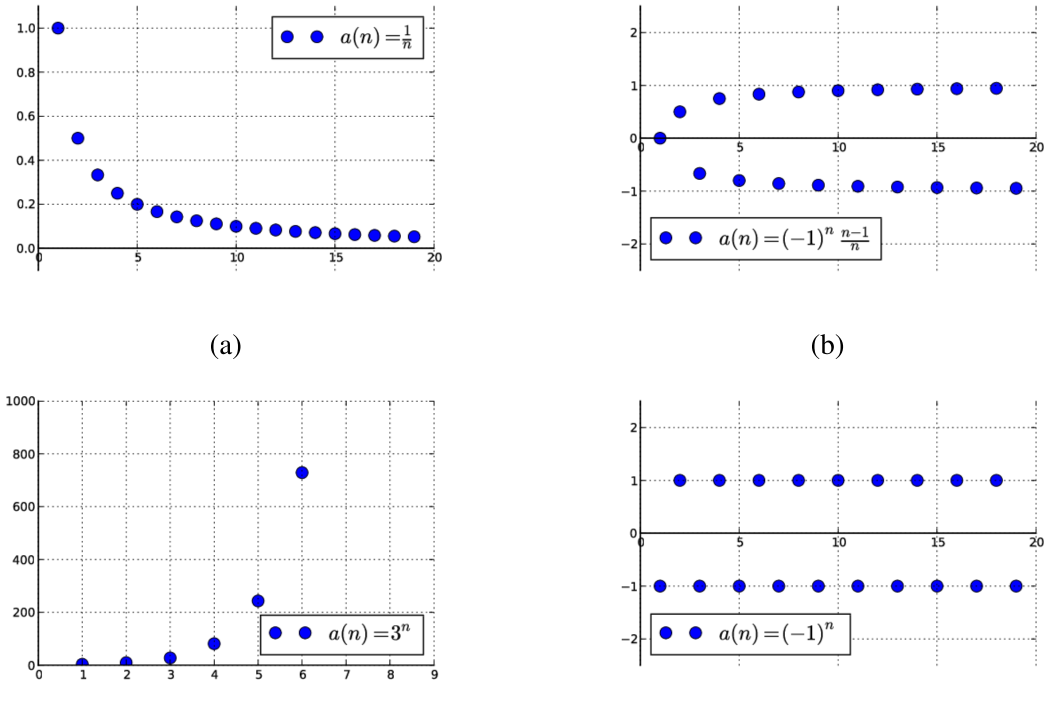
$$m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

■ **Primjer 5.8** Ispitajte omeđenost sljedećih nizova zadanih općim članom

(a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(b) $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(c) $a_n = 3^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(d) $a_n = (-1)^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Ako su omeđeni, odredite (po jednu) gornju i donju među tih nizova.



(a) (b) (c) (d)

Slika 5.4: Grafički prikaz nizova iz Primjera 5.8.

Krenimo redom.

(a) Za niz recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva $a_n = \dfrac{1}{n}$ očito vrijedi $0 \leq a_n \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Stoga je niz (a_n) omđen, a brojevi 0 i 1 su redom donja i gornja međa tog niza. Po definiciji su i brojevi -1 i 5 redom donja i gornja međa niza (a_n).

(b) To je niz: $0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{4}{5}, \ldots$ i očito vrijedi $|a_n| \leq 1$, odnosno $-1 \leq a_n \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Stoga je i taj niz (a_n) omeđen, a brojevi -1 i 1 su redom donja i gornja međa niza.

(c) Za niz $a_n = 3^n$ očito imamo $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Međutim, ne postoji realan broj M takav da vrijedi $a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz toga zaključujemo da je niz (a_n) omeđen odozdo i 0 je jedna donja međa, ali nije omeđen odozgo pa nije niti omeđen.

(d) Za ovaj niz (a_n) vrijedi $|a_n| = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ pa je omeđen, a za donju i gornju među možemo opet uzeti -1, odnosno 1.

■

■ **Primjer 5.9** Ispitajte omeđenost niza (a_n) zadanog općim članom $a_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Pokažimo da je niz (a_n) omeđen i u tu svrhu odredimo jednu njegovu gornju i donju među. Prema formuli za opći član, imamo

$$\frac{2n-3}{n+1} = \frac{2(n+1)-5}{n+1} = 2 - \frac{5}{n+1}.$$

Jasno je da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2 - \dfrac{5}{n+1} \leq 2$, pa možemo uzeti da je $M = 2$ gornja međa niza (kao i svaki broj veći od 2.) Nadalje, uočimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2 - \frac{5}{n+1} \geq 2 - \frac{5}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

pa zaključujemo da je $m = -\frac{1}{2}$ donja međa ovog niza (donja međa je i svaki broj manji od m.) ■

Napomena 5.4 Neka je (a_n) omeđen niz. Među svim gornjim međama M posebno se ističe *najmanja gornja međa*, koju još nazivamo *supremum niza*. A među svim donjim međama posebno se ističe ona najveća, koju nazivamo *infimum niza*. Ilustrirajmo to na prethodnom primjeru. Pokazali smo da je $M = 2$ gornja međa niza (a_n), pokažimo da je to ujedno i najmanja gornja međa, odnosno supremum niza. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji gornja međa M^* takva da je $M^* < 2$. Kako je M^* gornja međa, to znači da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2 - \frac{5}{n+1} \leq M^*, \quad \text{odnosno} \quad \frac{5}{n+1} \geq 2 - M^* =: \varepsilon > 0. \tag{5.1}$$

Međutim, za ovaj $\varepsilon > 0$ možemo naći prirodan broj $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon,$$

što je u kontradikciji s (5.1). Dakle, pretpostavka da postoji gornja međa $M^* < 2$ vodi na kontradikciju pa zaključujemo da je $M = 2$ najmanja gornja međa niza (a_n). Kako je niz (a_n) rastući, očito je $m = -\frac{1}{2}$ najveća donja međa.

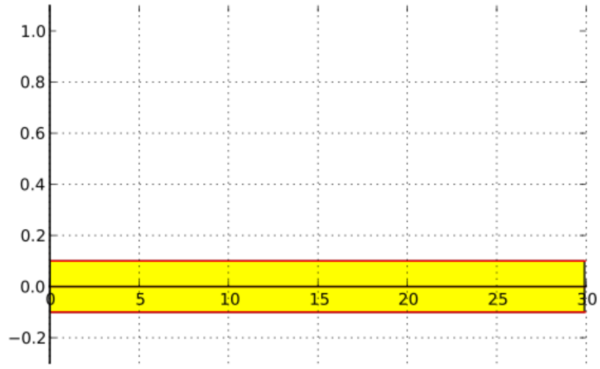
Vježba 5.5 Ispitajte omeđenost sljedećih nizova zadanih općim članom:

(a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{2n^2+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(b) $b_n = n \cos n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

5.2 Gomilište niza

U nekim od prethodnih primjera mogli smo vidjeti da se za velike indekse $n \in \mathbb{N}$, članovi niza *gomilaju* oko nekih vrijednosti. Tako se vrijednosti niza recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva $a_n = \frac{1}{n}$ gomilaju oko broja 0, dok se vrijednosti nizova iz Primjera 5.8 (b) i (d) gomilaju oko brojeva -1 i 1. Kako bismo ta opažanja mogli preciznije izreći, uvodimo najprije pojam ε-okoline realnog broja.

Definicija 5.2.1 Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$. Interval oblika $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ nazivamo **ε-okolina** broja x_0 i kraće označavamo s $V_\varepsilon(x_0)$. ■



Slika 5.5: ε-okolina od 0.

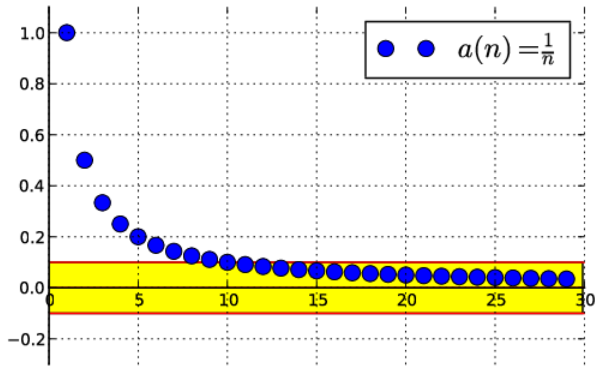
Dakle, ε-okolina broja $x_0 \in \mathbb{R}$ (ponekad kažemo i točke x_0) je skup svih realnih brojeva koji su za (strogo) manje od ε udaljeni od x_0, tj.

$$V_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; |x - x_0| < \varepsilon\} = \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle \; .$$

■ **Primjer 5.10** Za proizvoljni $\varepsilon > 0$, ε-okolina točke $x_0 = 0$ je interval $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$. ■

U kontekstu nizova, najčešće ćemo ε- okolinu prikazivati na y-osi, jer tamo su prikazane vrijednosti niza. Za prethodni primjer možemo ju prikazati Slikom 5.5.

■ **Primjer 5.11** Primijetimo da se za niz (a_n) zadan općim članom $a_n = \frac{1}{n}$, u *svakoj* ε-okolini od nule nalazi beskonačno mnogo članova niza. Naime, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji (dovoljno velik) prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ (vidi Sliku 5.6). Nadalje, za sve $n \geq n_0$ tada vrijedi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Time smo zapravo pokazali da se u svakoj ε-okolini od nule, nalaze se svi osim konačno mnogo (prvih $n_0 - 1$) članova niza (a_n).



Slika 5.6: ε-okolina niza (a_n) u kojoj se nalazi beskonačno mnogo članova niza.

Realan broj $a = 0$ zvati ćemo **gomilište niza** (a_n). ■

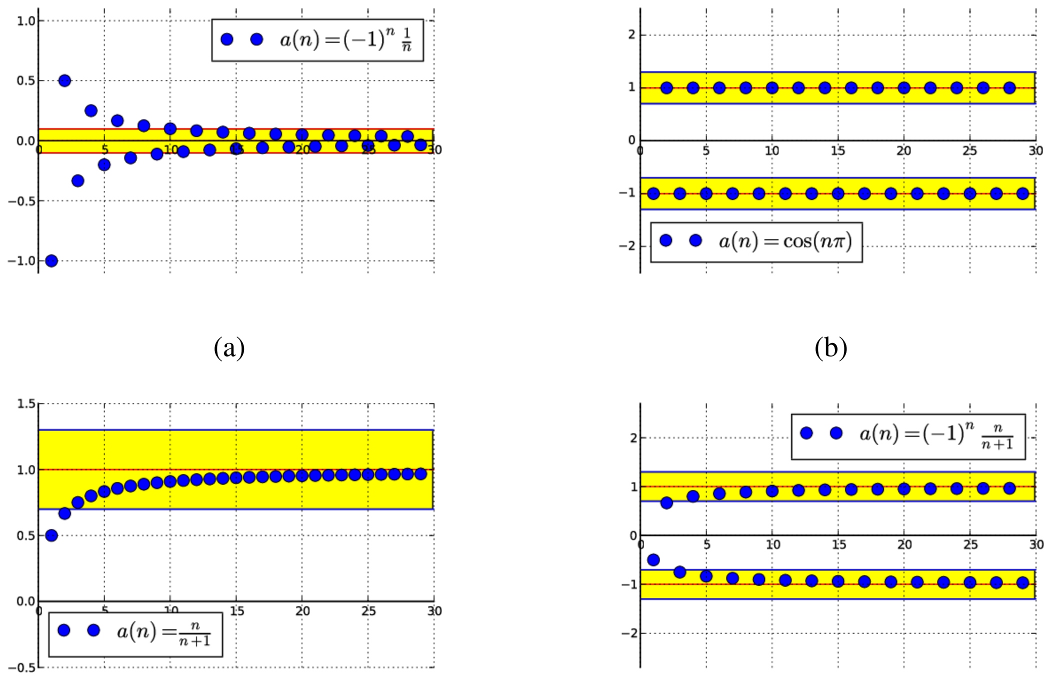
Definicija 5.2.2 — Gomilište niza. Realan broj a zovemo gomilište niza (a_n) ako se unutar *svake* ε-okoline broja a nalazi *beskonačno mnogo* članova niza (a_n). ■

■ **Primjer 5.12** Odredite (ako postoje) gomilišta sljedećih nizova zadanih općim članom:

(a) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(b) $a_n = \cos(n\pi)$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(c) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(d) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Iz grafičkih prikaza sa Slike 5.7 zaključujemo:

(a) niz (a_n) ima gomilište $a = 0$;
(b) niz (a_n) ima dva gomilišta -1 i 1;
(c) niz (a_n) ima gomilište $a = 1$;
(d) niz (a_n) ima dva gomilišta -1 i 1.



(a) (b)

(c) (d)

Slika 5.7: Nizovi i njihova gomilišta.

■

Vježba 5.6 Odredite (ako postoje) gomilišta sljedećih nizova zadanih općim članom:

(a) $a_n = (-1)^n n$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(b) $a_n = \sin(n\pi/4)$ za sve $n \in \mathbb{N}$,
(c) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Vježba 5.7 Odredite gomilišta niza (a_n) zadanog s

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n, & n < 10^9, \\ (-1)^n \dfrac{1}{n}, & n \geq 10^9. \end{cases}$$

Prirodno se sada postavlja pitanje: Ima li možda svaki niz (barem jedno) gomilište? Odgovor je negativan. Uzmimo npr. niz (a_n) zadan s $a_n = n$. Tada očito ne postoji realan broj a unutar čije svake ε-okoline bi se nalazilo beskonačno mnogo članova tog niza. Dakle, (a_n) nema gomilište. Dovoljan uvjet za postojanje gomilišta niza daje nam sljedeći teorem.

Teorem 5.2.1 Ako je niz (a_n) omeđen, tada ima barem jedno gomilište.

Ovaj važan teorem pripisuje se njemačkom matematičaru Karlu Weierstrassu, kojega se često navodi i kao *"oca moderne analize"*. Dokaz teorema može se pronaći i u skripti [2].

Napomena 5.5 Obrat tvrdnje iz prethodnog teorema ne vrijedi. Drugim riječima, ako niz ima gomilište, on nije nužno omeđen. Npr. niz (a_n) definiran s $a_n = n$ ako je n paran i $a_n = -1$, ako je n neparan, očito ima gomilište -1, a nije omeđen.

Dodatak

Vidjeli smo u prethodnim primjerima (Primjer 5.12 (b) i (d)) da niz može imati više od jednog gomilišta. Vrlo lako se konstruira niz koji ima proizvoljno konačno mnogo gomilišta. Uzmimo $m \in \mathbb{N}$ fiksan i definirajmo niz (a_n) s $a_n = n \pmod{m}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Taj niz beskonačno puta poprima vrijednosti $0, 1, \ldots, m-1$ pa su to njegova gomilišta. Promotrimo nadalje niz (a_n) zadan kroz ponavljajući obrazac

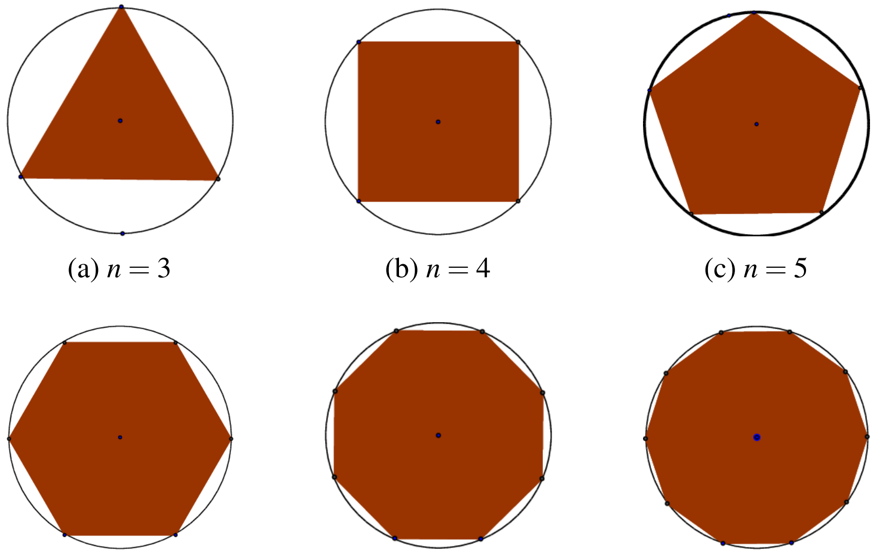
$$(a_n) = (\underbrace{1}, \underbrace{1,2}, \underbrace{1,2,3}, \underbrace{1,2,3,4}, \underbrace{1,2,3,4,5}, \underbrace{1,2,3,4,5,6}, \ldots).$$

Taj niz ima prebrojivo mnogo gomilišta i to su upravo svi prirodni brojevi. Postoje niz koji ima čak neprebrojivo mnogo gomilišta. U Poglavlju 3 pokazali smo da je skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ prebrojiv, tj. da postoji bijekcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Ta bijekcija je zapravo niz svih racionalnih brojeva, a gomilište tog niza je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. To je posljedica činjenice da u svakoj ε-okolini svakog realnog broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

5.3 Konvergencija niza realnih brojeva

Već smo na samom početku poglavlja istaknuli kako je osnovna motivacija korištenja nizova aproksimacija – aproksimacija kompliciranijih i računski zahtjevnijih stvari jednostavnijima. Pogledajmo jedan takav motivacijski primjer.

■ **Primjer 5.13 — Računanje površine kruga.** Kolika je površina kruga polumjera r? Odgovor znamo, $r^2\pi$, ali možemo li objasniti zašto? Nakon tog pitanja problem nam se čini nešto težim. S druge strane, računanje površine pravilnih n-terokuta upisanih u krug polumjera r relativno je jednostavno — svaki n-terokut razdijelimo na trokute kojima je jedan vrh središte kruga, a površinu trokuta znamo izračunati i objasniti formulu. Tako samo "težak problem" računanja površine kruga zamijenili nizom jednostavnijih problema računanja površine pravilnih n-terokuta upisanih u krug. Primijetimo da povećanjem broja stranica pravilni n-terokut sve vjernije opisuje krug (Slika 5.8).



(a) $n=3$ (b) $n=4$ (c) $n=5$

(d) $n=6$ (e) $n=8$ (f) $n=10$

Slika 5.8: Pravilni n-terokuti upisani u krug.

Označimo s P_n površinu n-terokuta, a s P površinu kruga. Što je n veći površina n-terokuta P_n sve je bliža površini kruga P. Reći ćemo da P_n teži prema P kada n teži prema $+\infty$, a pisat ćemo

$$P_n \to P \quad \text{kada} \quad n \to \infty .$$

Primjenom osnovne trigonometrije može se izračunati

$$P_n = \frac{1}{2} n r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Primijetimo da kako n raste, argument funkcije sinus, $\dfrac{2\pi}{n}$ postaje sve manji, a time aproksimacija $\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \approx \dfrac{2\pi}{n}$ sve bolja (aproksimaciju $\sin x \approx x$ za “male” x ćemo opravdati u Poglavlju 9). Drugim riječima $P_n \approx r^2\pi$, pri čemu je za veći n ta aproksimacija sve bolje. Odavde zaključujemo da je onda površina kruga jednaka $P = r^2\pi$. Ovo je jedan primjer konvergentnog niza i reći ćemo da niz (P_n) **konvergira** prema P. Vrijednost P ćemo zvati **limes** niza (P_n). ∎

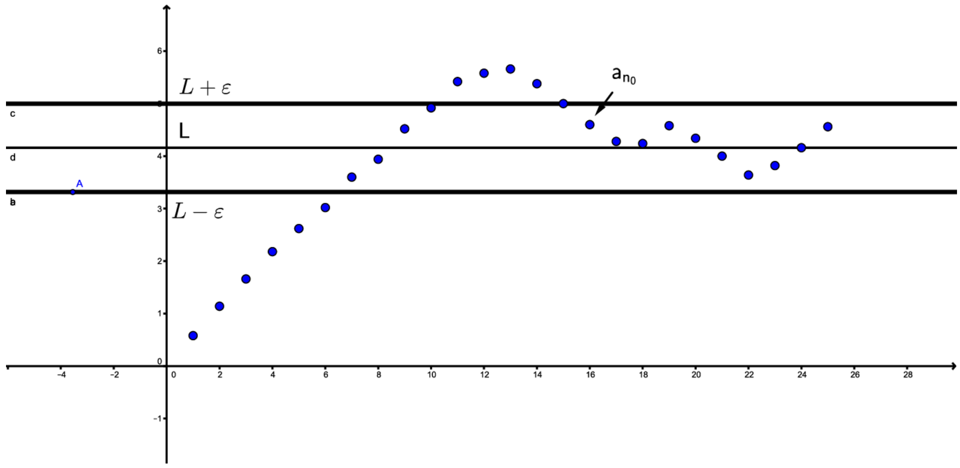
U daljnjem nas zanimaju nizovi realnih brojeva (a_n) čiji se članovi a_n približavaju nekoj fiksnoj vrijednosti $L \in \mathbb{R}$ za dovoljno velike indekse n. Naš cilj je sada formalizirati prethodnu ideju konvergencije nizova. U tu svrhu koristimo ε-okoline. Neformalnu rečenicu tipa:

“a_n je *blizu* L za sve dovoljno velike n”,

preciznije formuliramo na sljedeći način:

“za dani $\varepsilon > 0$ otvoreni interval $\langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$ sadrži sve članove niza a_n počevši od nekog dovoljno velikog broja $n_0 \in \mathbb{N}$ (koji ovisi o ε), tj.

$$a_n \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle \quad \text{za sve} \;\; n \geq n_0 .\text{”}$$



Slika 5.9: Grafički prikaz definicije konvergencije niza.

Međutim, da bismo intuitivno iskazali konvergenciju realnih brojeva a_n prema L, nije dostatno reći samo da su a_n *blizu* L za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$, nego želimo s vrijednostima a_n biti **proizvoljno** blizu L za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$. A tu činjenicu formaliziramo na način da **za svaki** $\varepsilon > 0$ tražimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ (koji ovisi o ε) takav da vrijedi

$$a_n \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle \quad \text{za sve} \ \ n \geq n_0 \,.$$

Primjetimo, što manji ε biramo, to će biti veći n_0 tako da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$ (vidi Sliku 5.9). Uočimo nadalje sljedeći ekvivalentan zapis

$$a_n \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle \ \Leftrightarrow \ |a_n - L| < \varepsilon .$$

Prethodnu diskusiju konačno formiramo u definiciju.

Definicija 5.3.1 Kažemo da niz realnih brojeva (a_n) **konvergira** k realnom broju L ako: *za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi* $|a_n - L| < \varepsilon$.
Pri tome broj L nazivamo **limes niza** (a_n) i pišemo

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \,.$$

Ako niz ima limes kažemo da je **konvergentan**. Ako niz nije konvergentan, kažemo da je **divergentan**. ■

Definiciju možemo simbolički kraće zapisati:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|a_n - L| < \varepsilon)\,.$$

Napomena 5.6 Ekvivalentna formulacija definicije konvergencije glasi: Niz realnih brojeva (a_n) konvergira k realnom broju L ako se izvan *svake* ε-okoline broja L nalazi samo konačno mnogo (i to upravo prvih $n_0 - 1$) članova niza.

Iz definicije limesa je odmah jasno kako je on ujedno i gomilište niza, ali vrijedi i jača tvrdnja koju formuliramo u narednoj propoziciji.

Propozicija 1 Ako je niz (a_n) konvergentan i ima limes L, tada je L *jedino* gomilište niza.

Drugim riječima, konvergentan niz ima točno jedno gomilište i to je upravo limes niza.

Dokaz. Za konvergentan niz (a_n) s limesom L se izvan svake ε-okoline od L nalazi samo konačno mnogo članova niza, odnosno unutar svake ε-okoline se nalazi beskonačno mnogo članova niza. Time je pokazano da je L gomilište niza. Pokažimo da je to jedino gomilište. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji i neko drugo gomilište $L_1 \neq L$. Neka je $d = |L_1 - L|$. Tada za $\varepsilon < \dfrac{d}{2}$ imamo disjunktnost dviju ε-okolina

$$\langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle \cap \langle L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon\rangle = \emptyset.$$

Budući da je L_1 po pretpostavci gomilište niza (a_n), u okolini $\langle L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon\rangle$ se nalazi beskonačno mnogo članova niza (a_n), međutim to nije moguće, jer se zbog konvergencije svi osim konačno mnogo članova niza (a_n) nalaze u okolini $\langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$, koja je disjunktna s okolinom $\langle L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon\rangle$. Time smo došli do kontradikcije s pretpostavkom da postoji drugo gomilište $L_1 \neq L$ niza (a_n). ■

Napomena 5.7 Obratom po kontrapoziciji tvrdnje iz prethodne propozicije zaključujemo: Ako niz realnih brojeva ima više od jednog gomilišta ili nema gomilišta, tada on nije konvergentan.

Kao važna posljedica prethodne propozicije vrijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 5.3.1 Konvergentan niz ima samo jedan limes.

■ **Primjer 5.14** Po definiciji pokažite da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, tražimo $n_0 \in \mathbb{N}$ (ovisan o ε) tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$. Uzmimo prirodan broj $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, tada je $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ odnosno $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon\,, \quad \text{odnosno} \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\,,$$

čime je tvrdnja pokazana. ■

Napomena 5.8 Analogno prethodnom primjeru, može se pokazati i općenitija tvrdnja: za $p \in \mathbb{Q}^+$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0\,.$$

Prisjetimo se, ako je (a_n) konvergentan niz s limesom L, tada se za dani $\varepsilon > 0$ svi članovi niza (a_n) počevši od člana a_{n_0} nalaze u ε-okolini $\langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$, odnosno da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon\,.$$

Izvan te ε-okoline imamo samo konačno mnogo članova niza: a_1, a_2, ..., a_{n_0-1}. Kako svaki konačan skup realnih brojeva ima minimum i maksimum, definirajmo

$$m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, L-\varepsilon\} \quad \text{i} \quad M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, L+\varepsilon\}.$$

Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $m \leq a_n \leq M$, odnosno ovim razmatranjem smo pokazali sljedeći teorem.

Teorem 5.3.2 Ako je niz realnih brojeva (a_n) konvergentan, tada je on omeđen.

Napomena 5.9 Obrat prethodne tvrdnje ne vrijedi. Uzmimo na primjer niz zadan općim članom $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, koji je očito omeđen, ali nije konvergentan. Takav je i niz (b_n) zadan s $b_n = \cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Vježba 5.8 Navedite još neki primjer niza koji je omeđen, ali nije konvergentan.

Promatramo li konvergenciju niza realnih brojeva, potpuno je nevažno što se događa s prvih konačno mnogo članova niza. Stoga u tvrdnjama koje slijede ne pretpostavljamo da određena svojstva vrijede za sve članove niza (za sve $n \in \mathbb{N}$), nego pretpostavljamo da postoji prirodan broj $m \in \mathbb{N}$, takav da dana svojstva vrijede počevši od tog člana, tj. za sve $n \geq m$. Prva od takvih tvrdnji poprilično je intuitivna i navodimo ju bez dokaza.

Teorem 5.3.3 Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi. Pretpostavimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \leq b_n$ za svaki $n \geq m$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

■ **Primjer 5.15** Pokažite da je niz (a_n) zadan općim članom $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ konvergentan i odredite mu limes.

Uočimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi (vidi Sliku 5.10)

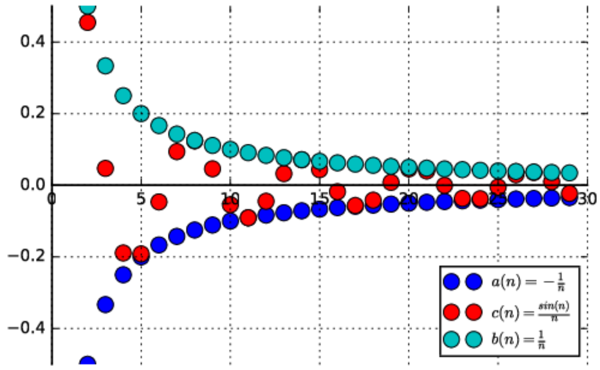
$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

U Primjeru 5.14 pokazali smo da niz $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ konvergira prema 0, a potpuno analogno pokaže se da i niz $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ konvergira prema 0. Stoga je za očekivati da će i niz $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$ konvergirati prema 0. Tvrdnja slijedi iz sljedećeg vrlo intuitivnog teorema slikovitog imena.

■

Teorem 5.3.4 — Teorem o sendviču. Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi realnih brojeva takvi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$. Neka je (c_n) niz realnih brojeva za koji postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq m$ vrijedi

$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$



Slika 5.10: Primjena Teorema o sendviču.

Tada je i niz (c_n) konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

Dodatak

Dokaz Teorema o sendviču. Neka su (a_n), (b_n) i (c_n) nizovi realnih brojeva koji zadovoljavaju pretpostavke teorema. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$, tada postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0'$ vrijedi

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{i} \quad |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nadalje, uzmimo $n_0 = \max\{n_0', m\}$, tada za sve $n \geq n_0$ računamo

$$|c_n - L| \leq |c_n - b_n| + |b_n - L| \leq |a_n - b_n| + |b_n - L| \leq |a_n - L| + 2|b_n - L| < \varepsilon.$$

U prethodnom računu koristili smo nejednakost trokuta i pretpostavku da za sve $n \geq m$ vrijedi $|c_n - b_n| \leq |a_n - b_n|$. U konačnici smo dobili da za proizvoljan $\varepsilon > 0$ možemo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $|c_n - L| < \varepsilon$. Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$, zaključujemo da taj postupak možemo provesti za svaki $\varepsilon > 0$. Time smo po definiciji pokazali da je niz (c_n) konvergentan i limes mu je jednak L. ■

Kao posljedicu Teorema o sendviču imamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 5.3.5 Neka su (a_n) i (b_n) nizovi realnih brojeva za koje vrijedi $0 \leq a_n \leq b_n$ za sve $n \geq m$, gdje je $m \in \mathbb{N}$ neki prirodni broj, te neka je (b_n) konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Tada je i niz (a_n) konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nadalje, iz očite ekvivalencije

$$|a_n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow ||a_n| - 0| \leq \varepsilon, \quad \text{za sve } \varepsilon > 0$$

slijedi tvrdnja

Teorem 5.3.6 Niz realnih brojeva (a_n) konvergira k 0 ako i samo ako niz njegovih apsolutnih vrijednosti $(|a_n|)$ konvergira k 0, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 .$$

Napomena 5.10 Kao posljedicu prethodne tvrdnje dobivamo da niz (a_n) zadan formulom $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n^p}$ za $p \in \mathbb{Q}^+$ konvergira prema 0, jer nam je otprije poznato da $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

Prije nastavka gradiva o nizovima, utvrdimo dosad naučeno kroz sljedeća pitanja.

Koje od sljedećih tvrdnji su točne, a koje netočne? Odgovore detaljno obrazložite. Ako smatrate da je tvrnja istinita, navedite iz koje definicije ili teorema to slijedi i obrazložite. Ako je pak tvrdnja lažna, navedite protuprimjer.

1. Svako gomilište niza je limes niza.
2. Limes niza je gomilište niza.
3. Niz koji je konvergentan ima točno jedno gomilište.
4. Ako niz nema gomilišta, onda je konvergentan.
5. Ako niz ima više od jednog gomilišta, onda niz divergira.

5.4 Pravila za računanje limesa niza

Definiciju konvergencije niza realnih brojeva razložili smo intuitivno i formalno u prethodnom poglavlju. Međutim, primijetimo da ta definicija ima jedan "operativni nedostatak". Da bismo pokazali da je neki niz realnih brojeva (a_n) konvergentan, mi unaprijed moramo imati kandidata L za limes niza i onda po definiciji provjeriti da li se doista radi o limesu. Međutim, kako ispitati konvergenciju nekog niza ako ne možemo naslutiti dobrog kandidata ili kako pokazati divergenciju ako dobar kandidat ne postoji?

Mnogi složeniji nizovi (oni koji imaju složeniju formula za opći član niza) mogu se razložiti na jednostavnije nizove korištenjem osnovnih aritmetičkih operacija: zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Ako za te jednostavnije nizove znamo odgovor na pitanje konvergencije, onda možemo nešto reći i o konvergenciji složenijih nizova. Preciznije nam o tome govori sljedeći teorem.

Teorem 5.4.1 Neka su (a_n) i (b_n) *konvergentni* nizovi, tada je i niz:

a) $(a_n + b_n)$ konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

b) $(a_n - b_n)$ konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

c) $(a_n \cdot b_n)$ konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

d) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, ako je $b_n \neq 0$, konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Taj teorem predstavlja jedan od osnovnih alata za "računanje limesa". Naime, poznavanjem limesa jednostavnijih konvergentnih nizova, moći ćemo izračunati limese složenijih nizova dobivenih zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem ili dijeljenjem jednostavnijih nizova.

Dokaz. Pokažimo tvrdnju pod a). Dokaz ostalih tvrdnji ide analogno i može se pronaći u knjizi [1] ili skripti [2]. Neka su (a_n) i (b_n) konvergenti nizovi. Označimo s $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ i s $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan, tada po definiciji konvergencije imamo:

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)\left(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2)\left(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Uzmimo sada $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tada i za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stoga za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$, prethodni postupak možemo provesti za svaki $\varepsilon > 0$ i time smo onda pokazali da je niz $(a_n + b_n)$ konvergentan i njegov limes je jednak $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. ∎

Vježba 5.9 Pokažite tvrdnju b) iz prethodnog teorema.

▪ **Primjer 5.16** Ispitajte konvergenciju niza zadanog općim članom $a_n = \dfrac{n^2 + 2n\cos n + 5}{3n^2 + 2n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Nizovi u brojniku i nazivniku očito nisu konvergentni pa ne možemo direktno primijeniti prethodni teorem. Ako podijelimo brojnik i nazivnik s n^2 (vodeći član), dobivamo ekvivalentnu formulu za a_n,

$$a_n = \frac{1 + 2\dfrac{\cos n}{n} + \dfrac{5}{n^2}}{3 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}},$$

s tom razlikom da sada u brojniku i nazivniku imamo konvergentne nizove. Dakle, za računanje limesa niza (a_n) primijenimo redom Teorem 5.4.1, stavke d) i a), redom:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 2\dfrac{\cos n}{n} + \dfrac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 + 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}}{3 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

U prethodnom računu koristili smo i $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n} = 0$, što slijedi iz Teorema o sendviču, odnosno istom argumentacijom kao i u Primjeru 5.15. ▪

Vježba 5.10 Odredite, ako postoji, limes niza:

(a) $a_n = \dfrac{5n^3+3n^2+4n+5}{4n^3+3n^2++2n+4}$;

(b) $b_n = n^2 - \dfrac{n^3+n^2}{n+4}$;

(c) $c_n = \dfrac{2n^3-1}{n^2+n+1}$;

(d) $d_n = \dfrac{2n^2-1}{3n^2+n+1}$;

(e) $e_n = \dfrac{n+\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n}+1}$.

5.5 Nizovi s beskonačnim limesima.

Prisjetimo se niza zadanog općim članom $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. On ima dva gomilišta pa je divergentan. S druge strane niz zadan s $a_n = \sqrt{n}$ nema realnih gomilišta, pa je također divergentan, ali kako mu vrijednosti neograničeno rastu kako n raste, možemo reći da da mu vrijednosti teže prema $+\infty$, i u tom slučaju govorit ćemo da niz divergira prema $+\infty$. S takvom vrstom divergencije bavimo se u ovom poglavlju.

Definicija 5.5.1 Kažemo da niz realnih brojeva (a_n) **divergira** prema $+\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n > M$.
Kažemo da niz realnih brojeva (a_n) **divergira** prema $-\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki $m < 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n < m$. ■

Drugim riječima, niz divergira prema $+\infty$, ako su svi osim konačno mnogo članova niza veći od proizvoljno velikog realnog broja $M > 0$. S druge strane, niz divergira prema $-\infty$, ako su svi osim konačno mnogo članova niza manji od proizvoljno malog realnog broja $m < 0$. Stoga je niz koji divergira prema $+\infty$ nužno neomeđen odozgo, dok je niz koji divergira prema $-\infty$ nužno neomeđen odozdo. Primijetite da obrati tih tvrdnji ne vrijede.

Napomena 5.11 Iako formalno pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, napominjemo, radi se o divergentnim nizovima.

Za računanje limesa nizova kada su u igri i divergentni nizovi prema $\pm\infty$ imamo sljedeće teoreme, odnosno pravila računanja koja ćemo koristiti.

Teorem 5.5.1 Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi takvi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, zatim $b_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ te $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Tada niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ divergira prema $+\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Napomena 5.12 Tvrdnju prethodnog teorema simbolički kraće zapisujemo u obliku: $\frac{a}{0^+} = +\infty$ za za $a > 0$. Oznaka 0^+ označava da je 0 limes niza s pozitivnim članovima.

Analogno prethodnom teoremu i napomeni, ostala pravila za računanje limesa s divergentnim nizovima iskazujemo u simboličkom zapisu na sljedeći način.

Određeni oblici

(a) $\frac{a}{0^+} = -\infty$ za $a < 0$,

(b) $+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty$,

(c) $+\infty + a = +\infty, \quad -\infty + a = -\infty$,

(d) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$,

(e) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ za $a > 0$, odnosno $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ za $a < 0$,

(f) $\frac{a}{\pm\infty} = 0$.

Napomena 5.13 Istaknimo smisao pravila (b) gornjeg simboličkog zapisa — zbroj dva divergentna niza prema $\pm\infty$ je divergentan niz prema $\pm\infty$. Oznaka $\pm\infty$ znači da niz divergira prema $+\infty$ ili prema $-\infty$. Ostali simbolički zapisi interpretiraju se analogno.

■ **Primjer 5.17** Uzmimo nizove $a_n = n^2$ i $b_n = 2^n$. Znamo da za oba niza vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Pravilo (b) kaže nam da je zbroj ta dva niza $(a_n + b_n)$ divergentan niz prema $+\infty$, tj. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. ■

Prethodna pravila (a)-(f) nazivaju se još i *određeni oblici*, jer u tim oblicima poznavanjem konvergencije/divergencije dvaju sastavnih nizova, jednoznačno je određen tip konvergencije/divergencije novog niza dobivenog određenim operacijama. Postoje međutim operacije s nizovima kada poznavanjem konvergencije/divergencije dvaju sastavnih nizova, nije jednoznačno određen i tip konvergencije/divergencije rezultata te operacije. To su takozvani *neodređeni oblici*, koje simbolički navodimo u sljedećem popisu:

Neodređeni oblici

(i) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,

(ii) $+\infty - (+\infty), \quad -\infty - (-\infty)$,

(iii) $\frac{0}{0}$,

(iv) $0 \cdot (\pm\infty)$,

(v) 0^0,

(vi) $1^{\pm\infty}$,

(vii) $(\pm\infty)^0$.

■ **Primjer 5.18** Uzmimo opet nizove $a_n = n^2$ i $b_n = 2^n$. Što možemo reći o nizu $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$?

Taj niz je neodređenog oblika tipa (i) i a priori ne možemo reći ništa o njegovoj konvergenciji, nego moramo detaljnije promotriti konkretni niz. Kako eksponencijalna funkcija $n \mapsto 2^n$ raste "puno brže" od kvadratne funkcije $n \mapsto n^2$, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0\,.$$

S druge strane niz $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ je istog tipa $(\frac{+\infty}{+\infty})$, međutim, iz istog razloga kao i maloprije, taj niz je divergentan, tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty$. ■

Napomena 5.14 Neodređeni oblik tipa $(\frac{+\infty}{+\infty})$, može poprimiti bilo koji nenegativan realan broj. Da bi se uvjerili u to, uzmimo $a \geq 0$ proizvoljan realan broj i promotrimo niz $a_n = \dfrac{an^2+n+1}{n^2}$ koji je neodređenog oblika $(\frac{+\infty}{+\infty})$, a limes mu je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

S izračunavanjem limesa nizova neodređenih oblika bavit ćemo se u nastavku. Navedimo sada još jedan važan rezultat i alat za računanje limesa niza.

Propozicija 2 Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elementarna funkcija i (a_n) konvergentan niz takav da je $a_n \in D$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} a_n \in D$. Tada je i niz $(f(a_n))$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)\,. \tag{5.2}$$

Iako je ova tvrdnja vrlo intuitivna, dokaz je s druge strane vrlo zahtjevan i nećemo ga provoditi.

Napomena 5.15 U sljedećem poglavlju vidjet ćemo da svojstvo (5.2) karakterizira jednu širu klasu realnih funkcija realne varijable, a to su *neprekinute funkcije*. Prethodna propozicija zapravo je posljedica tvrdnje da su sve elementarne funkcije neprekinute na svojoj domeni. Dokaz te tvrdnje može se pronaći u [2].

■ **Primjer 5.19** Izračunajte limese sljedećih nizova:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}}$, (b) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

Korištenjem Propozicije 2 računamo:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0\,,$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right) = \sin 1\,.$

■

Vježba 5.11 Izračunajte limese sljedećih nizova:

(a) $\lim_{n\to\infty} \log_2\left(1 - \frac{1-n^2}{1+n^2}\right)$, (b) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}-2\sqrt[4]{n}}\right)$.

5.5.1 Neodređeni oblik $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Da bismo izračunali limes u neodređenom obliku $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, dijelimo brojnik i nazivnik s vodećim članom koji se javlja u kvocijentu. U slučaju kvocijenta dvaju polinoma, brojnik i nazivnik dijelimo s najvećom potencijom i dobivamo sljedeći rezultat:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_m(n)}{Q_p(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\ldots+a_1n+a_0}{b_pn^p+b_{p-1}n^{p-1}+\ldots+b_1n+b_0}=\begin{cases}0, & m<p,\\ \frac{a_m}{b_p}, & m=p,\\ +\infty, & m>p \text{ i } \frac{a_m}{b_p}>0,\\ -\infty, & m>p \text{ i } \frac{a_m}{b_p}<0.\end{cases}$$

Primijetimo da članovi nižeg reda u brojniku i nazivniku nemaju nikakav utjecaj na konačan rezultat, stoga smo ih mogli odmah zanemariti u računu. Radi strogog opravdanja ove tvrdnje, uvodimo najprije sljedeću definiciju.

Definicija 5.5.2 Kažemo da su a_n i b_n **neizmjerno velike veličine istog reda** ako je

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C\in\langle 0,+\infty\rangle\,.$$

Dodatno, ako je $C=1$, kažemo da su a_n i b_n **ekvivalentne** neizmjerno velike veličine i tada pišemo

$$a_n\sim b_n \quad \text{kada } n\to\infty\,.$$

■

Napomena 5.16 Relacija $\sim$ iz prethodne definicije je relacija ekvivalencije na skupu svih realnih divergentnih nizova prema $+\infty$.

Vježba 5.12 Pokažite tvrdnju iz prethodne napomene.

Propozicija 3 Neka je $a_n\sim c_n$ kada $n\to\infty$ i (b_n) divergira prema $+\infty$. Ako postoji $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}\,.$$

Analogno, ako je $b_n\sim d_n$ kada $n\to\infty$ i (a_n) divergira prema $+\infty$ te ako postoji $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, onda vrijedi $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{d_n}$.

Dokaz. Neka su (a_n), (b_n) i (c_n) nizovi za koje vrijede pretpostavke propozicije i neka postoji $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\in\langle 0,+\infty\rangle$. Direktnim računom imamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}\cdot\frac{a_n}{b_n}\underbrace{=}_{(*)}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}}_{=1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\,.$$

Jednakost $(*)$ slijedi po Teoremu 5.4.1 c). Analogno se pokaže i druga tvrdnja. ■

Napomena 5.17 Tvrdnja iz prethodne propozicije vrijedi i u slučaju kada je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Tada je izraz prije jednakosti $(*)$ određeni oblik tipa (e) pa je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = +\infty$.

■ **Primjer 5.20** Izračunajte sljedeće limese:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5n+1}{2n^2+4n}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6-1}+1}$.

Rješenje:

(a) Kako je $3n^2+5n+1 \sim 3n^2$ kada $n\to\infty$ te $2n^2+4n \sim 2n^2$ kada $n\to\infty$, korištenjem prethodne propozicije imamo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5n+1}{2n^2+4n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{2n^2} = \dfrac{3}{2}$.

(b) Korištenjem činjenica da je $(\sqrt{n^2+1}+n) \sim 2n$ te $(\sqrt[3]{n^6-1}+1) \sim n^2$ kada $n\to\infty$, dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6-1}+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)^2}{n^2} = 4$.

■

Vježba 5.13 Izračunajte limese nizova:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n+\sqrt{n^3+1}}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-4)^3(n+9)^7(2n+7)^5}{(2n+1)^{10}(n+5)^2(n-8)^3}$.

Vježba 5.14 Izračunajte (ako postoje) limese nizova:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi)\dfrac{n+1}{2n+1}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin n}{n^2+n+1}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n+1}$.

Promotrimo nadalje geometrijski niz (q^n) pri čemu je $q \neq 0$. U ovisnosti o kvocijentu q odredimo konvergenciju tog niza. Bez formalnog dokaza navodimo gotovo očiglednu tvrdnju:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1, \\ +\infty, & q>1, \\ \text{ne postoji}, & q\leq -1, \\ 1, & q=1. \end{cases}$$

■ **Primjer 5.21** Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$.

Rješenje:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n\left(\frac{(-2)^n}{5^n}+1\right)}{5^{n+1}\left(\frac{(-2)^{n+1}}{5^{n+1}}+1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\left(-\frac{2}{5}\right)^n+1}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}+1} = \dfrac{1}{5}$, jer je $\lim_{n\to\infty}(-\frac{2}{5})^n = 0$, zbog $|-\frac{2}{5}| < 1$.

(b) Primijetimo da je n-ti član niza jednak sumi prvih n članova geometrijskog niza s kvocijentom $q = -1/3$. Stoga po formuli za sumu imamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n-1}{-\frac{1}{3}-1} = \frac{3}{4}.$$

■

Naravno, i kod računanja limesa nizova s potencijama možemo koristiti ekvivalentnost neizmjerno velikih veličina, kako vidimo na sljedećem primjeru.

■ **Primjer 5.22** Odredite limes $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+6^n}{2^n+7^n}$.

Zbog činjenice da je $3^n+6^n \sim 6^n$ kada $n\to\infty$, kao i činjenice da je $2^n+7^n \sim 7^n$ kada $n\to\infty$, imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+6^n}{2^n+7^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n}{7^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6}{7}\right)^n = 0$. ■

Vježba 5.15 Odredite (ako postoje) limese:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+4-8+\ldots+(-2)^n}{2^n}$.

5.5.2 Neodređeni oblik $+\infty-(+\infty)$

Promotrimo sada računanje limesa nizova u neodređenom obliku $+\infty-(+\infty)$.

■ **Primjer 5.23** Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n+1}-n$.

Primijetimo da se radi o izrazu u neodređenom obliku tipa $+\infty-(+\infty)$. Limes računamo na sljedeći način:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{1}{2}.$$

Racionalizacijom brojnika smo neodređeni oblik $+\infty-(+\infty)$ sveli na njemu ekvivalentni neodređeni oblik $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ kojem znamo odrediti limes. To će zapravo biti generalno pravilo. ■

Vježba 5.16 Izračunajte limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n^3}-\sqrt{n^3}}$,

b) $\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-n^2})$.

Vježba 5.17 U zavisnosti o realnom parametru a odredite sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1}\right)\cdot n^a$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^a+\sqrt{n^4+1}}$.

5.6 Monotoni nizovi

U prethodnom poglavlju uveli smo pojam monotonosti za realne funkcije realne varijable. Isti koncept sada koristimo za nizove kao realne funkcije $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Radi potpunosti izlaganja, napišimo odgovarajuće definicije.

Definicija 5.6.1 Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) **padajući** niz,

$$\text{ako za sve } n_1,n_2\in\mathbb{N}, \text{ takve da je } n_1<n_2 \text{ vrijedi } a_{n_1}\geq a_{n_2}.$$

Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je **rastući** niz,

$$\text{ako za sve } n_1,n_2\in\mathbb{N}, \text{ takve da je } n_1<n_2 \text{ vrijedi } a_{n_1}\leq a_{n_2}.$$

Niz realnih brojeva (a_n) je **monoton** ako je rastući ili padajući. ■

Napomena 5.18 Ako umjesto nejednakosti $\geq$, odnosno $\leq$ u gornjoj definiciji imamo stroge nejednakosti $>$, odnosno $<$, tada govorimo o strogo padajućem, odnosno strogo rastućem nizu. Takve nizove još nazivamo strogo monotonim nizovima.

■ **Primjer 5.24** Ispitajte monotonost nizova zadanih općim članom:

(a) $a_n=\dfrac{1}{n}$ za sve $n\in\mathbb{N}$,

(b) $a_n=n^2$ za sve $n\in\mathbb{N}$,

(c) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ za sve $n\in\mathbb{N}$,

(d) $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ za sve $n\in\mathbb{N}$.

Diskusija:

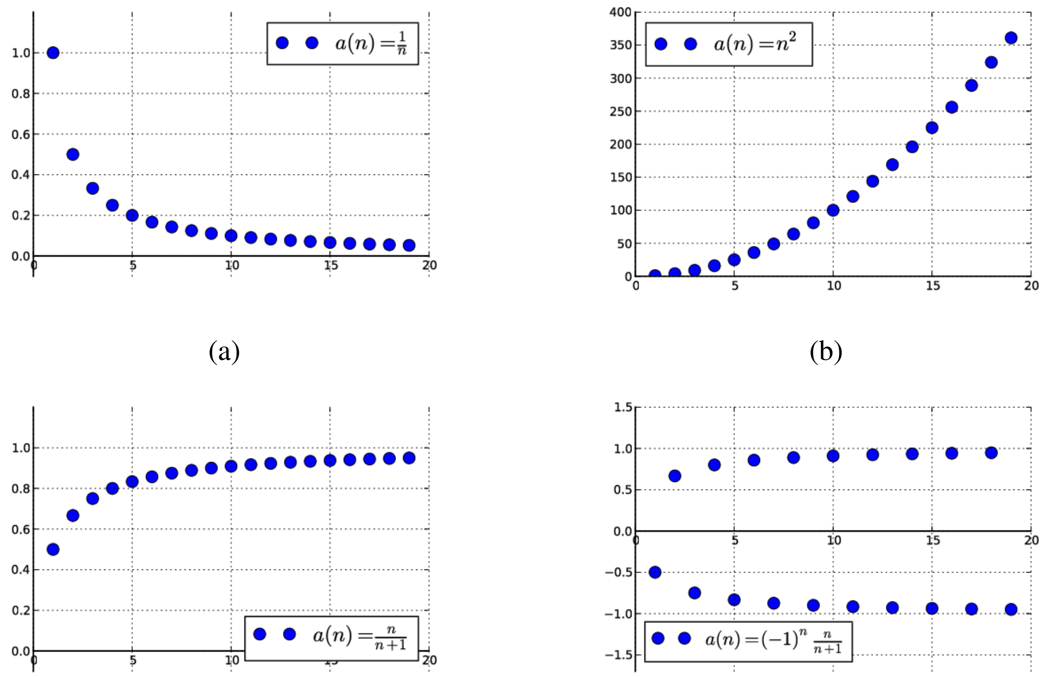
(a) za sve $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ takve da je $n_1<n_2$, očito je $\dfrac{1}{n_1}>\dfrac{1}{n_2}$. Stoga je niz $a_n=\dfrac{1}{n}$ (strogo) padajući, odnosno (strogo) monoton (vidi Sliku 5.11a).

(b) za sve $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ takve da je $n_1<n_2$ vrijedi $n_1^2<n_2^2$, stoga je niz $a_n=n^2$ (strogo) rastući pa je i (strogo) monoton (vidi Sliku 5.11b).

(c) za sve $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ takve da je $n_1<n_2$, direktno provjerimo da vrijedi $\dfrac{n_1}{n_1+1}<\dfrac{n_2}{n_2+1}$, stoga je i taj niz (strogo) rastući (vidi Sliku 5.11c).

(d) vrijednosti niza $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ alterniraju ovisno o parnosti broja n pa taj niz nije niti rastući niti padajući (vidi Sliku 5.11d).

■



(a) (b) (c) (d)

Slika 5.11: Monotonost nizova.

Napomena 5.19 Često je od interesa poznavanje monotonosti niza počevši od nekog člana. Preciznije, reći ćemo da je niz rastući počevši od člana a_{n_0}, *ako postoji* prirodan broj n_0 tako da za sve $n_1,n_2 \in \mathbb{N}$, takve da je $n_0 \leq n_1 < n_2$ vrijedi $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Analogno se definira što znači da je niz padajući počevši od člana a_{n_0}. Primijetimo, ako je niz monoton, onda je on monoton počevši od svakog člana, dok s druge strane postoje nizovi koji su monotoni počevši od nekog člana, a nisu monotoni. Npr. niz $a_n = n^2 2^{-n}$ je padajući počevši od člana a_4 (vidi i niz u Primjeru 5.25).

Nakon što smo uveli definiciju i intuitivno je jasno o kakvim se nizovima radi, postavlja se pitanje: Kako ispitati monotonost danog niza? Dokažimo najprije sljedeću propoziciju.

Propozicija 4 Niz (a_n) je rastući ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$. Niz (a_n) je padajući ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$.

Dokaz. Dokažimo prvu tvrdnju. Ona je u obliku ekvivalencije pa treba pokazati oba smjera.
$\Rightarrow$ Ako je niz (a_n) rastući, onda po definiciji rastućeg niza iz $n < n+1$ slijedi $a_n \leq a_{n+1}$ i to za sve $n \in \mathbb{N}$.
$\Leftarrow$ S druge strane, pretpostavimo da je $a_n \leq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i pokažimo da je tada niz (a_n) rastući. Uzmimo proizvoljne $n_1,n_2 \in \mathbb{N}$ takve da je $n_1 < n_2$. Po pretpostavci tada imamo

$$a_{n_1} \leq a_{n_1+1} \leq \ldots \leq a_{n_2-1} \leq a_{n_2}.$$

Zbog proizvoljnosti $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, zaključujemo da za sve $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takve da je $n_1 < n_2$ vrijedi $a_{n_1} \leq a_{n_2}$ pa je po definiciji niz (a_n) rastući. ■

Vježba 5.18 Dokažite drugu tvrdnju iz prethodne propozicije.

Sada za ispitivanje monotonosti nizova možemo koristiti sljedeće metode:

(R) – *Metoda razlike*: Promatramo razliku

$$a_{n+1} - a_n \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Ako pokažemo da je $a_{n+1} - a_n \geq 0$ za sve $n \geq n_0$, pokazali smo prema prethodnoj propoziciji da je niz rastući počevši od člana a_{n_0}. Analogno, ako se pokaže $a_{n+1} - a_n \leq 0$ za sve $n \geq n_0$, dobili smo da je niz padajući počevši od člana a_{n_0}. Takve tvrdnje obično se dokazuju matematičkom indukcijom.

(K) – *Metoda kvocijenta*: Ako imamo niz sa strogo pozitivnim članovima, možemo promatrati kvocijent

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q(n).$$

Pokažemo li da je $q(n) \geq 1$ za sve $n \geq n_0$, niz (a_n) je rastući počevši od člana a_{n_0}. Ako pak vrijedi $q(n) \leq 1$ za sve $n \geq n_0$ niz je padajući počevši od člana a_{n_0}.

(F) – *Metoda proširenja funkcije*: Promatramo funkciju $\tilde{a} : [1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, kao proširenje funkcije (niza) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dakle, funkcija $\tilde{a}$ zadana je istim pravilom pridruživanja kao i a, ali za sve realne brojeve $x \in [1, +\infty\rangle$. Monotonost niza (a_n) tada iščitavamo iz monotonosti funkcije $\tilde{a}$.

■ **Primjer 5.25** Ispitajte monotonost niza (a_n) zadanog formulom $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Primijetimo, (a_n) je niz s pozitivnim članovima. Stoga računamo kvocijent

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{10^n}{n!}} = \frac{10}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

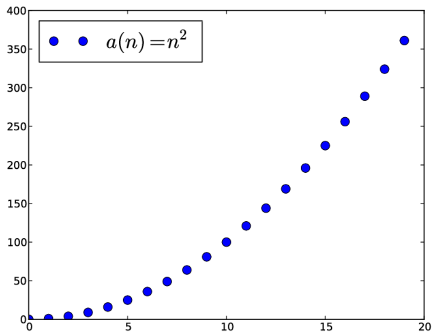
Budući da je $\dfrac{10}{n+1} < 1$, za $n_0 \geq 10$, dobivamo da je niz strogo padajući počevši od člana a_{10}. Primijetimo da niz raste do člana a_9 i imamo $a_9 = a_{10}$. ■

Vježba 5.19 Ispitajte monotonost niza (a_n) zadanog rekurzivnom formulom $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ za sve $1 \leq n \leq 99$ i $a_{n+1} = a_n - 2^{-n}$ za sve $n \geq 100$.

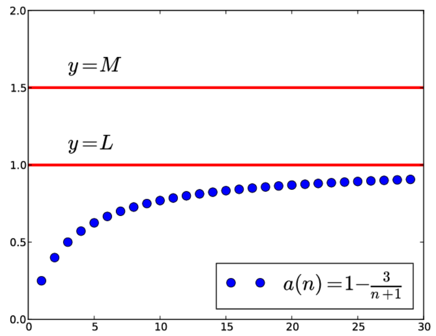
U daljnjem nas zanima pitanje konvergencije monotonih nizova. Započnimo diskusiju s pretpostavkom da nam je zadan rastući niz (a_n). Tada imamo dvije mogućnosti:

I. Ne postoji gornja međa niza (a_n). Tada niz (a_n) nužno divergira prema $+\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (vidi Sliku 5.12a).

II. Postoji gornja međa M niza (a_n). Kako je niz rastući onda postoji i najmanja gornja međa L za koju vrijedi $a_1 \leq L \leq M$. Stoga, ako rastući niz (a_n) ima limes, taj limes nužno je manji ili jednak od L (vidi Sliku 5.12b i dokaz Teorema 5.6.1). Sljedeći teorem daje nam još jaču tvrdnju.



(a) Rastući neomeđen niz.

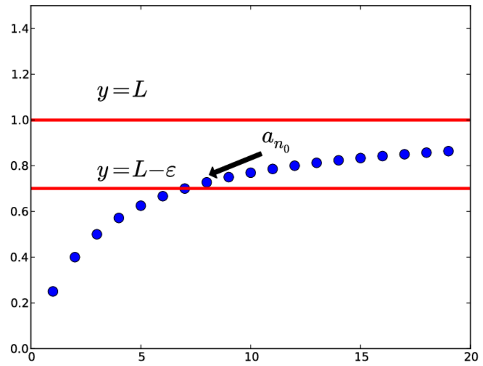


(b) Rastući omeđen niz.

Slika 5.12: Rastući nizovi

Teorem 5.6.1 Ako je niz realnih brojeva (a_n) monoton i omeđen, onda je on konvergentan.

Dokaz. Pretpostavimo da je niz (a_n) omeđen i rastući. Budući da je niz (a_n) omeđen, to postoji najmanja gornja međa niza koju označimo s L. Što to znači? Prije svega, L je gornja međa niza (a_n), dakle $a_n \leq L$ za sve $n \in \mathbb{N}$. A činjenica da je L najmanja gornja međa znači da za svaki $\varepsilon > 0$, broj $L - \varepsilon$ više nije gornja međa niza (a_n), odnosno postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_{n_0} > L - \varepsilon$.



Slika 5.13: Konvergencija rastućeg omeđenog niza.

Kako je niz (a_n) po pretpostavci rastući, tada za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$a_n \geq a_{n_0} > L - \varepsilon\,, \quad \text{odnosno} \quad L - a_n < \varepsilon\,.$$

Kako je L gornja međa niza (a_n), izraz $L - a_n$ je pozitivan za sve $n \in \mathbb{N}$ i ekvivalentan s $|a_n - L| < \varepsilon$. Sažimanjem svega prethodno utvrđenog, zaključujemo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - L| < \varepsilon$. A to upravo znači (po definiciji) da je niz (a_n) konvergentan i da mu je limes jednak najmanjoj gornjoj međi L. Analogno se tvrdnja pokaže da omeđen i padajući niz. ■

Vježba 5.20 Pokažite da omeđen i padajući niz konvergira k najvećoj donjoj međi niza.

Napomena 5.20 Kao što je to uobičajeno za pitanja konvergencije, u Teoremu 5.6.1 dovoljno je pretpostaviti monotonost niza počevši od nekog člana a_{n_0}, gdje je n_0 neki prirodan broj.

Napomena 5.21 Obrat tvrdnje iz Teorema 5.6.1 ne vrijedi, tj. postoje konvergentni nizovi koji nisu monotoni. Npr. jedan takav niz je (a_n) zadan s $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

■ **Primjer 5.26** Niz (a_n) zadan je rekurzivnom formulom

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{n+3}{2n+4} a_n\,, \quad n \geq 1\,.$$

Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i ako je konvergentan odredite mu limes.

Provjerimo najprije je li ovaj niz monoton. Iz rekurzivne definicije vidi se da je (a_n) niz s pozitivnim članovima pa promotrimo kvocijent

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{2n+4}\,.$$

Kako je $\frac{n+3}{2n+4} < 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je niz strogo padajući (strogo monoton). Padajući niz je uvijek omeđen odozgo s a_1, a kako smo već primijetili da se radi o nizu pozitivnih brojeva, onda zaključujemo da imamo i donju među, tj. $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, niz (a_n) je i omeđen. Primjenom Teorema 5.6.1 zaključujemo da je niz (a_n) konvergentan, odnosno da postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da je

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Odredimo sada L koristeći rekurziju $a_{n+1} = \frac{n+3}{2n+4} a_n$. Prelaskom na limes u rekurzivnoj relaciji tada dobivamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n+4} a_n\right), \quad \text{tj.} \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n+4}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \\
L &= \frac{1}{2} \cdot L
\end{aligned}$$

odakle nužno slijedi $L = 0$. U trećoj jednakosti iskoristili smo da je $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, a tada je i $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$.

■

Napomena 5.22 U zadatcima poput prethodnog primjera nužno je pokazati da je niz konvergentan, odnosno da limes L postoji. Pogledajmo niz zadan rekurzivno

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1 - a_n\,, \quad n \geq 1\,.$$

To je niz: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ koji očito nije konvergentan. Međutim, ako bismo bez te provjere računali limes niza iz rekurzije kao u prethodnom primjeru, dobili bismo jednadžbu za limes $L = 1 - L$, odakle bi slijedilo da je limes niza $L = 1/2$, što nema nikakvog smisla, jer zadani niz ne konvergira. Ovaj račun za limes niza je valjan samo onda kad on zaista i postoji.

Često ćemo prilikom dokazivanja monotonosti ili omeđenosti niza trebati koristiti princip matematičke indukcije. Pokažimo nekoliko primjera.

■ **Primjer 5.27** Pokažite da je niz zadan rekurzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n},\ n \geq 1\,,$$

konvergentan te mu odredite limes.

Rješenje. Ispišimo prvih nekoliko članova niza: $1, \sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \ldots$ Iz toga naslućujemo da se radi o rastućem nizu, odnosno da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$. Pokažimo tu tvrdnju matematičkom indukcijom.

(B) Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$, jer $a_1 = 1 \leq \sqrt{2} = a_2$.
(P) Pretpostavimo da tvrdnja $a_n \leq a_{n+1}$ vrijedi *za neki* prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.
(K) Pokažimo, koristeći pretpostavku indukcije, da tvrdnja vrijedi i za $n+1$, odnosno da vrijedi $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. Krenimo od pretpostavke i koristimo između ostalog da je $\sqrt{x}$ rastuća funkcija:

$$a_n \leq a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; 1 + a_n \leq 1 + a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} \leq a_{n+2}\,.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja $a_n \leq a_{n+1}$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Pokažimo sada da je niz (a_n) ograničen. Jasno je iz definicije da su svi članovi niza pozitivni pa je niz ograničen odozdo. Za ograničenost odozgo pokažimo tvrdnju

$$a_n \leq 3\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

koju smo također naslutili promatranjem prvih nekoliko članova niza. I za dokaz ove tvrdnje koristimo matematičku indukciju.

(B) Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$, jer $a_1 = 1 \leq 3$.
(P) Pretpostavimo da tvrdnja $a_n \leq 3$ vrijedi *za neki* prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.
(K) Pokažimo, koristeći pretpostavku indukcije, da tvrdnja vrijedi i za $n+1$, odnosno da vrijedi $a_{n+1} \leq 3$. Krenimo od definicije i uz pretpostavku indukcije opet koristimo da je $\sqrt{x}$ rastuća funkcija:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \underbrace{\leq}_{\text{(P)}} \sqrt{1+3} = 2 \leq 3\,.$$

Po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja. Ovime smo pokazali da je niz (a_n) monoton (rastući) i omeđen pa je prema Teoremu 5.6.1 niz konvergentan. Izračunajmo sada limes niza koristeći rekurziju. Računamo limes s lijeve i desne strane jednakosti u rekurzivnoj formuli:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n}$$

i dobivamo $L = \sqrt{1+L}$. Odavde zaključujemo da je $L \geq 0$, što je u skladu s činjenicom da je (a_n) niz pozitivnih brojeva. Kvadriranjem jednakosti slijedi

$$L^2 - L - 1 = 0\,,$$

odakle dobivamo $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Drugo rješenje otpada, jer je negativan broj, a k tome je i limes niza jedinstven pa ne mogu biti dva rješenja. ■

Napomena 5.23 Primijetimo da smo u prethodnom primjeru iz pretpostavke $a_n \geq a_{n+1}$ za neki $n \in \mathbb{N}$ na potpuno jednak način mogli pokazati $a_{n+1} \geq a_{n+2}$. Međutim, baza indukcije za takvu tvrdnju nije ispunjena. Naime $a_1 \leq a_2$ pa stoga ne možemo po principu matematičke indukcije zaključiti da je niz padajući, naprotiv.

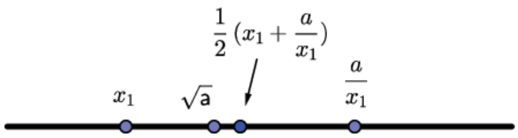
Vježba 5.21 Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n(a_n+1)}{3}, \quad n \geq 1\,.$$

Dokažite da je niz (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

Dodatak

Aproksimacija broja $\sqrt{a}$. Kako biste približno izračunali na primjer $\sqrt{23}$ (bez kalkulatora)? Opišimo postupak kako su stari Babilonci računali korijen pozitivnog realnog broja a.



Slika 5.14: Računanje aproksimacije broja $\sqrt{a}$.

Postupak je rekurzivan:

(i) uzmimo proizvoljan $x_1 > 0$. Primijetimo da se brojevi x_1 i $\frac{a}{x_1}$ uvijek nalaze sa suprotnih strana naspram broja $\sqrt{a}$, tj. ako je $x_1 < \sqrt{a}$, tada je $\sqrt{a} < \frac{a}{x_1}$, a ako je $\sqrt{a} \leq x_1$, tada je $\frac{a}{x_1} \leq \sqrt{a}$.

(ii) za $n \geq 1$ definirajmo $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

Pokažimo da tako konstruirani niz (x_n) konvergira prema $\sqrt{a}$.

Korištenjem aritmetičko-geometrijske nejednakosti[1] za parove brojeva x_n i $\frac{a}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}\,.$$

Dakle, niz je omeđen odozdo. Nadalje, za sve $n \geq 2$, koristeći prethodni rezultat, imamo

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0\,.$$

[1] za sve $a, b \geq 0$ vrijedi $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Dakle, niz (x_n) je padajući počevši od člana x_2 pa je i omeđen odozgo. Primjenom Teorema 5.6.1 zaključujemo da je (x_n) konvergentan. Odredimo mu onda limes korištenjem rekurzivne relacije:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right),$$

odakle slijedi $L = \sqrt{a}$, pri čemu smo opet uzeli smo pozitivno rješenje, jer niz (x_n) sadrži samo pozitivne članove.

Odredimo sada tim postupkom približno $\sqrt{23}$. Znamo da je $5^2 = 25$, a $4^2 = 16$ pa pošto je 25 bliže 23 uzmimo $x_1 = 5$. Po rekurziji (ii) tada redom računamo

x_2	x_3	x_4
4.8	4.79583333333	4.79583152331

Direktnom provjerom možemo se uvjeriti da su u x_4 sve znamenke točne. To nam govori i o brzini konvergencije ove metode. Naravno, brzina konvergencije ovisi i o dobrom izboru početne iteracije x_1.

5.7 Neki važni nizovi i njihovi limesi

Kako bismo efektivno računali računali limese nizova zadanih formulom, istaknimo još nekoliko važnih nizova i odredimo im limese.

Limes niza $a_n = \frac{a^n}{n!}$.

Najprije promotrimo niz (a_n) zadan formulom $a_n = \frac{a^n}{n!}$, gdje je $a > 0$ zadan pozitivan realan broj. Očito se radi o nizu pozitivnih brojeva pa je niz omeđen odozdo. Rekurzivna relacija za taj niz glasi

$$a_{n+1} = \frac{a}{n+1} a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Za dani $a > 0$ postoji prirodan broj $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{a}{m+1} < 1$. Stoga za sve $n \geq m$ imamo $a_{n+1} < a_n$, dakle niz (a_n) je strogo padajući počevši od člana a_m. Odavde zaključujemo da je niz omeđen odozgo pa je i omeđen. Primjenom Teorema 5.6.1 zaključujemo da je niz (a_n) konvergentan. Odredimo mu limes L korištenjem rekurzivne relacije (5.3):

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \cdot L = 0.$$

Time smo pokazali

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{5.4}$$

Rezultat (5.4) kaže nam da faktorijele (kao funkcija $n \mapsto n!$) rastu "brže" od bilo koje eksponencijalne funkcije s bazom $a > 0$.

Limes niza $a_n = \frac{n^p}{a^n}$**.**

Nadalje promatramo niz (a_n) zadan formulom $a_n = \frac{n^p}{a^n}$, gdje su $p \in \mathbb{Q}^+$ (pozitivan racionalan) i $a > 1$ (realan) dani brojevi. Ponovno se radi o nizu pozitivnih brojeva za kojeg imamo rekurzivnu formulu

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^p}{a^{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} \cdot \frac{n^p}{a \cdot a^n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Kako je $a > 1$, tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\left(1+\frac{1}{m}\right)^p < a$. Stoga za sve $n \geq m$ vrijedi $a_{n+1} < a_n$, odnosno niz (a_n) je padajući počevši od člana a_m. Kao i u prethodnom primjeru, zaključujemo da se radi o omeđenom padajućem nizu pa korištenjem Teorema 5.6.1 slijedi da je niz konvergentan. Korištenjem rekurzivne formule dobivamo da je limes $L = 0$, odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0\,, \quad p \in \mathbb{Q}^+\,,\ a > 1\,. \tag{5.5}$$

Prethodnim rezultatom dolazimo do spoznaje da svaki polinom (uzmimo $p \in \mathbb{N}$ proizvoljan stupanj polinoma) raste "sporije" od bilo koje eksponencijalne funkcije s bazom $a > 1$.

Limes niza $a_n = \sqrt[n]{n}$**.**
Pokažimo da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,. \tag{5.6}$$

Uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan i po binomnom teoremu računamo

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2\,.$$

Uzmimo sada prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. Tada za sve $n \geq n_0$ slijedi

$$(1+\varepsilon)^n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \geq \frac{n(n_0-1)}{2}\varepsilon^2 > n\,.$$

Dakle, za sve $n \geq n_0$ imamo nejednakosti $1 < n < (1+\varepsilon)^n$, odakle zbog rasta funkcije $\sqrt[n]{x}$ na $\langle 0, +\infty\rangle$ slijedi

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon\,.$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$, gornji postupak možemo ponoviti za svaki $\varepsilon > 0$, a time smo po definiciji pokazali da je niz $(\sqrt[n]{n})$ konvergentan i limes mu je jednak 1.

Limes niza $a_n = \sqrt[n]{a}$**.**
Pokažimo da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,, \quad a > 0\,. \tag{5.7}$$

Pretpostavimo da je $a > 1$, tada postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $1 < a < n$ za sve $n \geq n_0$. Zbog rasta funkcije $\sqrt[n]{x}$ na $\langle 0, +\infty\rangle$ slijedi $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ za sve $n \geq n_0$. Korištenjem rezultata (5.6) i primjenom Teorema o sendviču slijedi tvrdnja. Ako je $0 < a < 1$, onda je $\frac{1}{a} > 1$ pa primjenom dobivenog rezultata imamo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$.

Limes niza $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Pokažimo da je niz $a_n = \sqrt[n]{n!}$ divergentan prema $+\infty$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty\,. \tag{5.8}$$

Iz rezultata (5.4) zaključujemo da za svaki $a > 0$ niz $\frac{n!}{a^n}$ divergira prema $+\infty$. Drugim riječima, za svaki $M \geq 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{n!}{a^n} \geq M$, odnosno $n! \geq M a^n$. Primjenom n-tog korijena slijedi $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{M} a \geq a$ za sve $n \geq n_0$, jer je $\sqrt[n]{M} \geq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Zbog proizvoljnosti od $a > 0$ zaključujemo da niz divergira prema $+\infty$.

Limes niza $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Pokažimo najprije da je niz (a_n) zadan formulom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergentan. Primjenom binomne formule slijedi

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

Pokažimo nadalje da je $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Koristimo matematičku indukciju.

(B) Za $n = 1$ imamo $1 + 1 < 3$ i tvrdnja vrijedi.

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

(K) Računamo $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3\cdot 4\cdot (n+1)}\right) < 2 + \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1\right) < 3.$

Time smo pokazali da je (a_n) omeđen odozgo, a kako je to niz s pozitivnim članovima onda je omeđen i odozdo.

Sljedeće pokažimo da je (a_n) rastući. Ponovnim raspisom binomne formule dobivamo

$$a_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)\right) + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > a_n\,,$$

jer je $1 - \frac{m}{n+1} \geq 1 - \frac{m}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq m \leq n$. Po Teoremu 5.6.1, niz (a_n) je konvergentan, odnosno ima limes. Taj limes jednak je broju $e \approx 2.718281828\ldots$ (Eulerov broj, prirodna baza eksponencijalne funkcije), tj. vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,. \tag{5.9}$$

Dokaz tvrdnje da je limes u (5.9) upravo jednak broju e može se pronaći u [2].

Napomena 5.24 Formula (5.9) vrijedi i ukoliko n zamijenimo s $-n$, dakle

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e\,.$$

Općenito, ako je (b_n) niz realnih brojeva koji divergira prema $+\infty$ ili prema $-\infty$, tada je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e\,.$$

Limes niza $a_n^{b_n}$.
Bez dokaza navodimo sljedeću tvrdnju: Neka su (a_n) konvergentan niz pozitivnih brojeva i (b_n) konvergentan niz realnih brojeva, čiji su limesi različiti od 0, tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)^{\lim_{n\to\infty} b_n}\,.$$

Riješeni primjeri.

■ **Primjer 5.28** Koristeći prethodne rezultate računamo limese sljedećih nizova:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{20}+2^n+3}{n^{10}+3^n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{20}}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{n^{10}}{3^n}+1+\frac{2}{3^n}} = 0,$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n!+1}{5^n+2n!+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n!}+1+\frac{1}{n!}}{\frac{5^n}{n!}+2+\frac{2}{n!}} = \frac{1}{2},$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}} = 2,$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2} = \left[\text{određeni oblik } \left(\tfrac{1}{2}\right)^{+\infty}\right] = 0,$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \left[\text{neodređeni oblik } 1^{+\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2} = e^{1/2},$

(f) Odredite limes $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n.$

I. način:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = \left[\text{neodređeni oblik } 1^{+\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{-1}{3}} = e^{-1/3}.$$

II. način:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n &= [\text{ neodređeni oblik } 1^{+\infty}] = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^{-(3n+1)}\right)^{\frac{n}{-(3n+1)}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-(3n+1)}} = e^{-1/3}.
\end{aligned}
$$

■

Vježba 5.22 Izračunajte limes $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$.

5.8 Zadatci za vježbu

Koje od sljedećih tvrdnji su točne, a koje netočne? Točne tvrdnje obrazložite, a netočne opovrgnite protuprimjerom.

1. Konvergentan niz je omeđen.
2. Omeđen niz je konvergentan.
3. Konvergentan niz je monoton.
4. Monoton niz je konvergentan.
5. Omeđen i rastući niz je konvergentan.

1. Definirajte omeđen niz. Navedite primjer omeđenog niza. Je li niz (a_n) zadan s $a_n = \dfrac{5n-2}{n+7}$ omeđen?
2. Definirajte pojam gomilišta niza. Navedite po jedan primjer nizova s jednim, dva i tri gomilišta.
3. Definirajte konvergentan niz i navedite primjer jednog konvergentnog niza. Navedite primjer jednog divergentnog niza.
4. Zadan je niz (a_n) s $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$. Ako uzmemo $\varepsilon = 0.09$, koliki n_0 moramo uzeti tako da svi članovi niza za $n \geq n_0$ budu u intervalu $\langle -0.09, 0.09\rangle$. Ako uzememo ε proizvoljan, odredite n_0 tako da svi članovi niza za $n \geq n_0$ budu u intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$. Što je limes tog niza?
5. Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi realnih brojeva. Odredite istinitost svake od sljedećih tvrdnji. Ako je tvrdnja istinita, dokažite ju, a u suprotnom ju opovrgnite protuprimjerom.
   (T1) Vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
   (T2) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 1$.
   (T3) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 1$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

6. Iskažite teorem o sendviču. Koristeći navedeni teorem odredite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^6)}{n^2+1}.$$

7. Navedite primjer neomeđenog niza koji ima točno jedno realno gomilište.

8. Izračunajte limese:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[4]{n}+1}$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \dfrac{(n-1)^5}{(n+1)^4}\right)$,
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n-1}+1}$,
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}$,
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n+4}$.

9. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ izračunajte:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n^a+n^3+n^2+n+1}-n^2}$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 - \dfrac{(n+a)^4}{(n+3)^2}\right)$.

10. Navedite primjer divergentnog niza (a_n), takvog da je niz (b_n) definiran s $b_n = a_n^2$ konvergentan.

11. Definirajte monoton niz. Za niz zadan rekurzivno
$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{3n+1} a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
pokažite da je monoton.

12. Neka je niz (a_n) zadan rekurzivno s
$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3}{5-a_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$
Dokažite da je niz konvergentan i odredite mu limes.

13. Neka je niz (a_n) zadan rekurzivno s
$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n+3}, \; n \in \mathbb{N}.$$
Dokažite da je niz konvergentan i odredite mu limes.

14. Što znači da su neizmjerno velike veličine ekvivalentne? Ako su (a_n) i (c_n) nizovi realnih brojeva takvi da je $a_n \sim c_n$ i (b_n) konvergentan niz pozitivnih brojeva, dokažite da tada vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} (c_n \cdot b_n).$$

Rješenja zadataka

1. Niz (a_n) je konvergentan pa je i omeđen.
2. Niz s tri gomilišta: $-1,0,1,-1,0,1,-1,0,1,-1,0,1,\ldots$
3. Primjer divergentnog niza: $-1,0,1,-1,0,1,-1,0,1,-1,0,1,\ldots$
4. Za $\varepsilon = 0.09$ možemo uzeti $n_0 = 4$, za proizvoljan $\varepsilon > 0$ možemo uzeti $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\varepsilon^{-1}} \right\rfloor + 1$.
5. (T1) je istina (Teorem 5.4.1); (T2) nije istina (protuprimjer $a_n = \frac{-1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$); (T3) istina
6. 0
7. npr. niz: $1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6,0,7,0,8,0,\ldots$
8. (a) $+\infty$
   (b) 9
   (c) 4
   (d) $\frac{1}{2}$
   (e) e^{-1}
9. (a) Za $a \neq 4$, limes je 0, za $a = 4$, limes je 2.
   (b) Za $a < \frac{3}{2}$ limes je $+\infty$, za $a = \frac{3}{2}$, limes je $-\frac{9}{2}$, za $a > \frac{3}{2}$, limes je $-\infty$.
10. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
11. niz je padajući. koristite matematičku idukciju.
12. niz je padajući i omeđen s $0 \leq a_n \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pokažite to indukcijom. $L = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$.
13. niz je rastući i omeđen odozgo s 3 (pokažite to matematičkom indukcijom), $L = 2\sqrt{2}$.
14. Korištenjem ideje kao u Propoziciji 3 imamo

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{b_n}} = \lim_{n\to\infty} (c_n \cdot b_n)\,.$$

5.9 Literatura

[1] A. Aglić Aljinović, I. Brnetić, V. Ćepulić, N. Elezović, Lj. Marangunić, M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović. Matematika 1. Element, Zagreb, 2013.

[2] B. Guljaš. Matematička analiza I & II - skripta s predavanja. Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, 2015.

[3] S. Kurepa. Matematička analiza 1. Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[4] S. Kurepa. Matematička analiza 2. Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[5] B. Pavković, D. Veljan. Elementarna matematika 1. Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.

[6] B. Pavković, D. Veljan. Elementarna matematika 2. Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.