Linearna algebra - 1. auditorne vježbe

1. U ravnini je zadan paralelogram $ABCD$, pri čemu je $A(0,0)$, $B(2,1)$ i $C(1,3)$.

   (a) Odredite koordinate vrha D.

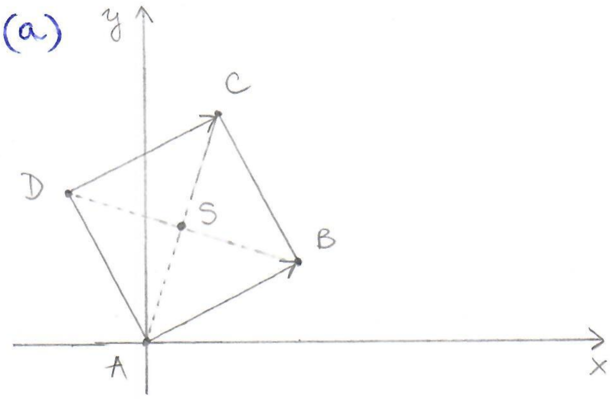
   (b) Odredite opseg tog paralelograma.

   (c) Odredite koordinate sjecišta S dijagonala tog paralelograma.

   (d) Odredite jednadžbu pravca BD.

   (e) Odredite koordinate točke dobivene zrcaljenjem vrha A s obzirom na pravac BD.

(a)



Neka je $D(x_D, y_D)$. Budući da je $ABCD$ paralelogram, mora biti $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} = (1-x_D)\vec{\imath} + (3-y_D)\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x_D = 2 \Rightarrow x_D = -1 \\ 3-y_D = 1 \Rightarrow y_D = 2 \end{cases}$$

Dakle, $D = (-1, 2)$.

(b) $$o = 2(|AB| + |BC|)$$

$$= 2\left(\sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(1-2)^2 + (3-1)^2}\right) = 4\sqrt{5}$$

(c) Dijagonale paralelograma se raspolavljaju pa S možemo odrediti kao polovište dužine $\overline{AC}$:

$$S = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

(d) Određujemo jednadžbu pravca kroz dvije točke:

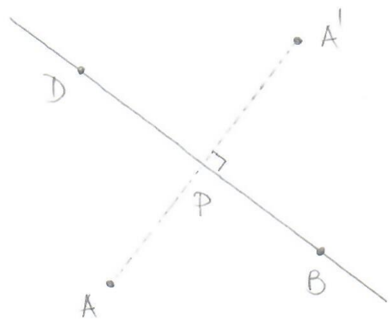
$$y - y_B = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \cdot (x - x_B)$$

$$y - 1 = \frac{2-1}{-1-2}(x-2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x-2)$$

$$BD \ldots \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

(e)



Traženu točku A' određujemo u tri koraka:

1° odredimo jednadžbu okomice iz točke A na pravac BD

2° odredimo sjecište dobivene okomice i pravca BD (označimo tu točku sa P)

3° točka P je polovište dužine $\overline{AA'}$ (iz čega možemo odrediti koordinate od A')

1° Zbog okomitosti slijedi da umnožak koeficijenata smjera okomice k i pravca BD mora biti jednak -1

$$k \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad k = 3.$$

Sada tražimo jednadžbu pravca kroz točku A i s koeficijentom smjera 3:

$$y - y_A = k(x - x_A)$$

$$\Rightarrow \quad y = 3x$$

2° Točku P dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = 3x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = 3x$$

$$-x + 5 = 9x$$

$$10x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{3}{2}$$

Dakle, $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

3° Ako je $A'(x_{A'}, y_{A'})$, onda

$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_P \quad \Rightarrow \quad x_{A'} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$\frac{y_A + y_{A'}}{2} = y_P \quad \Rightarrow \quad y_{A'} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3,$$

tj. tražena točka je $A'(1, 3)$.

<u>Nap.</u> Uočimo da iz ovog računa slijedi da je ABCD kvadrat (zašto?).

2. U ravnini je zadan pravac p jednadžbom $4x + 3y - 5 = 0$.

(a) Napišite eksplicitnu jednadžbu od p.

(b) Izračunajte površinu trokuta koji pravac p zatvara s koordinatnim osima.

(c) Odredite jednadžbu pravca q koji je paralelan sa p, a prolazi točkom $(1, -1)$.

(d) Odredite udaljenost pravaca p i q.

(e) Neka je A proizvoljna točka na pravcu p, a B proizvoljna točka na pravcu q. Dokažite da polovište dužine $\overline{AB}$ uvijek leži na istom pravcu (neovisno o izboru točaka A i B) te odredite jednadžbu tog pravca. Potkrijepite dokaz odgovarajućom slikom.

(a) $4x + 3y - 5 = 0$

$3y = -4x + 5$

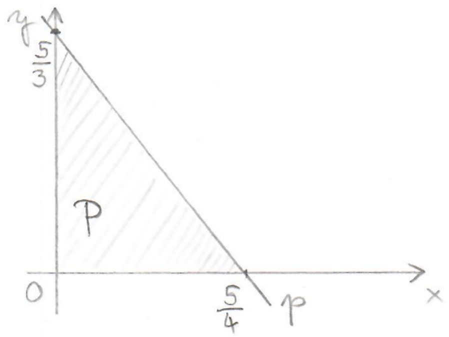
$p \ldots\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

(b) Odredimo tzv. SEGMENTNU jednadžbu od p:

$$4x + 3y = 5 \quad \Big| : 5$$

$$\frac{x}{\frac{5}{4}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$$

Iz ove jednadžbe iščitavamo da pravac p siječe koordinatne osi u točkama $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ i $\left(0, \frac{5}{3}\right)$.



Zato je tražena površina:

$$P = \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{3}}{2} = \frac{25}{24}.$$

(c) Zbog paralelnosti za koeficijent smjera od q vrijedi

$$k_q = k_p = -\frac{4}{3}$$

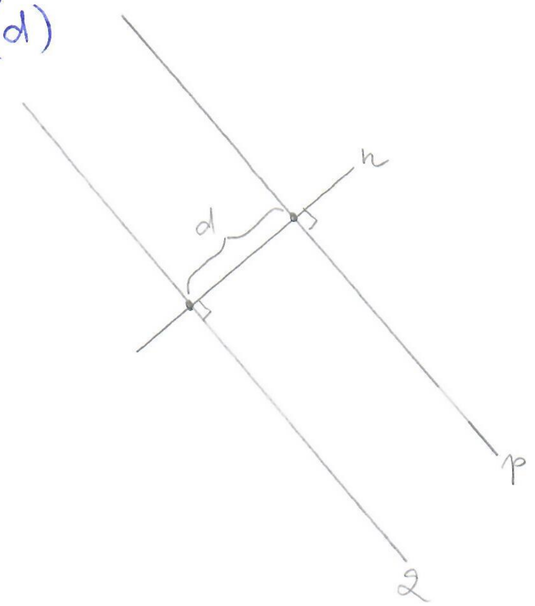
pa je jednadžba od q

$$y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 1)$$

$$y + 1 = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$q \ldots\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

(d)



Traženu udaljenost d računamo u tri koraka:

1° odredimo jednadžbu (bilo kojeg) pravca n okomitog na p i q - najjednostavnije je uzeti onaj koji prolazi ishodištem i čija je jednadžba

$$n \ldots \quad y = \frac{3}{4}x$$

2° odredimo koordinate sjecišta pravca n s pravcima p i q:

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\frac{25}{12}x = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{5}, \ y = \frac{3}{5}$$

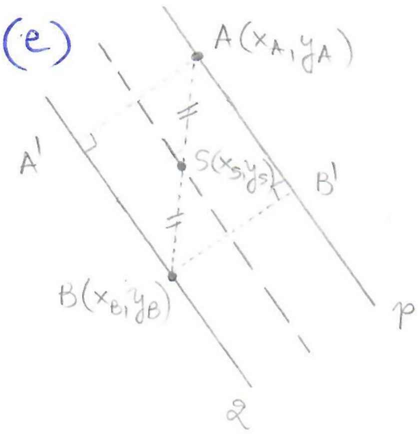
$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\frac{25}{12}x = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{25}, \ y = \frac{3}{25}$$

3° udaljenost pravaca p i q jednaka je udaljenosti dobivenih sjecišta:

$$d = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{25}\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{25}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

(e)



Geometrijski, S je sjecište dijagonala pravokutnika $AA'BB'$ pa mora ležati na njegovoj osi simetrije.

Uz oznake kao na slici imamo

$$A \in p \Rightarrow y_A = -\frac{4}{3}x_A + \frac{5}{3},$$

$$B \in q \Rightarrow y_B = -\frac{4}{3}x_B + \frac{1}{3}.$$

Budući da je S polovište dužine $\overline{AB}$, vrijedi

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2},$$

$$y_S = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}x_A + \frac{5}{3} - \frac{4}{3}x_B + \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(x_A + x_B)}_{= x_S} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}x_S + 1$$

Dakle, točka S će uvijek ležati na pravcu $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

3. U ravnini su zadane točke $A(1,4)$ i $B(-3,2)$.

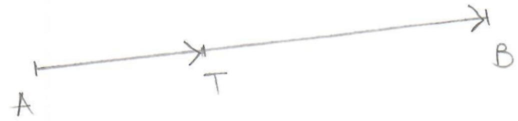
(a) Odredite koordinate točke T koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru $3:5$.

(b) Odredite kosinus kuta $\angle AOB$, gdje je O ishodište koordinatnog sustava.

(c) Odredite i skicirajte u ravnini skup svih točaka C takvih da je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C.

(d) Odredite i skicirajte u ravnini skup svih točaka C takvih da je ABC jednakostraničan trokut.

(a)



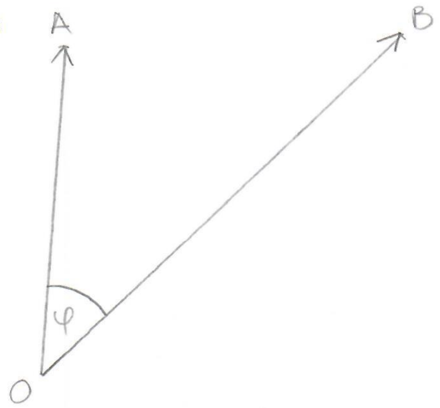
Tražimo točku $T(x_T, y_T)$ takvu da

$$\overrightarrow{AT} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$(x_T-1)\vec{i} + (y_T-4)\vec{j} = \frac{3}{8}(-4\vec{i}-2\vec{j})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_T - 1 = -\frac{3}{2} & \Rightarrow x_T = -\frac{1}{2} \\ y_T - 4 = -\frac{3}{4} & \Rightarrow y_T = \frac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow T\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$$

(b)



$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|} = \frac{(\vec{i}+4\vec{j})\cdot(-3\vec{i}+2\vec{j})}{\sqrt{1^2+4^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2}}$$

$$= \frac{1\cdot(-3)+4\cdot 2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{221}}$$

(c) Tražimo skup svih točaka $C(x,y)$ takvih da $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$, tj.

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$$

$$((1-x)\vec{i}+(4-y)\vec{j})\cdot((-3-x)\vec{i}+(2-y)\vec{j}) = 0$$

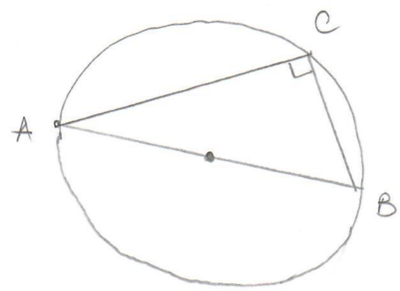
$$(1-x)(-3-x)+(4-y)(2-y) = 0$$

$$-3+2x+x^2+8-6y+y^2 = 0$$

$$(x^2+2x)+(y^2-6y) = -5$$

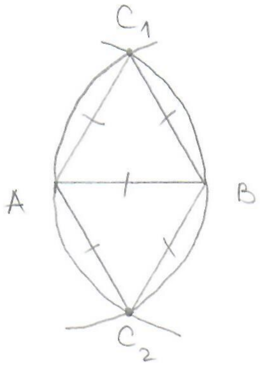
$$(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9) = -5+1+9$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2 = 5$$



$\hookrightarrow$ kružnica sa središtem $(-1,3)$ radijusa $\sqrt{5}$

(d)



Tražene točke ćemo odrediti kao presjek kružnica sa središtima u A i B radijusa $|AB| = \sqrt{(1+3)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-4)^2 = 20 \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 20 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2-2x+1) + (y^2-8y+16) = 20 \\ (x^2+6x+9) + (y^2-4y+4) = 20 \end{array} \right\} -$$

$$\Rightarrow -8x - 8 - 4y + 12 = 0 \qquad |:(-4)$$

$$2x + 2 + y - 3 = 0$$

$$y = 1 - 2x$$

Uvrstimo ovo u npr. prvu jednadžbu sustava:

$$(x-1)^2 + (1-2x-4)^2 = 20$$

$$(x-1)^2 + (2x+3)^2 = 20$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 = 20$$

$$5x^2 + 10x - 10 = 0 \qquad |:5$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1-\sqrt{3} \qquad x_2 = -1+\sqrt{3}$$

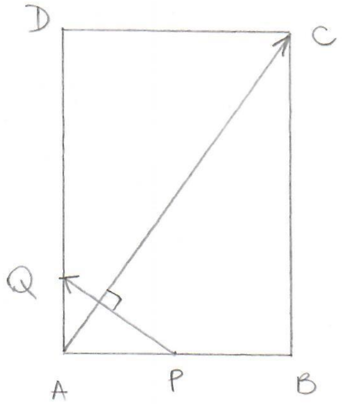
$$y_1 = 3+2\sqrt{3} \qquad y_2 = 3-2\sqrt{3}$$

Dakle, tražene točke su $C_1(-1-\sqrt{3},\ 3+2\sqrt{3})$ i $C_2(-1+\sqrt{3},\ 3-2\sqrt{3})$.

$\boxed{\text{DZ}}$ Označimo sa P polovište dužine $\overline{AB}$. Riješite ovaj podzadatak na način da tražene točke dobijete kao presjek simetrale dužine $\overline{AB}$ (pravca kroz P okomitog na pravac AB) i kružnice sa središtem u P odgovarajućeg radijusa (koliko treba iznositi radijus?).

Možete li smisliti još neki način na koji se može riješiti ovaj podzadatak?

4. U pravokutniku $ABCD$ zadana je točka Q na stranici $\overline{AD}$ takva da je $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Neka je P polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je vektor $\overrightarrow{PQ}$ okomit na vektor $\overrightarrow{AC}$, odredite kut φ između vektora $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{AD}$.



Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ te $a = |\vec{a}|$ i $b = |\vec{b}|$.

Tada je

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}.$$

Prema uvjetu zadatka

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\vec{a}^{\,2} - \frac{1}{2}\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} + \frac{1}{4}\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}_{=0} + \frac{1}{4}\vec{b}^{\,2} = 0$$

$$(\vec{a} \perp \vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{a}^{\,2} = \frac{1}{2}\vec{b}^{\,2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}b^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}b$$

Nap. Vrijedi

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$$

Nadalje,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \overrightarrow{PQ}^{\,2} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) = \frac{1}{4}\vec{a}^{\,2} - \frac{1}{8}\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} - \frac{1}{8}\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}_{=0} + \frac{1}{16}\vec{b}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}b^2 = \frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{16}b^2 = \frac{3}{16}b^2$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{3}}{4}b$$

Zato slijedi

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{\frac{\sqrt{3}}{4}b\cdot b} = \frac{-\frac{1}{2}\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}^{=0} + \frac{1}{4}\vec{b}^{\,2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}b^2} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{b^2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cancel{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$