

Operacijska istraživanja

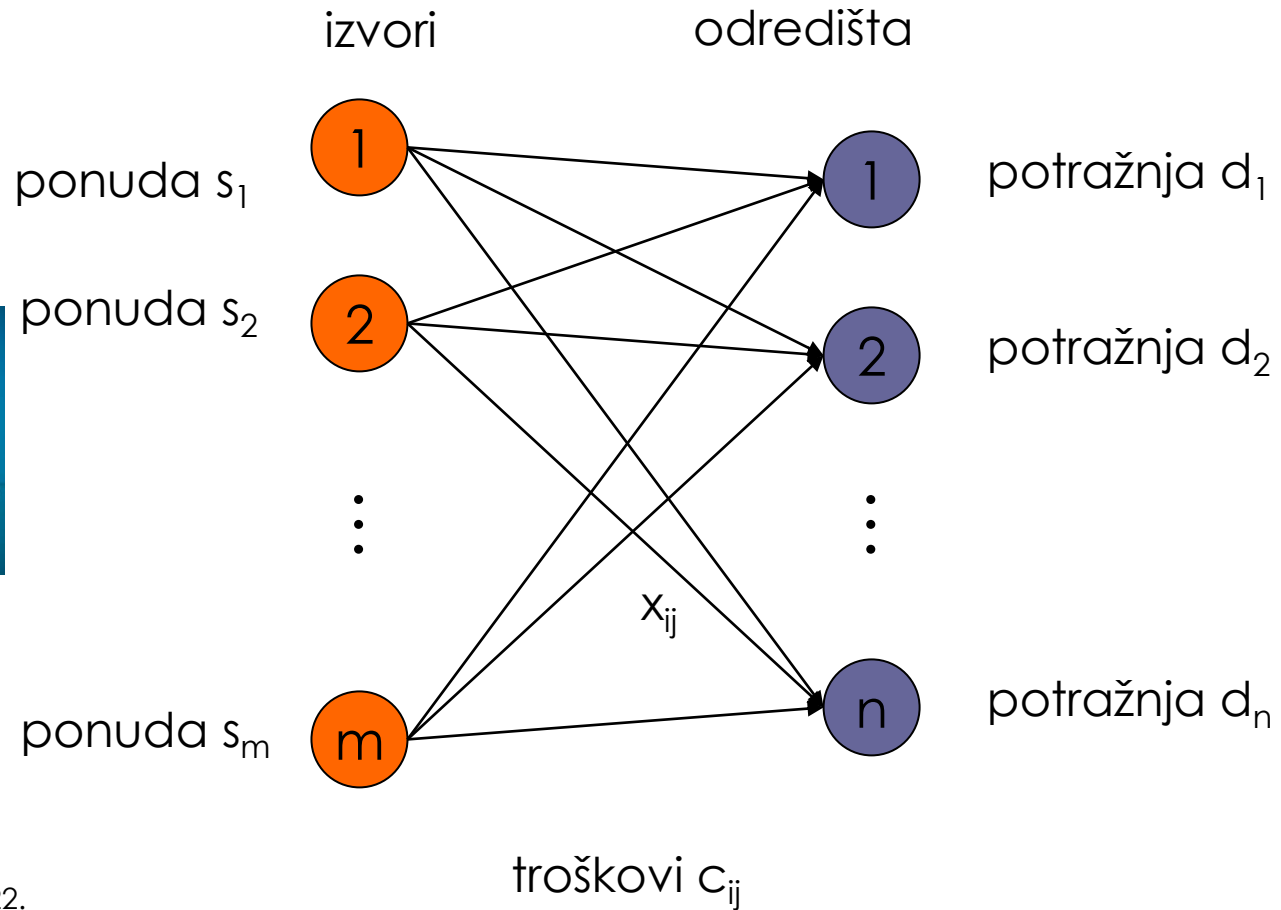
12. predavanje: Transportni problem

Sažetak predavanja

- Transportni problem
- Primjenjive obrađene metode
- Specijalizirana metoda (MODI - transportni simpleks)
 - Inicijalizacija - početno bazično izvedivo rješenje
 - Iteriranje do optimuma

- Knjiga:str. 137-143

Mrežni prikaz transportnog problema



Definicija transportnog problema

- Problem opskrbe **n** odredišta sa **m** izvora:
 - **c_{ij}** fiksni jedinični transportni troškovi
 - **s_i** raspoložive količine na izvorima,
 - **d_j** zadana potražnja na odredištima.
- Plan sa minimalnim transportnim troškovima?
- **x_{ij}** - količina sa izvora **i** na odredište **j**

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Definicija transportnog problema

	odredišta						
		1	...	j	...	n	ponuda
izvori	1	c_{11}		c_{1j}		c_{1n}	s_1
		...					
	i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	s_i
		...					
	m	c_{m1}					s_m
		d_1	...	d_j	...	d_n	
	potražnja						

Izvediva rješenja

- Transportni problem ima izvediva rješenja **ako i samo ako** vrijedi:

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

- Inače, dodati **umjetni** izvor ili odredište!
- Transportni problemi su **unimodularni**, pa vrijedi svojstvo cjelobrojnog rješenja - kadgod s_i i d_j imaju cjelobrojne vrijednosti, svako bazično rješenje je cjelobrojno.

Obradene metode rješavanja

- Problem se zapiše kao LP i riješi simpleksom!
- Tri vrste problema:

- **Zatvoreni (ponuda=potražnja)**

- $\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$
- $\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, j = 1 \dots m - 1$
- $\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \forall i$
- $x_{ij} \geq 0, \forall i \forall j$

Jedno je ograničenje jednakosti linearno zavisno o ostalima pa se proizvoljno odabrano izostavlja

Otvoreni I (ponuda > potražnja)

- $\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$
- $\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \forall j$
- $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, \forall i$
- $x_{ij} \geq 0, \forall i \forall j$

Otvoreni II (ponuda < potražnja)

- $\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$
- $\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d_j, \forall j$
- $\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq s_i, \forall i$
- $x_{ij} \geq 0, \forall i \forall j$

„Ono” manje mora biti zadovoljeno

Operacijska istraživanja
7.a) predavanje: Transportni problem

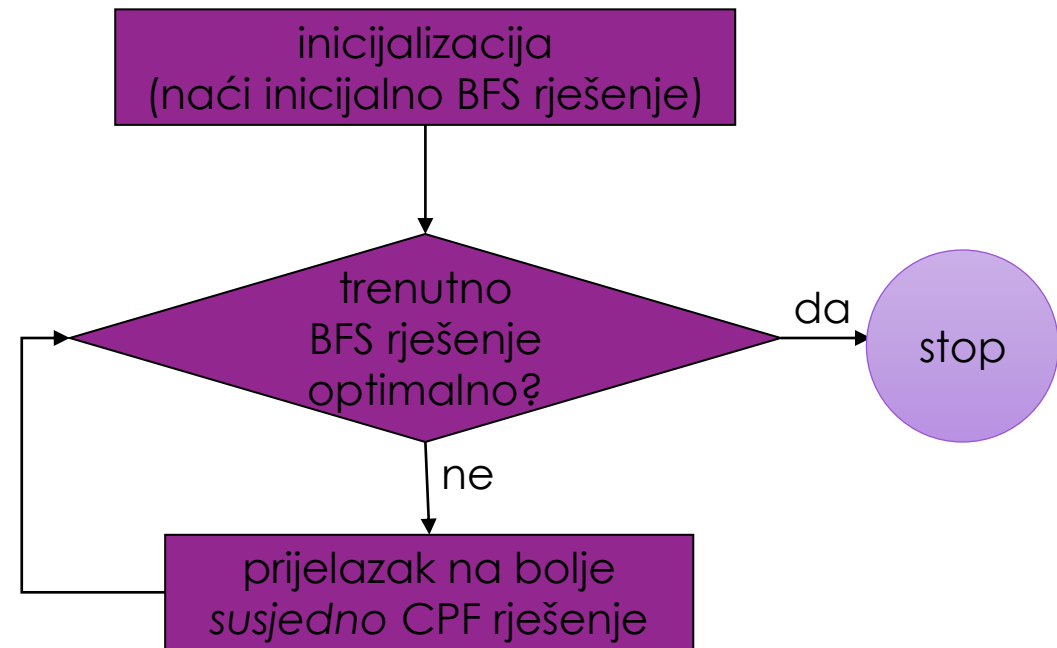
Specijalizirana metoda

Transportni simpleks/MODI

10. siječnja 2022.

Transportna simpleksna metoda

- posebna struktura transportnog linearnog problema => specifične iteracije simpleksne metode
- U zatvorenom problemu
 - **$m+n-1$** bazičnih varijabli (toliko ima ograničenja jednakosti)



Transportna simpleksna tablica

izvor	odredište				ponuda	u_i
	1	2	...	n		
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1	
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2	
...	
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m	
potražnja	d_1	d_2	...	d_n	$Z =$	
v_j						

Inicijalizacija

- Transportni simpleks – prvo pronaći inicijalno bazično izvedivo rješenje (BFS)
- Rješenje je BFS ako su zadovoljeni:
 - ograničenja redaka i stupaca (ponude i potražnje),
 - zahtjev nenegativnosti (tokovi dobara),
 - **neovisne alokacije**
 - Bazične varijable ne formiraju petlju
- Najčešće metode nalaženja inicijalnog BFS (**heuristike**):
 - metoda sjeverozapadnog kuta (engl. NorthWest corner rule)
 - metoda minimalnog troška (engl. minimum cost method)
 - Vogelova metoda

Primjer petlje: oduzimanje jedinice

izvor	odredište				ponuda
	N	S	E	W	
A	4	6	8	8	40
	10(-1)			30(+1)	
B	6	8	6	7	60
			50	10	
C	5	7	6	8	50
	10(+1)	30		10(-1)	
potražnja	20	30	50	50	

$$-1 \cdot 4 + 1 \cdot 5$$

$$-1 \cdot 8 + 1 \cdot 8$$

$$= 1$$

Primjer petlje: dodavanje jedinice

izvor	odredište				ponuda
	N	S	E	W	
A	4	6	8	8	40
	10(+1)			30(-1)	
B	6	8	6	7	60
			50	10	
C	5	7	6	8	50
	10(-1)	30		10(+1)	
potražnja	20	30	50	50	

$$\begin{aligned}
 &1 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \\
 &+ 1 \cdot 8 - 1 \cdot 8 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Eliminacija petlje

izvor	odredište				ponuda
	N	S	E	W	
A	4	6	8	8	40
	20			20	
B	6	8	6	7	60
			50	10	
C	5	7	6	8	50
		30		20	
potražnja	20	30	50	50	

Primjer: isporuka cjepiva u distribucijske centre

- raspoloživa količina 3 vrste cjepiva,
 - A (AstraZeneca), raspoloživa količina 200k
 - B (Pfizer), raspoloživa količina 350k
 - C (Oxford), raspoloživa količina 150k
- isporučiti u 4 distribucijska centra,
 - N, potražnja 100k
 - S, potražnja 140k
 - E, potražnja 300k
 - W, potražnja 250k
- ukupna potražnja vs. ukupna raspoloživa količina

Raspoložive količine u odnosu na potražnju

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
B	14	13	19	15	350	
C	9	20	23	10	150	
dodana	0	0	0	0	90	
potražnja	100	140	300	250		
						$Z =$
						v_j

Operacijska istraživanja
7.a) predavanje: Transportni problem

MODI – init

(3 heuristike)

10. siječnja 2022.

1. Inicijalizacija: Metoda SZ kuta (engl. NW corner)

1. Počne se od x_{11} , neka je $x_{11} = \min \{s_1, d_1\}$
2. Ponavljaj dok se ne dođe do donjeg desnog kuta:
 1. x_{ij} zadnja izabrana bazična varijabla
 2. ako trenutni izvor nije iscrpljen do kraja, izabrati $x_{i(j+1)}$
 - Sljedeće odredište nad istim izvorom
 3. Inače, ako trenutno odredište nije iscrpljeno do kraja, odabrati $x_{(i+1)j}$
 - Sljedeći izvor nad istim odredištem
 4. Inače – degeneracija (kasnije obrađeno)
 1. arbitrarno se bira novi redak ili stupac, postavlja se na infinitezimalno mali $\epsilon_i > \epsilon_{i-1} > 0$
 - i – redni broj degenerirane varijable
3. Ažuriraj sve sume redaka i stupaca sa dodanim epsilonima

I. Inicijalizacija: Metoda SZ kuta: $z = 10770$

		odredište								ponuda
izvor		N		S		E		W		
A		16		13		22		17		200
			100		100					
B		14		13		19		15		350
					40		300		10	
C		9		20		23		10		150
									150	
dodana		0		0		0		0		90
									90	
potražnja		100		140		300		250		

$z = 10770$

II. Inicijalizacija: Metoda minimalnog troška

1. ponavljaj dok se ne popuni **$n+m-1$** ćelija
 1. ako postoji nepostavljene nedegenerirane ćelije x_{ij}
 1. odaberi takvu x_{ij} s najmanjim troškom c_{ij}
 2. postavi $x_{ij} = \min \{s_i, d_j\}$
 2. inače, degeneracija
 1. odaberi nepostavljenu x_{ij} s najmanjim troškom c_{ij}
 2. postavi $x_{ij} = \epsilon_i, \epsilon_i > \epsilon_{i-1} > 0$
 - i – redni broj degenerirane varijable
2. Ažuriraj sve sume redaka i stupaca sa dodanim epsilonima

II. Inicijalizacija: Metoda minimalnog troška: z = 10840

izvor	odredište				ponuda	min.
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
		140	60			
B	14	13	19	15	350	
			240	110		
C	9	20	23	10	150	
	10			140		
dodana	0	0	0	0	90	
	90					
potražnja	100	140	300	250		
min.	0					

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

1. Ponavljaj dok se ne popuni **$n+m-1$** ćelija
 1. Za svaki redak i stupac, izračunati razliku:
= (drugi najmanji c_{ij} u retku/stupcu) - (najmanji c_{ij} u retku/stupcu)
 2. Za redak/stupac s **najvećom razlikom**, odabrati ulaz x_{ij} s min. c_{ij} za bazu.
 3. Ako je $\min \{s_i, d_j\} > 0$,
 1. postavi $x_{ij} = \min \{s_i, d_j\}$
 2. Inače, $x_{ij} = \epsilon_i$, $\epsilon_i > \epsilon_{i-1} > 0$
 - i – redni broj degenerirane varijable
 4. Eliminirati bilo koji redak/stupac bez ponude/potražnje preostale u sljedećim koracima.
 5. Ažuriraj sve sume redaka i stupaca sa dodanim epsilonima

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda Izračunati razlike

izvor	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	3
B	14	13	19	15	350	1
C	9	20	23	10	150	1
dodana	0	0	0	0	90	0
potražnja	100	140	300	250		
razlika	9	13	19	10		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

Izabrati x_{dodanaE} za bazičnu varijablu

izvor	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	3
B	14	13	19	15	350	1
C	9	20	23	10	150	1
dodana	0	0	0	0	90	0
potražnja	100	140	300	250		
razlika	9	13	19	10		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

Ažurirati ponudu, potražnju i razlike

izvor	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	3
B	14	13	19	15	350	1
C	9	20	23	10	150	1
dodana	0	0	0	0	---	---
potražnja	100	140	210	250		
razlika	5	0	3	5		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

Izabrati x_{CN} za bazičnu varijablu

izvor	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	3
B	14	13	19	15	350	1
C	9	20	23	10	150	1
dodana	0	0	0	0	---	---
potražnja	100	140	210	250		
razlika	5	0	3	5		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

Ažurirati ponudu, potražnju i razlike

izvor	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	4
B	14	13	19	15	350	2
C	9	20	23	10	50	10
dodana	0	0	0	0	---	---
potražnja	---	140	210	250		
razlika	---	0	3	5		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

Izabrati x_{CW} za bazičnu varijablu

izvor	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	4
B	14	13	19	15	350	2
C	9	20	23	10	50	10
	100			50		
dodana	0	0	0	0	---	---
			90			
potražnja	---	140	210	250		
razlika	---	0	3	5		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda Ažurirati ponudu, potražnju i razlike

izvorište	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	4
B	14	13	19	15	350	2
C	9	20	23	10	---	---
dodana	0	0	0	0	---	---
potražnja	---	140	210	200		
razlika	---	0	3	2		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

Izabrati x_{AS} za bazičnu varijablu

izvor	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	4
		140				
B	14	13	19	15	350	2
C	9	20	23	10	---	---
	100			50		
dodana	0	0	0	0	---	---
			90			
potražnja	---	140	210	200		
razlika	---	0	3	2		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda Ažurirati ponudu, potražnju i razlike

		odredište								ponuda	razlika
izvor		N		S		E		W			
A		16		13	140	22		17		60	5
B		14		13		19		15		350	4
C		9	100	20		23		10	50	---	---
dodana		0		0		0	90	0		---	---
potražnja		---		---		210		200			
razlika		---		---		3		2			

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

Izabrati x_{AW} za bazičnu varijablu

izvor	odredište				ponuda	razlika
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	60	5
		140		60		
B	14	13	19	15	350	4
C	9	20	23	10	---	---
	100			50		
dodana	0	0	0	0	---	---
			90			
potražnja	---	---	210	200		
razlika	---	---	3	2		

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda Ažurirati ponudu, potražnju i razlike

izvor	odredište								ponuda	razlika
	N		S		E		W			
A	16		13	140	22		17	60	---	---
B	14		13		19		15		350	4
C	9	100	20		23		10	50	---	---
dodana	0		0		0	90	0		---	---
potražnja	---		---		210		140			
razlika	---		---							

III. Inicijalizacija: Vogelova metoda

Izabrati x_{BW} i x_{BE} za bazične varijable: $z = 10330$

		odredište								ponuda	razlika
izvor		N		S		E		W			
A		16		13	140	22		17	60	---	---
B		14		13		19	210	15	140	---	
C		9	100	20		23		10	50	---	---
dodana		0		0		0	90	0		---	---
potražnja		---		---		---		---			
razlika		---		---						z = 10330	

Operacijska istraživanja
7.a) predavanje: Transportni problem

MODI - optimizacija

10. siječnja 2022.

Metoda MODI (engl. MOdified DIstribution)

- **Simpleks:** provjera koeficijenata 0-retka za provjeru optimalnosti
 - optimalno rješenje ako su svi ≥ 0 .
- **MODI:** efikasan način pronalaska koeficijenata 0-retka za zadani BFS transportnog problema:

1. Za bazične varijable, izračunati vrijednosti dualnih varijabli u_i i v_j

- u_i pridružena svakom izvoru
- v_j pridružena svakom odredištu

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0 \text{ za bazičnu } x_{ij}, \text{ tj. } u_i + v_j = c_{ij}$$

(postavi se $u_i = 0$ za i-redak sa najvećim brojem bazičnih varijabli ili troškom)

2. Koeficijenti 0-retka za nebazične x_{ij}

$$c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Provjera optimalnosti (nakon Vogelovog BFS)

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
		140		60		
B	14	13	19	15	350	
			210	140		
C	9	20	23	10	150	
	100			50		
dodana	0	0	0	0	90	
			90			
potražnja	100	140	300	250		

Izračunavanje u_i i v_j

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	0
		140		60		
B	14	13	19	15	350	-2
			210	140		
C	9	20	23	10	150	-7
	100			50		
dodana	0	0	0	0	90	-21
			90			
potražnja	100	140	300	250		
v_j	16	13	21	17		

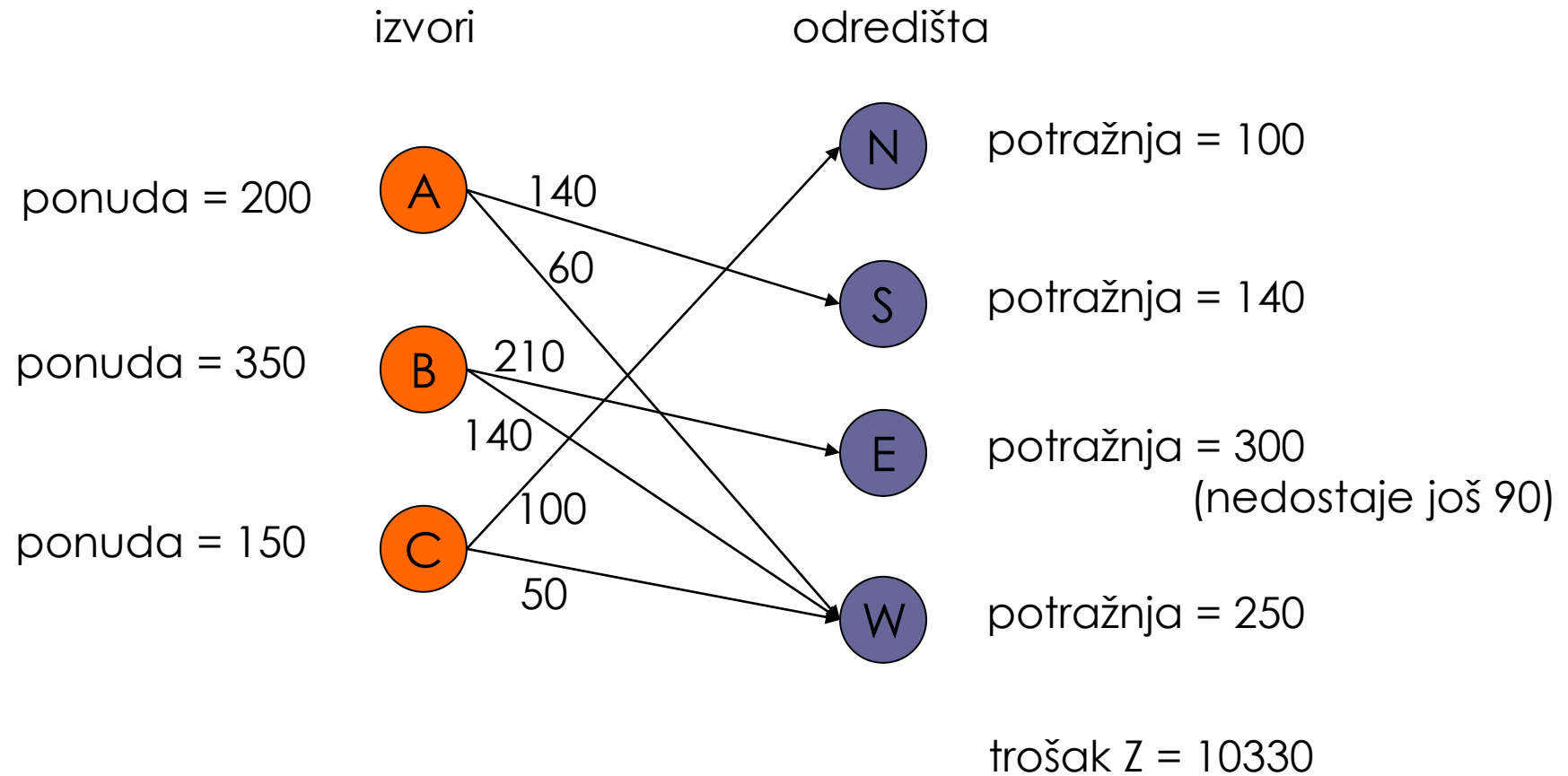
Izračunavanje c'_{ij}

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	0
	0	140	1	60		
B	14	13	19	15	350	-2
	0	2	210	140		
C	9	20	23	10	150	-7
	100	14	9	50		
dodana	0	0	0	0	90	-21
	5	8	90	4		
potražnja	100	140	300	250		
v_j	16	13	21	17		

10. siječnja 2022.

**Optimalno
rješenje!** (nema
negativnih c'_{ij})

Optimalno rješenje



Iteracija

- Ako rješenje nije optimalno, izvedi iteraciju
 1. Odrediti **ulaznu** bazičnu varijablu
 - odabrati varijablu s **najnegativnijim** c'_{ij}
 2. Odrediti **izlaznu** bazičnu varijablu
 - Odrediti lančanu reakciju (engl. *chain reaction*) po petlji koja bi nastala zbog porasta vrijednosti ulazne varijable (koja je bila 0).
 - Izlazna varijabla bit će prva varijabla koja postane 0 zbog ove lančane reakcije.

Inicijalno BFS postignut metodom SZ kuta

		odredište								ponuda	u_i
izvor		N		S		E		W			
A		16		13		22		17		200	0
			100		100		3		2		
B		14		13		19		15		350	0
			-2		40		300		10		
C		9		20		23		10		150	-5
			-2		12		9		150		
dodana		0		0		0		0		90	-15
			-1		2		-4		90		
potražnja		100		140		300		250			
v_j		16		13		19		15			

1. iteracija: ulazna varijabla

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	0
	100	100				
B	14	13	19	15	350	0
		40	300	10 ⁺		
C	9	20	23	10	150	-5
				150		
dodana	0	0	0	0	90	-15
			?	90 ⁻		
potražnja	100	140	300	250		
v_j	16	13	19	15		

- ulazna bazična varijabla:

x_{dodanaE}

1. iteracija: izlazna varijabla

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16 100	13 100	22	17	200	0
B	14	13 40	19 300	15 10 ⁺	350	0
C	9	20	23	10 150	150	-5
dodana	0	0	0 θ ⁺	0 90 ⁻	90	-15
potražnja	100	140	300	250		
v_j	16	13	19	15		

- izlazna bazična varijabla:
- $x_{BE}: 300 - \theta$
- $x_{BW}: 10 + \theta$
- $x_{\text{dodana}W}: 90 - \theta$

Kraj 1. iteracije

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
	100	100				
B	14	13	19	15	350	
		40	210	100		
C	9	20	23	10	150	
				150		
dodana	0	0	0	0	90	
			90			
potražnja	100	140	300	250		
v_j						

Provjera optimalnosti

		odredište								ponuda	u _i
izvor		N		S		E		W			
A		16		13		22		17		200	0
			100		100		3		2		
B		14		13		19		15		350	0
			- 2		40		210		100		
C		9		20		23		10		150	-5
			- 2		12		9		150		
dodana		0		0		0		0		90	-19
			3		6		90		4		
potražnja		100		140		300		250			
v _j		16		13		19		15			

2. iteracija: ulazna varijabla

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16 - 100	13 + 100	22	17	200	0
B	14 + ?	13 - 40	19 210	15 100	350	0
C	9	20	23	10 150	150	-5
dodana	0	0	0 90	0	90	-19
potražnja	100	140	300	250		
v_j	16	13	19	15		

- ulazna bazična varijabla:
 x_{BN}

2. iteracija: izlazna varijabla

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16 - 100	13 + 100	22	17	200	0
B	14 + θ	13 - 40	19 210	15 100	350	0
C	9	20	23	10 150	150	-5
dodana	0	0	0 90	0	90	-19
potražnja	100	140	300	250		
v_j	16	13	19	15		

- Izlazna bazična varijabla:
- $x_{AN}: 100 - \theta$
- $x_{AS}: 100 + \theta$
- $x_{BS}: 40 - \theta$

Kraj 2. iteracije

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
	60	140				
B	14	13	19	15	350	
	40		210	100		
C	9	20	23	10	150	
				150		
dodana	0	0	0	0	90	
			90			
potražnja	100	140	300	250		
v_j						

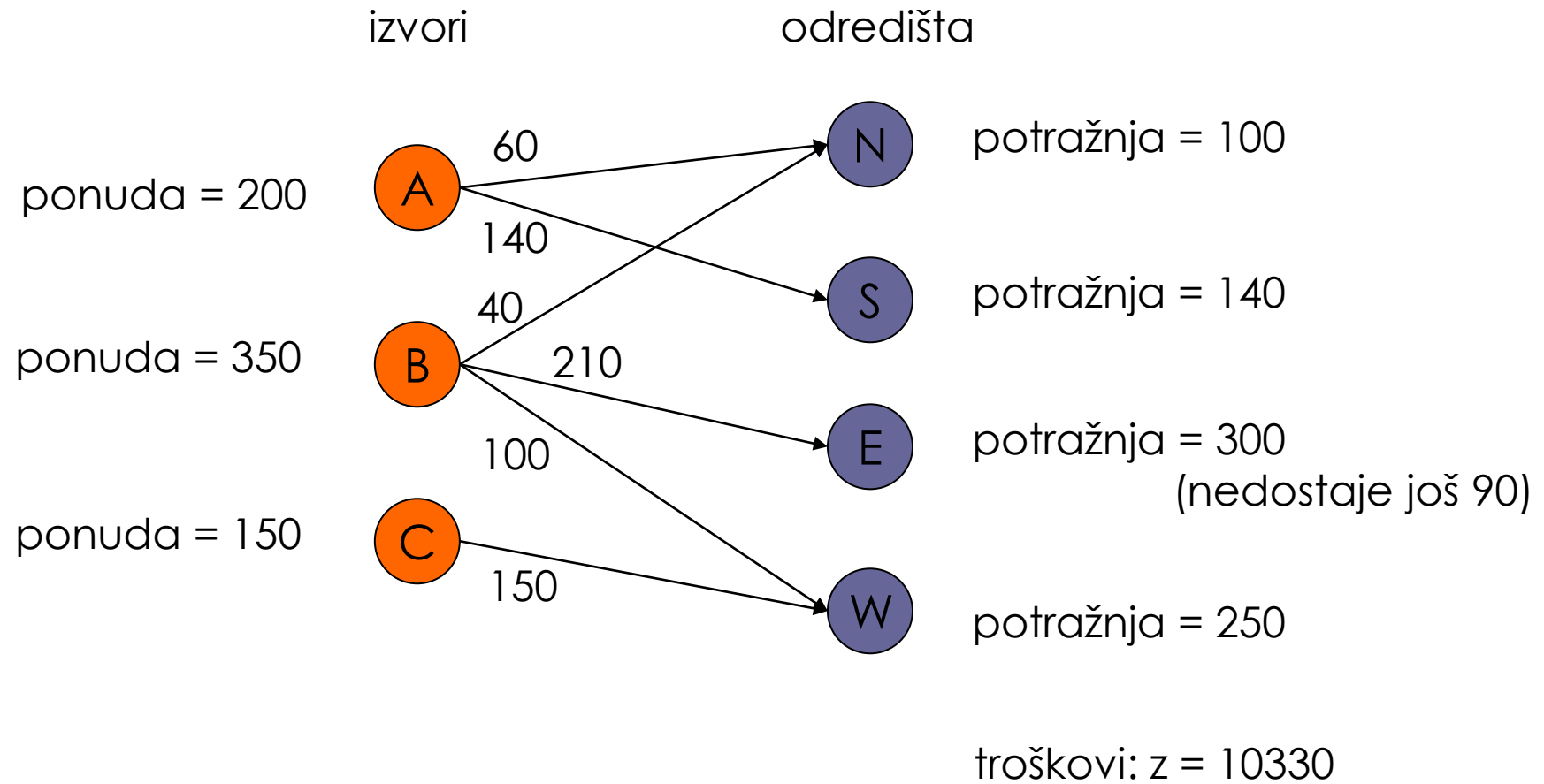
Provjera optimalnosti

		odredište								ponuda	u _i
		N		S		E		W			
izvor		16		13		22		17		200	2
			60		140		1		0		
B		14		13		19		15		350	0
			40		2		210		100		
C		9		20		23		10		150	-5
			0		14		9		150		
dodana		0		0		0		0		90	-19
			5		8		90		4		
potražnja		100		140		300		250			
v _j		14		11		19		15		Z = 10330	

$Z = 10330$

**Optimalno
rješenje!** (nema
negativnih c'_{ij})

Optimalno rješenje



Degenerirano rješenje

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	4	6	8	8	40	0
	20	20				
B	6	8	6	7	60	2
		10	50			
C	5	7	6	8	50	2
			€	50		
potražnja	20	30	50	50		
v_j	4	6	4	4		

Degenerirano rješenje

- Kada se nađete situaciji da imate manje od $m+n-1$ bazičnih varijabli >0
- Postoji bazična varijabla $=0$
 - Kod inicijalizacije, odabir slijedi iz postupka ili proizvoljan
 - Kod iteracija optimiranja – slijedi iz postupka (doza proizvoljnosti)
- Svakoj bazičnoj varijabli $=0$ se modificira vrijednost za mali iznos ϵ_i
- Uvesti totalni uređaj (poredak ϵ_i -ova) za nedvosmisleno izvođenje MODI algoritma

Uvođenje θ

izvor	odredište				ponuda	u_i
	N	S	E	W		
A	4	6	8	8	40	0
	20	20	(4)	(2)		
B	6	8	6	7	60	2
	(0)	10	50	(-1)		
C	5	7	6	8	50+€	2
	(-1)	(-1)	€	50		
potražnja	20	30	50+€	50		
v_j	4	6	4	4		

Računanje θ

izvor	odredište				ponuda
	N	S	E	W	
A	4	6	8	8	40
	20	20	(4)	(2)	
B	6	8	6	7	60
	(0)	$10-\theta$	$50+\theta$	(-1)	
C	5	7	6	8	$50+\epsilon$
	(-1)	θ	$\epsilon-\theta$	50	
potražnja	20	30	$50+\epsilon$	50	

Pomicanje ϵ : funkcija cilja se ne mijenja

izvor	odredište				ponuda
	N	S	E	W	
A	4	6	8	8	40
	20	20			
B	6	8	6	7	60
		10- ϵ	50+ ϵ		
C	5	7	6	8	50+ ϵ
		ϵ		50	
potražnja	20	30	50+ ϵ	50	