Linearna algebra - 10. auditorne vježbe

1. Neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ funkcija zadana formulom

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3,\ 2x_1 - x_3,\ x_1 - 4x_2 + 2x_3,\ 3x_1 - x_2).$$

Dokažite da je A linearni operator, pronađite $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $d(A)$, $r(A)$ te po jednu bazu za $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{Im} A$.

2. Odredite matricu operatora $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y,\ x - y,\ x)$, u paru kanonskih baza.

3. Odredite matricu operatora $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2$ zadanog s

$$S(x, y, z) = \begin{bmatrix} x - y & y - z \\ z - x & x + y + z \end{bmatrix}$$

u paru kanonskih baza.

4. Linearni operator $A\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ preslikava kanonsku bazu $\{t^3,\ t^2,\ t,\ 1\}$ u skup $\{t^2 + t + 1,\ t^2 + 3t + 5,\ -2t^2 - 4t - 6,\ -2t^2 + 2\}$.

(a) Odredite matricu od A u paru kanonskih baza.

(b) Odredite rang i defekt od A.

5. Preslikavanje $P\colon \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ je zadano formulom

$$P(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top).$$

(a) Dokažite da je P linearan operator.

(b) Odredite jezgru i defekt od P.

(c) Odredite sliku i rang od P.