Matematička analiza 2 - predavanja

Poglavlje: *Redovi i redovi potencija*

Tomislav Burić, Lana Horvat Dmitrović, Domagoj Kovačević,
Mervan Pašić, Mate Puljiz, Tomislav Šikić, Igor Velčić, Ana Žgaljić Keko

VERZIJA OD: 28. TRAVNJA 2022.
PUBLISHED BY FER
WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

5. Redovi i redovi potencija

5.1 Redovi

Funkcija $f(x) = \sin x$ može biti razvijena u red potencija

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

To ćemo pokazati u sljedećem poglavlju. To znači da možemo uzeti bilo koji $x \in \mathbb{R}$, recimo $x = 0.1$ i tada (5.1) daje $\sin 0.1 = 0.1 - \frac{1}{6}0.1^3 + \frac{1}{120}0.1^5 - \frac{1}{5040}0.1^7 + \ldots$. Znamo da je $\sin 0.1 \approx 0.09983342$, no što dobivamo na desnoj strani? Možemo računati prva dva, tri, četiri člana i vidjeti da je ta suma sve bliža broju $\sin 0.1$ ($0.1 - \frac{1}{6}0.1^3 = 0.09983333$), ali beskonačnu sumu do sada nismo viđali.

Ako uzmemo jednostavniji izraz umjesto sume na desnoj strani u (5.1) zadatak se komplicira: odredite sumu

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots. \tag{5.2}$$

Koristeći asocijativnost dobivamo

$$S = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0.$$

No, asocijativnost nam daje i

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1.$$

Također, (5.2) se transformira u

$$1 - S = S$$

odnosno $S = \frac{1}{2}$. Koji je odgovor točan? Niti jedan. No, niti pitanje nije dobro postavljeno. Ispravno bi bilo pitati da li suma postoji i ogovor je: ne. Kako suma ne postoji ne možemo je niti računati. Vidimo da prije računanja sume (5.1) moramo nešto naučiti o beskonačnim sumama. Beskonačne sume ćemo zvati redovima.

5.1.1 Definicija, osnovni primjeri i teoremi

Definicija 5.1.1 **Red** je izraz oblika

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5.3}$$

Brojeve a_n zovemo **članovima** reda. Svakom redu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pridružujemo niz **parcijalnih suma** (S_n) gdje je $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergira** k realnom broju S ako niz parcijalnih suma (S_n) konvergira k realnom broju S i taj broj se zove **suma reda** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Kažemo da red **divergira k** $\pm\infty$ ako niz parcijalnih suma divergira k $\pm\infty$. Konačno red **divergira** ako niz parcijalnih suma divergira. ■

Napomena 5.1 Dakle, mi smo problem konvergencije reda sveli na problem konvergencije niza (parcijalnih suma), a to je lakši problem.

Napomena 5.2 Bitno je uočiti da prvih N članova reda za bilo koji $N \in \mathbb{N}$ ne utječe na konvergenciju reda jer je ta suma uvijek konačna.

Napomena 5.3 U Definiciju smo stavili da suma ide od 1, no to nije toliko bitno. Možemo pisati

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n-7}.$$

Također bi članovi reda mogli krenuti od 0: $a_0 + a_1 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Jedino bismo se trebali odlučiti kako ćemo označiti prvu parcijalnu sumu: S_0 ili S_1.

■ **Primjer 5.1** Vratimo se na red (5.2). Niz parcijalnih suma ima oblik $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 1 = 0$, $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$, $S_4 = 0$, itd. Taj niz divergira pa i red (5.2) divergira. ■

■ **Primjer 5.2** Neka su $a, q \in \mathbb{R}$. Odredimo sumu **geometrijskog reda**

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots.$$

Dakle, $S_1 = a$, $S_2 = a + aq$, a za S_n imamo formulu (za $q \neq 1$), $S_n = a + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$. Sada vidimo da je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

ako i samo ako je $|q| < 1$. Ako je $|q| > 1$, niz (S_n) divergira. Ako je $q = 1$, $S_n = a \cdot n$ i niz (S_n) divergira. Ako je $q = -1$ dobivamo Primjer 5.1. Dakle, geometrijski red (5.2) konvergira ako i samo ako je $|q| < 1$ i suma je jednaka $\frac{a}{1-q}$. ■

■ **Primjer 5.3** Stavimo li $q = \frac{1}{2}$ u Primjer 5.2, dobivamo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

■

Teorem 5.1.1 Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi te neka je $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira prema A i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira prema B tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ konvergira i suma mu je jednaka $A+B$.
2. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira prema A tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ konvergira i suma mu je jednaka λA.
3. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ divergira za $\lambda \neq 0$.

Dokaz. Označimo parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa S_n, parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sa R_n, parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ sa T_n te parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ sa P_n.

1. S obzirom da su sve parcijalne sume konačne, $T_n = S_n + R_n$. Sada možemo primijeniti teorem koji kaže da je limes zbroja jednak zbroju limesa i dobivamo da niz (T_n) konvergira i to prema $A+B$.
2. S obzirom da su sve parcijalne sume konačne, $P_n = \lambda S_n$. Slično kao i u prethodnoj tvrdnji, možemo primijeniti teorem koji kaže da je $\lim_{n\to\infty} P_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda A$.
3. Pretpostavimo suprotno, odnosno da red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ konvergira. Tada po prethodnoj tvrdnji konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \lambda a_n$ pa dobivamo kontradikciju. To znači da red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ divergira.

■

■ **Primjer 5.4** Odredimo sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3} + 3^{n+2}}{5^n}.$$

Koristimo 1. i 2. tvrdnju Teorema 5.1.1 i dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3} + 3^{n+2}}{5^n} = 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{8 \cdot \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{9 \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{16}{3} + \frac{27}{2} = \frac{113}{6}$$

■

■ **Primjer 5.5** Odredimo sumu reda

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Uočimo da je $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. To nam daje $S_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ i $S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$. Sada možemo naslutiti da vrijedi $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ i to se lako pokaže indukcijom. Kako je $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ dobivamo

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1.$$

Neoprezan čitatelj može pomisliti da je dovoljno napisati $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots = 1$ i komentirati da se "sve krati" osim 1. No, mi smo konvergenciju redova definirali pomoću konvergencije niza parcijalnih suma pa to ne bi bilo dovoljno precizno. ■

Primjeri 5.2 i 5.5 su jedini primjeri (zajedno sa raznim varijacijama) u ovom Poglavlju kod kojih ćemo izračunati sumu reda. U svim ostalim primjerima ćemo samo ustanoviti konvergenciju (ili divergenciju). U sljedećem Poglavlju ćemo koristiti redove potencija kako bismo izračunali sume još nekih redova. Promotrimo jednu varijaciju Primjera 5.5.

Primjer 5.6 Odredimo sumu reda

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}.$$

U Primjeru 5.5 smo rastav pogodili. Sada ćemo koristiti rastav na parcijalne razlomke,

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Lako se vidi da je $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$ i $C=\frac{1}{2}$ pa vrijedi $\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$. Dobivamo da je $S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$, $S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ i $S_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-1\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$. Uočimo da se kod S_3 krate svi članovi koji na drugom mjestu imaju $\frac{1}{3}$. Slično se kod S_4 krate svi članovi koji na drugom mjestu imaju $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$. To nam daje slutnju da je

$$S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

koju lako pokazujemo indukcijom. Dakle, suma reda je jednaka $\frac{1}{4}$. ■

Primjer 5.7 Pokažimo divergenciju **harmonijskog reda**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Računamo S_{2^n}:

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\geq\\
&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+2^{n-1}\frac{1}{2^n}=\\
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

S obzirom da S_{2^n} neograničeno raste (i niz (S_n) raste), harmonijski red divergira. Divergenciju možemo dobiti i na drugi način. Krećemo od izraza

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{5.4}$$

Koristit ćemo samo lijevu stranu danog izraza i primijeniti funkciju ln. Dobivamo

$$n\ln\frac{n+1}{n}<1$$

odnosno

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

Sada se indukcijom lako dobiva $\left(S_{n+1}=S_n+\frac{1}{n+1}>\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln(n+1)\right)$

$$S_n>\ln(n+1).$$

Ponovno vidimo da niz (S_n) neograničeno raste. ■

■ **Primjer 5.8** Može se pokazati (npr. koristeći Fourierove redove) da red

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

konvergira i to prema $\frac{\pi^2}{6}$ (to se može provjeriti računalom). Imajući u vidu Primjer 5.5, konvergencija nije iznenađenje, no pojavljivanje broja π u sumi svakako jest. ■

■ **Primjer 5.9** Generalizacija Primjera 5.7 i 5.8 vodi na **generalizirani harmonijski red**

$$Z(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots,\qquad p\in\mathbb{R}.$$

Primjer 5.7 nam kaže da red $Z(1)$ divergira, Primjer 5.8 nam kaže da $Z(2)$ konvergira. Prirodno se postavlja pitanje konvergencije reda $Z(p)$. U sljedećem Odjeljku ćemo vidjeti da red $Z(p)$ konvergira za $p>1$. Može se pokazati da je $Z(4)=\frac{\pi^4}{90}$. Generalizacija funkcije $Z(p)$ za $p\in\mathbb{C}$ vodi prema Riemannovoj zeta funkciji $\zeta(p)$. ■

Teorem 5.1.2 — Nužan uvjet konvergencije. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira tada je

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Dokaz. Kako je $a_n=S_n-S_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$. ■

Napomena 5.4 Teorem se koristi za dokazivanje divergencije redova. Npr. red (5.2) je divergentan jer $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ ne postoji. Bitno je naglasiti da teorem ne daje kriterij za konvergenciju reda. Npr. harmonijski red (Primjer 5.7) je divergentan, ali ima svojstvo da je $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

5.1.2 Redovi s nenegativnim članovima

Problem konvergencije redova može biti dosta težak. Zbog toga ćemo u ovom odjeljku gledati samo redove s nenegativnim članovima odnosno na redove oblika (5.3) za koje je $a_n\geq 0$. Kod takvih redova niz parcijalnih suma je rastući jer vrijedi $S_n=S_{n-1}+a_n\geq S_{n-1}$ pa je problem konvergencije niza parcijalnih suma (S_n) jednostavniji. Ako je ograničen odozgo, tada je konvergentan, a ako nije, tada je divergentan.

Konvergencija odnosno divergencija reda ne ovisi o ponašanju konačnog broja članova na početku (Napomena 5.2). Zbog toga ćemo u svim teoremima spominjati da dani uvjet vrijedi za članove a_n gdje je $n\geq N$ i $N\in\mathbb{N}$, a ne $\forall n\in\mathbb{N}$. Isto tako ćemo u svim dokazima pretpostaviti da je $N=1$. Time dokazi postaju malo jednostavniji.

Teorem 5.1.3 Neka je $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ red s nenegativnim članovima. Tada je red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergentan ako i samo ako je niz parcijalnih suma (S_n) omeđen odozgo.

Dokaz. Znamo da je niz parcijalnih suma (S_n) je rastući odnosno monoton. Ako je niz parcijalnih suma ograničen odozgo tada je konvergentan (jer je monoton i ograničen). Ako je niz parcijalnih suma konvergentan tada je omeđen odozgo. ■

Poredbeni kriterij

Teorem 5.1.4 Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s nenegativnim članovima takvi da vrijedi $a_n \leq b_n$ za $n \geq N$ gdje je $N \in \mathbb{N}$.
1. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.
2. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Dokaz. Radi jednostavnosti pretpostavljamo da je $N = 1$. Označimo parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s S_n, a parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s R_n. Po pretpostavci teorema vrijedi $S_n \leq R_n$.
1. S obzirom niz S_n nije ograničen odozgo, nije niti niz R_n ograničen odozgo.
2. S obzirom da je niz R_n ograničen odozgo, niz S_n je ograničen odozgo.

Uočimo da su tvrdnje ekvivalentne jer je 2. tvrdnja obrat po kontrapoziciji 1. tvrdnje. ■

Teorem 5.1.5 Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s nenegativnim članovima takvi da vrijedi $b_n \neq 0$ za $n \geq N$ $(N \in \mathbb{N})$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Ako je $0 < L < \infty$ tada oba reda konvergiraju ili oba reda divergiraju.

Dokaz. Stavimo li $\varepsilon = \frac{1}{2}L$ u definiciju limesa dobivamo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq N$ vrijedi $\frac{1}{2}L < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}L$ odnosno

$$\frac{1}{2}L \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2}L \cdot b_n.$$

Sada koristimo prethodni teorem i Teorem 5.1.1. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}L \cdot b_n$ pa konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}L \cdot b_n$ pa konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira tada divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}L \cdot b_n$ pa divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira tada divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}L \cdot b_n$ pa divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Bilo je dovoljno je dokazati samo prve dvije tvrdnje jer su druge dvije obrat po kontrapoziciji. ■

■ **Primjer 5.10** Pokažimo da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^2+4n+5}$$

divergira. Možemo koristiti Teorem 5.1.5 i uzeti harmonijski red $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{3n^2+4n+5}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

S obzirom da harmonijski red divergira, zadani red divergira. Mogli smo koristiti i Teorem 5.1.4, uzeti $a_n = \frac{1}{4n}$ i $b_n = \frac{n+2}{3n^2+4n+5}$. Sada treba pokazati $\frac{1}{4n} \leq \frac{n+2}{3n^2+4n+5}$ odnosno $3n^2 + 4n + 5 \leq 4n^2 + 8n$. To se lako vidi. ■

■ **Primjer 5.11** Pokažimo da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2+2n+3}$$

konvergira. Sada Teorem 5.1.5 ne možemo koristiti zbog nepredvidljivog ponašanja brojnika. No, možemo koristiti Teorem 5.1.4 i Primjer 5.5 $\left(\frac{2+\sin n}{n^2+2n+3} \leq \frac{3}{n(n+1)}\right)$ ili Primjer 5.8 $\left(\frac{2+\sin n}{n^2+2n+3} \leq \frac{3}{n^2}\right)$. ■

D'Alembertov kriterij

Teorem 5.1.6 Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima i neka postoji $M \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n > 0$ za $n \geq M$.

1. Ako postoje $N \in \mathbb{N}$, $N \geq M$ i $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ takvi da vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ za svaki $n \geq N$ tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.
2. Ako postoji $N \in \mathbb{N}$, $N \geq M$ takav da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ za svaki $n \geq N$ tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz. Pretpostavljamo da je $N = M = 1$.

1. Uvjet $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ nam daje $a_2 \leq a_1 q$, a indukcijom se lako pokaže da vrijedi $a_n \leq a_1 q^{n-1}$. Teorem 5.1.4 i Primjer 5.2 nam daju konvergenciju.
2. Sada se indukcijom lako dobiva $a_n \geq a_1$ pa nam Teorem 5.1.2 daje divergenciju.

■

Napomena 5.5 Neoprezan čitatelj bi mogao pomisliti da nije potrebno uvoditi q u Teorem 5.1.6. No, Primjer 5.7 (harmonijski red) nam daje divergentan red za koji je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$.

Teorem 5.1.7 Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima, neka postoji $M \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n > 0$ za $n \geq M$ i neka je $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. Ako je $q < 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.
2. Ako je $q > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentan.
3. Ako je $q = 1$ tada nema odluke i kriterij ne možemo primijeniti.

Dodatak

Dokaz. Pretpostavljamo da je $M = 1$.

1. Stavimo li $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-q) > 0$ u definiciju limesa, dobivamo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq N$ daje $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Sada nam Teorem 5.1.6 daje da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
2. Stavimo li $\varepsilon = \frac{1}{2}(q-1) > 0$ u definiciju limesa, dobivamo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq N$ daje $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = 1 + \varepsilon$. Sada nam Teorem 5.1.6 daje da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
3. Redovi u Primjerima 5.7 i 5.8 imaju svojstvo da je $q = 1$. No, jedan konvergira, a drugi divergira.

■

■ **Primjer 5.12** Pokažimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3\cdot(-1)^n}{8^n}.$$

Teorem 5.1.7 nam nije dobar jer limes $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ne postoji. No, vrijedi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4+3\cdot(-1)^{n+1}}{8^{n+1}}}{\frac{4+3\cdot(-1)^n}{8^n}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{4+3\cdot(-1)^{n+1}}{4+3\cdot(-1)^n} \leq \frac{7}{8}$$

pa nam Teorem 5.1.6 daje da zadani red konvergira. ■

Cauchyjev kriterij

Teorem 5.1.8 Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima.

1. Ako postoje $N \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ takvi da vrijedi $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za svaki $n \geq N$ tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.
2. Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$, tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz. Pretpostavljamo da je $N = 1$.

1. Iz uvjeta $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ dobivamo $a_n \leq q^n$ za svaki $n \geq 1$. Sada koristimo da je geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentan i Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.4).
2. Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$, tada nije zadovoljen Nužni uvjet konvergencije (Teorem 5.1.2).

■

Napomena 5.6 Ne možemo izostaviti q iz tvrdnje teorema. Ponovno možemo koristiti divergentni harmonijski red za koji vrijedi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$.

Teorem 5.1.9 Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima i $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1. Ako je $q < 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.
2. Ako je $q > 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentan.
3. Ako je $q = 1$ tada nema odluke i kriterij ne možemo primijeniti.

Dodatak

Dokaz. Pretpostavljamo da je $M = 1$.

1. Ako je $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ tada za bilo koji $\varepsilon < 1 - q$ postoji $n(\varepsilon)$ nakav da za $n \geq n(\varepsilon)$ vrijedi $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = q_1 < 1$ pa možemo primijeniti Teorem 5.1.8 (za $N = n(\varepsilon)$).
2. Sada uzimamo ε takav da je $\varepsilon \leq q - 1$ pa postoji $n(\varepsilon)$ takav da za $n \geq n(\varepsilon)$ vrijedi $\sqrt[n]{a_n} \geq q - \varepsilon \geq 1$ odnosno $a_n \geq 1$ pa Nužni uvjet konvergencije (Teorem 5.1.2) daje da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
3. Za redove $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$. Prvi red je divergentan, a drugi konvergentan.

■

■ **Primjer 5.13** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{5n+6} \right)^n .$$

Kako je $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{5n+6} = \frac{3}{5} < 1$ po Teoremu 5.1.9, niz konvergira. ■

Napomena 5.7 Teorem 5.1.9 slijedi iz Teorema 5.1.8, ali je lakši za koristiti.

■ **Primjer 5.14** Odredimo konvergenciju reda

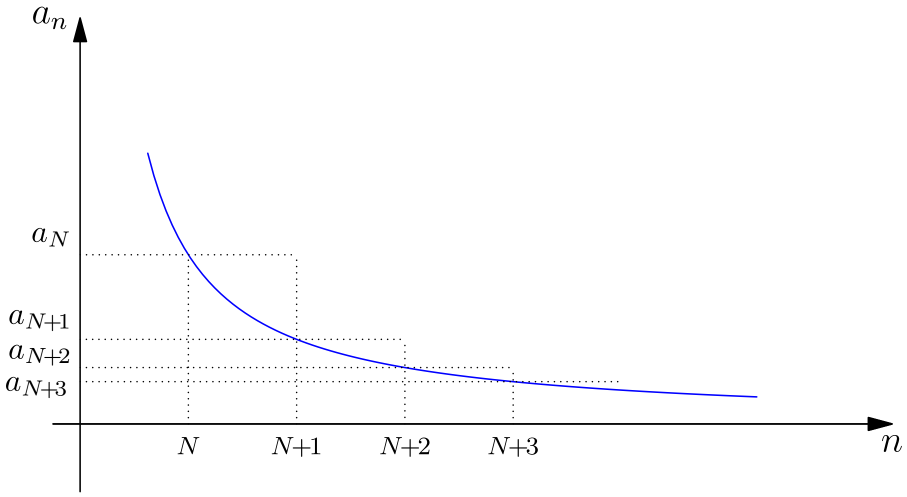
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} .$$

Kako je $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$, zaključujemo da je red konvergentan. ■

Integralni kriterij

Teorem 5.1.10 Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima i $f(x)$ funkcija koja je na nekom intervalu $[N,\infty)$ padajuća, na svakom intervalu $[b,c] \subseteq [N,\infty)$ integrabilna i $f(n) = a_n$ za $n \geq N$. Tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan ako i samo ako je $\int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Dokaz. Prisjetimo se definicije integrabilne funkcije. Funkcija je integrabilna na intervalu $[a,b]$, ako postoji limes integralih suma, $P(a,b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$. Ako je funkcija pozitivna, integral funkcije je jednak površini područja koje omeđuje graf funkcije. Sada to gledamo na intervalu $[N,N+k]$. Možemo zamisliti da je $k = 3$ kao na slici.



Pretpostavimo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan i da je njegova suma jednaka S. Suma $a_N \cdot 1 + a_{N+1} \cdot 1 + \ldots a_{N+k-1} \cdot 1 = S_{N+k-1} - S_{N-1}$ je jednaka površini opisanih pravokutnika području omeđenog grafom funkcije i x osi. To znači da je $S_{N+k-1} - S_{N-1} \geq P(N,N+k)$ gdje $P(N,N+k)$ označava $\int_N^{N+k} f(x)\,\mathrm{d}x$. Sada primijenimo limes kada k ide u beskonačno i dobivamo $S - S_{N-1} \geq \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. To znači da je $\int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Pretpostavimo sada da je $\int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Suma $a_{N+1} \cdot 1 + a_{N+2} \cdot 1 + \ldots a_{N+k} = S_{N+k} - S_N$ je jednaka površini upisanih pravokutnika području omeđenog grafom funkcije i x osi. To znači da je $S_{N+k} - S_N \leq P(N,N+k)$. Opet primijenimo limes kada k ide u beskonačno i dobivamo $S - S_N \leq \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. To znači da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan. ■

Napomena 5.8 Teorem ne tvrdi da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Dokaz teorema daje ocjenu $S - S_N \leq \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S - S_{N-1}$.

▪ **Primjer 5.15** Sada ćemo analizirati konvergenciju generaliziranog harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ za $p \in \mathbb{R}$. Već znamo da harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira i da generalizirani harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira. Koristeći Poredbeni kriterij lako možemo dobiti da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p \geq 2$ i divergira za $p \leq 1$. No, ne možemo zaključiti što se događa za $1 < p < 2$. Sada koristimo Integralni kriterij. Stavimo $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $N = 1$ i računamo $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} - \frac{1}{1-p} \quad \text{za } p \neq 1.$$

Ako je $p > 1$ tada nepravi integral konvergira pa i naš red konvergira. Ako je $p < 1$, imamo divergenciju. Za $p = 1$, također imamo divergenciju. ▪

Primjeri

■ **Primjer 5.16** Pokažimo konvergenciju reda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{4^n}$$

Najprije računamo omjer $\frac{a_{n+1}}{a_n}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2+\sin(n+1)}{4^{n+1}}}{\frac{2+\sin n}{4^n}} = \frac{2+\sin(n+1)}{4\cdot(2+\sin n)}.$$

Sada ne možemo primijeniti Teorem 5.1.7, ali možemo Teorem 5.1.6. Iz $-1 \leq \sin x \leq 1$ slijedi

$$\frac{2+\sin(n+1)}{4\cdot(2+\sin n)} \leq \frac{3}{4}$$

pa nam Teorem 5.1.6 daje konvergenciju. Konvergenciju smo mogli dobiti i koristeći Teorem 5.1.4 i Primjer 5.2 $\left(b_n = \frac{3}{4^n}\right)$. ■

■ **Primjer 5.17** Ispitajmo konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1}.$$

Zadani red uspoređujemo s divergentnim harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Sada nam Teorem 5.1.5 daje da zadani red divergira. Uočimo da zadani red "kreće" od $n=0$, a harmonijski od $n=1$, no to za konvergenciju nije bitno. ■

■ **Primjer 5.18** Dva prijatelja žive u gradovima koji su udaljeni $20\,km$. Jedan prijatelj ima psa. Prijatelji istovreno krenu jedan drugom u susret hodajući brzinom $5\,km\,h^{-1}$, a pas krene brzinom $10\,km\,h^{-1}$. Kada pas susretne drugog prijatelja, okrene se nazad i krene svom vlasniku, a kada ga sretne, ponovno se okrene i tako nastavi dalje. Na kraju se svi nađu na polovici puta. Koliki put je prešao pas?
Da bismo dobili put koji je prešao pas, potrebno je izračunati sumu reda. S obzirom da je pas dvostruko brži od prijatelja, u prvoj dionici je prešao $\frac{2}{3}\cdot 20\,km$. Nakon toga su prijatelji bili udaljeni $\frac{1}{3}\cdot 20\,km$ pa je u drugoj dionici prešao $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 20\,km$. Sada se lako vidi da je put koji je prešao pas jednak

$$20\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\dots\right) = 20\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 20$$

No, postoji jednostavniji način da se riješi taj zadatak. Naime, prijatelji će se sresti nakon 2 sata, a pas za 2 sata prijeđe $20\,km$.

Postoji anegdota da su taj zadatak pitali jednog poznatog matematičara. On je nakon 2 sekunde razmišljanja točno odgovorio. Kada su mu rekli da većina matematičara obično zbraja sumu reda, on im je zbunjeno odovorio da je on to i napravio. Ostavljamo čitatelju da sam procijeni koliko mu vremena treba da izračuna traženu sumu reda. ■

■ **Primjer 5.19** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Primijenimo integralni kriterij i računamo

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x = \ln(\ln x)\Big|_0^{\infty}.$$

Kako taj integral divergira, Integralni kriterij nam daje na zadani red divergira. ■

Napomena 5.9 Već smo vidjeli da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$. No, mi smo sada nazivnik povećali "jako malo", manje nego da smo napisali $\frac{1}{n^p}$ za bilo koji $p > 1$ pa naš red i dalje divergira. Slično se može pokazati (sada je $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}\, \mathrm{d}x = \ln(\ln x)|_2^{\infty}$) da red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}$$

divergira. Mogli bismo ići i korak dalje i pokazati da red

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n) \cdot \ln(\ln(\ln n))}$$

divergira.

■ **Primjer 5.20** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}.$$

Koristimo integralni kriterij i računamo (za $p \neq 1$)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x (\ln x)^p}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{-p+1} (\ln x)^{-p+1}|_2^{\infty}.$$

Dobiveni nepravi integral konvergira za $-p+1 < 0$ odnosno za $p > 1$. Primjer 5.19 nam kaže da red divergira za $p = 1$. Red divergira za $p < 1$. ■

■ **Primjer 5.21** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}.$$

Najprije se moramo odlučiti za konvergeciju ili divergenciju, a onda to pokušati dokazati. U ovom primjeru članovi reda idu prema 0, ali sporo pa ćemo dokazivati da red divergira. Napišemo li prva 3 člana reda dobivamo $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{16}$ pa ćemo dokazati da je $a_n \geq \frac{1}{n+1}$. Dokaz se provodi indukcijom. Za $n = 1$, tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $a_n \geq \frac{1}{n+1}$. Kako je $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \geq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \geq \frac{1}{n+2}$ za $n \in \mathbb{N}$ dobivamo tvrdnju $a_n \geq \frac{1}{n+1}$. Sada nam Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.4) daje da zadani red divergira. Uočimo da za uspoređivanje koristimo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ koji je divergentan. ■

■ **Primjer 5.22** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Ovaj red je pogodan za primjenu d'Alembertovog kriterija. Vrijedi

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

pa zadani red konvergira. ■

■ **Primjer 5.23** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}.$$

Ovaj red se ponaša poput reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pa pa predpostavljamo da divergira. Možemo koristiti Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.4) i iskoristiti

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \frac{1}{2n}.$$

S obzirom da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergira, divergira i zadani red. Također smo mogli koristiti Teorem 5.1.5 i zadani red uspoređivati s harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ■

■ **Primjer 5.24** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+1} - n.$$

Zadani izraz možemo napisati u obliku

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}. \tag{5.5}$$

Sada koristimo Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.5), uspoređujemo naš red s harmonijskim redom, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i dobivamo da zadani red divergira. Što dobivamo korakom (5.5)? Umjesto početnog izraza koji ne razumijemo dobili smo razlomak u kojem je brojnik jednostavan, a u nazivniku imamo "+" umjesto "-" pa nazivnik možemo uspoređivati s $2n$ kada n ide u beskonačno. Također smo mogli uočiti da je $\sqrt{n^2+1} - n > \frac{1}{3n}$ i opet dobiti divergenciju. ■

■ **Primjer 5.25** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

Uočimo da članovi reda idu u 0 još sporije nego članovi harmonijskog reda, odnosno da vrijedi

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}.$$

S obzirom da harmonijski red divergira, po Teormemu 5.1.4, zadani red divergira. ■

■ **Primjer 5.26** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n \cdot n!}{n^n}.$$

za $c \in \mathbb{R}$ i $c > 0$. Primjenimo d'Alembertov kriterij (Teorem 5.1.7)

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{c^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{c^n\cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c\cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{c}{e}.$$

Sada vidim da za $c > e$, zadani red divergira, za $c < e$, zadani red konvergiramo, a za $c = e$, nemamo odluku. Za $c = e$ možemo primijeniti d'Alembertov kriterij (Teorem 5.1.6) jer je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(\frac{n+1}{n})^n} > 1$$

za $n \in \mathbb{N}$ pa zadani red divergira (koristimo $(1+\frac{1}{n})^n < e$, odnosno relaciju (5.4)). ■

■ **Primjer 5.27** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}.$$

Računamo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} = 2 > 1$$

pa nam D'Alembertov kriterij (Teorem 5.1.7) daje da zadani red divergira. Također smo mogli koristiti i Teorem 5.1.6. ■

■ **Primjer 5.28** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^3}{n!}.$$

Računamo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{3^n\cdot n^3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}{n+1} = 0 < 1$$

pa nam D'Alembertov kriterij (Teorem 5.1.7) daje da zadani red konvergira. ■

■ **Primjer 5.29** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

Računamo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$,

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$$

pa nam Cauchyjev kriterij (Teorem 5.1.9) daje da zadani red konvergira. ■

■ **Primjer 5.30** Odredimo sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{ch} n}{3^n}.$$

Znamo da je $\operatorname{ch} n=\frac{1}{2}(e^n+e^{-n})$ pa vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{ch} n}{3^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^n+e^{-n}}{3^n}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{e}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3e}\right)^n\right).$$

Tražena suma je $\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{e}{3}}{1+\frac{e}{3}}+\frac{\frac{1}{3e}}{1+\frac{1}{3e}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e}{e+3}+\frac{1}{3e+1}\right).$ ■

■ **Primjer 5.31** Za koje vrijednosti pozitivnog realnog broja a konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3+1}}{n^a}?$$

Brojnik i nazivnik najprije množimo s $\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+1}$, a nakon toga dijelimo s n^2,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^a\left(\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+1}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{n^{a-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}.$$

Sada nam poredbeni kriterij (Teorem 5.1.5) daje da zadani red konvergira za $n-\frac{1}{2}>1$ odnosno za $a>\frac{3}{2}$. ■

■ **Primjer 5.32** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{2^n}$$

Računamo $q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$,

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)\ln\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)}{2^{n+1}}}{\frac{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{n+2}}{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}}=\frac{1}{2}.$$

D'Alembertov kriterij (Teorem 5.1.7) nam daje da zadani red konvergira. ■

■ **Primjer 5.33** Odredimo limes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+5^n}{1+5+5^2+\ldots 5^{n-1}+5^n}.$$

Traženi limes je jednak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+5^n}{\frac{1-5^{n+1}}{1-5}}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1+5^n}{5^{n+1}-1}$$

pa na kraju dobivamo $\frac{4}{5}$. ■

5.1.3 Redovi s realnim članovima

Problem konvergencije redova s realnim članovima može biti kompliciran. Zato gledamo dva specijalna slučaja, apsolutno konvergentne redove i redove s alterniranim članovima.

Apsolutno konvergentni redovi

Definicija 5.1.2 Red je **apsolutno konvergentan** ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentan. Red je **uvjetno konvergentan** ako je konvergentan, ali ne i apsolutno konvergentan. ▪

Teorem 5.1.11 Apsolutno konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.

Dokaz. Definiramo dva niza, (b_n) i (c_n) izrazima

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases}, \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a_n > 0 \\ -a_n & \text{ako je } a_n \leq 0 \end{cases}.$$

Nizovi (b_n) i (c_n) imaju nenegativne članove, $a_n = b_n - c_n$, $b_n \leq |a_n|$ i $c_n \leq |a_n|$. Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.4) daje da redovi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiraju. Teorem 5.1.1 daje da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. ■

Napomena 5.10 Sada možemo primijeniti kriterije konvergencije za redove s nenegativnim članovima da bismo dobili apsolutnu konvergenciju, a tada i konvergenciju.

Alternirani redovi

Definicija 5.1.3 **Alternirani red** je red oblika $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ gdje je (a_n) niz s nenegativnim članovima. ▪

Teorem 5.1.12 — Leibnizov kriterij. Ako alternirani red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ zadovoljava Nužni uvjet konvergencije ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) i postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $a_{n+1} \leq a_n$ za $n \geq \mathbb{N}$ tada red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergira.

Dokaz. Stavimo $N = 1$. Niz parnih parcijalnih suma (S_{2n}) je rastući ($S_{2(n+1)} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$) i ograničen odozgo s a_1 ($S_{2n} = a_1 + (-a_2 + a_3) + \ldots (-a_{2n-2} + a_{2n-1}) - a_{2n}$). To znači da niz (S_{2n}) konvergira k nekom realnom broju, recimo S_2. Slično je niz neparnih parcijalnih suma (S_{2n+1}) padajući ($S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$) i ograničen ododzdo s 0 ($S_{2n+1} = (a_1 - a_2) + \ldots (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} \geq 0$)) pa konvergira k nekom realnom broju, recimo S_1. Sada na izraz $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$ primijenimo $\lim_{n\to\infty}$ i koristeći $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dobivamo $S_1 = S_2$. Uočimo da je $\{S_n\} = \{S_{2n}\} \cup \{S_{2n-1}\}$. ■

Napomena 5.11 Uočimo jedan detalj u dokazu. Lako se vidi da je $S_{2n} \leq S \leq S_{2m-1}$ za svaki $n, m \in \mathbb{N}$, odnosno

$$S - S_{2n} \leq a_{2n+1} \quad \text{i} \quad S_{2m-1} - S \leq a_{2m}.$$

To znači da je pogreška $|S - S_n|$ uvjek manja ili jednaka a_{n+1}.

■ **Primjer 5.34** Alternirani harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ zadovoljava uvjete Leibnizovog kriterija pa je konvergentan. U sljedećem poglavlju ćemo vidjeti da je $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2$. Znamo da taj red uvjetno konvergentan (Primjer 5.7). ■

Permutacija članova redova

Imajući na umu Primjer 5.34 vidimo da ne smijemo permutirati članove reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Već smo spomenuli da je suma alterniranog harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ jednaka $\ln 2$. Lako se može vidjeti da redovi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ divergiraju. Sada možemo izabrati bilo koji $S \in \mathbb{R}$ i permutirati članove alterniranog harmonijskog reda tako da taj red konvergira prema S. Prepostavimo da je $S > 0$. Najprije uzimamo pozitivne članove $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ dok suma ne preraste S. Nakon toga uzimamo negativne članove $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$ dok suma ne padne ispod S itd. Lako se vidi da dobiveni red konvergira prema S i da koristimo sve članove početnog reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. U Vježbi 5.3 možemo vidjeti drugu permutaciju članova tog reda i sukladno tome, drugu sumu reda.

U slučaju da je početni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergentan, to se ne može dogoditi. Zainteresirani čitatelj lako može dokazati sljedeći teorem.

Teorem 5.1.13 Proizvoljna permutacija članova apsolutno konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neće promijeniti njegovu sumu.

Primjeri

■ **Primjer 5.35** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arc\,ctg} n}{\sqrt{n}+1}.$$

Uočimo da je red alternirani, da brojnik izraza

$$\frac{\operatorname{arc\,ctg} n}{\sqrt{n}+1}.$$

pada, da nazivnik raste pa izraz pada i da je limes izraza jednak 0. Kako su ispunjeni svi uvjeti Leibizovog teorema (Teorem 5.1.12), red je konvergentan. ■

■ **Primjer 5.36** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{7}{2}\cdot(\frac{7}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{7}{2}-n+1)}{n!}.$$

U Pododjeljku 5.2.2 ćemo definirati $\binom{\frac{7}{2}}{n} = \frac{\frac{7}{2}\cdot(\frac{7}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{7}{2}-n+1)}{n!}$, no to nam sada nije bitno. Neka su a_n članovi reda. Tada vrijedi

$$a_{n+1} = \frac{\frac{7}{2}-n}{n+1}a_n.$$

Uočimo da je red alternirani za $n \geq 5$ i da je niz $(|a_n|)$ padajući za $n \geq 2$. Konačno

$$|a_n| \leq \frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{(n-4)!}{\frac{n!}{4!}} = \frac{105}{16}\cdot\frac{1}{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n},$$

a to nam daje $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sada nam Leibnizov kriterij kaže da naš red konvergentan. U Odjeljku 5.2.2 ćemo vidjeti da je suma reda jednaka $(1+1)^{\frac{7}{2}} = \sqrt{128}$. ■

Dodatak

5.1.4 Umnožak redova

Umnožak redova možemo definirati na razne načine. Mi ćemo rabiti Cauchyjevu definiciju.

Definicija 5.1.4 **Umnožak redova** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ gdje su članovi c_n definirani izrazom

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Dakle, $c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$ itd.

Teorem 5.1.14 Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni redovi s nenegativnim članovima i neka su A i B njihove sume. Tada je umnožak redova $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ također konvergentan i suma mu je $C = AB$.

Dokaz. Neka A_n, B_n i C_n parcijalne sume. S obzirom da je $C_n \leq A_n B_n \leq AB$ i (C_n) je rastući, vidimo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentan i $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq AB$. S obzirom da vrijedi $A_n B_n \leq C_{2n-1}$ dobivamo $C = AB$. ∎

Napomena 5.12 Neoprezan čitatelj bi mogao pomisliti da se uvjet nenegativnosti članova a_n i b_n može izostaviti. No, pogledajmo redove $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ koji su konvergentni. Tada vrijedi $|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, pa $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergira po Nužnom uvjetu konvergencije (Teorem 5.1.2).

Uvjete Teorema 5.1.14 možemo oslabiti, no dokaz ispuštamo.

Teorem 5.1.15 — Mertensov teorem. Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni redovi od kojih je barem jedan apsolutno konvergentan i neka su A i B njihove sume. Tada je umnožak redova $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ također konvergentan i suma mu je $C = AB$.

■ **Primjer 5.37** Neka je $|x| < 1$. Tada znamo da je $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$. Množenjem tih dvaju redova dobivamo $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$. Uočimo da drugi red ima negativne članove pa ne možemo primijeniti Teorem 5.1.14, ali su oba reda apsolutno konvergentna pa možemo prijmijeniti Mertensov teorem. ■

Napomena 5.13 Spomenimo još jedan teorem koji je dokazao Abel. Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni redovi i neka su A i B njihove sume. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ umnžak redova $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ koji je konvergentan i neka je C njegova suma. Tada vrijedi $C = AB$. Mogli smo koristiti i ovaj teorem u Primjeru 5.37.

■ **Primjer 5.38** Promotrimo red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ za bilo koji $x \in \mathbb{R}$. U sljedećem poglavlju ćemo vidjeti da je suma tog reda jednaka e^x. Lako možemo vidjeti da je dani red konvergentan (korištenjem Teorema 5.1.7 $(q = 0)$) pa možemo pisati $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Sada računamo

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = f(x+y)$$

Dobivamo $f(x)f(y) = f(x+y)$, a to svojstvo ima eksponencijalna funkcija. ■

5.1.5 Primjeri

■ **Primjer 5.39** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Uočimo da je red apsolutno konvergentan jer je

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

a red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan. To znači da je zadani red konvergentan. ■

■ **Primjer 5.40** Napišimo broj $r = 1.2343434\ldots = 1.2\dot{3}\dot{4}$ u obliku razlomka.
Možemo pisati

$$r = 1.2 + 0.034 + 0.00034 + \ldots = \frac{6}{5} + \frac{34}{10} \cdot \left(\frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{6}{5} + \frac{34}{10} \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{5} + \frac{34}{10} \cdot \frac{1}{99} = \frac{6}{5} + \frac{34}{990} = \frac{1\,222}{990} = \frac{611}{495}.$$

Dijeljenjem lako možemo provjeriti dobiveni rezultat. ■

■ **Primjer 5.41** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}.$$

S obzirom da nije ispunjen Nužan uvjet konvergencije (Teorem 5.1.2), zadani red je divergentan. ■

■ **Primjer 5.42** Odredimo konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

Red divergira. Naime, nazivnici rastu sporije od n ($\ln n < n \Leftrightarrow n < e^n$, za $n \in \mathbb{N}$) pa vrijedi $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\ln n}$. Po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.4), dani red divergira jer red $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergira. ■

■ **Primjer 5.43** Slično kao u Primjeru 5.42 bismo mogli zaključiti da redovi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$$

divergiraju. Npr. za zadnji red je dovoljno pokazati

$$\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n},$$

odnosno $n > \ln^2 n$, a to se lako vidi jer vrijedi

$$e^{\sqrt{n}} > 1 + \sqrt{n} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}n\sqrt{n} + \frac{1}{24}n^2 > n \tag{5.6}$$

za $n \geq 24$. ■

5.1.6 Zadatci

Vježba 5.1 Za ovaj zadatak Vam osim papira i olovke trebaju jedan tepih u obliku kvadrata i škare. Uzmite tepih, podijelite ga olovkom na 9 dijelova, izrežite središnji dio, svaki od preostalih 8 dijelova ponovno podijelite na novih 9 dijelova i nastavite postupak u beskonačno mnogo koraka. Nakon što završite rezanje, odredite površinu preostalog dijela (koji se sada zove tepih Sierpinskog).

Vježba 5.2 Pokažite da je $0.9999\ldots = 0.\dot{9} = 1$.

Vježba 5.3 Pogledajmo red (Teorem 5.2.6 i Napomena 5.15)

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\ldots=\ln 2.$$

Pomnožimo li taj red s $\frac{1}{2}$ dobivamo

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Sada umetnemo nule. To ne mijenja konvergenciju,

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Zbrojimo li ovaj i početni red dobivamo

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2.$$

Sada vidimo da dobivamo isti red kao početni, ali s malo "izmješanim" članovima. No, na desnoj strani je sada $\frac{3}{2}\ln 2$. U čemu je problem?

Vježba 5.4 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$.

Vježba 5.5 Izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$.

Vježba 5.6 Izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(e-1)^{2n}}$.

Vježba 5.7 Odredite sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{7\cdot 5^n}$.

Vježba 5.8 Odredite sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(2n)}{3^{3n-1}}$.

Vježba 5.9 Odredite sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{ch} n}{3^n}$.

Vježba 5.10 Odredite sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos^2\frac{2n\pi}{3}$.

Vježba 5.11 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+7}}{n\sqrt{n}}$.

Vježba 5.12 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Vježba 5.13 Ispitajte apsolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \sin\frac{n+1}{n^3+17}$. Da li ovaj red konvergira uvjetno?

Vježba 5.14 Koristeći integralni kriterij ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3(2n)}$.

Vježba 5.15 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\sqrt[n]{n}$.

Vježba 5.16 Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan, je li red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergentan?

Vježba 5.17 Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan, je li red $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ konvergentan?

Vježba 5.18 Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergentan, je li red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ divergentan?

Vježba 5.19 Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergentan, je li red $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ divergentan?

Vježba 5.20 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Vježba 5.21 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{n+1}{n^2+1}$.

Vježba 5.22 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2+1}$.

Vježba 5.23 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Vježba 5.24 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Vježba 5.25 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \ln^n\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$.

Vježba 5.26 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$.

Vježba 5.27 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cos\frac{1}{3^n}$.

Vježba 5.28 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n^2+1}}{\sqrt[4]{n^7+n^3+1}}$.

Vježba 5.29 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{n^2+1}$.

Vježba 5.30 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$.

Vježba 5.31 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}$.

Vježba 5.32 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{n}$.

Vježba 5.33 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[5]{n^3+1}-\sqrt[5]{n^3}$.

Vježba 5.34 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$.

Vježba 5.35 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$.

Vježba 5.36 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p > 0$.

Vježba 5.37 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$.

Vježba 5.38 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2\sqrt{n+1}}$.

Vježba 5.39 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{2n}}$.

Vježba 5.40 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$.

Vježba 5.41 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Vježba 5.42 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+e^{-n})}{n}$.

Vježba 5.43 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}$.

Vježba 5.44 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

Vježba 5.45 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$.

Vježba 5.46 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n+2}$.

Vježba 5.47 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$.

Vježba 5.48 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n^2}$.

Vježba 5.49 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n-n}$.

Vježba 5.50 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n^2}$.

Vježba 5.51 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{2}{3^n} - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$.

Vježba 5.52 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{arctg}\, n}{\sqrt{n+1}}$.

Vježba 5.53 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$ u ovisnosti o realnim parametrima a i b.

5.1.7 Rješenja

5.1. Površina preostalog dijela je 0. U prvom koraku je izrezano $\frac{1}{9}$ površine, u drugom $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}$ površine pa je ukupna izrezana površina

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{8}{9}}=1.$$

Zadatak možemo riješiti i na drugi način. Nakon svakog izrezivanja ostaje $\frac{8}{9}$ prethodne površine pa nakon n izrezivanja ostaje $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ površine. Znamo da je $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n=0$.

5.2. Neka je $x=0.\dot{9}$. Tada je $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=9\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$. Mogli smo definirati $y=1-x$. Tada je $0\le y<10^{-n}$ za svaki $n\in\mathbb{N}$ pa je $y=0$.

5.3. Članove reda koji ne konvergira apsolutno ne možemo po volji permutirati.

5.4. Red konvergira po Cauchyjevom kriteriju.

5.5. Kako je $n^2-\frac{1}{4}=(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})$, dobivamo $\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ pa se indukcijom pokazuje $S_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ odnosno $\lim_{n\to\infty}S_n=2$.

5.6. Ovo je geometrijski red ($q=\frac{2}{(e-1)^2}$ i počinje od 1) pa vrijedi

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{(e-1)^2}}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(e-1)^2}{e^2-2e-1}-1\right)=\frac{1}{e^2-2e-1}.$$

5.7. Ovo je također geometrijski red ($q=-\frac{3}{5}$) i vrijedi

$$S=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{5}}-1\right)=\frac{1}{7}\left(\frac{5}{8}-1\right)=-\frac{3}{56}.$$

5.8. Uvrštavanjem $\operatorname{sh}(2n)=\frac{1}{2}(e^{2n}-e^{-2n})$, dobivamo geometrijski red

$$S=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{e^2}{27}}-\frac{1}{1-\frac{1}{e^2 27}}\right)=\frac{81}{54-2e^2}-\frac{81e^2}{54e^2-2}.$$

5.9. Sada uvrstimo $\operatorname{ch}(n)=\frac{1}{2}(e^n+e^{-n})$ i dobivamo geometrijski red

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{e}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{e3}}-2\right)=\frac{3}{2e+6}+\frac{3e}{6e+2}-1.$$

5.10. Uočimo da niz $\left(\cos^2\frac{2n\pi}{3}\right)$ ima oblik $\frac{1}{4},\frac{1}{4},1,\frac{1}{4},\frac{1}{4},1,\ldots$. Dakle, suma ima oblik

$$S=\frac{1}{12}\frac{1}{1-\frac{1}{27}}+\frac{1}{36}\frac{1}{1-\frac{1}{27}}+\frac{1}{27}\frac{1}{1-\frac{1}{27}}=\frac{9+3+4}{108}\cdot\frac{27}{26}=\frac{2}{13}$$

5.11. Red konvergira. Brojnik i nazivnik množimo s $\sqrt{n}+\sqrt{n+7}$ i tada dobivamo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n+7})}$. To je konvergentan red (po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.4)).

5.12. Red divergira. Uočimo da je $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$ pa parcijalna suma S_n ima oblik $S_n=\ln(n+1)$. To znači da je dani red divergentan.
5.13. Red konvergira apsolutno. Da bismo ispitali apsolutnu konvergenciju, gledamo red $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n+1}{n^3+17}$. Po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.5), taj red konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+17}$ odnosno red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Taj red je konvergentan pa je zadani red apsolutno konvergentan pa nije uvjetno konvergentan.
5.14. Red konvergira. Dovoljno je ispitati konvergenciju integrala

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^3(2x)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\frac{1}{\ln^2(2x)}\Big|_2^{\infty}.$$

S obzirom da integral konvergira, dani red konvergira.
5.15. Red divergira. Vrijedi $\ln\sqrt[n]{n}=\frac{1}{n}\ln n$. S obziron da harmonijski red divergira, a $\ln n>1$ za $n>2$, dani red divergira.
5.16. Da ako je $a_n\geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$. Nužan uvjet konvergencije (Teorem 5.1.2) nam daje da postoji $N\in\mathbb{N}$ takav da je $a_n<1$ za $n\geq N$. O znači da je $a_n^2<a_n$ pa dani red konvergira po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.4). Ako dozvolimo da članovi reda nisu nenegativni, tada red $\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergira (po Leibnizovom kriteriju (Teorem 5.1.12)), ali harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergira.
5.17. Ne nužno. Npr. red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira, ali red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergira.
5.18. Ne nužno. Npr. red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergira, ali red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira.
5.19. Da. Ako je beskonačno mnogo članova niza veće ili jednako 1, tada je jasno da red $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{a_n}$ divergira. Ako su nakon nekog $N\in\mathbb{N}$ manji od 1, tada vrijedi $a_n<\sqrt{a_n}$ pa opet dobivamo da red $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{a_n}$ divergira.
5.20. Red divergira. $S_n=\sqrt{n+1}$ $(S_0=1)$. U ovom zadatku je bilo lagano izračunati S_n i dobiti divergenciju. Inače se kod zadataka takvog tipa množi brojnik i nazivnik s $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ i dobiva $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Nakon usporedbe s redom $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$, dobiva se divergencija.
5.21. Red divergira. Dva puta koristimo Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.5). Najprije zadani red usporedimo s redom $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$, a nakon toga, dobiveni red uspordimo s redom $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ koji je divergentan.
5.22. Red konvergira. Opet koristimo Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.5) i dani red uspoređujemo s redom $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ koji je konvergentan.
5.23. Red divergira. Vrijedi $n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n$. Taj izraz teži prema 2 pa je narušen Nužan uvjet konvergencije (Teorem 5.1.2). No, divergencija se lako dobije i na drugi način. U Vježbi 5.24 ćemo vidjeti da red bez n divergira, a naš red ima veće članove pa dobivamo divergenciju po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.4).
5.24. Red divergira. Naime, vrijedi $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\ln(n+1)-\ln(n-1)$, a to nam daje $S_n=\ln(n+1)+\ln n-\ln 2$.
5.25. Red konvergira. Vrijedi $n^n\ln^n\left(\frac{2n+1}{2n}\right)=\left(\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)^n$. Kako niz $\left(\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)$ teži prema $\frac{1}{2}$, postoji $N\in\mathbb{N}$ tako da je $\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<\frac{2}{3}$ za $n\geq N$. Sada koristimo Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.4) i dani red uspoređujemo s redom $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ koji je konvergentan.
5.26. Red konvergira. Vrijedi $2^n\sin\frac{1}{3^n}=\frac{2^n\sin\frac{1}{3^n}\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}$. Kako je $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}=1$, naš red uspoređujemo s $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ koji je konvergentan pa i naš red konvergira (Teorem 5.1.5).

5.27. Red konvergira. Kako je $|\cos x| \le 1$, vrijedi $\frac{1}{2^n}\cos\frac{1}{3^n} \le \frac{1}{2^n}$. S obzirom da red $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ konvergira, po Poredbenom kriteriju (Teoremem 5.1.4), zadani red konvergira.

5.28. Red divergira. Želimo imati 1 u brojniku pa brojnik i nazivnik dijelimo s $n^{\frac{4}{3}}$. Dobivamo $\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{\sqrt[12]{n^5+\frac{1}{n^7}+\frac{1}{n^{16}}}}$. S obzirom da red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{12}}}$ divergira, po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.5) zadani red divergira.

5.29. Red konvergira. Kako je $\left|\frac{\cos(n^2+1)}{n^2+1}\right| \le \frac{1}{n^2+1}$, dani red uspoređujemo s redom $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ koji je konvergentan pa po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.4), dani red konvergira apsolutno pa i konvergira.

5.30. Red divergira. Lako se vidi $S_n = \sqrt[3]{n+1}$. Inače, zadatke tog tipa rješavamo tako da brojnik i nazivnik množimo s $\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}$. Dani red poprima oblik $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}}$ i njega uspoređujemo s redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ koji je divergentan.

5.31. Red konvergira. Množimo brojnik i nazivnik s $\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(n^2+1)n^2}+\sqrt[3]{n^4}$ i dobivamo $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(n^2+1)n^2}+\sqrt[3]{n^4}}$. Sada red možemo uporediti s redom $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ koji konvergira pa po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.5), naš red konvergira.

5.32. Red divergira. Lako se vidi da je $S_n = \sqrt[5]{n+1}$ i to smo već vidjeli u Vježbama 5.20 i 5.30. Možemo također koristiti formulu za razliku petih potencija, no to ćemo ionako vidjeti u Vježbi 5.33.

5.33. Red konvergira. Brojnik i nazivnik množimo s $\sqrt[5]{(n^3+1)^4}+\cdots+\sqrt[5]{(n^3)^4}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(n^3+1)^4}+\sqrt[5]{(n^3+1)^3n^3}+\sqrt[5]{(n^3+1)^2(n^3)^2}+\sqrt[5]{(n^3+1)(n^3)^3}+\sqrt[5]{(n^3)^4}}.$$

Sada dobiveni red uspoređujemo s redom $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5n^{\frac{12}{5}}}$ koji je konvergentan.

5.34. Red divergira. Sličnu ideju smo vidjeli u Primjerima 5.42 i 5.43. Naime, vrijedi $n > \ln(\ln n)$ odnosno $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$ pa po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.4) naš red divergira.

5.35. Red konvergira po Leibnizovom kriteriju (Teorem 5.1.12).

5.36. Red konvergira za $p > 1$. Koristimo Integralni kriterij (Teorem 5.2.13) za $p \ne 1$

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}\,(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{\infty}.$$

To znači da red konvergira za $p > 1$. Ako je $p = 1$, red divergira (Primjer 5.19).

5.37. Red konvergira po Leibnizovom kriteriju (Teorem 5.1.12).

5.38. Red konvergira. Naime, možemo ga usporediti s redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ koji je konvergentan pa po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.5), naš red konvrgira.

5.39. Red konvergira. Možmo pisati $\frac{(n+1)^n}{n^{2n}} = \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$. Kako je $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{2}$ za $n \ge 3$, dani red možemo usporediti s geometrijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ koji je konvergentan.

5.40. Red konvergira. Brojnik i nazivnik množimo s $1+\cos\frac{1}{n}$ i dobivamo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}}$. Sada taj red usporedimo s redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ koji je konvergentan.

5.41. Red konvergira. Vrijedi $\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \left(\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n\right)^n$. Izraz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ teži prema e pa postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 0.95$ za $n \ge N$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} 0.95^n$ je konvergentan.

5.42. Red konvergira. Naime, brojnik $\ln(1+e^{-n})$ danog izraza teži u 0 jako brzo. Recimo za $n=10$, $\ln(1+e^{-10}) = \ln(1+\frac{1}{e^{10}})$ je približno jednako 0.000045. Da bismo dobili konvergenciju, dovoljno je pokazati $\ln(1+\frac{1}{e^n}) < \frac{1}{n}$ ili $1+\frac{1}{e^n} < e^{\frac{1}{n}}$. Sada koristimo ocjenu

$$1+x<e^x, \quad x\neq 0 \tag{5.7}$$

koja se lako dobije deriviranjem (a direktno slijedi iz (5.11) za $x>0$). Ocjenu (5.7) primjenimo dva puta i dobivamo $1+\frac{1}{e^n} < 1+\frac{1}{1+n} < 1+\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$. Na kraju, dani red uspoređujemo s redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ koji je konvergentan.
5.43. Red konvergira. Možemo koristiti Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.4) jer vrijedi $\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$, a red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira.
5.44. Red konvergira po Leibnizovom kriteriju (Teorem 5.1.12).
5.45. Red divergira jer Nužni uvjet konvergencije (Teorem 5.1.2) nije zadovoljen.
5.46. Red konvergira. Naime, brojnik i nazivnik množimo s $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ i dobivamo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(n+2)}$, a to je konvergentan red po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.5).
5.47. Red konvergira. Naime, po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.5)(za red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$), naš red konvegira apslutno, a time i obično.
5.48. Red divergira. Članove reda možemo pisati u obliku $\left(\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right)^n$. S obzirom da izraz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ teži prema $e^2\approx 7.389$, postoji $N\in\mathbb{N}$ takav da je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}>7$ za $n\geq N$. To znači da Nužni uvjet konvergencije (Teorem 5.1.2) nije zadovoljen.
5.49. Red konvergira po Leibnizovom kriteriju (Teorem 5.1.12). Može se pokazati da red konvegira apsolutno koristeći npr. Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.5) (i red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$).
5.50. Red konvergira. Članove reda možemo pisati u obliku $\left(\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^n\right)^n$. S obzirom da izraz $\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^n$ teži prema $\frac{1}{\sqrt{e}}$ postoji $N\in\mathbb{N}$ takav da je $\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^n<$ 0.9 za $n\geq N$. Sada nam Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.4) daje da naš red konvergira.
5.51. Red konvergira. Red je oblika $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{17}{3^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{17}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{\sin\frac{17}{3^{n+2}}}{\frac{17}{3^{n+2}}}$. Kako je $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{17}{3^{n+2}}}{\frac{17}{3^{n+2}}}=1$, postoji $N\in\mathbb{N}$ takav da je $\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}<2$, za $n\geq N$. Sada koristimo red $\frac{34}{9}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (koji konvergira) i Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.4).
5.52. Red konvergira Leibnizovom kriteriju (Teorem 5.1.12). No, sada ćemo malo pogledati uvjete Leibnizovog kriterja. Zadani red je očigledno alternirani i zadovoljava Nužni uvjet konvergencije ($\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n+1}}=0$ jer je brojnik ograničen odozgo s $\frac{\pi}{2}$, a nazivnk ide u ∞). Ostaje još pokazati da je niz padajuć. Dovoljno je gledati funkciju $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x+1}}$. Njezina derivacija u brojniku (nazivnik je pozitivan) ima $\frac{1}{x^2+1}(\sqrt{x}+1)-(\operatorname{arctg} x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$ i to je negativno za velike x jer se prvi dio ponaša kao $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, a drugi kao $\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$.
5.53. Red konvergira za $a=\frac{1}{2}$. Konvergencija ne ovisi o b. Brojnik i nazivnik najprije množimo s $\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b}$ a nakon toga s $n+a+\sqrt[2]{n^2+n+b}$. Dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2an+a^2-n-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt[2]{n^2+n+b})}.$$

Ako je $a=\frac{1}{2}$ tada nemamo n u brojniku i red konvergira. Inače divergira.

5.2 Redovi potencija

Definicija 5.2.1 **Red potencija** je izraz oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{5.8}$$

gdje su $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ fiksirani realani brojevi, a $x \in \mathbb{R}$. ■

Dakle, gledamo redove kao i u prvom dijelu poglavlja, ali sada gledamo samo redove oblika (5.8). Većina primjera iz prvog dijela poglavlja nije tog oblika. Sada nam se javlja nepoznanica x i gledamo redove koji ovise o x. Možda bi bilo korektnije pisati $S(x)$, no uskoro ćemo gledati funkcije koje ovise o x pa ne bi bilo dobro uvoditi previše oznaka. Dakle, za svaki x imamo poseban red.

Na prvi pogled ovaj problem izgleda neusporedivo teži od prethodnog jer sada imamo beskonačno mnogo redova koje moramo analizirati. No, već Teorem 5.2.1 nam kazuje da je situacija puno jednostavnija i da je skup brojeva S za koje red (5.8) konvergira interval sa središtem u x_0.

Nakon toga ćemo gledati funkcije

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

definirane na skupu S. Uočimo da na lijevoj strani imamo funkciju koja može imati neka svojstva (parna, omeđena, neprekidna, diferencijabilna), a na destnoj strani za svaki x imamo red koji, možda niti ne konvergira. Neke primjere smo već vidjeli u prethodnom poglavlju. Npr.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{5.9}$$

Sada je $x_0 = 0$, a $S = \mathbb{R}$. Geometrijski red

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

je također razvijen oko točke $x_0 = 0$, ali konvergira na intervalu $(-1, 1)$. To znači da je izvan tog intervala funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$ definirana (osim u točki $x = 1$), ali odgovarajući red ne konvergira prema toj funkciji (izvan tog intervala taj red divergira).

Dobivene funkcije ćemo derivirati i integrirati. Npr., deriviranjem relacije (5.9), dobivamo

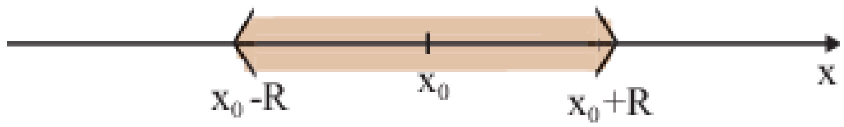
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Znamo da je derivacija funkcije $f(x) = \sin x$ funkcija $f'(x) = \cos x$. Na desnoj strani smo derivirali "član po član". Teorem 5.2.8 nam kaže da to smijemo napraviti. Također možemo integrirati "član po član". Pritom se skup S gotovo uopće ne mijenja. Skup S može dobiti ili izgubiti samo rubne točke.

5.2.1 Definicija, osnovni primjeri i teoremi

Teorem 5.2.1 Red (5.8) konvergira apsolutno na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ za neki $R \in [0, \infty]$. Red (5.8) divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$.

Definicija 5.2.2 R definiran u Teoremu 5.2.1 se zove **polumjer konvergencije**. Skup S na kojem red (5.8) konvergira se zove **područje konvergencije**. ▪



Slika 5.1: Područje konvergencije reda potencija

Napomena 5.14 U rubnim točkama $x_0 - R$ i $x_0 + R$ red može konvergirati i divergirati. U Primjeru 5.44, red konvergira u jednom rubu, ali divergira u drugom. Formulu za računanje polumjera konvergencije R ćemo vidjeti u Teoremu 5.2.2. No, R ćemo moći odrediti i bez korištenja formule i to ćemo vidjeti u primjerima.

Dokaz. Radi jednostavnosti stavimo $x_0 = 0$. Pretpostavimo da red (5.8) konvergira za neki $x_1 \in \mathbb{R}$ (takav x_1 postoji jer red (5.8) konvergira za $x_1 = 0$). Nužni uvjet konvergencije nam daje $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$, $|a_n||x_1|^n < 1$. Uzmimo bilo koji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| < |x_1|$ odnosno $\frac{|x|}{|x_1|} = q < 1$. Za $n \geq n_1$ vrijedi

$$|a_n x^n| = |a_n||x_1|^n \frac{|x|^n}{|x_1|^n} < q^n$$

pa red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ konvergira apsolutno po Poredbenom kriteriju (koristimo i konvergenciju geometrijskog reda za $q < 1$). Stavljamo $R = \sup\{x \in \mathbb{R} \,|\, \text{red (5.8) konvergira za } x\}$. Prisjetimo se da je supremum skupa, označen sa sup, najmanja gornja međa skupa. ■

▪ **Primjer 5.44** Odredimo područje konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

Teorem 5.2.1 nam kaže da najprije gledamo apsolutnu konvergenciju, a nakon toga rubove intervala. Koristeći d'Alembertov kriterij konvergencije dobivamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}| \frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{|(-1)^n| \frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|$$

pa je naš red apsolutno konvergentan za $|x| < 1$ i divergentan za $|x| > 1$. To znači da je polumjer konvergencije jednak 1. Ostaje na još pogledati rubne točke -1 i 1. Za $x = -1$, naš red postaje harmonijski red koji je divergentan. Za $x = 1$, dobivamo alternirani harmonijski red koji je konvergentan. Dakle, područje konvergencije je skup $S = (-1, 1]$. ▪

■ **Primjer 5.45** Odredimo područje konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Ponovno koristimo d'Alembertov kriterij i sada je $q = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$. To znači da red konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$ odnosno, $R = \infty$. ■

Teorem 5.2.2 — Cauchy-Hadamardov teorem. Za polumjer konvergencije vrijedi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dokaz. Radi jednostavnosti stavimo $x_0 = 0$. Da bismo dobili prvu formulu, dovoljno je gledati apsolutnu konvergenciju i primjeniti D'Alembertov kriterij.

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Red potencija konvergira ako je $q < 1$ odnosno $|x| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Da bismo dobili drugu formulu, koristimo Cauchyjev kriterij.

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Red potencija konvergira ako je $q < 1$ odnosno $|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Dodatak

Da bismo dobili treću formulu, najprije se moramo prisjetiti definicije limesa superior. Za neki niz (b_n) definiramo $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n}\{b_m\}$. Također možemo reći da je $\limsup_{n\to\infty} b_n$ najveća točka gomilanja niza (b_n). Sada stavimo $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ i vidimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_ε takav da $n \geq n_\varepsilon$ daje $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} > R - \varepsilon$ odnosno $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R-\varepsilon}$. Sada je

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{|x|}{R-\varepsilon}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Za $|x| < R - \varepsilon$ naš red potencija konvergira po Caucyjevom kriteriju ($q = \frac{|x|}{R-\varepsilon} < 1$). Kako to možemo napraviti za svaki ε, R je polumjer konvergencije.

■

■ **Primjer 5.46** Odredimo područje konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n n} (x+1)^n.$$

Prva formula za R nam daje

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{3^n n}}{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}} \right| = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 3.$$

Za $x = -4$ dobivamo alternirani harmonijski red koji je konvergentan, a za $x = 2$ divergentan harmonijski red. To znači da je područje konvergencije interval $[-4, 2\rangle$. ■

■ **Primjer 5.47** Odredimo područje konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n.$$

Prva formula nam daje $R=0$ pa je područje konvergencije samo točka 0. ■

■ **Primjer 5.48** Odredimo područje konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n)^n (x-3)^n.$$

Prve dvije formule za R ne možemo koristiti, ali je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ pa je područje konvergencije interval $\left(3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}\right)$ (u rubovima redovi divergiraju po Nužnom uvjetu konvergencije). ■

■ **Primjer 5.49** Odredimo područje konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}+1}.$$

Cauchy—Hadamardov teorem (Teorem 5.2.2) nam daje

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{2\sqrt{n+1}+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}+1}{2\sqrt{n}+1} = 1$$

Ostaje provjeriti rubove. Za $x=1$, dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ koji je divergentan (možemo koristiti Poredbeni kriterij (Teorem 5.1.5) i divergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$). Za $x=-1$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n+1}}$ koji je konvergentan (svi uvjeti Leibnizovog kriterija (Teorem 5.1.12) su zadovoljeni). Dakle, područje konvergencije je interval $[-1,1)$. ■

■ **Primjer 5.50** Odredimo područje konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}.$$

Možemo primijeniti Cauchy—Hadamardov teorem kao u prethodnom zadatku, a možemo direktno primijeniti d'Alembertov kriterij (Teorem 5.1.6). Ovaj put ćemo primijeniti Teorem 5.1.6. Najprije određujemo interval na kojem red konvergira apsolutno,

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{(3n+1)2^{n+1}}}}{\frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3|x|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}} = \frac{3|x|}{\sqrt{2}}.$$

To znači da red konvergira apsolutno za $\frac{3|x|}{\sqrt{2}} < 1$ odnosno za $|x| < \frac{\sqrt{2}}{3} = R$. Ostaje još pogledati rubove intervala. Za $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ svi uvjeti Leibnizovog teorema (Teorem 5.1.12) su ispunjeni pa zadani red konvergira. Za $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3n-2)}}$ koji je divergentan. To znači da je područje konvergencije interval $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. ■

5.2.2 Taylorov red elementarnih funkcija

U prethodnom odjeljku smo govorili o redovima potencija i vidjeli da red potencija oblika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergira na intervalu S (području konvergencije) oko x_0 i time definira funkciju $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ na S. Tada smo se koncentrirali na određivanje područja konvergencije S. Sada želimo nešto reći o vezi funkcija i redova potencija. Ako nasumice izaberemo koeficijente, određivanje područja konvergencije ne mora biti težak problem, ali određivanje funkcije koja je dana tim redom može biti puno teže.

■ **Primjer 5.51** Odredimo funkciju koja je zadana redom

$$1+2x+3x^2+x^3+2x^4+3x^5+x^6+2x^7+3x^8+\dots.$$

Za određivanje polumjera konvergencije možemo koristiti Cauchy-Hadamardov teorem. S obzirom da je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$, $R=1$. Red divergira za $x=-1$ i $x=1$ (zbog Nužnog uvjeta konvergencije) pa je područje konvergencije interval $(-1,1)$. Sada se prisjetimo geometrijskog reda i pišemo

$$1+x^3+x^6+\dots = \frac{1}{1-x^3}, \quad 2x+2x^4+2x^7+\dots = \frac{2x}{1-x^3} \quad 3x^2+3x^5+3x^8+\dots = \frac{3x^2}{1-x^3}$$

Dobivamo $f(x) = \frac{1+2x+3x^2}{1-x^3}$. Uočimo da je red na intervalu $(-1,1)$ apsolutno konvergentan pa članove reda možemo proizvoljno permutirati. ■

Nas više zanima drugi smjer. Zadanu funkciju hoćemo razviti u red potencija. Kako to možemo napraviti? Osim geometrijskog reda (prethodni primjer), mi ne znamo razviti u red potencija niti jednu drugu funkciju. Rješenje tog problema nam daje Taylorova formula. Ona nam govori kako napisati funkciju u obliku polinoma i ostatka. Mi ćemo sada taj polinom pretvarati u red i paziti da ostatak ide u 0. S obzirom da nam trebaju derivacije reda n, za svaki $n \in \mathbb{N}$, moramo definirati odgovarajući skup funkcija.

Definicija 5.2.3 Neka je S neki podskup of $\mathbb{R}$. Ako funkcija f ima sve derivacije u svim točkama skupa S, tada kažemo da je **glatka**. Skup svih glatkih funkcija na S označavamo s $\mathbf{C}^{\infty}(S)$. Ako glatku funkciju na S možemo razviti u red potencija oko bilo koje točke skupa S tada kažemo da je ona **analitička**. Skup svih analitičkih funkcija na S označavamo s $\mathbf{C}^{\omega}(S)$. ■

Definicija 5.2.4 Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ i $f \in \mathbf{C}^{\omega}(S)$. Tada se red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots \tag{5.10}$$

zove **Taylorov red** funkcije f oko točke x_0. Ako je $x_0=0$, tada se rabi izraz **Maclaurinov red**. ■

Dakle, Taylorov red je red potencija za analitičke funkcije. Teorem 5.2.9 će nam reći da nema drugih redova za analitičke funkcije. Nećemo više analizirati vezu redova potencija i glatkih (analitičkih) funkcija. Spomenimo još Borelovu lemu koja kaže da svakom nizu koeficijenata možemo pridružiti glatku (ne nužno analitičku) funkciju čije derivacije u $x_0 = 0$ su jednake zadanim koeficijentima.

Neoprezni čitatelj bi mogao pomisliti da je svaka glatka funkcija ujedno i analitička odnosno da su skupovi $\mathbf{C}^\infty(S)$ i $\mathbf{C}^\omega(S)$ jednaki. Tipičan primjer je funkcije koja je glatka, ali ne i analitička je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Ona ima sve derivacije u 0 i sve su jednake 0, ali red potencija kojemu su svi koeficjenti jednaki 0 daje 0 za svaki $x \in \mathbb{R}$, a ne našu funkciju f. Ipak, elementarne funkcije (polinomi, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske funkcije) su analitičke. Osim toga, zbroj, umnožak i kompozicija analitičkih funkcija je opet analitička funkcija.

Prisjetimo se sada Taylorove formule koja nam daje razvoj analitičkih funkcija u red potencija.

Teorem 5.2.3 Neka je $S \subset \mathbb{R}$ i $f \in \mathbf{C}^\infty(S)$, $x_0 \in S$ i $N \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_N(x) = T_N(x) + R_N(x).$$

Ostatak $R_N(x)$ ima oblik

$$R_N = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}, \quad c \in (x_0, x)$$

Da bi Taylorov polinom $T_n(x)$ težio redu kako se N sve više povećava, nužno je i dovoljno da ostatak R_N teži u 0 za $x \in S$. Dakle, u primjerima ćemo imati izraz oblika

$$\lim_{N \to \infty} R_N(x)$$

za $x \in S$. Bitno je uočiti da najprije fiksiramo x i gledamo limes kada N ide u beskonačno za taj fiksirani x. Skup S će se sastojati od onih x za koje je taj limes jednak 0.

- $f(x) = e^x$

Eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ je najvažnija funkcija u matematici. Razvijamo je oko $x_0 = 0$. Znamo da je $f^{(n)} = e^x$ za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $e^0 = 1$ pa Taylorov red ima oblik

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

Ostaje odrediti skup S. Dakle gledamo ostatak R_N, fiksiramo x i računamo

$$\lim_{N \to \infty} R_N(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{e^c}{(N+1)!}x^{N+1}.$$

Kako je ovaj limes jednak 0 za svaki x, dobivamo da je $S = \mathbb{R}$.

Ako gornji račun nije jasan čitatelj može zamisliti neki broj, npr. $x = 10$ pa naš ostatak prelazi u $R_N^L(10) = \frac{e^c}{(N+1)!}10^{N+1} < e^{10}\frac{10^{N+1}}{(N+1)!}$ jer je $f(x) = e^x$ rastuća funkcija odnosno $e^c < e^{10}$ za $c < 10$. Sada se lako vidi da naš ostatak ide u 0 kada N ide u ∞. Kako to možemo napraviti za svaki $x \in \mathbb{R}$, dobivamo našu tvrdnju da je $S = \mathbb{R}$. Dakle vrijedi

Teorem 5.2.4 Taylorov red eksponencijalne funkcije $f(x)=e^x$ oko točke $x_0=0$ ima oblik

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{5.11}$$

za svaki $x\in\mathbb{R}$.

Za $x=1$ dobivamo

$$e=e^1=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots.$$

Za $x=-1$ dobivamo

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\ldots.$$

Formula (5.11) nam daje

$$f(-x)=e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\ldots \tag{5.12}$$

za svaki $x\in\mathbb{R}$. U Primjeru 5.38 smo pokazali da vrijedi $e^xe^y=e^{x+y}$.

Formule (5.11) i (5.12) možemo iskoristiti za računanje funkcija $\operatorname{sh}x$ i $\operatorname{ch}x$. Vrijedi

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

i

$$\operatorname{ch}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

za sve $x\in\mathbb{R}$.

Promotrimo diferencijalnu jednadžbu

$$f'(x)=f(x) \tag{5.13}$$

i pretpostavimo da je $f(x)$ analička funkcija oblika

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

U sljedećem odjeljku ćemo vidjeti da funkciju $f(x)$ možemo derivirati "član po član" pa vrijedi

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Uvrstimo li ove razvoje u (5.13) dobivamo $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n$. Sada stavimo $a_0=C$ dobivamo $a_n=C\frac{1}{n!}$, a to je upravo red potencija eksponencijalne funkcije $f(x)=e^x$.

Razvoj (5.11) se može primijeniti i na kompleksne brojeve. Stavimo li ix umjesto x u (5.11) i primjenimo Eulrovu formulu dobivamo

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots .$$

Uskoro ćemo vidjeti da je $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$ te $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots$. Stavimo li $x = i\pi$, u (5.11) dobivamo

$$\cos\pi + i\sin\pi = -1 = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{24}\pi^4 - \frac{1}{720}\pi^6 + \ldots + i\left(\pi - \frac{1}{6}\pi^3 + \frac{1}{120}\pi^5 - \ldots\right).$$

Konvergencija bi bila brža kada bismo umjesto π uzeli neki manji broj. Spomenimo samo da je $\sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n} = -1.0018$ i $\sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1} = -0.0004$.

Dodatak

Možemo ići još korak dalje i primijeniti (5.11) na matrice (s realnim ili kompleksnim elementima). Ako je matrica A oblika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

tada je

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

odnosno

$$A^{4n} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{4n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A^{4n+2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } A^{4n+3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pa je

$$\begin{aligned} e^{xA} &= I_2 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2 + \frac{1}{6}x^3A^3 + \frac{1}{24}x^4A^4 + \ldots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots & x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots \\ -x + \frac{1}{6}x^3 - \ldots & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = A(x). \end{aligned}$$

Dobivamo da se grupa koja se sastoji od matrica $A(x)$ ($\det A(x) = 1$) može dobiti eksponencijalnim preslikavanjem algebre generirane matricom A ($\det A = 0$). Spomenimo da se eksponencijalnim preslikavanjem matrice traga 0 uvijek preslikavaju u matrice čija je determinanta jednaka 1. Lako se može provjeriti da vrijedi

$$e^{-xA} = \left(e^{xA}\right)^{-1} = A(-x).$$

Zainteresiran čitatelj može naći generalizaciju gornjih tvdnji u bilo kojoj knjizi koja se bavi Liejevim grupama i algebrama. U našem primjeru, grupa koja se sastoji od matrica $A(x)$ je Liejeva grupa (i izgleda poput jedinične kružnice) a njena algebra je algebra generirana matricom A (i izgleda poput pravca).

- $f(x) = \sin x$ **i** $g(x) = \cos x$

Promotrimo sada funkciju $f(x) = \sin x$. Opet ćemo staviti $x_0 = 0$ i računati derivacije od funkcije $f(x)$. Kako je $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ i $f^{(4)}(x) = \sin x$ dobivamo $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$ i $f^{(4)}(0) = 0$ odnosno $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(4n\pm1)}(0) = \pm 1$ te vrijedi

$$f(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots.$$

Sličan račun nam daje

$$g(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots.$$

Ostaje još odredti područje konvergencije. Račun ćemo provesti samo za funkciju $f(x) = \sin x$. Gledamo ostatak R_N^L napisan u Lagrangeovom obliku, fiksiramo x i računamo

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = \lim_{N\to\infty} R_N^L(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}x^{N+1}.$$

Kako je ovaj limes jednak 0 za svaki x ($|f^{(N+1)}(c)| \le 1$), dobivamo da je $S = \mathbb{R}$. To nam daje sljedeći teorem.

Teorem 5.2.5 Taylorovi redovi trigonometrijskih funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ oko točke $x_0 = 0$ imaju oblik

$$f(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

i

$$g(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Ovi redovi brzo konvergiraju. Npr. za $x = 0.1$ dobivamo

$$0.1 - \frac{1}{6}0.1^3 + \frac{1}{120}0.1^5 = 0.099833416666,$$

a $\sin 0.1 = 0.099833416647$.

Koristeći ove redove, lako se vidi da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Sada lako možemo izvesti i neke složenije formule, npr $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$. Ova formula se lako može dokazati korištenjem l'Hospitalovog pravila.

• $f(x) = \ln(1+x)$ **i** $g(x) = \ln(1-x)$

Funkcija $f(x) = \ln x$ nije definirana za $x = 0$ pa gledamo funkciju $f(x) = \ln(1+x)$. Lako se vidi da je $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$ i $f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$, a indukcijom se može pokazati da je

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

Red razvijamo oko točke $x_0 = 0$ i dobivamo $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ odnosno

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n.$$

Nećemo računati područje konvergencije. Samo ćemo reći da je ostatak ide u 0 za $x \in (-1,1)$. Spomenimo još da se korištenjem kriterija iz prethodnog poglavlja lako vidi apsolutna konvergencija na intervalu $(-1,1)$ te da red konvergira za $x = 1$ (korištenjem Leibnizovog kriterija). Međutim, radi jednostavnosti, spominjat ćemo konvergenciju samo na intervalu $(-1,1)$. Ako umjesto x stavimo $-x$ dobivamo funkciju $g(x) = \ln(1-x)$. Time smo dobili sljedeći teorem.

Teorem 5.2.6 Taylorovi redovi funkcija $f(x) = \ln(1+x)$ i $g(x) = \ln(1-x)$ imaju oblik

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

i

$$g(x) = \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n.$$

za $x \in (-1,1)$.

Napomena 5.15 Spomenimo još jednom da je područje konvergencije reda funkcije $f(x)$ interval $(-1,1]$ i to se dobije korištenjem Abelovog teorema (Teorem 5.2.10).

• $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Najprije moramo definirati binomne koeficijente.

Definicija 5.2.5 Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada definiramo

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}. \tag{5.14}$$

za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ■

Napomena 5.16 Uočimo da se definicija podudara s uobičajenom definicijom binomnih koeficijenata za $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $\alpha \geq n$.

■ **Primjer 5.52** Formula (5.14) nam daje

$$\binom{2}{3} = \frac{2\cdot 1\cdot 0}{6} = 0, \quad \binom{-2}{2} = \frac{(-2)\cdot(-3)}{2} = -3, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{1}{8},$$

Također vrijedi $\binom{\alpha}{0} = 1$ i $\binom{\alpha}{1} = \alpha$ za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Sada razvijamo funkciju $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ oko točke $x_0 = 0$. Lako se vidi da je $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ i $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$, a indukcijom se dobiva

$$f^{(n)}(x) = \alpha\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Sada uvrštavamo $x_0 = 0$ i dobivamo

$$f^{(n)}(0) = \alpha\dots(\alpha-n+1)$$

pa Taylorov red funkcije $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ oko točke $x_0 = 0$ ima oblik

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Nećemo računati područja konvergencije. Dakle, dobivamo

Teorem 5.2.7 Taylorov red funkcije $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ oko točke $x_0 = 0$ ima oblik

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \tag{5.15}$$

za $x \in (-1,1)$.

Napomena 5.17 S obzirom da je $\binom{m}{n} = 0$ za $m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i $m < n$, (5.15) je generalizacija Binomnog teorema.

Napomena 5.18 Može se pokazati da (5.15) konvergira u $x = 1$ za $\alpha > -1$ i u $x = -1$ za $\alpha \geq 0$. U Primjeru 5.36 smo vidjeli da (5.15) konvergira u $x = 1$ za $\alpha = \frac{7}{2}$.

■ **Primjer 5.53** Za $\alpha = \frac{1}{2}$ dobivamo razvoj funkcije $f(x) = \sqrt{1+x}$ oko točke $x_0 = 0$,

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots.$$

Za $\alpha = -\frac{1}{2}$ dobivamo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

Lako se vidi da je $2f'(x) = g(x)$. O tome ćemo govoriti u sljedećem odjeljku. Stavimo li $\alpha = -1$ i $-x$ umjesto x dobivamo

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

a to je upravo formula za geometrijski red (5.2). ■

5.2.3 Deriviranje i integriranje redova potencija

U Uvodu smo već komentirali da red potencija funkcije $f(x) = \sin x$ možemo derivirati "član po član". Sljedeći teorem (bez dokaza) kaže da se to uvijek događa.

Teorem 5.2.8 Neka je f analitička funkcija i neka je

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

njezin red potencija s polumjerom konvergencije R. Tada je Taylorov red derivacije $f'(x)$ dan izrazom

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \tag{5.16}$$

i polumjer konvergencije je isti R.

Također je Taylorov red integrala $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ dan izrazom

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + a_0(x-x_0) + \frac{1}{2}a_1(x-x_0)^2 + \ldots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1} \tag{5.17}$$

i polumjer konvergencije je opet isti R.

Napomena 5.19 U teoremu se spominje samo polumjer konvergencije, ali ne i područje konvrgencije S. Naime, područje konvergencije se može promijniti. Taylorov red funkcije $f(x) = \frac{1}{1-x}$, (5.2), konvergira na intervalu $(-1,1)$, ali odgovrarajući integral, Taylorov red funkcije $\int f(x)\,\mathrm{d}x = C - \ln|1-x|$ konvergira na intervalu $[-1,1)$ (Pogledajte Napomenu 5.15).

Napomena 5.20 Kada kažemo integral, mislimo na skup funkcija i pišemo konstantu C. U teoremu se koriste dva integriranja: funkcije i reda. Zbog toga bismo (5.17) mogli pisati u obliku $F(x) + K = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1}$ gdje je $F(x)$ neka izabrana primitivna funkcija, a $K \in \mathbb{R}$. To nam daje

$$F(x) = C - K + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1}$$

Dakle, ako hoćemo odrediti Taylorov red neke izabrane primitivne funkcije $F(x)$, moramo odrediti $C-K$, a to ćemo ponovno označavati sa C. Jedan način za određivanje konstanti C je uvrštavanje određenih vrijednosti za x. Prvi izbor je $x = x_0$. Ako imamo integral $\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ i izaberemo primitivnu funkciju $F(x) = -\ln|1-x|$, dobivamo

$$F(x) = -\ln|1-x| = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Sada uvrštavamo $x = 0$ i dobivamo $C = 0$ odnosno $\ln|1-x| = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, a to smo vidjeli u Teoremu 5.2.6.

■ **Primjer 5.54** Teorem 5.2.8 možemo koristiti i za određene integrale. Odredimo određeni integral

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Funkciju $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ razvijamo u red i dobivamo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \tag{5.18}$$

pa je

$$\begin{aligned}\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{0.1} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots)\,\mathrm{d}x = \dots = \\ &= 0.1 - \frac{1}{3}\cdot 0.1^3 + \frac{1}{5}\cdot 0.1^5 - \frac{1}{7}\cdot 0.1^7 + \dots.\end{aligned}$$

Koristeći napisana prva četiri članova dobivamo da je dani integral približno jednak 0.09966865238, a koristeći Napomenu 5.11 dobivamo da je greška manja od $\frac{1}{9}\cdot 0.1^9$. S obzirom da je $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$ dobivamo da je točna vrijednost danog integrala $\arctan 0.1 = 0.09966865249$. ■

■ **Primjer 5.55** Odredimo sumu reda

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Promotrimo sumu geometrijskog reda (5.2)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Da bismo dobili "n" u brojniku, dovoljno je derivirati izraze i pomnožiti ih s x,

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ostaje još uvrstiti $x = \frac{1}{2}$ (red konvergira na $\langle -1, 1\rangle$). Dobivamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$ ■

Napomena 5.21 Uočimo da smo u prethodnom primjeru funkciju i red množili s x. Najlakši način da se uvjerimo da je postupak opravdan je da funkciju x napišemo u obliku (apsolutno konvergentnog) reda $x = 0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + \dots$ i da na množenje s x gledamo kao na množenje redova (Mertensov teorem, Teorem 5.1.15). Također bismo mogli gledati Taylorov red funkcije $xf(x)$ i iskoristiti formulu

$$(xf(x))^{(n)} = nf^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(x).$$

Ostaje nam još uvrstiti $x = 0$.

■ **Primjer 5.56** Odredimo sumu reda

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

Ponovno ćemo početi sa sumom geometrijskog reda (5.2)

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

Da bismo dobili "n^2" u brojniku, dva puta ćemo ponoviti postupak iz prethodnog zadatka. Najprije ćemo jednom derivirati izraze i pomnožiti ih s x,

$$x+2x^2+3x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},$$

a zatim još jednom,

$$x+4x^2+9x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}. \tag{5.19}$$

Ostaje još uvrstiti $x=\frac{1}{2}$. Dobivamo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=6$.

Mogli bismo promijeniti red koraka i početni red potencija najprije dva puta derivirati pa onda množiti s x^2. Dakle druga derivacija geometrijskog reda (5.2) ima oblik

$$2+6x+12x^2+20x^3+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3},$$

a nakon množenja s x^2 dobivamo

$$2x^2+6x^3+12x^4+20x^5+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Konačno dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x+\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\sum_{n=2}^{\infty}nx^n=x+\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}-x=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Dobili smo isti izraz kao (5.19). ■

■ **Primjer 5.57** Odredimo sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}.$$

Ponovno ćemo krenuti sa sumom geometrijskog reda (5.2)

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

i integrirati je (uvrštavanjem $x=0$ dobivamo da je konstanta integracije jednaka 0),

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln|1-x|.$$

To smo već vidjeli u Teoremu 5.2.6 i Komentaru 5.20. Ostaje još uvrstiti $x=\frac{1}{5}$. Dobivamo da je tražena suma jednaka $-\ln\frac{4}{5}=\ln\frac{5}{4}\approx 0.2231435513$. ■

Teorem 5.2.9 Red potencija analitičke funkcije f na skupu $S \subseteq \mathbb{R}$ je Taylorov red.

Napomena 5.22 Analitička funkcija, po definiciji, se može razviti u red. Ovaj teorem nam govori da je Taylorov red jedini mogući red potencija.

Dokaz. Neka je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{5.20}$$

neki red potencija od $f(x)$. Uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo $f(x_0) = a_0$ (svi članovi reda koji sadrže $(x - x_0)^n$ za $n \in \mathbb{N}$ su jednaki 0). Da bismo dobili koeficijent a_n, izraz (5.20) najprije deriviramo n puta (time uklanjamo sve članove reda koji sadrže a_k za $k < n$) i tada uvrštavamo $x = x_0$ (sada su svi članovi $a_k(x - x_0)^k$ za $k > n$ jednaki 0). Tako dobivamo

$$f'(x_0) = a_1,$$

a indukcijom se lako pokaže da vrijedi

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n$$

za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Time dobivamo

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ■

Mi nismo ništa govorili o konvergenciji u rubu intervala. Navodimo sljedeći teorem bez dokaza.

Teorem 5.2.10 — **Abelov teorem.** Neka je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergentan red potencija na intervalu $(-1, 1)$ i neka red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergira. Tada funkcija $f(x)$ ima lijevi limes u točki $x = 1$ i vrijedi

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Napomena 5.23 Teorem također vrijedi i za bilo koji polumjer konvergencije R. Osim toga, slična tvrdnja vrijedi ako red divergira k ∞. Tu moramo biti oprezni jer tvrdnja ne vrijedi ako red samo divergira. Npr. za funkciju $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ red $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ divergira, ali je $f(1)$ konačan broj.

Dodatak

5.2.4 Konvergencija niza funkcija

Vratimo se na Teorem 5.2.8. Mi smo tamo gledali derivaciju funkcije $f(x)$. No, nije jasno što je izraz $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$. On predstavlja red potencija funkcije $f'(x)$ i dobiven je formalnim deriviranjem reda potencija funkcije $f(x)$, ali nije jasno što smo derivirali. Sada želimo reći nešto više o tome.

Do sada smo gledali niz brojeva (i limes ako postoji). Sada ćemo gledati niz funkcija na nekom skupu S i limes tog niza. Želimo dobivene rezultate primijeniti na niz funkcija

$$f_0(x) = a_0,\ f_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0),\ \ldots,\ f_n(x) = a_0 + \ldots + a_n(x-x_0)^n,\ \ldots. \tag{5.21}$$

S obzirom da smo gledali konvergenciju niza $(S(x))$ niza parcijalnih suma za svaki x posebno, iz područja konvergencije, prirodno se nameće sljedeća definicija.

Definicija 5.2.6 — Konvergencija niza funkcija po točkama. Neka je (f_n) niz funkcija na nekom skupu S. Kažemo da niz funkcija (f_n) konvergira prema funkciji f na S **po točkama** ako vrijedi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za svaki $x \in S$ odnosno

$$(\forall x \in S)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}) \text{ tako da vrijedi } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

za $n \geq n_0(x,\varepsilon)$. ■

No, ta konvergencija nije dobra za naše potrebe. Sljedeći primjeri pokazuju da limes niza neprekidnih funkcija ne mora biti neprekidna funkcija te da limes derivacija ne mora biti jednak derivaciji limesa.

■ **Primjer 5.58** Neka je zadan niz funkcija $f_n(x) = x^n$ na intervalu $[0,1]$. Funkcije f_n su neprekidne na intervalu $[0,1]$. Kako izgleda limes? Lako se vidi da je $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ za $x \in [0,1)$ i $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$. To znači da za limes danog niza funkcija $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ vrijedi $f(x) = 0$ za $x \in [0,1)$ i $f(1) = 1$. Ta funkcija ima prekid u točki $x = 1$. ■

■ **Primjer 5.59** Neka je zadan niz funkcija $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ na intervalu $(-1,1)$. S obzirom da je $|\sin nx| \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$. Međutim $f_n'(x) = \cos nx$ pa vrijedi $f_n'(0) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dobivamo $(\lim_{n\to\infty} f_n)'(0) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f_n'(0)$. ■

Lako se može naći primjer koji pokazuje da se ovaj limes ne ponaša dobro u odnosu na integriranje. Zbog toga definiramo konvergenciju niza funkcija na još jedan način.

Definicija 5.2.7 — Jednolika konvergencija niza funkcija. Neka je (f_n) niz funkcija na nekom skupu S. Kažemo da niz funkcija (f_n) konvergira **jednoliko (uniformno)** prema funkciji f na S ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \text{ tako da vrijedi } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

za $n \geq n_0(\varepsilon)$ i za svaki $x \in S$. ■

Napomena 5.24 Razlika između konvergencije po točkama i jednolike konvergencije je u tome što u jednolikoj konvergenciji n_0 ovisi samo o ε, a ne i o x. Primjer 5.58 pokazuje koliko je to bitno. Dani niz funkcije ne konvergira jednoliko. Za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ne možemo naći $n_0 = n_0(\frac{1}{2})$ takav da je $|x^n| < \frac{1}{2}$ za svaki $n \geq n_0$ i za svaki $x \in [0,1)$.

Sljedeći teorem kaže da se kod jednolike konvergencije ne može dogoditi primjer sličan Primjeru 5.58.

Teorem 5.2.11 Neka je (f_n) niz funkcija koji konvergira jednoliko prema funkciji f na skupu S. Ako su funkcije f_n neprekidne u točki $x_0 \in S$, tada je i funkcija f neprekidna u točki x_0.

Dokaz. Neka je dan $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za svaki $x \in S$ (to za konvergenciju po točkama ne vrijedi). S obzirom da je funkcija f_{n_0} neprekidna u točki x_0 postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Za $x \in S$ sa svojstvom $|x - x_0| < \delta$ dobivamo

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

a to zanači da je funkcija f neprekidna u x_0. ■

Niz funkcija (5.21) koji nas zanima je niz polinoma koji konvergira prema redu potencija. Ta konvergencija je jednolika. Nakon toga ćemo pokazati da se niz funkcija "dobro" ponaša u odnosu na integriranje. Na kraju ćemo komentirati deriviranje.

Gledamo niz funkcija (5.21). Mogli bismo gledati i niz funkcija

$$g_0(x) = a_0,\ g_1(x) = a_1(x - x_0),\ \ldots,\ g_n(x) = a_n(x - x_0)^n,\ \ldots$$

i definirati red funkcija pomoću niza parcijalnih suma na isti način kao za nizove brojeva, a nakon toga definirati i jednoliku konvergenciju reda funkcija, ali za to nema potrebe. Odmah ćemo gledati niz funkcija koji odgovora nizu parcijalnih suma funkcija.

Teorem 5.2.12 Neka je S područje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Tada niz funkcija (5.21) konvergira jednoliko na svakom zatvorenom intervalu u S.

Napomena 5.25 Teorem ne dokazujemo. U dokazu se koristi Weierstrassov kriterij koji bi se trebao iskazati i dokazati. Dokaz je tehničke naravi i ti detalji nam nisu bitni.

Teorem 5.2.13 Neka je (f_n) niz funkcija koji konvergira jednoliko prema funkciji f na intervalu $[a,b]$. Tada niz funkcija $(\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t)$ konvergira jednoliko prema funkciji $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ na $[a,b]$.

Dokaz. Dokaz je jednostavan i zasniva se na ocjeni $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\mathrm{Max}|f(t)|$. Neka je dan $\varepsilon > 0$. Zbog jednolike konvergencije postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Dobivamo

$$\left| \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leq (x-a)\frac{\varepsilon}{b-a} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

To znači da niz $(\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t)$ konvergira jednoliko prema funkciji $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ za $x \in [a,b]$. ■

Sada Teoremi 5.2.12 i 5.2.13 daju (5.17) u Teoremu 5.2.8. Deriviranje je malo osjetljivije i najprije navodimo teorem bez dokaza.

Teorem 5.2.14 Neka niz funkcija (f_n) na intervalu $[a,b]$ zadovoljava

1. niz (f_n) konvergira (po točkama),
2. derivacije f_n' su neprekidne funkcije,
3. niz (f_n') konvergira jednoliko.

Tada vrijedi

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),$$

za $x \in [a,b]$.

Uvjeti Teorema 5.2.14 moraju biti zadovoljeni da bismo ga mogli primijeniti. Prvi uvjet je zadovoljen jer je to pretpostavka Teorema 5.2.8. Drugi uvjet je zadovoljen jer su derivacije polinoma neprekidne funkcije. Treći uvjet, općenito ne mora biti zadovoljen. Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^n$ konvergira na intervalu $[-1,1]$, ali red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} x^{n-1}$ konvergira na intervalu $[-1,1)$. No, to je ujedno i jedini problem, a on se ionako "zaobilazi" u iskazu Teorema 5.2.8. Naime, rekli smo da se polumjer konvergencije ne mijenja, ali ništa nismo rekli o području konvergencije, odnosno ostavili smo mogućnost da nakon deriviranja red više ne konvergira na rubu. Dakle, gledat ćemo samo zatvorene intervale koji su u "unutrašnjosti" područja konvergencije, odnosno one intervale koji ne sadrže rubne točke područja konvergencije. Tada Primjer 5.60 tvrdi da je treći uvjet Teorema 5.2.14 zadovoljen. To znači da možemo primijeniti Teorem 5.2.14, a time dobivamo (5.16) u Teoremu 5.2.8.

■ **Primjer 5.60** Neka niz polinoma $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k\right)_{n\geq 0}$ konvergira na intervalu (a,b). Tada niz polinoma

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k k(x-x_0)^{k-1}\right)_{n\geq 0} \tag{5.22}$$

konvergira svakom zatvorenom intrervalu $[c,d] \subset (a,b)$.
Zbog jednostavnosti, možemo staviti $x_0 = 0$ odnosno $(a,b) = (-R,R)$, gdje je R polumjer konvergencije. Neka je $x_1 \in [c,d]$. Opet, zbog jednostvanosti, stavimo $x_1 > 0$ (i pretpostavljamo da je $d > 0$). S obzirom da je interval $(-R,R)$ otvoren, možemo izabrati x_2 tako da vrijedi $0 < x_1 < x_2 < R$. Red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k$ konvergira. Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$a_k x_2^k > a_k k x_1^{k-1} \tag{5.23}$$

za dovoljno velike k da bi po Poredbenom kriteriju (Teorem 5.1.4) red (5.22) konvergirao. No umjesto k stavimo x u (5.23) pa je dovoljno dokazati

$$x_1 \frac{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^x}{x} > 1. \tag{5.24}$$

L'Hosptalovo pravilo daje da lijeva strana u (5.24) ide u ∞ kada x (k) ide u ∞. ■

Vratimo se sada na diskusiju započetu na početku ovog odjeljka. Na red (5.8) možemo gledati kao na limes niza parcijalnih suma (funkcija), a parcijalne sume su polinomi. Njih možemo derivirati i dobivamo novi niz koji konvergira. Teorem 5.2.14 nam kaže da taj niz konvergira prema derivaciji funkcije koja odgovara početnom redu. Dakle, kada deriviramo red "član po član", to znači da deriviramo niz parcijalnih suma.

5.2.5 Primjeri

Primjer 5.61 Korištenjem redova riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$f''(x)+f(x)=0$$

Napišimo funkciju $f(x)$ u obliku

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots.$$

Sada zadana diferencijalna jednadžba daje uvjet (koeficijent uz x^n)

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0, \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

ili

$$a_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Sada vidimo da a_0 a_1 mogu biti proizvoljno izabrani, a tada svi parni koeficijenti ovise o a_0, a neparni o a_1. Dobivamo

$$f(x)=a_0+a_1x+\left(-\frac{a_0}{1\cdot 2}\right)x^2+\left(-\frac{1}{a_1}2\cdot 3\right)x^3+\left(\frac{1}{3\cdot 4}\frac{a_0}{1\cdot 2}\right)x^4+\left(\frac{1}{4\cdot 5}\frac{a_1}{2\cdot 3}\right)x^5+\dots$$

To nam daje $f(x)=a_0\cos x+a_1\sin x$. ■

Primjer 5.62 Razvijmo funkciju $f(x)=\frac{1}{x}$ u Taylorov red oko $x_0=3$ i odredimo područje konvergencije.
Koristit ćemo formulu $\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\dots$. S obzirom da razvijamo oko točke $x_0=3$, pišemo

$$f(x)=\frac{1}{3+x-3}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-3}{3}+\left(\frac{x-3}{3}\right)^2-\left(\frac{x-3}{3}\right)^3+\dots\right)$$

Dobivamo $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(x-3)^n$. Polumjer konvergencije je $R=3$, red divergira u 0 (očekivano) i 6 pa je područje konvergencije interval $(0,6)$. Također smo mogli uočiti da je $|y|<1$ odnosno $|\frac{x-3}{3}|<1$, a to nam ponovno daje $x\in(0,6)$. Zadatak se može riješiti i korištenjem formule za računanje koeficijenata a_n. ■

Primjer 5.63 Razvijmo funkciju $f(x)=\frac{2}{3+4x}$ u Taylorov red oko $x_0=5$ i odredimo područje konvergencije.
Opet ćemo koristiti formulu $\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\dots$. S obzirom da razvijamo oko točke $x_0=5$, pišemo

$$f(x)=\frac{2}{23+4(x-5)}=\frac{\frac{2}{23}}{1+\frac{4}{23}(x-5)}=\frac{2}{23}\left(1-\frac{4}{23}(x-5)+\left(\frac{4}{23}(x-5)\right)^2-\dots\right)$$

Dobivamo $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot 4^n}{23^{n+1}}(x-5)^n$. Polumjer konvergencije je $R=\frac{23}{4}$, a područje konvergencije interval $(-\frac{3}{4},\frac{43}{4})$ (mogli smo koristiti $|\frac{4}{23}(x-5)|<1$). ■

■ **Primjer 5.64** Razvijmo eksponencijalnu funkciju $f(x) = e^x$ u Taylorov red oko $x_0 = 2$. Sada koristimo formulu (5.10). Znamo da je $f^{(n)}(x) = e^x$ pa vrijedi $f^{(n)}(2) = e^2$. To nam daje

$$f(x) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \ldots = e^2\left(1 + (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \ldots\right).$$

Rezultat je očekivan, jer je dan izraz jednak $e^2 \cdot e^{x-2}$. ■

■ **Primjer 5.65** Odredimo polumjer konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)x^n.$$

Koristimo Cauchy-Hadamardov teorem (Teorem 5.2.2) i računamo

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\ldots\frac{1}{n+1}}{1+\ldots\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\ldots\frac{1}{n}} = 1.$$

Red divergira u oba ruba jer nije zadovoljen Nužan uvjet konvergencije (Teorem 5.1.2). ■

■ **Primjer 5.66** Odredimo prva 3 člana Taylorovog reda funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ oko $x_0 = 1$. Možemo pisati $f(x) = \sqrt[3]{1+x-1}$ pa dobivamo

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}(x-1)^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \ldots.$$

Mogli smo koristiti formulu (5.10), računati $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ i uvrstiti $x_0 = 1$: $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{3}$ i $f''(1) = -\frac{2}{9}$. ■

■ **Primjer 5.67** Razvijmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ u Taylorov red oko $x_0 = 0$.
Koristimo rastav danog polinoma, $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{3}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)x + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{27}\right)x^2 + \ldots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n. \end{aligned}$$

Područje konvergencije je presjek intervala $(-2,2)$ i $(-3,3)$ odnosno interval $(-2,2)$. I ovdje smo mogli koristiti $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ i $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ da dobijemo intervale $(-2,2)$ i $(-3,3)$. ■

■ **Primjer 5.68** Odredimo Maclaurinov red funkcije $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
Osnovu ideju smo već vidjeli u Zadatku 5.54. Ponovno pišemo red (5.18)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

za $x \in (-1,1)$ i sada primijenimo neodređeni integral. Dobivamo

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} = C + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

za $x \in (-1,1)$. Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo $C = 0$. Formula vrijedi za $x \in [-1,1]$ korištenjem Abelovog teorema (Teorem 5.2.10). ■

5.2.6 Zadatci

Vježba 5.54 Nađite područje konvergencije reda potencija i ispitajte konvergenciju na rubu za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n}}$.

Vježba 5.55 Odredite područje konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+1)^n}{(n+3)^2}$.

Vježba 5.56 Razvijte u Maclaurinov red funkciju $f(x) = \frac{1}{3+2x}$. Za koje $x \in \mathbb{R}$ taj red konvergira?

Vježba 5.57 Nađite područje konvergencije i ispitajte konvergenciju na rubovima područja za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Vježba 5.58 Nađite područje konvergencije i ispitajte konvergenciju na rubovima područja za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-1)^n}{(3n-2)2^n}$.

Vježba 5.59 Nađite područje konvergencije reda potencija $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n4^n}$ i ispitajte konvergenciju na rubovima intervala.

Vježba 5.60 Razvijte u Maclaurinov red funkciju $f(x) = \ln(1-x^2)$. Napišite n-ti član traženog razvoja.

Vježba 5.61 Koristeći razvoj u red elementarne funkcije $\frac{1}{1+x}$ razvijte u Maclaurinov red funkciju $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2$.

Vježba 5.62 Red $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ razvijte oko $x_0 = \frac{1}{2}$ i odredite polumjer konvergencije.

Vježba 5.63 Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2-7x+10}$ u Maclaurinov red i odredite područje konvergencije.

Vježba 5.64 Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$ u Taylorov red oko $x_0 = 1$ i odredite područje konvergencije.

Vježba 5.65 Pomnožite Taylove redove funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ i uvjerite se da dobivate Taylorov red funkcije $h(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Vježba 5.66 Odredite polumjere konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot x^{2(n-1)}$.

Vježba 5.67 Odredite polumjere konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \cdot x^{2n}$.

Vježba 5.68 Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ima polumjer konvergencije R, pokažite da red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$$

ima polumjer konvergencije $\sqrt{R}$.

Vježba 5.69 Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Vježba 5.70 Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \cdot x^n$.

Vježba 5.71 Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$.

Vježba 5.72 Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ u Taylorov red oko $x_0 = 0$ korištenjem

1. Taylorove formule (Definicija 5.10).
2. formule za binomni red (5.15).
3. formule za deriviranje redova potencija (Teorema 5.2.8).
4. množenjam redova potencija (Teorem 5.1.14).

Vježba 5.73 Razvijte funkciju $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2}\right)$ u Maclaurinov red i odredite područje konvergencije.

Vježba 5.74 Razvijte funkciju $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2-2x+26}$ u Taylorov red oko $x_0 = 1$ i odredite područje konvergencije.

Vježba 5.75 Razvijte funkciju $f(x) = \arctan(3x)$ u Maclaurinov red i odredite područje konvergencije.

Vježba 5.76 Razvijte funkciju $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ u Maclaurinov red i odredite područje konvergencije. Aproksimirajte vrijednost od $9^{\frac{1}{3}}$ koristeći prva dva člana dobivenog reda.

Vježba 5.77 Pomoću razvoja u red potencija, odredite približnu vrijednost integrala $\int_0^{0.4} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Vježba 5.78 Izračunajte sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

Vježba 5.79 Izračunajte sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3^n}$.

Vježba 5.80 Izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot 5^n}$.

Vježba 5.81 Izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)\cdot n\cdot 2^{n-3}}{3^n}$.

Vježba 5.82 Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ konvergira za $x = 3$, da li red konvergira za $x = -3$?

Vježba 5.83 Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ konvergira za $x = 3$, da li red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ konvergira za $x = 3$?

Vježba 5.84 (Teži zadatak) Uzmite bilo koju knjigu iz diferencijalnih jednadžbi i riješite neke zadatke korištenjem redova potencija.

5.2.7 Rješenja

5.54. $[-1,5)$.
5.55. $[-2,0]$.
5.56. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} x^n$, $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
5.57. $[1,3]$.
5.58. $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.
5.59. $[-2,6)$.
5.60. $a_n x^n$ gdje je $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{m} & \text{ako je } n = 2m \\ 0 & \text{ako je } n = 2m-1 \end{cases}, m \in \mathbb{N}$
5.61. $a_n x^n$ gdje je $a_0 = 0$ i $a_n = (-1)^n(n-1)$ za $n \in \mathbb{N}$.
5.62. Red se dobiva deriviranjem funkcije $f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-2(x-\frac{1}{2})}$ pa red potencija tražene funkcije ima oblik

$$\frac{4}{\left(1-2(x-\frac{1}{2})\right)^2} = 4 + 2\cdot 8\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\cdot 16\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^{n+2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n.$$

Polumjer konvergencije je $R = \frac{1}{2}$ što je i očekivano jer red divrgira za $x = 1$.
5.63. $f(x) = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{15}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 2^n} - \frac{1}{15\cdot 5^n}\right)x^n$.
5.64. $f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{2n}$. Polumjer konvergencije R je jednak 1.
5.65. Uz x^{2n-1} stoji $(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n+1-2k)!(2k-2)!} = \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!}$.
5.66. $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
5.67. $R = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}}$.
5.68. Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $|x| < R$ tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ konvergira za $|x|^2 < R$ odnosno za $|x| < \sqrt{R}$. Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergira za $|x| > R$ tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ divergira za $|x|^2 > R$ odnosno za $|x| > \sqrt{R}$.
5.69. $[0,2)$.
5.70. $(-2,2)$.
5.71. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
5.72. Svaki put se dobiva $1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.
5.73. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}x^n$ na $(-2,2]$.
5.74. $f(x) = \frac{1}{25}\frac{(x-1)^3}{1+\left(\frac{x-1}{5}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{25^{n+1}}(x-1)^{2n+3}$ na $(-4,6)$.
5.75. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}3^{2n+1}x^{2n+1}$ na $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.
5.76. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}$ na $[-1,1]$. Za $x = \frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}9^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} = 1.03993$.
5.77. Koristimo $e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$ i dobivamo 0.37969.
5.78. Račun je isti kao u Primjeru 5.56, ali imamo jedan korak više. Dobivamo $\frac{33}{8}$.
5.79. Uvrstimo $x = -\frac{1}{3}$ u (5.19) i množimo s -1. Dobivamo $\frac{3}{32}$.
5.80. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $x = -\frac{1}{5}$, množimo s -1 i dobivamo $6\ln\frac{6}{5} - 1$.
5.81. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$, $x = -\frac{2}{3}$, množimo s $-\frac{1}{8}$ i dobivamo $\frac{9}{250}$.
5.82. Da, jer je $x_0 = -1$ (poumjer konvergencije je barem 4).
5.83. Ne nužno. Npr. $a_n = \frac{1}{4^{2n}}$.