

## Linearna algebra - 11. auditorne vježbe

1. Neka je  $A: V^2 \rightarrow V^2$  operator rotacije oko ishodišta za kut  $\frac{\pi}{3}$ .
  - (a) Odredite  $A(\mathbf{i})$  i  $A(\mathbf{j})$ .
  - (b) Odredite matični prikaz od  $A$  u kanonskoj bazi.
  - (c) Transponirajte matricu iz prethodnog podzadatka te odredite geometrijsku interpretaciju dobivene matrice.
  - (d) Je li operator  $A$  injekcija? Je li surjekcija? Bijekcija?
  - (e) Dokažite da za operator  $A$  vrijedi  $A^{-1} = A^5$ . Potkrijepite dokaz odgovarajućom slikom.
2. Neka je  $B: V^2 \rightarrow V^2$  operator zrcaljenja s obzirom na pravac  $4x - 3y = 0$ .
  - (a) Odredite prikladnu bazu (od jediničnih vektora) u kojoj ćete odrediti matični prikaz od  $B$ .
  - (b) Odredite matricu prijelaza iz kanonske baze u bazu iz prethodnog podzadatka. Koja je geometrijska interpretacija dobivene matrice?
  - (c) Odredite matični prikaz od  $B$  u kanonskoj bazi.
  - (d) Odredite  $B(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ .
  - (e) Je li operator  $B$  injekcija? Je li surjekcija? Bijekcija?
  - (f) Dokažite da je operator  $B$  sam sebi inverzan, tj.  $B \circ B = I_{V^2}$ . Potkrijepite dokaz odgovarajućom slikom.
3. Odredite linearni operator  $C: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  koji kružnicu  $x^2 + y^2 = 1$  preslikava u elipsu  $x^2 + 16y^2 = 4$ .
4. Neka su  $D, E: V^2 \rightarrow V^2$  operatori zrcaljenja s obzirom na pravce  $7x - 5y = 0$  i  $5x + 7y = 0$  redom.
  - (a) Odredite matične prikaze tih operatora u kanonskoj bazi.
  - (b) Dokažite da operatori  $D$  i  $E$  komutiraju ( $D \circ E = E \circ D$ ) te odredite njihovu kompoziciju.
  - (c) Geometrijski intepretirajte rezultat iz prethodnog podzadatka. Nacrtajte odgovarajuću sliku.
5. Neka je  $F: V^3 \rightarrow V^3$  operator ortogonalne projekcije na ravninu  $x + 2y + 3z = 0$ .
  - (a) Odredite prikladnu bazu u kojoj ćete odrediti matični prikaz od  $F$ .
  - (b) Odredite matricu prijelaza iz kanonske baze u bazu iz prethodnog podzadatka.
  - (c) Odredite matični prikaz od  $F$  u kanonskoj bazi.
  - (d) Geometrijskim argumentom pokažite da su oba dobivena matična prikaza od  $F$  idempotentne matrice.
  - (e) Je li  $F$  injekcija? Surjekcija, bijekcija?
  - (f) Neka je  $G: V^3 \rightarrow V^3$  operator zrcaljenja s obzirom na istu ravninu. Odredite matični zapis od  $G$  u kanonskoj bazi.