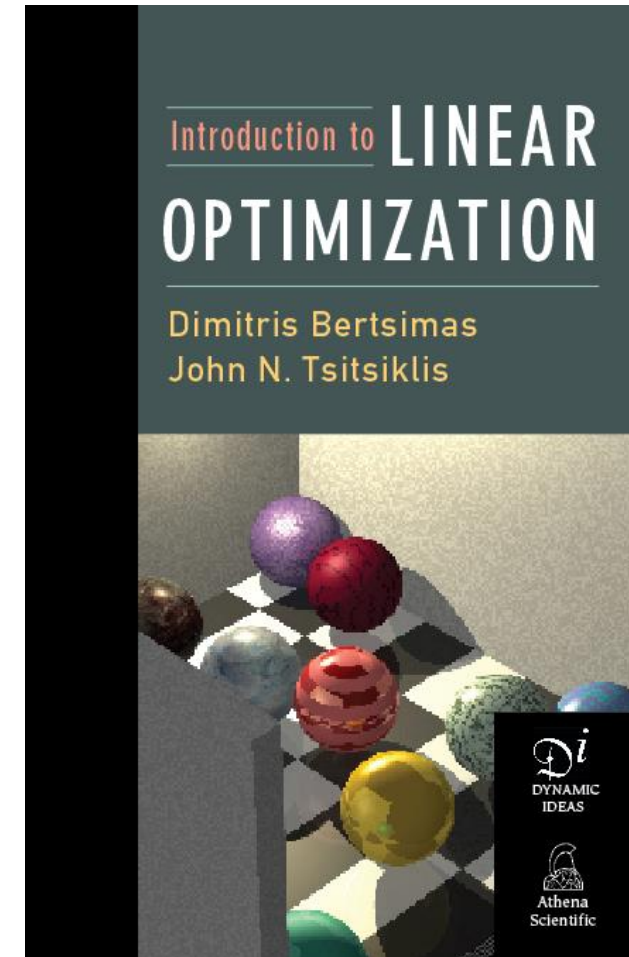


Operacijska istraživanja

13. predavanje: Rješavanje velikih problema

Kontekst predavanja

- Veliki problemi
 - Generiranje stupaca
 - Generiranje redaka (rezajuće plohe!)
 - Problem optimalnog rezanja
-
- Predavanje bazirano na:
 - Bertsimas, D., Tsitsiklis, J.N. : Introduction to linear optimization, Athena Scientific (1997) – potpoglavlja 6.1. - 6.3



Veliki problemi

- Matrica A ne stane u memoriju!
 - Čak niti uz revidiranu simpleksnu metodu
- Kupiti još memorije?
 - U nekim problemima broj redaka i stupaca skalira **eksponencijalno**

Veliki problemi – retci (ograničenja)

- Skaliranje redaka eksponencijalno
 - Eksponencijalni broj ograničenja
 - Primjer: **TSP**
 - Postoji Miller–Tucker–Zemlin (MTZ) formulacija koja ima slabu relaksaciju
 - Naivni zapis problema u kvalitetnoj formulaciji
 - Optimalno rješenje se potencijalno sastoji od **odvojenih podruta!**
 - Dodaju se ograničenja koja eliminiraju podrute
 - Eksponencijalni broj takvih ograničenja

Veliki problemi – stupci (variable)

- Skaliranje stupaca eksponencijalno
 - Eksponencijalni broj varijabli (npr. pretraživanje powerseta)
 - Primjer: **Optimalno rezanje**
- Dual ovog problema ima problem sa retcima! (A se transponira)

Motivirajući primjer – optimalno rezanje*

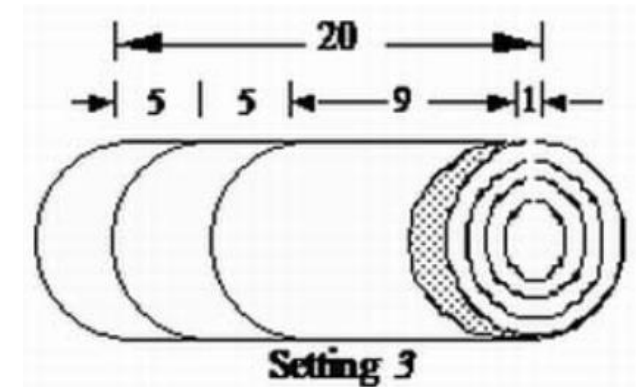
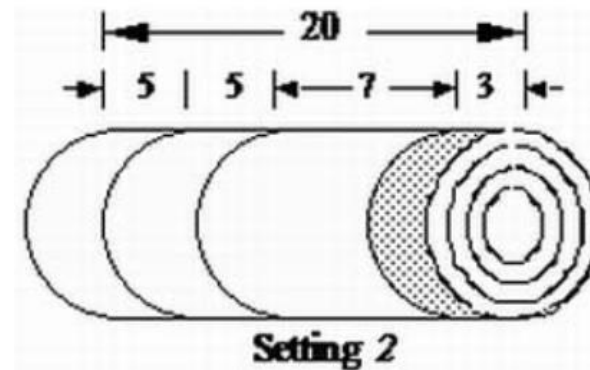
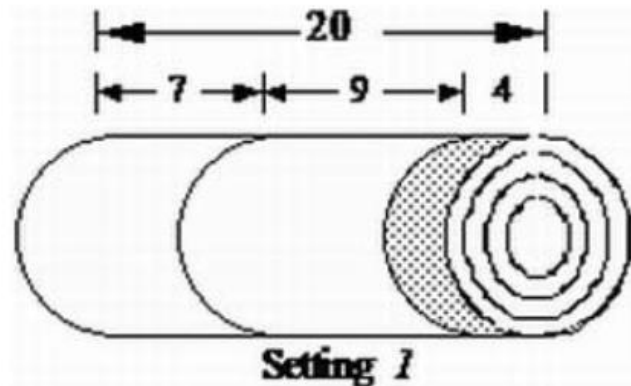
- Slastičarna Vincek proizvodi rolade standardne duljine 20cm, čiji je proizvodni trošak 1\$ po komadu. Specijalne narudžbe kolijenata zahtijevaju različite duljine rolada koje se dobivaju rezanjem standardnih rolada u kraće duljine. Dnevne narudžbe su dane ispod. Treba zadovoljiti potražnju uz što manji trošak.

| Order | Desired Width (cm) | Desired Number of Rolls |
|--------------|---------------------------|--------------------------------|
| A | 5 | 150 |
| B | 7 | 200 |
| C | 9 | 300 |

*Prilagođeno iz [1]

Optimalno rezanje - detalji

- Rezač je giljotina sa noževima podešenima na različite duljine. Postoje različiti načini na koje se može rezati standardne rolade za ispunjavanje narudžbi.



Uzorci rezanja,
preuzeto iz [1]

Optimalno rezanje - formulacija

- Varijable – koliko puta se koristi koji uzorak
- Ograničenja – zadovoljenje narudžbi
- Fja cilja – minimizirati broj komada korištenih standardnih rolada

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \, x \text{ integer} \end{aligned}$$

Optimalno rezanje - formulacija

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \, x \text{ integer} \end{aligned}$$

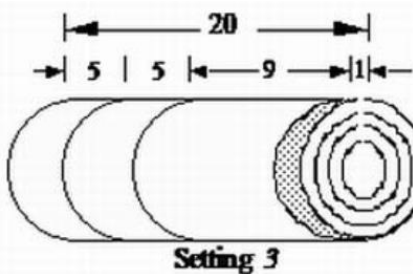
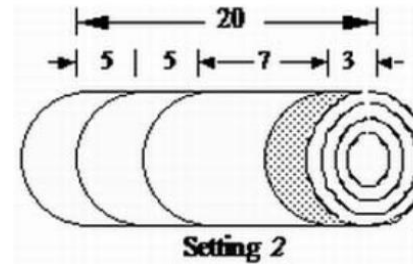
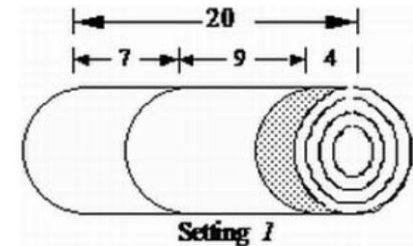
- x – komponenta za svaki mogući uzorak (uz razbijanje simetrije)
- c – vektor jedinica iste dimenzionalnosti kao x
- b – vektor sa zahtijevanim količinama rolada različitih duljina
- A – po stupcima konverzije uzoraka u komade spec. rolada

Optimalno rezanje – ograničeni uzorci

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x_A + x_B + x_C \\ \text{s.t.} \quad & 2x_B + 2x_C \geq 150 \\ & x_A + x_B \geq 200 \\ & x_A + x_C \geq 300 \\ & x \geq 0, x \text{ integer} \end{aligned}$$

Obj* = 300

| Order | Desired Width (cm) | Desired Number of Rolls |
|-------|--------------------|-------------------------|
| A | 5 | 150 |
| B | 7 | 200 |
| C | 9 | 300 |



Optimalno rezanje – arbitrarni uzorci

- Koji su svi mogući uzorci?
- Kombinatorika!
 - Sa parametrima problema eksponencijalno raste broj uzoraka
 - Parametri:
 - Duljina standarda
 - Broj različitih spec. duljina
- Kako riješiti taj problem čak i kada je izvan dohvata memorije?

Generiranje stupaca

- Problem u standardnoj formi

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 - m – mali broj redaka
 - n - ogromni broj stupaca
- **Treba nam samo m bazičnih stupaca (+ još pokoji...)**

Generiranje stupaca

- Problem u standardnoj formi

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Ignoriramo skoro sve stupce osim bazičnih i **ulazeće** nebazične varijable
- PROBLEM: faktori redukcije za nebazične!
 - Treba nam za odrediti ulazeću nebazičnu varijablu!
 - Negativni faktor redukcije

Generiranje stupaca

- Koji stupac?
- PROBLEM – pronalazak ulazećih nebazičnih varijabli bez generiranja svih stupaca

$$\min_i \bar{c}_i \quad (1)$$

- Nekad, prikladna struktura problema
 - Optimalno rezanje – **knapsack problem!**
- Ako je minimum (1) ≥ 0 -> OPTIMUM
 - Inače, index ***i*** označava ulaznu nebazičnu varijablu

Generiranje stupaca – optimalno rezanje

- Složimo (master) model sa malom jezgrom uzoraka
- Dobijemo faktore redukcije za uzorke unutar model (u retku fje cilja)
- Iz **dualnih vrijednosti p** možemo izračunati faktore redukcije za svaki drugi uzorak!!
- Faktor redukcije za uzorak **j** (slijedi iz simpleksa), A_j je j -ti stupac (def.uzorka)
$$\bar{c}_j = 1 - p^T A_j$$
- Trebamo gledati SAMO valjane uzorke, koji stanu na standardnu duljinu **W**
 - Ako je **w** vektor specijalnih duljina, valjani uzorak zadovoljava
$$w^T A_j \leq W$$

Generiranje stupaca – optimalno rezanje

- Dakle, pomoćni problem za pronalazak ulazeće nebazične varijable:

$$\begin{aligned} \min_{A_j} \quad & 1 - p^T A_j \\ & w^T A_j \leq W \\ & A_j \geq 0, A_j \text{ integer} \end{aligned}$$

- Knapsack problem koji slaže optimalan uzorak! (sa najmanjim faktorom redukcije)
- Može se riješiti sa ILP, DP i sl.

Optimalno rezanje – CG algoritam

1. Generirati uzorke za prvo bazično rješenje
 - Npr. pohlepni nezavisni uzorci
 - Ili ortogonalnu bazu – uzorci (rasipni)
2. Ponavljaj dok ima novih uzoraka (nova ulazna nebazična varijabla)
 1. Dodaj nove uzorke u master problem
 2. Riješi relaksirani master problem (sa trenutnim uzorcima)
 3. Izvuci dualne vrijednosti za ograničenja master problema
 4. Riješi potproblem (knapsack)
 1. Ako je optimalno rješenje $<_{\epsilon} 0$, optimum potproblema čini novi uzorak, vrati uzorak
 2. Inače, vrati prazan uzorak
3. Riješi cjelobrojni master problem

Optimalno rezanje – CG efekti

- Originalni problem je relativno mali
 - $W=20\text{cm}$, vrste narudžbi $[5,7,9]$
 - 15 mogućih uzoraka, generira se 1-3 uzorka (ovisno o inicijalizaciji)
- Veći problem
 - $W=200\text{cm}$, vrste narudžbi $[4,5,7,9,12]$
 - 276120 mogućih uzoraka, generira se 6 uzoraka

Generiranje redaka (rezajuće plohe)

- **Metoda rezajućih ploha** ili **odgođeno generiranje ograničenja**
- Koristimo samo podskup svih ograničenja
- Detekcija nezadovoljenih ograničenja
 - Uvođenje u LP
- Uklanjanje neaktivnih ograničenja
- Ekvivalentno, u određenim uvjetima, odgođenom generiranju stupaca na dualu

Reference

- [1] A cutting stock problem – PuLP portal
- [2] PuLP examples - [link](#)
- [3] Bertsimas, D., Tsitsiklis, J.N. : Introduction to linear optimization, Athena Scientific (1997)