Matematička analiza 1 - Poglavlje 7

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 18. TRAVNJA 2023.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

7. Derivacija funkcije

Diferencijalni račun je dio matematičke analize koje se bavi derivacijama funkcija. Važnost diferencijalnog računa je vidljiva kroz njegovu široku primjenu ne samo u drugim područjima matematike kao što su npr. diferencijalne jednadžbe, diferencijalna geometrija, kompleksna i funkcionalna analiza nego i u drugim znanostima kao što su fizika i biologija te u ekonomiji i posebno u inženjerstvu. Diferencijalnim računom se modeliraju svi problemi u kojima se proučava promjena neke funkcije u odnosu na promjenu varijable i to najčešće koristeći diferencijalne jednadžbe kao osnovni alat za modeliranje prirodnih i društvenih fenomena.

Poticaj razvoju diferencijalnog računa u 17. stoljeću su bili fizikalni problemi koji uključuju kretanje kao što su kretanje planeta te važnost tangente odnosno tangencijalnog smjera kretanja u istim tim problemima. Metode diferencijalnog računa se i danas koriste u proučavanju svih aspekata kretanja kao što su npr. orbita planeta, let rakete i put nabijene čestice koja se kreće kroz elektromagnetsko polje. No pored toga, derivacija se primjenjuje u proučavanju stope promjene kod mnogih pojmova iz različitih područja, npr. kemičar može koristiti derivaciju za predviđanje rezultata različitih kemijskih reakcija, biolog može derivaciju koristiti za proučavanje stope rasta bakterije u koloniji, inženjer derivacijom opisuje promjenu struje u električnom krugu dok ju ekonomist primjenjuje u problemima profita, gubitka i proizvodnje.

Ključni pojmovi: derivacija u točki, nagib tangente, stopa promjene, derivacija kao funkcija, diferencijabilnost, pravila deriviranja, derivacija kompozicije, derivacija inverzne funkcije, tablica derivacija, matematičko modeliranje, tangenta, normala, kut među krivuljama

7.1 Motivacija pojma derivacije

Ovo poglavlje započinjemo s motivacijom koristeći probleme koji su doveli do razvoja diferencijalnog računa u 17. stoljeću.

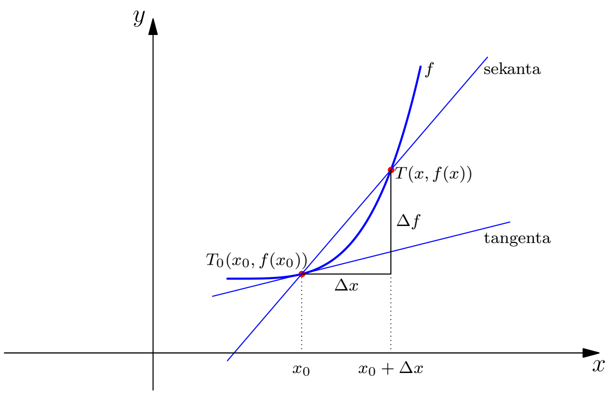
7.1.1 Problem tangente

Njemački matematičar G.W. Leibniz se u svom istraživanju bavio traženjem tangente na proizvoljnu krivulju. Tangenta (lat. tangens = dodirivati) na krivulju je pravac koji dodiruje krivulju u nekoj točki.

Problem: Tražimo tangentu na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T(x_0, f(x_0))$.

Na Slici 7.1 je prikazan graf neke funkcije f i **sekanta** kroz točke T_0 i T_1 za koju vidimo da ima koeficijent smjera jednak:

$$k_s = \frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$



Slika 7.1 Tangenta i sekanta na graf funkcije

Primijetimo da se smanjivanjem pomaka $\triangle x$ koordinata $x_0 + \triangle x$ približava prema x_0 odnosno točka T se približava točki T_0. Dakle, kada $\triangle x$ teži k nuli, tada se točka T po grafu funkcije približava točki T_0 odnosno sekanta kroz T_0 i T se približava tangenti u T_0. Iz toga slijedi da je $k_t = \lim\limits_{\triangle x \to 0} k_s$ odnosno

$$k_t = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Dakle, tangenta je pravac kroz T_0 s koeficijentom smjera k_t.

■ **Primjer 7.1** Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = x^2$ u točki $T_0(2, 4)$.

Rješenje. Koristeći gornji limes izrazit ćemo koeficijent smjera tangente u točki $x_0 = 2$ kao

$$k_t = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(2 + \triangle x) - f(2)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(2 + \triangle x)^2 - 4}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{4\triangle x + (\triangle x)^2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} (4 + (\triangle x)) = 4.$$

Dakle, jednadžba tangente na graf krivulje u točki T_0 je $y = 4x + 4$. ■

Crtica

G.W. Leibniz (1646.-1716.) se rodio u Leipzigu 1646. godine gdje je studirao pravo, teologiju, filozofiju i matematiku te diplomirao sa 17 godina. Nakon doktorata iz prava, postao je diplomat te je putovao cijelom Europom u diplomatskim misijama. Njegovo ozbiljno bavljenje matematikom je započelo 1672. godine za vrijeme misije u Parizu. Bavio se razvojem simboličke logike i sustava označavanja za jednostavnije logičko rasuđivanje. Njegova knjiga iz matematičke analize objavljena 1684. godine je uvela notaciju i pravila deriviranja koje i danas koristimo.

7.1.2 Problem brzine

I. Newton je do diferencijalnog računa došao proučavanjem pojma brzine.

Problem. Kako definirati trenutnu brzinu tijela u trenutku t_0?

Promatramo gibanje tijela po pravcu gdje je put $s = s(t)$ definiran kao funkcija vremena t. Znamo da je tada **prosječna (srednja) brzina** na intervalu $[t_0, t_0 + \triangle t]$ omjer prijeđenog puta i pripadnog vremena:

$$\bar{v} = \frac{s(t_0 + \triangle t) - s(t_0)}{\triangle t}$$

Ako promatramo srednje brzine po sve manjim i manjim intervalima odnosno pustimo da $\triangle t$ ide u 0, tada dobijemo **trenutnu brzinu** $v(t_0)$ u trenutku t_0 kao limes srednjih brzina odnosno

$$v(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{s(t_0 + \triangle t) - s(t_0)}{\triangle t}.$$

■ **Primjer 7.2** Odredite brzinu tijela koje slobodno pada u trenutku $t_0 = 4s$.

Rješenje. Koristeći gornji limes izrazit ćemo trenutnu brzinu kao

$$v(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{s(t_0 + \triangle t) - s(t_0)}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\frac{1}{2}g(t_0 + \triangle t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{\triangle t} =$$

$$= \frac{g}{2} \lim_{\triangle t \to 0} \frac{2t_0 \triangle t + (\triangle t)^2}{\triangle t} = \frac{g}{2} \lim_{\triangle t \to 0} (2t_0 + (\triangle t)) = gt_0.$$

Dakle, trenutna brzina u trenutku $t_0 = 4$ je $v(4) = 4g \simeq 40 m/s$. ■

Crtica

Isaac Newton (1642.-1726.) je engleski matematičar. astronom, teolog i fizičar koji je prepoznat kao jedan od najutjecajnijih znanstvenika svih vremena. Počeo se baviti matematikom upisom na Sveučilište u Cambridgeu gdje je čitao radove Euclida i Descartesa te slušao predavanja I. Barrowa koji je također imao ulogu u razvoju infinitezimalnog računa. Kada je u razdoblju od 1665.-1666. sveučilište bilo zatvoreno zbog kuge, Newton je u svom domu proveo najproduktivnije dvije godine svog života. Naime, u tom je razdoblju došao do četiri svoja najveća dostignuća: prikaz funkcija kao sume beskonačnih redova, uključujući i binomni teorem; rad na diferencijalnom i integralnom računu; zakoni kretanja i univerzalne gravitacije (osnove klasične fizike) te ekperimenti s prizmom o prirodi svjetla i boje. Zbog svojeg straha od kontroverzije i kritike, bio je neodlučan u objavljivanju svojih rezultata te je tek 1687. godine na nagovor astronoma Halleya objavio svoju *Principia Mathematica*. U tom djelu, najvećoj znanstvenoj studiji ikad napisanoj, Newton je predstavio svoju verziju infinitezimalnog računa koji je koristio za proučavanje mehanike, dinamike fluida i kretanje valova te za objašnjavanje kretanja planeta i kometa. Iako se pojam limesa nazire u metodi isrcpljivanja kojom su stari Grci kao što su Eudoxus i Arhimed računali površine i volumene, oni ga nikada nisu formalno definirali. Ostali matematičari koji su sudjelovali u nastanku matematičke analize kao što su Cavalieri, Fermat i Barrow pojam limesa nisu ni koristili. Tako da je Newton bio prvi koji je objasnio pojam limesa kao osnovne ideje matematičke analize. Dugo se vodila rasprava oko toga tko je prvi uveo diferencijalni račun - Leibniz ili Newton, no utvrdilo se da su oba znanstvenika do svojih otkrića došli neovisno jedan o drugome. O tome će biti nešto više riječi i u integralnom računu (Newton-Leibnizova formula).

7.2 Derivacija funkcije

Sada ćemo vidjeti da je pojam limesa funkcije koji smo detaljno proučavali u Poglavlju 6 ujedno i središnji pojam diferencijalnog računa.

7.2.1 Derivacija funkcije u točki

Vidjeli smo da se isti tip limesa pojavio kod problema tangente i problema brzine. Štoviše, taj isti limes se pojavljuje uvijek kada računamo brzinu promjene funkcije u bilo kojoj znanosti ili inženjerstvu, kao što ćemo i vidjeti kasnije. Taj limes ima i posebno ime - zove se derivacija funkcije u točki!

Definicija 7.2.1 Neka je dana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval i $x_0 \in I$. **Derivacija funkcije f u točki** x_0 je jednaka

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{7.1}$$

ukoliko taj limes postoji i konačan je. ■

Također ćemo koristiti i sljedeće oznake za derivaciju funkcije u točki:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Ekvivalentni zapisi formule (7.1) koji se koriste u praksi su

- $f'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x\to 0} \dfrac{f(x_0+\triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$ (zamjena $h = \triangle x$)
- $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (zamjena $x = x_0 + h$)
- $f'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x\to 0} \dfrac{\triangle f(x_0)}{\triangle x}$
  uz oznake $\triangle x$ za prirast varijable x i $\triangle f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ za prirast funkcije f u x_0.

■ Tangenta na graf funkcije

Kao što smo već vidjeli u prethodnom poglavlju, pojam derivacije funkcije u točki se može geometrijski interpretirati kao nagib tangente.

Definicija 7.2.2 **Tangenta** na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ je pravac kroz točku T_0 s koeficijentom smjera $f'(x_0)$ čija jednadžba glasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

■

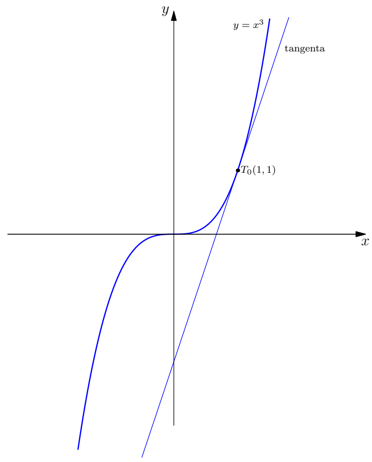
Pogledajmo sada jedan primjer računanja derivacije u točki pomoću definicije i primjenu na tangentu.

■ **Primjer 7.3** Pomoću definicije derivacije funkcije u točki, izvedite $f'(1)$ ako je $f(x) = x^3$ te napišite jednadžbu tangente na graf funkcije f u točki $T_0(1,1)$.

Rješenje. Sada u definiciju $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ uvrstimo $x_0 = 1$ i $f(x) = x^3$ te dobijemo

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2 + 3h + 3) = 3.$$

Jednadžbe tangente glasi $y - 1 = 3(x - 1)$ odnosno $y = 3x - 2$. Vidi Sliku 7.2. ■



Slika 7.2 Primjer 7.3

Vježba 7.1 Pomoću definicije, odredite $f'(1)$ za funkciju $f(x) = 3x^2 - x^3$ te odredite jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $T(1,2)$.

Vježba 7.2 Pomoću definicije, odredite $f'(x)$ za funkciju $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ te odredite jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $T(4, \frac{1}{2})$.

Sada ćemo promatrati još jedan pojam koji je vezan uz tangentu, a to je pojam **diferencijala funkcije**. Geometrijski gledano, tangenta na graf funkcije u točki x_0 je pravac koji aproksimira graf odnosno približno je jednak grafu funkcije oko točke x_0. Drugim riječima, tangenta je **linearna aproksimacija funkcije**. Za zapisivanje te činjenice koristimo diferencijal funkcije u točki x_0 koji predstavlja prirast na tangenti. Na Slici 7.1 vidimo da se pomakom iz točke x_0 u točku $x_0 + \triangle x$ vrijednost funkcije promijeni za $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ i tu veličinu zovemo prirast funkcije f u točki x_0 s pomakom $\triangle x$. Istovremeno se vrijednost ordinate točke koja se iz x_0 u $x_0 + \triangle x$ pomiče po tangenti pomakne za prirast odnosno za diferencijal $df(x_0)$. Dakle, koristeći nagib tangente slijedi da diferencijal dobivamo iz formule

$$df(x_0) = f'(x_0)\triangle x.$$

Nadalje, koristimo činjenicu da je prirast na tangenti približno jednak prirastu funkcije te aproksimaciju funkcije diferencijalom možemo zapisati na sljedeći način:

$$df(x_0) \approx f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$$

odnosno

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\triangle x.$$

Linearna aproksimacija funkcije se rijetko koristi u praksi jer je to aproksimacija s najvećom pogreškom. Kasnije ćemo proučavati aproksimaciju funkcije Taylorovim polinom n-tog stupnja pa ćemo vidjeti da se ista linearna aproksimacija dobiva koristeći Taylorov polinom prvog stupnja.

■ Stopa (brzina) promjene funkcije

Sada promatramo kako se funkcija $y = f(x)$ mijenja u odnosu na promjenu varijable x. Označimo li sa $\triangle x = x_2 - x_1$ promjenu varijable x, a sa $\triangle f = f(x_2) - f(x_1)$ promjenu funkcije, tada je prosječna stopa promjene f u odnosu na x jednaka

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Analogno kao kod brzine, promatramo prosječnu stopu promjene na sve manjem i manjem intervalu odnosno puštamo da $\triangle x$ ide u 0. Limes prosječnih stopa promjena zovemo **trenutna stopa (brzina) promjene funkcije** u odnosu na promjenu varijable u točki x_1. Time smo dobili drugu interpretaciju derivacije funkcije u točki koja glasi:
Derivacija $f'(x_1)$ je trenutna stopa (brzina) promjene funkcije $y = f(x)$ u odnosu na varijablu x u točki $x = x_1$ odnosno

$$f'(x_1) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}.$$

Sve stope promjene funkcije možemo interpretirati kao nagib tangente na graf funkcije. Dakle, problem tangente nije samo geometrijski problem nego i neizravno rješava mnogobrojne probleme koji uključuju stopu promjene u znanosti i inženjerstvu.

■ **Primjer 7.4** Odredite brzinu promjene površine kvadrata $P(a) = a^2$ u odnosu na promjenu duljine stranice za $a_0 = 3\,\text{cm}$.

Rješenje. Ustvari tražimo

$$P'(a_0) = \lim_{h \to 0} \frac{P(a_0+h) - P(a_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a_0+h)^2 - (a_0)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = 6.$$

■

Vježba 7.3 Pomak tijela koje se giba pravocrtno je dano sa $s(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + 23$, gdje vrijeme mjerimo u sekundama.
(a) Odredite prosječnu (srednju) brzinu na intervalima: $[4,8]$, $[6,8]$, $[8,10]$ i $[8,12]$.
(b) Odredite trenutnu brzinu u trenutku $t = 8$.
(c) Nacrtajte graf funkcije $s(t)$ (s-t graf gibanja) te nacrtajte sekante čiji nagibi su prosječne brzine pod (a). Nacrtajte tangentu sa nagibom jednakom trenutnoj brzini pod (b).

Primijetimo da je na s-t grafu ubrzanog gibanja, nagib sekante ustvari prosječna ili srednja brzina dok je nagib tangente trenutna brzina gibanja.

Vježba 7.4 Dana je vaza u obliku valjka radijusa r u koju ulijevamo vodu. Je li brzina promjene volumena vode $V(h)$ u vazi u odnosu na promjenu visine vode h konstantna? Obrazložite.

U Poglavlju 7.7 ćemo detaljnije proučavati probleme u kojima se primjenjuje matematičko modeliranje pomoću derivacije odnosno stope promjene funkcije.

7.2.2 Derivacija kao funkcija

Do sada smo proučavali derivaciju funkcije u točki $x = x_0$. Sada ćemo promatrati derivaciju funkcije u bilo kojoj točki x odnosno derivaciju kao funkciju u varijabli x.

Definicija 7.2.3 Neka je dana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ gdje je I otvoren interval te neka f ima derivaciju u svakoj točki intervala I. Tada možemo definirati funkciju $f' : I \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

koju zovemo **derivacija funkcije** f. ■

U literaturi se koristi puno različitih oznaka za derivaciju:

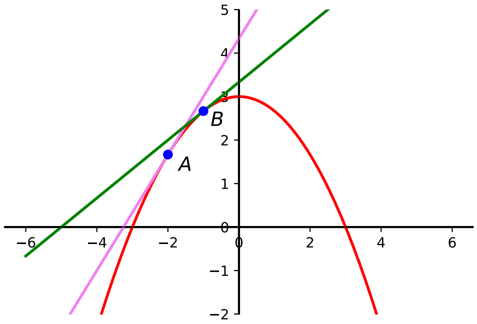
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad \text{ili} \qquad f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = Df(x)$$

gdje sa D označavamo diferencijalni operator.

Napomena 7.1 Primijetimo da je prirodna domena funkcije f' skup na kojem f' postoji odnosno $\mathscr{D}(f') = \{x : f'(x) \,\text{postoji}\}$. Jasno je da vrijedi $\mathscr{D}(f') \subseteq \mathscr{D}(f)$.

Vježba 7.5 Koja je razlika, a koja veza između $f'(x)$ i $f'(x_0)$?

Derivacija funkcije $f'(x)$ je **funkcija** dok je derivacija u točki $f'(x_0)$ **realan broj**! Vrijednost derivacije $f'(x)$ se može interpretirati kao nagib tangente na graf funkcije f u točki $(x, f(x))$ odnosno derivacija točki pridružuje nagib pripadne tangente tj. $x \stackrel{f'}{\longmapsto} f'(x)$. Dakle, iz Slike 7.3 se vidi da veća derivacija znači veći nagib tangente odnosno brže mijenjanje vrijednosti funkcije (točka A). S druge strane, manji iznos derivacije znači da se vrijednost funkcije sporije mijenja (točka B).



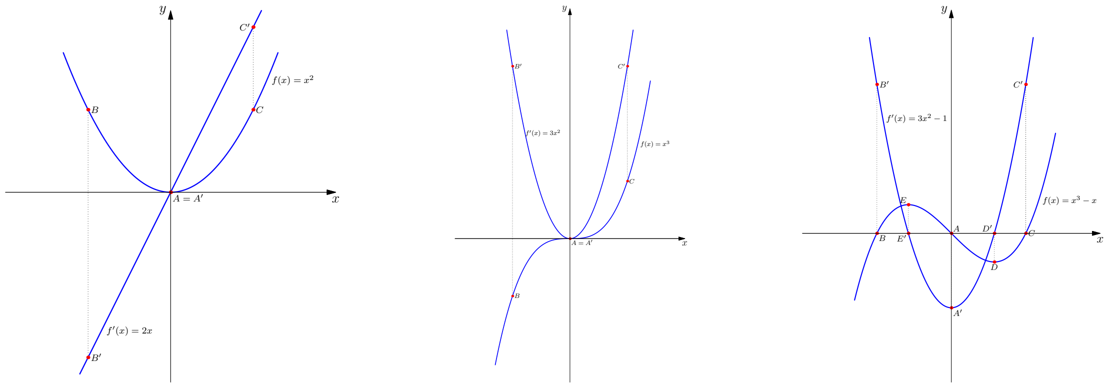
Slika 7.3 Nagib tangente i brzina rasta funkcije

Vježba 7.6 Ako je $f'(x_0) = 0$, kako glasi jednadžba tangente u točki $T_0(x_0, y_0)$?

Također možemo primijetiti da su grafovi funkcija f i f' međusobno povezani jer za točku na grafu $T(x_0, f(x_0))$ pripadna točka na grafu od f' je $T_1(x_0, f'(x_0))$ gdje je $f'(x_0)$ nagib tangente na graf od f u točki T. Sada ćemo detaljnije proučiti tu povezanost pomoću tri primjera.

■ **Primjer 7.5** Analizirajte povezanost grafova funkcije f i njene derivacije f' za sljedeće funkcije:
(a) $f(x) = x^2$; (b) $f(x) = x^3$; (c) $f(x) = x^3 - x$.

Rješenje. Dovoljno je da pogledamo vrijednosti derivacije u nekoliko karakterističnih točaka grafa od f i f' te objasnimo povezanost. Pogledajte Sliku 7.4.
(a) Prvo izaberemo karakteristične točke grafa od $f(x) = x^2$, u ovom slučaju to su $A(0,0)$, $B(-1,1)$ i $C(1,1)$. Sada vidimo da je tangenta na graf u točki $x = 0$ pravac $y = 0$ odnosno nagib tangente je 0 te je $f'(0) = 0$ i $A'(0,0)$. Znamo da je derivacija $f'(x) = 2x$ te u točkama $x = \pm 1$ imamo $f'(1) = 2$ i $f(-1) = -2$ odnosno $B'(-1,-2)$ i $C'(1,2)$. Sada nacrtamo te tri točke i spojimo te dobijemo graf od $f'(x) = 2x$ odnosno pravac $y = 2x$. Primijetimo da za $x < 0$ su nagibi tangente negativni i rastu prema 0, a za pozitivne x su pozitivni i rastu.



Primjer 7.5a Primjer 7.5b Primjer 7.5c

Slika 7.4

(b) Karakteristične točke grafa $f(x) = x^3$ su opet $A(0,0)$, $B(-1,-1)$ i $C(1,1)$. Sada vidimo da je tangenta na graf u točki $x = 0$ pravac $y = 0$ te je $f'(0) = 0$ i $A'(0,0)$. Vidimo da je derivacija $f'(x) = 3x^2$ te slijedi da je $f'(1) = f'(-1) = 3$ odnosno $B'(-1,3)$ i $C'(1,3)$. Sada označimo te tri točke na grafu funkcije $f(x) = 3x^2$. Primijetimo da za $x < 0$ su nagibi tangente pozitivni i padaju prema 0, a za pozitivne x su pozitivni i rastu.

(c) Karakteristične točke grafa $f(x) = x^3 - x$ su $A(0,0)$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$, $D(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}})$ i $E(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$. Sada vidimo da je $f'(0) = -1$ te je $A'(0,-1)$. Nadalje, iz $f'(x) = 3x^2 - 1$ te slijedi da je $f'(1) = f'(-1) = 2$ odnosno $B'(-1,2)$ i $C'(1,2)$. Točke D i E su točke sa horizontalnim tangentama te je $D'(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$ i $E'(-\frac{1}{\sqrt{3}},0)$. Sada označimo te točke na grafu funkcije $f(x) = 3x^2 - 1$. Primijetimo da za $x < 0$ nagibi tangente padaju prema -1, a za pozitivne x su rastu od -1. ■

Sada se vraćamo na samu definiciju derivacije i izvode derivacija nekih elementarnih funkcija.

■ **Primjer 7.6** Pomoću definicije derivacije, izvedite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = ax$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$
(d) $f(x) = e^x$ (e) $f(x) = \ln x$ (f) $f(x) = \frac{1}{x}$
(g) $f(x) = \sqrt{x}$ (h) $f(x) = \sin x$ (i) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Rješenje.

(a) Računamo limes

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$

(b) Računamo limes

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

(c) Pomoću limesa iz definicije dobivamo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Dakle, derivacija konstantne funkcije je nula: $c' = 0$.

(d) Računamo limes iz definicije

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \left[e^h - 1 \sim h, h \to 0\right] = e^x.$$

(e) Računom dobijemo:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}=\left[\ln(1+\frac{h}{x})\sim\frac{h}{x},\,h\to 0,x>0\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}}{h}=\frac{1}{x}.$$

(f) Uvjerimo se direktnim računom da je $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$. Računajući

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}$$

dobivamo očekivani izraz.

(g) Uvrštavanjem u limes iz definicije i racionalizacijom izraza dobivamo

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(h) Koristit ćemo formulu za razliku sinusa:

$$\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2}).$$

i činjenicu da se $\sin\frac{h}{2}\sim\frac{h}{2}$ kad $h\to 0$. Sada računamo derivaciju

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})=\cos x.\end{aligned}$$

Dakle

$$\sin' x=\cos x.$$

(i) Koristeći binomnu formulu (vidi Teorem 1.2.4 u Poglavlju 2)

$$(x+h)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k \tag{7.2}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+\binom{n}{n-1}xh^{n-1}+h^n-x^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\cdots+\binom{n}{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1}]\\&=nx^{n-1}.\end{aligned}$$

tj.

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Primijetimo da ako u ovu formulu stavimo $n=\frac{1}{2}$ dobit ćemo upravo izvedenu formulu za deriviranje kvadratnog korijena pod (g). Ova formula zaista vrijedi ne samo za prirodne brojeve n, već za sve realne brojeve što ćemo i dokazati nešto kasnije.

∎

Dakle, u ovom smo primjeru izveli sljedeće derivacije:

$$
\begin{array}{lll}
(ax)' = a, & (x^2)' = 2x, & (c)' = 0 \\
(e^x)' = e^x, & (\ln x)' = \dfrac{1}{x}, & (\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2} \\
(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & (\sin x)' = \cos x, & (x^n)' = nx^{n-1}.
\end{array}
$$

U Poglavlju 7.7 ćemo detaljnije proučavati primjene derivacija u drugim znanostima i inženjerstvu dok ćemo sada samo navesti nekoliko primjera primjene derivacije kao važnog matematičkog koncepta.

Neke primjene derivacije funkcije

- trenutna brzina : $v(t) = s'(t)$;
- jakost el. struje : $i(t) = q'(t)$, (q = naboj);
- snaga: $P(t) = W'(t)$ (W = rad);
- izotermalna kompresibilnost u kemiji: $\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$, V volumen, P tlak
- brzina rasta populacije u biologiji;
- marginalni trošak u ekonomiji;
- brzina širenja vijesti u sociologiji;
- brzina širenja topline u geologiji;

Ovo nam pokazuje da derivacija neke veličine predstavlja brzinu promjene te veličine i kao takva se definira potpuno općenito, neovisno o veličini koja se mijenja. Jednom kada razvijemo matematički koncept sa svim njegovim svojstvima kao što je derivacija, tada ga lako možemo primijeniti u drugim znanostima. To je mnogo efikasnije nego razvijati odvojene koncepte i svojstva u svakoj pojedinoj znanosti. Analogna situacija će biti sa svim važnijim konceptima u matematičkim kolegijima prve dvije godine studija.

7.3 Diferencijabilnost funkcije

Sada ćemo uvesti pojam diferencijabilnosti funkcije.

Definicija 7.3.1 Neka je dana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval. Kažemo da je f **diferencijabilna u točki** $x_0 \in I$ ako postoji $f'(x_0)$. Za funkciju f kažemo da je **diferencijabilna na intervalu** I ako je diferencijabilna u svakoj točki tog intervala. ■

Napomena 7.2 Kod funkcije jedne varijable se pored pojma diferencijabilnost koristi i analogni pojam derivabilnost funkcije.

Derivacija u točki postoji ako postoji limes (7.1), a postojanje limesa povezujemo s pojmom lijevog i desnog limesa. Sada analogno pojmu derivacije u točki možemo definirati pojam lijeve i desne derivacije u točki koje ćemo koristiti kod dokazivanja ima li funkcija derivaciju u nekoj točki. Dakle, ako u definiciju derivacije u točki stavimo $\lim\limits_{h\to 0^+}$ dobijemo desnu derivaciju u točki $f'_+(x_0)$, a ako stavimo $\lim\limits_{h\to 0^-}$ dobijemo lijevu derivaciju u točki $f'_-(x_0)$.

Definicija 7.3.2 Neka je dana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval i $x_0 \in I$. **Desna i lijeva derivacija funkcije f u točki** x_0 su definirane na sljedeći način:

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

ukoliko limes postoji i konačan je. ■

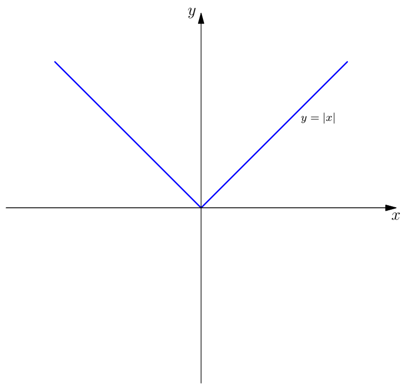
Dakle, da bi pokazali diferencijabilnost funkcije u točki usvari ćemo pokazivati da derivacija u točki $f'(x_0)$ (tj. limes u definiciji) postoji odnosno da postoje lijeva i desna derivacija i jednake su tj. $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Pogledajmo sada nekoliko primjera.

■ **Primjer 7.7** Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f(x) = |x|$.

Rješenje. Lako se pokaže da je f diferencijabilna za $x > 0$ and $x < 0$. Ostaje nam pokazati diferencijabilnost u $x = 0$. Računamo lijevu i desnu derivaciju u $x = 0$ i dobivamo

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Iz $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ slijedi da ne postoji $f'(0)$ tj. f nije diferencijabilna u $x_0 = 0$. Činjenica da $f'(0)$ ne postoji zbog $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ geometrijski znači da f nema tangentu u $x_0 = 0$. Na Slici 7.5 vidimo da graf nije gladak u ishodištu nego da ima šiljak.



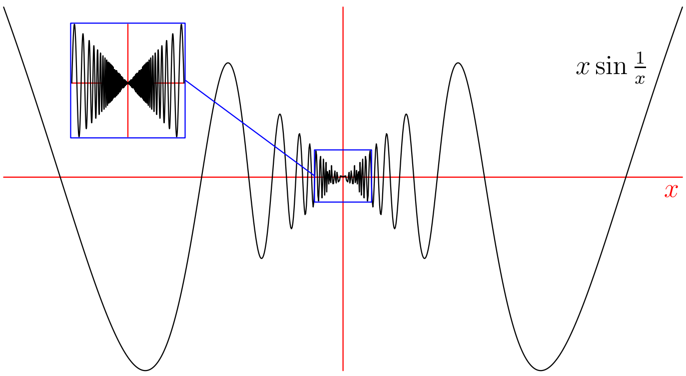
Slika 7.5 graf funkcije $f(x) = |x|$

■

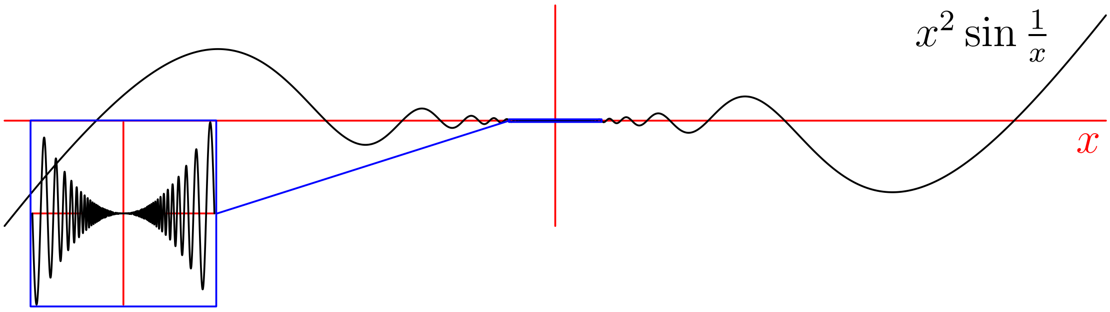
■ **Primjer 7.8** Postoji li $f'(0)$ za sljedeće funkcije:

(a) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Rješenje. Na Slikama 7.6 a i 7.6 b možemo vidjeti grafove zadanih funkcija.



Slika 7.6 a graf funkcije f



Slika 7.6 b graf funkcije g

(a) Računamo

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \sin(\frac{1}{h}).$$

Znamo da ovaj limes ne postoji jer je sinus oscilatorna periodična funkcija te ne postoji niti derivacija $f'(0)$.
(b) Računamo

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin(\frac{1}{h}) = 0$$

jer je $\sin(\frac{1}{h}) \in [-1, 1[$ odnosno ograničeno. Dakle, derivacija postoji i jednaka je $g'(0) = 0$.
■

Prisjetimo se pojma neprekinutosti funkcije u točki ($\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$) te razmislimo o sljedećem pitanju: Jesu li svojstva neprekinutosti i diferencijabilnosti funkcije povezana?

O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 7.3.1 Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval. Ako je f diferencijabilna funkcija u točki $x_0 \in I$, onda je f neprekinuta u $x_0 \in I$.

Dokaz. Prema pretpostavci teorema odnosno to da je f diferencijabilna u x_0 znači da u točki x_0 postoji limes

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tada slijedi da je

$$\lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \to 0} h \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0 \cdot f'(x_0) = 0,$$

jer je $f'(x_0)$ konačan realan broj odnosno dobijemo da je

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

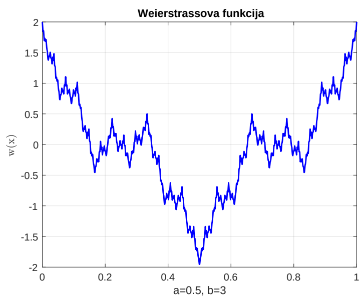
što znači da je funkcija f neprekinuta u x_0. ■

Napomena 7.3 Vrijedi li obrat teorema?
Obrat teorema ne vrijedi tj. iz f neprekidna ne slijedi f diferencijabilna. To znači da postoje neprekidne funkcije koje nisu diferencijabilne. Pogledajte sljedeća dva primjera.

■ **Primjer 7.9** Funkcija $f(x) = |x|$ je neprekinuta u $x_0 = 0$ jer je $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$, a u Primjeru 1.7 smo vidjeli da nije diferencijabilna u $x_0 = 0$. ■

Dodatak

■ **Primjer 7.10** Weierstrassova funkcija koja se definira pomoću beskonačnog reda (Matematička analiza 2) glasi $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{3}{4})^k \sin(4^k x)$, Ova funkcija je svuda neprekinuta, a nije diferencijabilna niti u jednoj točki! Otkrio ju je Weierstrass 1872. godine kao prvu takvu neprekinutu funkciju. Slika elektrokardiograma (EKG) srca je slična grafu ove funkcije! ■



Slika 7.7 graf Weierstrassove funkcije $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x)$

Vježba 7.7 Koje od sljedećih tvrdnji su istinite:
(T1) diferencijabilnost je dovoljan uvjet za neprekinutost;
(T2) diferencijabilnost je nužan uvjet za neprekinutost;
(T3) neprekinutost je nužan uvjet za diferencijabilnost.

Iz prethodnog teorema slijedi da su tvrdnje (T1) i (T3) istinite, a tvrdnja (T2) nije jer ne vrijedi obrat teorema.

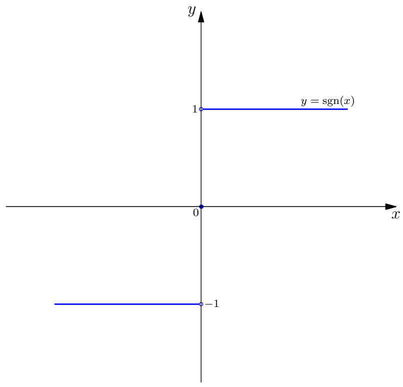
Vježba 7.8 Napišite tvrdnju koja se dobije obratom po kotrapoziciji Teorema 1.

Pomoću obrata po kontrapoziciji Teorema 1 dobijemo:

$$f(x) \text{ nije neprekidna u } x_0 \Rightarrow f \text{ nije diferencijabilna u } x_0$$

Dakle, jasno je da je neprekidnost nužan uvjet za diferencijabilnost, odnosno da ako f nije neprekinuta ne može biti ni diferencijabilna.

■ **Primjer 7.11** Primjer funkcije koja nije neprekinuta u $x_0 = 0$ je $f(x) = \operatorname{sgn} x$.



Slika 7.8 graf funkcije $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Rješenje. Lako se vidi da f nije neprekinuta u $x_0 = 0$ jer je $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $f(0) = 0$. Sada iz Teorema 1 slijedi da f nije diferencijabilna u $x_0 = 0$. ■

Problem 7.1 Na koje sve načine funkcija nije diferencijabilna u točki?

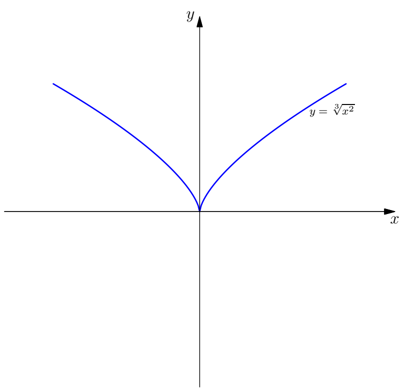
U prethodnom primjeru smo vidjeli da funkcije koje nisu neprekinute u točki tada nisu ni diferencijabilne toj točki. Promotrimo sada funkcije koje jesu neprekinute, a nisu diferencijabilne. Imamo dvije mogućnosti.

■ **Primjer 7.12** Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

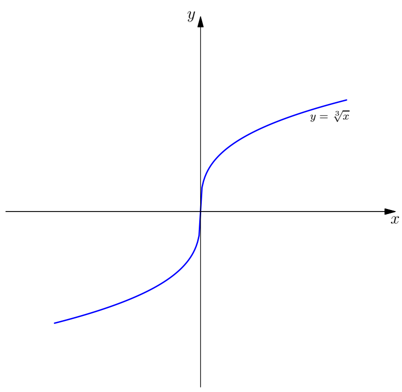
Rješenje. Funkcija f je neprekinuta u $x_0 = 0$ jer je $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$. Pokazat ćemo da f nije diferencijabilna u $x_0 = 0$ jer lijeve i desne derivacije ne postoje tj.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

Dakle, zbog $f'_\pm(0) = \pm\infty$ funkcija f nije diferencijabilna u 0. Zbog $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ funkcija f nema tangentu u $x_0 = 0$ i kažemo da f ima **šiljak** u 0. Vidi Sliku 7.9. ■



Slika 7.9 graf funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$



Slika 7.10 graf funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$

■ **Primjer 7.13** Primjer funkcije koja nije diferencijabilna u $x_0 = 0$, ali ima vertikalnu tangentu u $x = 0$ je

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Rješenje. Funkcija f je neprekidna u $x_0 = 0$ jer $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = 0$. Zaključujemo da f nije diferencijabilna u $x_0 = 0$ jer

$$f'_\pm(0) = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Primijetimo da f nije diferencijabilna u 0 jer gornji limes nije konačan.

- Ima li f tangentu u $x_0 = 0$?

U ovom slučaju funkcija ima tangentu iako nije diferencijabilna jer su lijevi i desni limes jednaki $+\infty$. Iz $\operatorname{tg}\alpha = +\infty$ slijedi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ odnosno tangenta u $x_0 = 0$ je $x = 0$. Ovakvu tangentu zovemo **vertikalna tangenta**. Vidi Sliku 7.10.

Također, primijetimo da derivacija $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ nije definirana u $x = 0$ što se poklapa s tim da f nije diferencijabilna u 0!

■

■ **Primjer 7.14** Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ takve da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \le \pi \\ ax+b, & x > \pi \end{cases}$$

bude neprekidna i derivabilna na $\mathbb{R}$.

Rješenje. Funkcija je neprekinuta u toči $x = \pi$ ako postoje lijevi i desni limesi i jednaki su vrijednosti funkcije u $x = \pi$. Iz $\lim\limits_{x\to\pi^+}(ax+b) = a\pi + b$, $\lim\limits_{x\to\pi^-}(\sin x) = 0$ i $f(\pi) = 0$ slijedi uvjet

$$a\pi + b = 0.$$

Neka su $g_1(x) = \sin x$ i $g_2(x) = ax+b$. Primijetimo da su ove dvije funkcije diferencijabilne na cijelom $\mathbb{R}$. Znamo da je funkcija f diferencijabilna u $x = \pi$ ako vrijedi

$$f'_+(\pi) = f'_-(\pi).$$

Dobijemo da je

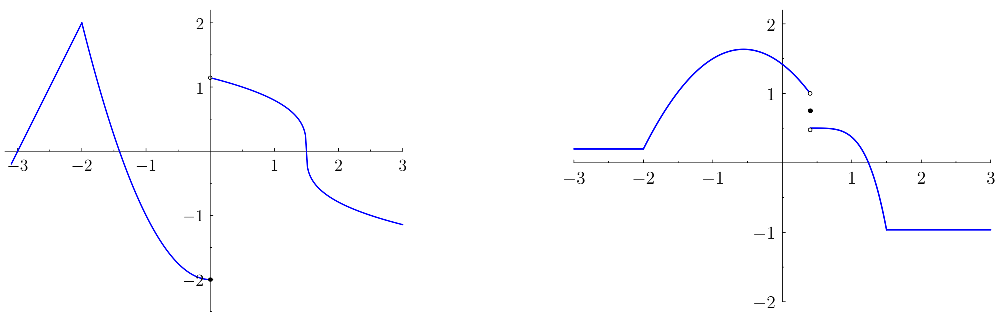
$$f'_-(\pi) = g'_1(\pi) = (\sin x)'\big|_{x=\pi} = \cos\pi = -1$$

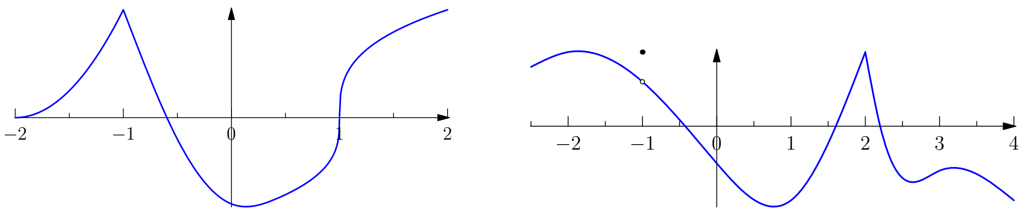
i

$$f'_+(\pi) = g'_2(\pi) = (ax+b)'\big|_{x=\pi} = a.$$

Jasno je da je $a = -1$, a iz prvog uvjeta dobijemo da je $b = \pi$. ■

Vježba 7.9 Dana su četiri grafa funkcije. Odredite točke u kojima funkcije nisu diferencijabilne te objasnite zašto!





Slika 7.11

Vježba 7.10 Pokažite da funkcija $f(x) = |x-6|$ nije diferencijabilna u $x = 6$.

Vježba 7.11 Odredite točku u kojoj funkcija $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ ima vertikalnu tangentu. Obrazložite.

7.4 Osnovna pravila deriviranja

U ovom poglavlju predstavljamo osnovna pravila deriviranja funkcije te pojam viših derivacija.

Teorem 7.4.1 Ako su $f,g : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilne na I, onda vrijedi:

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),\ x \in I$

(2) $(Cf(x))' = Cf'(x),\ C \in \mathbb{R},\ x \in I$

(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\ x \in I$

(4) $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ x \in I$ t.d. $g(x) \neq 0$

Dokaz. (1) Formulu dokazujemo koristeći definiciju derivacije:

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x),
\end{aligned}
$$

Na isti način se izvodi formula za derivaciju razlike funkcija pa pokušajte sami.

(2) Sami dokažite koristeći definiciju derivacije da vrijedi: $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$.

(3) Brojniku pod limesom

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

dodamo i oduzmemo izraz $f(x)g(x+h)$ te imamo

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+(g(x+h)-g(x))f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} f(x) \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

Primijetimo da smo kod zadnje jednakosti koristili neprekinutost funkcije g u točki x:

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x).$$

(4) Primjenimo definiciju derivacije te sređivanjem dvojnog razlomka dobivamo izraz

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{g(x)g(x+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x)g(x+h)}$$

Sada u brojnik dodamo i oduzmemo $f(x)g(x)$ te slijedi

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x)g(x+h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x) - f(x)(g(x+h)-g(x))}{hg(x)g(x+h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)} =$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} g(x)g(x+h)}$$

Dobili smo traženu formulu

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

■

■ **Primjer 7.15** Odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = 5 + x + 2\sqrt{x} + x^4$ (b) $f(x) = x^2\ln x$ (c) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$

(d) $f(x) = \sqrt{2} + x\sqrt{x} + x^{-3} + \frac{\sin x}{x}$ (e) $f(x) = (x^4+2x)\sin x$ (f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

Rješenje.

(a) $f'(x) = (5)' + (x)' + (2\sqrt{x})' + (x^4)' = 0 + 1 + 2\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4x^3$

(b) $f'(x) = (x^2\ln x)' = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x$

(c) $f'(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)' = \dfrac{(x^2+1)'(2x-1) - (x^2+1)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \dfrac{2x(2x-1) - 2(x^2+1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$

(d) $f'(x) = (\sqrt{2})' + (x\sqrt{x})' + (x^{-3})' + \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = 0 + \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - 3x^{-4} + \dfrac{(\sin x)'x - \sin x(x)'}{x^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - 3x^{-4} + \dfrac{(\cos x)x - \sin x}{x^2}$

(e) $f'(x) = (x^4+2x)'\sin x + (x^4+2x)\cos x = (4x^3+2)\sin x + (x^4+2x)\cos x$

(f) $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x})'\ln x - (\sqrt{x})(\ln x)'}{\ln^2 x} = \dfrac{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x(\ln x - 2)}{2x\sqrt{x}\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 2}{2\sqrt{x}\ln^2 x}$ ■

Vježba 7.12 Dokaži da umnožak triju diferencijabilnih funkcija ima derivaciju

$$(f\cdot g\cdot h)' = f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'.$$

Naputak: $(fgh)' = ((fg)h)' = (fg)'h + (fg)h'$.

Više derivacije

Ako je f diferencijabilna funkcija na I, tada je f' isto funkcija na I. Ako je f' diferencijabilna na I, tada ona ima derivaciju $f'' = (f')'$ koju zovemo druga derivacija funkcije f. Nastavkom ovog procesa možemo definirati sve više derivacije funkcije f. Označavamo ih sa sljedećim oznakama:

- druga derivacija: $f'' = (f')' = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$
- treća derivacija: $f''' = (f'')' = \ldots = \frac{d^3 f}{dx^3}$
- n-ta derivacija: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = \frac{d^n f}{dx^n}$

Primjer 7.16 Izračunajte $f^{(iv)}(x)$ ako je $f(x) = x^7 + 3x^4 + \sqrt{x} + 2$.

Rješenje. Deriviranjem dobijemo redom:

$$f'(x) = 7x^6 + 12x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$f''(x) = (f'(x))' = 42x^5 + 36x^2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = 210x^4 + 72x + \frac{3}{8\sqrt{x^5}},$$

$$f^{(iv)}(x) = (f'''(x))' = 840x^3 + 72 - \frac{15}{16\sqrt{x^7}}.$$

■

Vježba 7.13 Izračunajte f''' ako je $f(x) = x^3 \ln x$.

Za neke funkcije možemo jednostavno pronaći eksplicitnu formulu za n-tu derivaciju funkcije $f^{(n)}$ koju onda možemo koristiti za traženje bilo koje više derivacije. Pogledajmo dva primjera.

Primjer 7.17 Nađite n-tu derivaciju funkcije $f(x) = a^x$.

Rješenje. Iz $f'(x) = a^x \ln a$ i $f''(x) = a^x \ln^2 a$ možemo zaključiti da je $f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a$. To se lako pokaže matematičkom indukcijom tj. $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (a^x \ln^n a)' = a^x \ln^{n+1} a$. ■

Primjer 7.18 Nađite n-tu derivaciju funkcije $f(x) = e^{2x}$.

Rješenje. Iz $f'(x) = 2e^{2x}$ i $f''(x) = 4e^{2x}$ možemo zaključiti da je $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$. To se lako pokaže matematičkom indukcijom. ■

Vježba 7.14 Nađite n-tu derivaciju funkcije $f(x) = \ln(3x+1)$.

Određivanje i korištenje n-te derivacije funkcije se ponovno javlja kod Taylorove formule u Poglavlju 8.

Vježba 7.15 Dokaži da za bilo koje dvije dvaput diferencijabilne funkcije f i g vrijedi

$$(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

Vježba 7.16 * Matematičkom indukcijom pokažite da vrijedi i općenitije:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

7.5 Derivacija složene i inverzne funkcije

Nakon pravila deriviranja osnovnih operacija nad funkcijama, promatramo postupke za deriviranje kompozicije funkcija i inverza funkcije.

7.5.1 Derivacija složene funkcije

Osnovno pitanje ovog poglavlja je kako deriviramo složenu funkciju $y = f(g(x))$ odnosno kompoziciju dviju funkcija f i g?

Ako označimo $y = f(u)$, $u = g(x)$, tada je $\frac{dy}{du} = f'(u)$ i $\frac{du}{dx} = g'(x)$. Sljedeći teorem će pokazati da vrijedi ***lančano pravilo***:

$$(f \circ g)'(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Teorem 7.5.1 Neka je kompozicija $f \circ g$ dobro definirana u nekoj točki x, te neka je g diferencijabilna u točki x, a f diferencijabilna u $g(x)$. Tada je kompozicija $f \circ g$ diferencijabilna u x i vrijedi

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Dokaz. Izvedimo derivaciju kompozicije pomoću definicije

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(g(x+\triangle x)) - f(g(x))}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(g(x+\triangle x)) - f(g(x))}{g(x+\triangle x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\triangle x) - g(x)}{\triangle x}.$$

Da bi izrazi u nazivniku bili različiti od nule, mora postojati okolina točke x takva da za sve točke a iz te okoline vrijedi da je $g(a) \neq g(x)$ pa ćemo to uzeti za dodatnu pretpostavku.

Sada uvedemo oznaku $u = g(x)$ i $\triangle u = g(x+\triangle x) - g(x)$. S obzirom da je g neprekinuta slijedi da ako $\triangle x \to 0$ tada $\triangle u = g(x+\triangle x) - g(x) \to 0$ te dobivamo

$$f'(u) = \lim_{\triangle u \to 0} \frac{f(u+\triangle u) - f(u)}{\triangle u} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{g(x+\triangle x) - g(x)}{\triangle x} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

■

Primijenimo sada navedeno pravilo na sljedeći primjer.

■ **Primjer 7.19** Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Rješenje. Vidimo da je $f(x) = f_1(f_2(x))$ gdje je $f_1(x) = \sqrt{x}$, a $f_2(x) = x^2+1$. Koristeći lančano pravilo dobivamo

$$f'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

■

Napomena 7.4 Lančano pravilo za tri funkcije glasi:

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Prvo deriviramo vanjsku funkciju f, zatim srednju funkciju g, te na kraju unutarnju funkciju h. Naravno, analogno pravilo vrijedi i za kompoziciju više od triju funkcija.

■ **Primjer 7.20** Nađite derivaciju funkcije $y = \mathrm{tg}^3(2x)$.

Rješenje. Funkcija $y = \mathrm{tg}^3(2x)$ je kompozicija tri funkcije f, g i h gdje je vanjska funkcija $f(x) = x^3$, srednja funkcija je $g(x) = \mathrm{tg}\, x$ i unutarnja funkcija $h(x) = 2x$. Sada računamo derivaciju prema lančanom pravilu za tri funkcije

$$y'(x) = f'(g(h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) = 3\mathrm{tg}^2(2x) \cdot (\mathrm{tg}(2x))' = 3\mathrm{tg}^2(2x) \cdot \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2 = \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

■

■ **Primjer 7.21** Odredite derivacije sljedećih funkcija: (a) $f_1(x) = \sin(x^2)$ (b) $f_2(x) = \sin^2 x$.

Rješenje.

(a) $f_1'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$ jer je sinus vanjska funkcija, a kvadrat unutarnja.

(b) $f_2'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$ jer je kvadrat vanjska funkcija, a sinus unutarnja. ■

Vježba 7.17 Vrijedi li $(f \circ g)'(x) = (g \circ f)'(x)$? Obrazložite ili navedite protuprimjer.

■ **Primjer 7.22** Odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \sqrt{\sin^3(2x+5)}$; (b) $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2+3x}\right)$; (c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Rješenje.

(a) $f'(x) = ((\sin(2x+5))^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}\sqrt{\sin(2x+5)} \cdot \cos(2x+5) \cdot 2 = 3\sqrt{\sin(2x+5)}\cos(2x+5)$

(b) $f'(x) = (\ln\left(\frac{2}{x^2+3x}\right))' = \frac{1}{\frac{2}{x^2+3x}}(\frac{2}{x^2+3x})' = \frac{x^2+3x}{2}(-\frac{2}{(x^2+3x)^2} \cdot (2x+3)) = -\frac{2x+3}{x^2+3x}$.

(c) $f'(x) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})' = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}) = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3}$. ■

Vježba 7.18 Odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ (b) $f(x) = e^{5x^2+\sqrt{x}}$ (c) $g(x) = x^3\sin^2(4x)$

Primjena lančanog pravila u praksi

Kada u balon upuhujemo zrak, mijenjaju mu se i volumen i radijus te su njihove stope (brzine) promjene u međusobnom odnosu. No, jasno je da je u ovom slučaju puno lakše izmjeriti brzinu promjene volumena nego brzinu promjene radijusa. Dakle, ideja je da brzinu promjene jedne veličine računamo koristeći brzinu promjene druge veličine koju je lakše izmjeriti. Koristimo vezu između tih dviju veličina te primjenom složenog deriviranja (lančanog pravila) dobijemo traženu vezu između brzina promjene.

■ **Primjer 7.23** Naftna mrlja iz nasukanog tankera se širi u obliku kruga čiji se radijus povećava s konstantnom brzinom od 2 m/s. Kojom se brzinom povećava površina mrlje u trenutku kada je $r = 60$ m?

Rješenje. Površina mrlje u obliku kruga je $P(r) = r^2\pi$ gdje je radijus $r = r(t)$ funkcija vremena. Zadano je $r'(t_0) = 2$ m/s, a tražimo $\frac{dP}{dt}\,|_{r=60\,\mathrm{m}}$. Slijedi

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = P'(r) \cdot r'(t) = 2r\pi \cdot 2 = 4r\pi$$

te dobivamo

$$\frac{dP}{dt}\,|_{r=60m} = 4\pi \cdot 60\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s} = 240\pi\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

■

■ **Primjer 7.24** Zrak se upuhuje u okrugli balon tako da se volumen povećava brzinom od 100 cm^3/s. Kako brzo raste radijus balona kada je dijametar 50 cm?

Rješenje. Zadano je $\frac{dV}{dt} = 100\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$, a tražimo $\frac{dr}{dt}$ kada je $r = 25$ cm. Znamo da je $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ te na tu formulu primijenimo lančano pravilo i dobijemo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4r^2\pi\frac{dr}{dt}.$$

Slijedi da je

$$\frac{dr}{dt} = \frac{100\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}}{4r^2\pi}.$$

Uvrštavanjem $r = 25cm$ dobivamo

$$\frac{dr}{dt}\Big|_{r=25} = \frac{100\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}}{4\cdot 625\pi\,\mathrm{cm}^2} = \frac{1}{25\pi}\mathrm{cm}/\mathrm{s}.$$

■

Vježba 7.19 Tanker vode je oblika obrnutog kružnog stošca radijusa baze 2 m i visine 4 m. Vode se upumpava u tanker s brzinom od $2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Odredite brzinu rasta razine vode u tankeru kada je dubina vode 3 m. (rez: $\frac{8}{9\pi}\mathrm{m}/\mathrm{min}$)

Sada ćemo proučavati probleme kod kojih je veza između varijabli izražena implicitnim jednadžbama.

■ **Primjer 7.25** Zadana je elipsa $4x^2 + 9y^2 = 36$ po kojoj se giba točka $T(x,y)$, gdje su x i y funkcije koje ovise o vremenu t.
(a) Ako je $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$, nađite $\frac{dx}{dt}$ kada su $x = 2$ i $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
(b) Ako je $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$, nađite $\frac{dy}{dt}$ kada su $x = -2$ i $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
(c) Odredite brzinu točke T na elipsi u trenutku koji odgovara uvjetima pod a).

Rješenje. Jednadžbu $4x^2 + 9y^2 = 36$ deriviramo po t koristeći lančano pravilo te dobivamo

$$8x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dy}{dt} = 0.$$

(a) Slijedi

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{9y}{4x}\frac{dy}{dt}$$

te uvrštavanjem $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$, $x = 2$ i $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ u dobiveni izraz imamo $\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{5}}{4}$.
(b) Slijedi

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4x}{9y}\frac{dx}{dt}$$

te uvrštavanjem $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$, $x = -2$ i $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ u dobiveni izraz imamo $\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.
(c) Brzina ima smjer tangente na elipsu, a iznos brzine se dobije iz Pitagorinog poučka:

$$v(t) = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$$

jer su derivacije po x i y ustvari komponente brzine u smjeru osi x i y. Dakle, dobivamo da je

$$v = \sqrt{\frac{5}{16} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{12}.$$

■

■ **Primjer 7.26** Auto putuje na zapad brzinom od 50 km/h, a auto B putuje na sjever brzinom od 60 km/h i kreću se prema istom cilju. Kojom se brzinom auti približavaju jedan drugome u trenutku kada je auto A udaljen 0.3 km , a auto B 0.4 km od cilja?

Rješenje. Smjestimo aute A i B u koordinatni sustav tako da je cilj u ishodištu sustava, auto A na pozitivnom dijelu osi x, a B na negativnom dijelu osi y. Tada je $\frac{dx}{dt} = -50\,\mathrm{km/h}$ i $\frac{dy}{dt} = 60\,\mathrm{km/h}$ jer se auto A kreće u smjeru pada varijable x, a auto B u smjeru rasta varijable y. Udaljenost između auta A i B označavamo sa z te iz Pitagorinog poučka slijedi

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Sada izraz deriviramo po t i dobivamo

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}.$$

Tražimo brzinu promjene od z u trenutku s vrijednostima $x = 0.3$ km, $y = -0.4$ km i $z = \sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = 0.5$ km te dobivamo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2z}(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}) = 0.6 \cdot (-50) - 0.8 \cdot 60 = -30 - 48 = -78\,\mathrm{km/h}$$

■

Vježba 7.20 Avion koji leti horizontalno na visini od 3 km brzinom od 400 km/h prolazi točno iznad radarske stanice. Nađite brzinu rasta udaljenosti između aviona i radara kada je avion udaljen 5 km od radara. (rez:320 km/h)

7.5.2 Derivacija inverzne funkcije

Znamo kako su povezane funkcija i njena derivacija. Sada se prirodno nameće sljedeće pitanje:

Pitanje. Kako su povezane derivacija od funkcije f i derivacija inverzne funkcije f^{-1} odnosno funkcije f' i $(f^{-1})'$?

Izvod formule Znamo da vrijedi $(f \circ f^{-1})(y) = y$. Deriviramo tu jednakost po y koristeći lančano pravilo

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \left| \frac{d}{dy} \right.$$

i dobijemo

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y))' = 1.$$

Sada je

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dakle, **formula za derivaciju inverzne funkcije** glasi

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Koristeći

$$y = y(x) \;\Leftrightarrow x = x(y)$$

dobijemo kraći izvod i zapis formule koji glase:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'(y)}$$

odnosno

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}.$$

Nakon upotrebe same formule, treba srediti izraz na desnoj strani formule tako da varijabla na desnoj strani biti ista kao varijabla na lijevoj strani formule. Pogledajmo primjer.

■ **Primjer 7.27** Koristeći formulu za derivaciju inverzne funkcije, nađite derivaciju funkcija :
(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (b) $f(x) = \arcsin x$.

Rješenje. (a) Znamo da je $y = x^{\frac{1}{3}}$ inverzna funkcija od $x = y^3$ te slijedi

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

(b) Znamo da je $y = \arcsin x$ inverzna funkcija od $x = \sin y$ te slijedi

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

U sređivanju desne strane smo koristili činjenicu da je $\cos y > 0$ jer je $y \in \mathrm{Im}\,(\arcsin) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. ■

Vježba 7.21 Koristeći formulu za derivaciju inverzne funkcije, odredite derivacije sljedećih funkcija: (a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (b) $f(x) = \ln x$.

7.6 Derivacije elementarnih funkcija

U sklopu Primjera 7.6 smo izveli sljedeće derivacije:

$$\begin{array}{lll} (ax)' = a, & (x^2)' = 2x, & (c)' = 0 \\ (e^x)' = e^x, & (\ln x)' = \frac{1}{x}, & (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} \\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, & (\sin x)' = \cos x, & (x^n)' = nx^{n-1}. \end{array}$$

U ovom ćemo poglavlju izvesti formule za derivaciju svih ostalih elementarnih funkcija koje čine tablicu derivacija.

7.6.1 Derivacije trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija

Derivaciju funkcije sinus izveli smo direktno iz definicije u Primjeru 7.6, a derivaciju njezine inverzne funkcije smo upravo izračunali u prethodnom poglavlju. Da bismo dobili derivaciju funkcije kosinus, poslužit ćemo se poznatom vezom funkcija sinus i kosinus ($\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$), derivacijom funkcije sinus i formulom za derivaciju složene funkcije:

$$(\cos x)' = (\sin(x+\frac{\pi}{2}))' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) \cdot (x+\frac{\pi}{2})' = -\sin x,$$

tj.

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Vježba 7.22 Izvedite formulu za derivaciju funkcije $f(x) = \arccos x$ koristeći derivaciju inverzne funkcije.

Dobije se formula

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivaciju funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$ dobivamo koristeći formulu za derivaciju kvocijenta:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

tj.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Da bismo izračunali derivaciju inverzne funkcije $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ koristit ćemo trigonometrijski identitet $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ te dobijemo:

$$(f^{-1}(y))' = (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Prema tome,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Derivacije ostalih trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija izvest ćete sami u okviru sljedećeg zadatka. Formule koje ćete dobiti su:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Vježba 7.23 Izvedite formule za derivacije funkcija:

$(a) f(x) = \arccos x,\ |x| \leq 1,$
$(b) f(x) = \operatorname{ctg} x,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$
$(c) f(x) = \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R}.$

■ **Primjer 7.28** Odredite formulu za n-tu derivaciju funkcije $f(x) = \cos x$.

Rješenje. Računamo prve četiri derivacije: $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ i $f^{(\text{iv})}(x) = \cos x$. Vidimo da se derivacije ciklički ponavljaju pa možemo zaključiti da vrijedi $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad k = 0, 1, \ldots.$ ■

7.6.2 Derivacija logaritamske i eksponencijalne funkcije

Derivaciju funkcije $f(x) = \ln x$ izvest ćemo izravno iz definicije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln(1 + \frac{h}{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x}}{h} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Koristeći da za $x > 0$ vrijedi $\ln(1 + \frac{h}{x}) \sim \frac{h}{x}$ kada $x \to 0$, dobijemo

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Derivaciju ekponencijalne funkcije $f(x) = \mathrm{e}^x$ smo već izveli u Primjeru 7.6 te smo dobili da je

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.$$

Derivaciju logaritamske funkcije sa bazom a izvedemo na sljedeći način:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

U izvodu derivacije opće logaritamske funkcije s bazom $a > 0$, $a \neq 1$ koristimo postupak logaritamskog deriviranja. To znači da funkciju koju želimo derivirati zapišemo u obliku :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$$

te ju zatim deriviramo kao složenu funkciju. Tim postupkom za $f(x) = a^x$ dobivamo:

$$(a^x)' = (\mathrm{e}^{x\ln a})' = \mathrm{e}^{x\ln a}(x\ln a)' = \mathrm{e}^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

Dakle, dobili smo formule

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, \qquad (a^x)' = a^x \ln a.$$

7.6.3 Derivacija hiperboličkih i area funkcija

Hiperboličke funkcije su definirane pomoću eksponencijalne funkcije te je za njihovo deriviranje dovoljno znati derivaciju eksponencijalne funkcije, osnovna pravila deriviranja i formulu za deriviranje složene funkcije.

Sada ćemo to pokazati na izvodu derivaciju funkcije $f(x) = \operatorname{sh} x$:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \operatorname{ch} x$$

Vježba 7.24 Izvedite formule za derivacije sljedećih funkcija:

$$\text{(a) } \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \text{(b) } \operatorname{th} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \qquad \text{(c) } \operatorname{cth} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$

Dobivene derivacije hiperboličkih funkcija su:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Budući da su area funkcije inverzne funkcije hiperboličkih funkcija, njihove derivacije možemo dobiti pomoću derivacija hiperboličkih funkcija ili direktnim deriviranjem formula za area funkcije (area funkcije su definirane u poglavlju o elementarnim funkcijama). Prvim načinom za $f^{-1}(y) = \operatorname{arsh} y$ dobivamo

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\operatorname{sh} x)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Do istog rezultata dolazimo izravnim deriviranjem funkcije $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Ostale derivacije ćete izvesti za vježbu.

Vježba 7.25 Odredi derivacije sljedećih funkcija na dva načina, pomoću inverzne funkcije i direktno:
(a) $\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $x \geq 1$,
(b) $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$,
(c) $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{x-1}$. $|x| > 1$.

Dobivene formule za derivacije area funkcija su:

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Primijetimo da funkcije $y = \operatorname{arth} x$ i $y = \operatorname{arcth} x$ imaju samo naoko istu derivaciju. Naime, domene tih funkcija su disjunktne. Podsjetimo se da je domena $D(\operatorname{arth}) = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 1\}$, dok je domena $D(\operatorname{arcth}) = \{x \in \mathbb{R}, |x| > 1\}$.

7.6.4 Derivacija opće potencije

Do sada se još nismo uvjerili da za svaku realnu konstantu c zaista vrijedi

$$(x^c)' = cx^{c-1}.$$

Za prirodne brojeve c formula slijedi iz binomnog teorema, što smo već pokazali u Primjeru 7.6. Koristeći logaritamsko deriviranje dobit ćemo formulu za deriviranje opće potencije $f(x) = x^c$, $c \in \mathbb{R}$. Prvi korak je da potenciju zapišemo pomoću eksponencijalne funkcije te ju deriviramo prema lančanom pravilu:

$$f'(x) = (x^c)' = (\mathrm{e}^{c\ln x})' = \mathrm{e}^{c\ln x}\frac{c}{x} = x^c\frac{c}{x} = cx^{c-1}.$$

■ **Primjer 7.29** Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = x^x$ za $x > 0$.
Rješenje. Koristimo logaritamsko deriviranje i dobivamo $f'(x) = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$. ■

■ **Primjer 7.30** Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ za $x > 0$.
Rješenje. Koristimo logaritamsko deriviranje i dobivamo

$$f'(x) = (\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x})' = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = x^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

■

Sada kada smo izveli sve tablične derivacije, možete rješavati sve zadatke s derivacijama.

Vježba 7.26 Odredi derivacije sljedećih funkcija:
(a) $f(x) = (1+x)^x$ (b) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

Vježba 7.27 Izračunajte f' ako je:
(a) $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{e^{\operatorname{ctg} x}}$ (b) $f(x) = x\operatorname{arctg}(e^{-x^2})$ (c) $f(x) = \ln^2\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Vježba 7.28 Izračunajte $f'(\ln 2)$ ako je $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x+1})$.

Vježba 7.29 Izračunajte $f''(-2)$ ako je $f(x) = \arcsin^2(\frac{1}{x})$.

Funkcija	**Derivacija**
x^n	nx^{n-1}, $n \in \mathbb{N}$
x^c	cx^{c-1}, $c \in \mathbb{R}$, $x > 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
$\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$, $x \neq 0$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$
Trigonometrijske i arkus funkcije	
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Hiperbolne i area funkcije	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\operatorname{ar\,sh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ar\,ch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ar\,th} x$	$\frac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{ar\,cth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert > 1$

Tablica 7.1: **Tablica derivacija**

7.7 Matematičko modeliranje pomoću derivacije

Kao što smo već vidjeli u Poglavlju 7.2.1, derivacija $f'(x_1)$ je trenutna stopa promjene funkcije $y = f(x)$ u odnosu na varijablu x u točki $x = x_1$ odnosno

$$f'(x_1) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Vidjeli smo da je brzina gibanja tijela stopa promjene prijeđenog puta u odnosu na vrijeme. No proučavanje stope promjene je važno i primjenjivo u svim prirodnim, tehničkim i društvenim znanostima. Primjerice, stopa promjena cijene proizvodnje u odnosu na broj proizvoda se zove marginalni trošak i važan je pojam u ekonomiji. U fizici, stopa promjene rada u odnosu na vrijeme zovemo snaga. Biolozi proučavaju stope promjene populacije bakterija u odnosu na vrijeme ili stopu promjene broja virusa nakon terapije. Sada ćemo prezentirati nekoliko primjera iz prakse koji prezentiraju osnovne matematičke modele s derivacijom funkcije.

■ **Primjer 7.31** Pozicija točkastog tijela je dana funkcijom $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$.
(a) Odredite brzinu u trenutku t.
(b) Odredite brzinu nakon $2s$ i nakon $4s$.
(c) Kada tijelo miruje? Kada se tijelo giba prema naprijed?
(d) Odredite akceleraciju nakon $4s$.
(e) Nacrtajte grafove od $s(t)$, $v(t)$ i $a(t)$ za $t \in [0,5]$ te odredite interval na kojem se tijelo giba unazad.
(f) Kada tijelo ubrzava, a kada usporava?

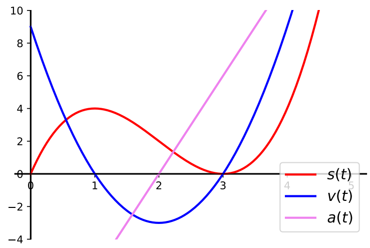
Rješenje.
(a) Funkcija brzine je derivacija od $s(t)$ te dobivamo

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

(b) Uvrštavanjem u funkciju brzine dobijemo tražene brzine $v(2) = -3\,\mathrm{m/s}$ i $v(4) = 9\,\mathrm{m/s}$.
(c) Tijelo miruje kada je $v(t) = 0$ odnosno $3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-3)(t-1) = 0$. Dakle, tijelo miruje u trenutcima kada je $t = 1$ i $t = 3$. Tijelo se giba prema naprijed kada je brzina tijela pozitivna odnosno $3(t-1)(t-3) > 0$, a to je za $t \in [0,1] \cup [3, +\infty\rangle$.
(d) Akceleracija je promjena brzine u jedinici vremena odnosno

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12.$$

Sada je $a(4) = 12\,\mathrm{m^2/s}$.
(e) Grafovi su nacrtani na Slici 7.12.



Slika 7.12 grafovi od $s(t)$, $v(t)$ i $a(t)$

Tijelo se giba unazad na intervalu na kojem funkcija $s(t)$ pada, a to je na intervalu $[1,3]$.
(f) Tijelo ubrzava kada je brzina pozitivna i raste ili negativna i pada. Iz grafa vidimo da je to za $t \in [1,2]$ i $t > 3$. ■

■ **Primjer 7.32** Lopta je ispuštena sa vrha zgrade te je pala na ulicu nakon $4s$. Izračunajte visinu zgrade.

Rješenje. Znamo da je akceleracija tijela pri slobodnom padu konstantna i iznosi $a(t) = -9.81\,\mathrm{m/s^2}$. Zbog $v'(t) = a(t)$ slijedi da je

$$v'(t) = -9.81.$$

Jednadžbu s derivacijom funkcije zovemo diferencijalna jednadžba. Cilj rješavanja ove diferencijalne jednadžbe je naći funkciju brzine $v(t)$ čija je derivacija jednaka $a(t)$. Zaključujemo da je $v(t) = -9.81\,t + C$ jer sve funkcije ovog oblika imaju derivaciju jednaku -9.81. U funkciju uvrstimo podatak da je početna brzina lopte jednaka $v(0) = 0\,\mathrm{m/s}$ te dobijemo da je $C = 0$. Sada zbog $h'(t) = v(t)$ dobijemo novu diferencijalnu jednadžbu

$$h'(t) = -9.81\,t.$$

Vidimo da je funkcija visine oblika $h(t) = -4.905t^2 + h_0$ gdje je h_0 konstanta. Koristeći podatak da je $h(4) = 0$ dobijemo da je

$$h(0) = h_0 = h(4) + 4.905 \cdot 16 = 78.48\,\text{m}.$$

Dakle, zgrada je visoka 78.48 m. ■

Pogledajmo sada jedan primjer primjene derivacije u biologiji.

■ **Primjer 7.33** Neka je $f(t) = n_0\,\mathrm{e}^t$ broj jedinki u populaciji bakterija u homogenom mediju u trenutku t s tim da je početna populacija $n_0 = 100$ bakterija. Odredite stopu promjene rasta broja bakterija nakon 4 sata.

Rješenje.
Vidimo da je $f(0) = n_0$ i $f(t) = n_0\,\mathrm{e}^t$. Stopa promjene rasta broja bakterija je

$$\frac{df}{dt} = n_0\mathrm{e}^t = f(t)$$

te nakon $t = 4h$ iznosi

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=4} = 100\,\mathrm{e}^4 \simeq 5394.$$

Dakle, stopa promjene rasta funkcije nakon 4 sata je 5394 bakterija na sat. ■

Primijetimo da je diferencijalna jednadžba u ovom primjeru bila oblika

$$\frac{df}{dt} = k\,f(t)$$

za neku konstantu k. Navedena diferencijalna jednadžba predstavlja matematički model koji prilično dobro opisuje populaciju za koju su derivacija funkcije i sama funkcija međusobno proporcionalne. Ovu jednadžbu zovemo i **zakon prirodnog rasta** ($k > 0$) **ili pada** ($k < 0$). Zna se da su jedina rješenja ovog tipa jednadžbe eksponencijalne funkcije oblika

$$f(t) = f(0)\,\mathrm{e}^{kt}.$$

Stoga zaključujemo da ovaj matematički model opisuje populaciju koja eksponencijalno raste ili pada.

Vježba 7.30 Svjetska populacija je 1950. godine iznosila 2560 milijuna ljudi, a 1960. godine 3040 milijuna. Koristeći zakon prirodnog rasta, procijenite ljudsku populaciju 2020. godine.

Slijedi nekoliko primjera matematičkog modeliranja derivacijom u elektrotehnici i ekonomiji.

■ **Primjer 7.34** Količina naboja Q koja je prošla kroz točku na žici do trenutka t je dana funkcijom

$$Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2.$$

Nađite jakost struje u trenutku $t = 0.5s$ i $t = 1s$ te odredite trenutak u kojem je struja najslabija. ($1A = 1\frac{C}{s}$ tj. amper=kulon/sekunda)

Rješenje. Jakost struje je $I(t) = Q'(t)$ te slijedi da je

$$I(t) = 3t^2 - 4t + 6.$$

Dobijemo $I(0.5s) = 4.75A$ i $I(1s) = 5A$. Jakost struje je polinom 2. stupnja čiji graf je parabola okrenuta prema gore. Znamo da se minimum postiže u tjemenu parabole te dobivamo da je struja najslabija u trenutku $t = \frac{2}{3}s$ i tada iznosi $I(\frac{2}{3}s) = \frac{14}{3}A$. ■

Vježba 7.31 Trošak proizvodnje x komada nekog artikla je $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.
a) Odredite prosječnu stopu promjene troška C u odnosu na x ako se razina proizvodnje mijenja
(i) s $x = 100$ na $x = 105$; (ii) s $x = 100$ na $x = 101$;
b) Odredite trenutnu stopu promjene od C u odnosu na x (tzv. marginalni trošak) za $x = 100$.

Vježba 7.32 Tablica pokazuje vrijednosti virusnog opterećenja $V(t)$ kod pacijenta izmjerene t dana nakon početka određene terapije.

t	4	8	11	15	22
V(t)	53	18	9.4	5.2	3.6

a) Odredite prosječnu stopu promjene V u odnosu na t na pojedinom vremenskom intervalu:
(i) $[4,11]$; (ii) $[4,11]$; (iii) $[11,15]$ (iv) $[11,22]$
b) Odredite i interpretirajte vrijednost derivacije $V'(11)$.

7.8 Tangenta i normala na graf funkcije

U ovom poglavlju ćemo se baviti tangentom i normalom na graf funkcije u točki. Rješavat ćemo nešto složenije geometrijske zadatke povezane sa ova dva pojma. Prisjetimo se da jednadžba pravca kroz točku $T_0(x_,y_0)$ s koeficijentom smjera k glasi:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

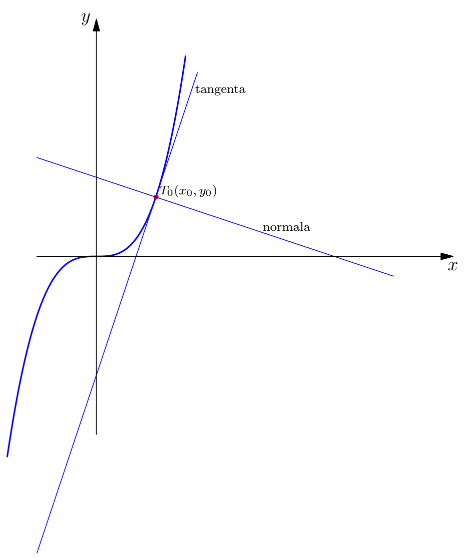
te jednadžba tangente na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ glasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Normala na graf funkcije u točki T_0 je pravac koji prolazi točkom T_0 i okomit je na tangentu u toj točki. Jednadžba normale na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ glasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Ako je $f'(x_0) = 0$, tada tangenta ima jednadžbu $y = y_0$, a normala $x = x_0$.



Slika 7.13 tangenta i normala na graf funkcije u točki T_0

Sada ćemo riješiti nekoliko primjera.

■ **Primjer 7.35** Odredite jednadžbe tangente i normale na graf funkcije $f(x) = x^3 - x + 2$ u točki s apscisom 1.

Rješenje. Vrijedi $f(1) = 1 - 1 + 2 = 2$, pa su koordinate točke na grafu funkcije $T(1,2)$. Derivacija je $f'(x) = 3x^2 - 1$ te je $f'(1) = 2$. Jednadžba tangente je $y - 2 = 2(x - 1)$ tj.

$$t \ldots y = 2x,$$

a jednadžba normale:

$$n \ldots y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

tj.

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

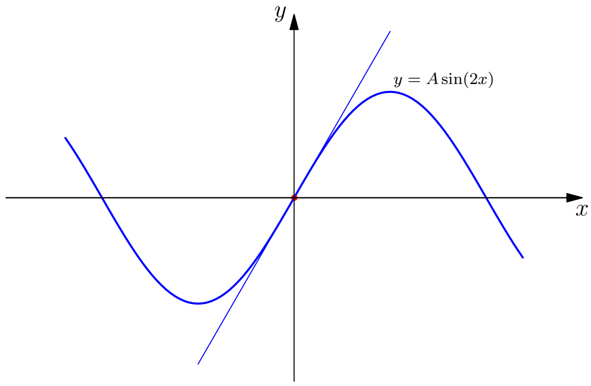
■

■ **Primjer 7.36** Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $y = \sin x$ u $T(0,0)$.

Rješenje. Za funkciju $f(x) = \sin x$ je $f'(x) = \cos x$. U točki $x_0 = 0$ derivacija iznosi $f'(0) = 1$. Zato jednadžba tangente u točki $T(0,0)$ na grafu funkcije glasi: $y - 0 = f'(0)(x - 0)$ te dobijemo $y = x$. To znači da graf funkcije sinus ulazi u ishodište pod kutom od $45°$. ■

■ **Primjer 7.37** Odredite amplitudu A sinusoide $y = A\sin(2x)$ ako je poznato da tangenta postavljena na sinusoidu u ishodištu zatvara s pozitivnim dijelom x-osi kut $\varphi = 60°$.

Rješenje. Vidi Sliku 7.14. Zadano je da je koeficijent smjera tangente na sinusoidu u ishodištu jednak $\operatorname{tg} 60°$. Znamo da to znači da je $y'(0) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Vrijedi $y' = 2A\cos(2x)$ te je $y'(0) = 2A\cos 0 = 2A$ te dobijemo $2A = \sqrt{3}$ tj. $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ■



Slika 7.14 Primjer 7.37

■ **Primjer 7.38** U kojoj točki krivulje $y = \ln(2x + 1)$ treba postaviti tangentu na krivulju tako da ona zatvara kut od $30°$ s pozitivnim dijelom x-osi?

Rješenje. U ovom zadatku tražimo točku na krivulji $T(x_0, y_0)$ takvu da je

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Deriviranjem $y = \ln(2x + 1)$ dobijemo $y' = \frac{2}{2x+1}$. Uvrstimo u gornju jednadžbu te dobijemo

$$\frac{2}{2x_0 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Slijedi da je $x_0 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$ i $y_0 = \ln(2\sqrt{3})$. ■

■ **Primjer 7.39** Za koju vrijednost parametra a je pravac $y = x - 5$ tangenta krivulje $y = ax^4$?

Rješenje. Ako je pravac $y = x - 5$ tangenta na krivulju u točki $T(x_0, y_0)$, to znači dvije stvari: prvo da je $y'(x_0) = 1$, a drugo da je T jedino sjecište pravca i krivulje. Deriviranjem $y = ax^4$ dobijemo $y' = 4ax^3$ te prvi uvjet $y'(x_0) = 1$ glasi

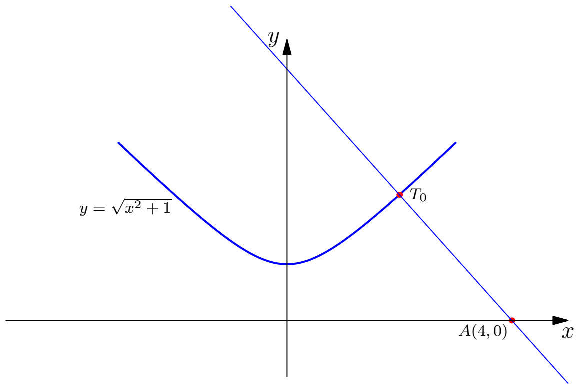
$$4ax_0^3 = 1.$$

Iz činjenice da je T sjecište pravca i krivulje slijedi da je

$$ax_0^4 = x_0 - 5.$$

Time smo dobili sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koje rješimo tako da iz prve jednadžbe izlučimo a i uvrstimo u drugu te dobijemo $x_0 = \frac{20}{3}$. Slijedi da je $a = \frac{27}{4 \cdot 20^3}$. ■

■ **Primjer 7.40** Na krivulji $y = \sqrt{x^2+1}$ nađite točku najbližu točki $A(4,0)$.



Slika 7.15 udaljenost točke od krivulje

Rješenje. Primijetimo da zadana točka A ne leži na krivulji. Točku na krivulji T_0 koja joj je najbliže ćemo pronaći tako da nađemo normalu na krivulju koja prolazi kroz točku A, a tražena točka $T_0(x_0, y_0)$ će biti upravo presjek dobivene normale i krivulje. Vidi Sliku 7.15. Dakle, normala je pravac s koeficijentom smjera $y'(x_0)$ i točkom $A(4,0)$ te ima jednadžbu

$$n \ldots y - y_A = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_A)$$

odnosno $y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x-4)$. Uvrstimo $y'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}$ te dobijemo

$$n \ldots y = -\frac{\sqrt{x_0^2+1}}{x_0}(x_0 - 4).$$

Sada koristimo činjenicu da je T_0 presjek normale i krivulje te izjednačavanjem y_0 slijedi

$$\sqrt{x_0^2+1} = -\frac{\sqrt{x_0^2+1}}{x_0}(x_0 - 4).$$

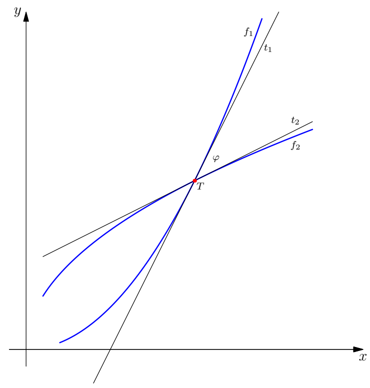
Dijeljenjem s $\sqrt{x_0^2+1}$ dobijemo $1 = \frac{4-x_0}{x_0}$ odnosno $x_0 = 2$ i $y_0 = \sqrt{5}$. Dakle, tražena točka je $T_0(2, \sqrt{5})$.

■

Vježba 7.33 Na krivulji $y = x^2$ nađite točku najbližu pravcu $y = 2x - 10$.

7.8.1 Kut među krivuljama

Kut između dviju krivulja odnosno kut pod kojim se sijeku dvije krivulje definira se kao kut između njihovih tangenata u sjecištu. Vidi Sliku 7.16.



Slika 7.16 kut među krivuljama

Definicija 7.8.1 Neka se grafovi dviju funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ sijeku u točki T te neka su $k_{1,2}$ koeficijenti smjera tangenata $t_{1,2}$ na graf funkcije $y = f_{1,2}(x)$ u točki T. **Kut među krivuljama** φ je kut između tangenata t_1 i t_2 na krivulje u točki sjecišta krivulja T, a računa se formulom

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Po dogovoru uzimamo šiljasti kut tj. $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. ■

■ **Primjer 7.41** Izračunajmo kut pod kojim se sijeku krivulje $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$ u točki $(1,1)$ (nacrtajte sliku!).

Rješenje. Vrijedi $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ i $(x^2)' = 2x$ te je koeficijent smjera prve tangente $k_1 = f_1'(1) = \frac{1}{2}$, a druge $k_2 = f_2'(1) = 2$. Odavde je

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

Kut iznosi $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = 36°52'$. ■

■ **Primjer 7.42** Za koju vrijednost parametra $a > 0$ se grafovi funkcija $y = ax^2$ i $y = a(x-2)^2$ sijeku pod pravim kutem?

Rješenje. Odredimo najprije koordinate presječne točke grafova ovih funkcija:

$$ax^2 = a(x-2)^2 \iff x = x - 2 \quad \text{ili} \quad x = 2 - x.$$

Odavde slijedi $x = 1$ pa je $y = a$. Dakle, grafovi se sijeku u točki $T(1,a)$. Izračunajmo sada koeficijente smjera tangenti na obje krivulje:

Za $y_1 = ax^2$ je $y_1' = 2ax$ odnosno $k_1 = y_1'(1) = 2a$. Za $y_2 = a(x-2)^2$ je $y_2' = 2a(x-2)$ odnosno $k_2 = y_2'(1) = -2a$.

Krivulje će se sjeći pod pravim kutem ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

te dobijemo da je $2a = -\frac{1}{-2a}$ odnosno $a = \pm\frac{1}{2}$. Zbog uvjeta $a > 0$ slijedi da je $a = \frac{1}{2}$. ■

7.9 Pitanja za ponavljanje gradiva

1. Definirajte derivaciju funkcije f u točki x_0. Objasnite dva načina interpretacije $f'(x_0)$.
2. Napišite jednadžbe tangente na graf funkcije f u točki $T(x_0, y_0)$.
3. Napišite izraz za srednju i trenutnu brzinu promjene funkcije na intervalu $[x_1, x_2]$ odnosno u trenutku $x = x_1$.
4. Što znači da je funkcija f diferencijabilna u točki x_0?
5. Dokažite: ako je funkcija diferencijabilna u točki x_0, onda je i neprekinuta u toj istoj točki.
6. Koje od sljedećih tvrdnji su istinite, a koje nisu:
   (T1) f nije diferencijabilna $\Rightarrow f$ nije neprekinuta
   (T2) f neprekidna $\Rightarrow f$ diferencijabilna
   (T3) f nije neprekinuta $\Rightarrow f$ nije diferencijabilna
   Za neistinite tvrdnje, navedite protuprimjere.
7. Skicirajte graf funkcije koja je neprekinuta ali nije diferencijabilna u $x = 2$.
8. Objasnite sve slučajeve u kojima funkcija nije diferencijabilna. Ilustrirajte grafovima.
9. Objasnite riječima te napišite formulu za sljedeća pravila diferenciranja:
   (a) deriviranje potencije;
   (b) deriviranje sume i razlike dviju funkcija;
   (c) deriviranje umnoška funkcije i konstante;
   (d) deriviranje umnoška i kvocijenta dviju funkcija;
   (e) deriviranje kompozicije dviju funkcija;
   (f) deriviranje inverzne funkcije.
10. Izvedite formulu za derivaciju zbroja i umnoška dviju funkcija te derivaciju inverzne funkcije.
11. Koristeći pravilo za derivaciju umnoška, pokažite da za diferencijabilnu funkciju f vrijedi:
$$\frac{d}{dx}f^2(x) = 2f(x)f'(x).$$
12. Dokažite da za diferencijabilnu funkciju f vrijedi:
   (T1) Ako je f parna funkcija, tada je f' neparna.
   (T2) Ako je f neparna, tada je f' parna.
13. Ako je $g(0) = 0$ i $g'(0) = 1$, tada izračunajte derivaciju funkcije $(g \circ g \circ g)(x)$ u točki $x_0 = 0$.
14. Navedite nekoliko primjera primjene derivacije u fizici, biologiji, ekonomiji i drugim znanostima.

Kviz pitalice - **T**očno ili **N**etočno?

1. Ako je $f'(x) = g'(x)$, tada je $f(x) = g(x)$. **T** **N**
2. Radijus snježne pahuljice se mijenja kako se snijeg topi. Trenutna stopa promjene radijusa u odnosu na volumen je $\frac{dV}{dr}$. **T** **N**
3. Ako balon ispuhujemo, stopa promjene volumena u odnosu na vrijeme je pozitivna. **T** **N**
4. Ako $f'(a)$ postoji, tada $\lim_{x\to a} f(x)$ ne mora postojati. **T** **N**
5. Ako je $a + b^2 = 0$, tada je $\frac{da}{db} = -2b$. **T** **N**
6. Ako je $f(x) = 4\sqrt{x} + \frac{5}{x^2}$, tada je $f'(x) = 2x^{-1/2} - 10x^{-3}$. **T** **N**
7. Jednadžba tangente na graf funkcije $y = x^2$ u $x = 4$ je $y = (2x)x + 4$. **T** **N**
8. Ako je $y = e^2$, tada je $y' = 2e$. **T** **N**
9. Vrijedi: $(\ln 10)' = \frac{1}{10}$. **T** **N**
10. Vrijedi: $(10^x)' = x10^{x-1}\ln 10$. **T** **N**
11. Ako je $f(x) = e^{x+2}$, tada je $f'(x) = (x+2)e^{x+1}$. **T** **N**
12. Ako je $f(x) = e^{x+2}$, tada je $f'(x) = e^2e^x$. **T** **N**
13. Ako je $f(3) = 2$, $f'(3) = 4$, $g(3) = 1$ i $g'(3) = 3$ i $h(x) = f(x)g(x)$, tada je $h'(x) = 12$. **T** **N**

14. Vrijedi: $(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$. **T** **N**
15. Ako je f diferencijabilna, tada je $\frac{d}{dx}(\sqrt{f(x)}) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. **T** **N**
16. Ako je f diferencijabilna, tada je $\frac{d}{dx}f(\sqrt{x}) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$. **T** **N**

Rješenja. N,N,N,N,T,T,N,N,N,T,N,T,N,N,T,N

7.10 Zadaci za vježbu

Zadatak 1. Zadana je funkcija $f(x) = x^2 + 3x$.
(a) Pomoću definicije derivacije u točki, izvedite $f'(1)$.
(b) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije f u točki $T(1,4)$;
(c) Odredite brzinu promjene funkcije f u odnosu na varijablu x za $x_0 = 2$.

Zadatak 2. Zadana je funkcija $f(x) = |x+2|$. Ispitajte diferencijabilnost funkcije f u točki $x_0 = -2$.

Zadatak 3. Pomoću definicije derivacije, izvedite derivacije sljedećih funkcija:
(a) $f(x) = (x+1)^2$ (b) $f(x) = \ln x$ (c) $f(x) = \sin(2x)$ (d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Zadatak 4. Pokažite da su sljedeće funkcije neprekidne, a nisu diferencijabilne u točki x_0:
(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$, $x_0 = 2$

Zadatak 5. Pokažite da je

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

neprekidna i diferencijabilna u $x_0 = 1$. Skicirajte graf od f.

Zadatak 6. Pokažite da je

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \le 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$$

neprekidna i nije diferencijabilna u $x_0 = 1$. Skicirajte graf od f.

Zadatak 7. Koristeći definiciju derivacije, ispitajte postoji li $f'(0)$ ako je $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

Zadatak 8. Odredi parametar a tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x-1, & x < 1 \\ ax, & x \ge 1 \end{cases}$$

bude neprekinuta. Potom treba ispitati postoji li $f'(1)$, te ako postoji, izračunati tu vrijednost. Odgovori na isto pitanje, ukoliko umjesto funkcije f imamo funkciju g definiranu na sljedeći način:

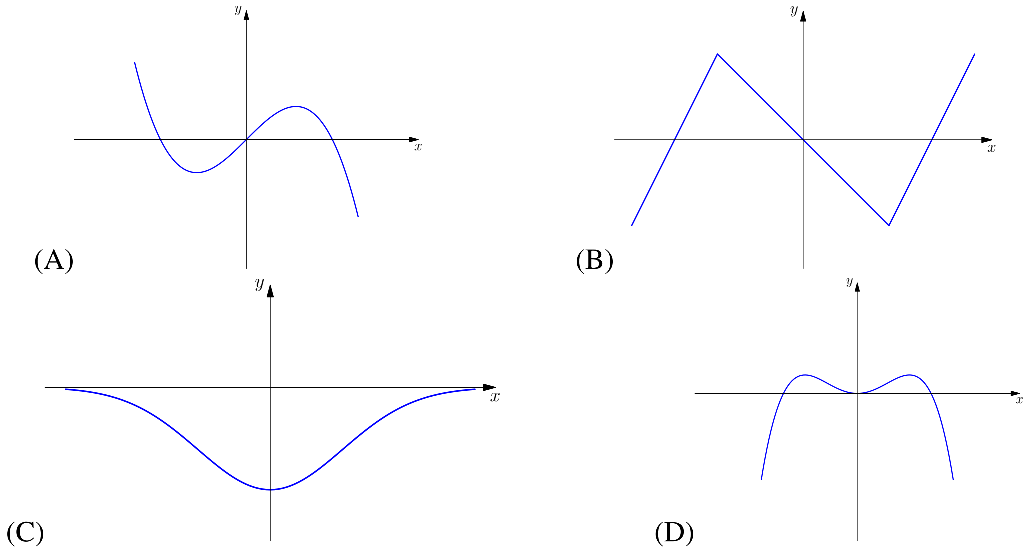
$$g(x) = \begin{cases} -x^2+4x-1, & x < 1 \\ ax^2, & x \ge 1 \end{cases}$$

Zadatak 9. Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ takve da funkcija

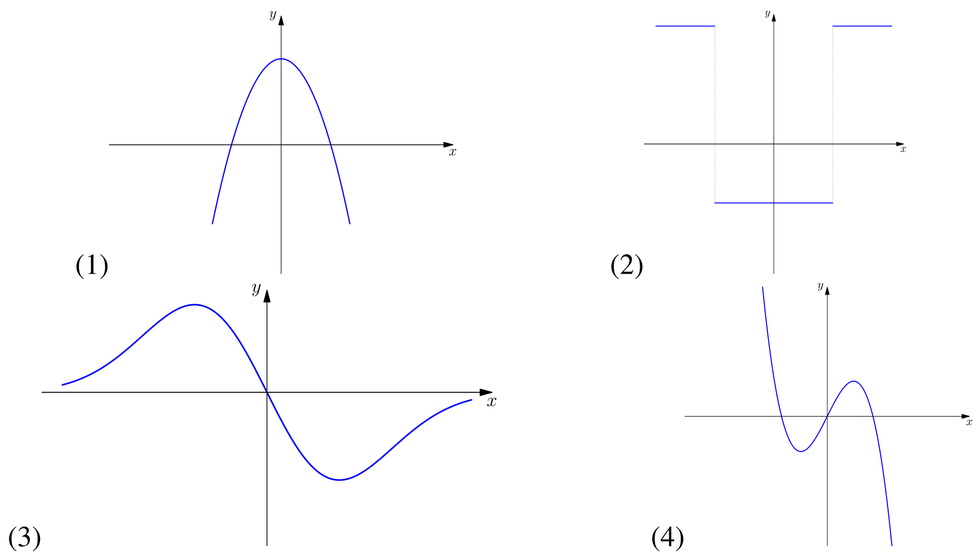
$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2+1}, & x \le 1 \\ x^2+ax+b, & x > 1 \end{cases}$$

bude neprekidna i derivabilna na $\mathbb{R}$.

Zadatak 10. Graf svake funkcije sa Slike 8.16 spojite s pripadnim grafom derivacije sa Slike 8.17.



Slika 7.17 grafovi funkcija



Slika 7.18 grafovi derivacija

Zadatak 11. Izračunati prvu derivaciju funkcije

(a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3}$; (b) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$; (c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
(d) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sin x$; (e) $f(x) = \frac{x \cdot \cos x}{x^2+1}$; (f) $f(x) = (x^2+1)^{10}$.
(g) $f(x) = \mathrm{th}(4x)$; (h) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$; (i) $f(x) = \mathrm{cth}\,\frac{x}{2x+1}$;
(j) $f(x) = \mathrm{tg}^3(2x)$; (k) $f(x) = \mathrm{e}^{-\sin(2x)}$; (l) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$.

Zadatak 12. Izračunati prvu derivaciju funkcije

(a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \mathrm{arctg}(\frac{1}{x})$; (b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; (c) $f(x) = \frac{\mathrm{ctg}(3x)}{x}$;
(d) $f(x) = x^3 \cdot \sin^2(4x)$; (e) $f(x) = x \cdot \ln(x\,\mathrm{ch}x)$; (f) $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{arsh}(e^{-2x})$.
(g) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \cos^3(2x)$; (h) $f(x) = \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$; (i) $f(x) = (\sqrt{x})^x$;
(j) $f(x) = x^x + \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$. (k) $f(x) = \mathrm{tg}^3\,\frac{\pi x}{3}$; (l) $f(x) = \ln^2(\sin(5x))$;
(m) $f(x) = x \cdot \cos^2(5x)$; (n) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Zadatak 13. Stranica kvadrata raste brzinom $6\,\mathrm{cm/s}$. Kojom brzinom raste površina kvadrata kada je površina jednaka $16\,\mathrm{cm}^2$?

Zadatak 14. Cilindrični tanker radijusa 5m se puni vodom brzinom od $3\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Kojom brzinom raste visina vode?

Zadatak 15*. Brod A se u podne nalazi 150 km zapadno od broda B. Brod A putuje prema istoku sa $35\,\mathrm{km/h}$, a brod B putuje na sjever sa $25\,\mathrm{km/h}$. Koliko se brzo mijenja udaljenost između brodova u 16 sati?

Zadatak 16. Odredite drugu derivaciju funkcije

(a) $f(x) = \mathrm{arth}(\frac{1}{x})$; (b) $f(x) = \cos(\mathrm{arctg}(x))$.

Zadatak 17. Nađi $f''(1)$ ako je $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^2+1}$.

Zadatak 18. Odredite n-tu derivaciju funkcije :

(a) $f(x) = \ln(ax+b)$; (b) $f(x) = \sin x$; (c) $f(x) = a^x$.

Zadatak 19. Nađite jednadžbu tangente na krivulju:

A. $f(x) = \mathrm{tg}(2x)$; u točki $T(0,0)$; B. $f(x) = \ln(3x)$ u točki sjecišta s osi x;

Zadatak 20. Koristeći formulu za derivaciju inverzne funkcije, odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \arccos x$ (b) $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$ (c) $f(x) = \mathrm{arch}\, x$

Zadatak 21. Pijesak curi iz vreće na način da je nakon t sekundi u vreći preostalo $S(t) = 50(1-\frac{t^2}{15})^3$ kilograma pijeska. Kojom brzinom pijesak curi iz vreće nakon jedne sekunde? U koliko sekundi će se vreća isprazniti? Koja je brzina curenje pijeska u trenutku ispražnjenja?

Zadatak 22. Bolest se širi na način da je broj zaraženih nakon t tjedana dan formulom $N(t) = 5.157 - t^3(t-8)$. Odredite brzinu širenja epidemije nakon 3 tjedna.

Zadatak 23. Pod određenim uvjetima glasina se širi prema jednadžbi

$$p(t) = \frac{1}{1+ae^{-kt}},$$

gdje je $p(t)$ postotak populacije koji je čuo glasinu u trenutku t, gdje su $a,k > 0$.

(a) Izračunajte $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

(b) Odredite brzinu širenja glasine.

(c) Za $a = 10$ i $k = 0.5$ nacrtajte graf od p u nekom programu za crtanje. Grafički odredite trenutak u kojem će 80% populacije čuti glasinu.

Zadatak 24. Frekvencija vibriranja violinske žice je dana s

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

gdje je L duljina žice, T je napetost žice, a ρ je linearna gustoća žice. Pronađite brzinu promjene frekvencije u odnosu na:

(a) duljinu (T,ρ =konst) (b) napetost (L,ρ =konst) (c) linearna gustoća (L,T =konst)

Zadatak 25. Trošak proizvodnje x para traperica nove jesenske kolekcije je $C(x) = 2000+3x+0.01x^2+0.0002x^3$.

a) Odredite trenutnu stopu promjene troška proizvodnje u odnosu na x tzv. funkciju marginalnog troška.

b) Odredite $C'(100)$ i objasnite njeno značenje. Što ta vrijednost predviđa?

(c) Usporedite $C'(100)$ s troškom proizvodnje 101. para traperica.

Zadatak 26. Odredi jednadžbu tangente povučene na graf funkcije $y = x\cdot\sqrt[3]{x-1}$ u točki:

a) s apscisom $x = 0$, b) s apscisom $x = \frac{3}{4}$, c) s apscisom $x = 1$.

Zadatak 27. Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije:
(a) $f(x)=\sqrt{x}$ u $T(1,1)$, (b) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ u $T(0,0)$, (c) $f(x)=|x|$ u $T(0,0)$.

Zdatak 28. Nađite jednadžbu tangente na krivulju:
(a) $f(x)=\operatorname{tg}(2x)$; u točki $T(0,0)$;
(b) $f(x)=\ln(3x)$ u točki sjecišta s osi x.

Zadatak 29. Nađite jednadžbu tangente na krivulju $y=\sqrt{x^2+4}$ paralelne s pravcem $2y=x-1$.

Zadatak 30. Nađite jednadžbu sinusoide kojoj su 0, 1 i 2 susjedne nultočke, a tangenta na tu sinusoidu u ishodištu zatvara kut od $60°$ u odnosu na os x.

Zadatak 31. Nađite jednadžbu parabole s tjemenom u točki $T(0,-1)$ za koju vrijedi da u točki njenog presjeka s pozitivnom poluosi x tangenta na nju zatvara kut od $60°$ u odnosu na os x.

Zadatak 32. Nađite amplitudu A i kutnu brzinu tako da sinusoida $y=A\cdot\sin(x)$ ima tangentu u ishodištu koeficijenta smjera $k=1$, a period $T=4\pi$.

Zadatak 33. Nađite $a\in\mathbb{R}$ tako da je pravac $y=x$ tangenta na graf funkcije $y=ae^x$ u nekoj točki, te nađite $b\in\mathbb{R}$ tako da je pravac $y=x$ okomit na graf funkcije $y=be^x$ u nekoj točki. U oba slučaja nađite x koordinatu te točke.

Zadatak 34. Za koju vrijednost parametra a graf funkcije $f_1(x)=\ln x$ dira graf funkcije $f_2(x)=ax^2$.

Zadatak 35. Nađite jednadžbu tangente povučene iz točke $A(6,0)$ na krivulju $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Zadatak 36. Odredi jednadžbe obiju tangenata povučenih iz točke $M(-2,-3)$ na parabolu $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.

Zadatak 37. Odredi točku na paraboli $y=x^2+x-2$ najbližu pravcu $y=5x-10$.

Zadatak 38. Odredi točku na hiperboli $y=\sqrt{x^2+1}$ najbližu točki $T(3,0)$.

Zadatak 39. Pod kojim se kutom sijeku krivulje $y=(x-2)^2$ i $y=-4+6x-x^2$?

Zadatak 40. Odredi kut pod kojim se sijeku krivulje $y=e^{2x}$ i $y=e^{-3x}$.

7.11 Rješenja zadataka za vježbu

1. a. $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+3(1+h)-4}{h}=5$;
b. t... $y=5x-1$ **c.** $\frac{df}{dt}(2)=7$

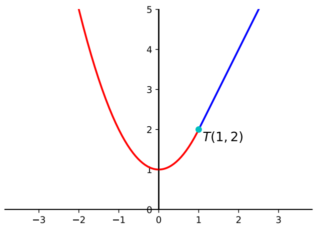
2. $f'(-2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=1$; $f'(-2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$; Dakle, f nije diferencijabilna u $x=-2$ jer $f'(-2^+)\neq f'(-2^-)$.

3. a. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)^2-(x+1)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh+2h}{h}=2x+2$
b. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h}=\frac{1}{x}$
c. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h)-\sin(2x)}{h}=2\cos(2x)$
d. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1)}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$

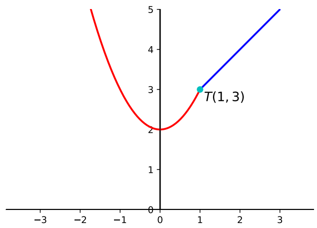
4. a. f je nepr. u $x=0$: $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=0$, $\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x}=0$
f nije diferencijabilna u $x=0$: $f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=+\infty$; $f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=+\infty$

b. f je nepr. u $x=2$: $\lim_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x-2}=0$, $\lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{x-2}=0$
f nije diferencijabilna u $x=2$: $f'(2^+)=\lim_{h\to 2^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 2^+}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=+\infty$; $f'_-(0)=\lim_{h\to 2^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 2^-}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=+\infty$

5. f je nepr. u $x=1$: $\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$, $\lim_{x\to 1^+}2x=2$ i $f(1)=2$
f je diferencijabilna u $x=1$: $f'_-(1)=(2x)_{x=1}=2$; $f'_+(1)=2$,



Slika 7.19 graf funkcije u zad 5



Slika 7.20 graf funkcije u zad 6

6. f je nepr. u $x=1$: $\lim_{x\to 1^-}(x^2+2)=3$, $\lim_{x\to 1^+}(x+2)=3$ i $f(1)=3$
f nije diferencijabilna u $x=1$: $f'_-(1)=(2x)_{x=1}=2$; $f'_+(1)=1$,

7. Ne postoji $f'(0)$ jer je $f'_-(0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, a $f'_+(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

8. $a=2$, $f'(1)=2$; $a=2$, $g'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=4$, $g'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=2$
Dakle, g nije diferencijabilna u $x=1$

9. $a=-4$, $b=5$

10. (A)-(1), (B)-(2), (C)-(3), (D)-(4)

11. **a.** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$; **b.** $f'(x)=2xe^x+x^2e^x$; **c.** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$;
d. $f'(x)=e^x\sin x(1+x)+xe^x\cos x$; **e.** $f'(x)=\frac{(\cos x-x\sin x)(x^2+1)-2x^2\cos x}{(x^2+1)^2}$;
f. $f'(x)=20x(x^2+1)^9$. **g.** $f'(x)=\frac{4}{\mathrm{ch}^2(4x)}$; **h.** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$;
i. $f'(x)=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2\frac{x}{2x+1}}\frac{1}{(2x+1)^2}$; **j.** $f'(x)=6\mathrm{tg}^2(2x)\cdot\frac{1}{\cos^2(2x)}$;
k. $f'(x)=2e^{-\sin(2x)}\cdot(-\cos(2x))$; **l.** $f'(x)=2x\cdot 2^{-x}-x^2\cdot 2^{-x}\ln 2$.

12. **a.** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$; **b.** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; **c.** $f'(x)=\frac{-3x-\cos^2(3x)}{x^2\sin^2(3x)}$;
d. $f'(x)=3x^2\sin^2(4x)+4x^3\sin(8x)$; **e.** $f'(x)=\ln(x\mathrm{ch}x)+\frac{1}{\mathrm{ch}x}(\mathrm{ch}x+x\mathrm{sh}x)$;
f. $f'(x)=3x^2\cdot\mathrm{arsh}(e^{-2x})-\frac{2x^3\cdot e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-4x}}}$. **g.** $f'(x)=-e^{-x}\cdot\cos^3(2x)-6e^{-x}\cdot\cos^2(2x)\sin(2x)$;
h. $f'(x)=\frac{(e^{-x}-xe^{-x})\sqrt{x^2+x+1}-xe^{-x}\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}$; **i.** $f'(x)=(\sqrt{x})^x\left(\ln(\sqrt{x})+\frac{1}{2}\right)$;
j. $f'(x)=x^x(\ln x+1)+\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x\left(\ln(\frac{2x+1}{2x-1})-\frac{4x}{4x^2-1}\right)$, **k.** $f'(x)=\pi\frac{\sin^2(\frac{\pi x}{3})}{\cos^4(\frac{\pi x}{3})}$;
l. $f'(x)=10\mathrm{ctg}5x\cdot\ln(\sin 5x)$, **m.** $f'(x)=\cos^2 5x-5x\sin 10x$; **n.** $f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

13. $P=16\mathrm{cm}^2$, $a=4\mathrm{cm}$; Tražimo $\frac{dP}{dt}|_{a=4}=2a\frac{da}{dt}=48\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

14. Iz $V=r^2\pi h$ slijedi da je $\frac{dV}{dt}=25\pi\frac{dh}{dt}$ te je $\frac{dh}{dt}=\frac{3}{25\pi}\mathrm{m/min}$.

15*. $z=10\sqrt{101}$, $\frac{dz}{dt}=\frac{x}{z}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{z}\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}|_{t=4s}=\frac{215}{\sqrt{101}}=21.4\mathrm{km/h}$

16. **A.** $f'(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$; **B.** $f'(x)=-\frac{\cos(\mathrm{arctg}x)-2x\sin(\mathrm{arctg}x)}{(1+x^2)^2}$.

17. $f''(1)=\frac{6}{25}$

18. a. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$, $n \geq 2$ (dokazati indukcijom);
b. $f^{(4k)}(x) = \sin x$, $f^{(4k+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$, $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$, $k \in \mathbb{N}$ (dokazati indukcijom)
c. $f^{(k)}(x) = a^x \ln^k a$, $k \in \mathbb{N}$ (dokazati indukcijom)

19. a. $y = 2x$; **b.** $y = 3x - 1$;

20. a. $y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **b.** $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; **c.** $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $S'(t) = -20t(1-\frac{t^2}{15})^2$, $S'(1) = -17.422$, $t = \sqrt{15}$s, $S'(\sqrt{15}) = 0$

22. $N'(t) = 24t^2 - 4t^3$, $N'(3) = 108$

23. a. $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 1$; **b.** $p'(t) = \frac{ake^{-kt}}{(1+ae^{-kt})^2}$; **c.** $t \approx 7.3$

24. a. $\frac{df}{dL} = -\frac{1}{2L^2}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$; **b.** $\frac{df}{dT} = \frac{1}{4L\sqrt{T\rho}}$; **c.** $\frac{df}{d\rho} = -\frac{1}{4L}\sqrt{\frac{T}{\rho^2}}$

25. a. $C'(x) = 3 + 0.02x + 0.0006x^2$; **b.** $C'(100) = 11$; To predstavlja promjenu u trošku proizvodnje para traperica odnosno trošak proizvodnje 101. traperica. **c.** $C(101) - C(100) = 11.0702$

26. a. $T(0,0)$, $y'(0) = -1$; t...$y = -x$; **b.** $T(\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2})$, $y'(\frac{3}{4}) = 0$, t...$y = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$
c. $T(1,0)$, $y'(1) = +\infty$, t...$x = 1$

27. a. $y = \frac{1}{2}(x+1)$. **b.** $x = 0$. **c.** Ne postoji tangenta u toj točki jer funkcija $f(x) = |x|$ ima šiljak u ishodištu.

28. a. $y = 2x$ **b.** $y = 3x - 1$

29. $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{3}$.

30. $y = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sin(\pi x)$.

31. $y = \frac{3}{4}x^2 - 1$.

32. $\omega = \frac{1}{2}$, $A = 2$

33. $y = x$ tangenta, $\lambda = e^{-1}$; $y = x$ normala, $\lambda = -e$

34. $a = \frac{1}{2e}$

35. Apscisa dirališne točke tangente je 4, a tangenta glasi $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

36. $y = x - 1$, $y = -2x - 7$

37. $T_0(2,4)$

38. $T(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2})$

39. $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{6}{7}$

40. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

7.12 Literatura

[1] A. Aglić Aljinović, I. Brnetić, V. Ćepulić, N. Elezović, Lj. Marangunić, M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović, Matematika 1, Element, Zagreb, 2013.
[2] J. Stewart, Single variable calculus, Cengage learning, USA, 2014