Matematička analiza 1 – Poglavlje 1 a)

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

Verzija od 12. veljače 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

1. a) Skupovi, matematička logika i realni brojevi

Ne samo moćno oružje u borbi za opstanak,
matematika je simbol naše intelektualne snage i jamstvo,
da će se ljudski duh vazda boriti za uzvišene ciljeve.
Danilo BLANUŠA (1903.-1987.), hrvatski matematičar

Ključni pojmovi: sud 12, tablica istinitosti 12, obrat po kontrapoziciji 14, predikat 16, kvantifikatori 16, De Morganove formule za skupove 12, sudove 14 i predikate 17, prirodni brojevi i matematička indukcija 21, cijeli brojevi 25, Stavak o dijeljenju cijelih brojeva 25, kongruencija po modulu n 26, Osnovni teorem aritmetike 27, racionalni brojevi 28, realni brojevi 29, infimum podskupa skupa relanih brojeva 30, supremum 30, minimum 30, maksimum 30, algebarski brojevi 32.

1.1 Uvod

Naziv *matematika* dolazi od grčke riječi *mathema*, koja znači 'znanje' (u množini *mathémata* – znanja).

Prema istaknutom hrvatsko-američkom matematičaru Vilimu (Williamu) Felleru (1906.-1970.), u svakoj znanstvenoj disciplini, pa tako i u matematici, treba pažljivo razlučiti sljedeća tri aspekta teorije:

(a) **Formalno logički sadržaj.** Matematika se bavi samo relacijama (odnosima) među objektima (kao što su brojevi, točke i pravci, skupovi, funkcije, slučajni događaji, itd.). Temeljne relacije među objektima zovu su *aksiomi* (načela). Pritom za matematiku nije bitna narav samih objekata. Odabrani aksiomi slijede neka svojstva stečena iskustvom. Na primjer, jedno od načela (aksioma) Euklidske geometrije je da kroz dvije različite točke u ravnini prolazi samo jedan pravac. Vrlo je poznat *peti Euklidov aksiom*, koji kaže da ako imamo pravac u ravnini, onda kroz bilo koju točku u ravnini prolazi samo jedan pravac paralelan s njime. Početkom 19. st. su se međutim pojavile nove, tzv. *neeuklidske geometrije*, u kojima ovaj aksiom više ne vrijedi.

(b) **Intuitivna pozadina.** Pojam prirodnog broja (na primjer 1, 2 i 3) susrećemo od najranijeg djetinjstva, te se na temelju stečenog iskustva pomalo stječe i intuicija. Na primjer, intuitivno je

Slika 1.1: *Vilim Feller* (1906.-1970.) kao student matematike na Mudroslovnom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu oko 1918. Doktorirao je u Göttingenu u Njemčkoj 1920., od 1950. redoviti profesor Sveučilišta u Princetonu u SAD-u, jedan je od utemeljitelja teorije vjerojatnosti kao znanstvene discipline. Ova fotografija dobivena je ljubaznošću gđe. Marte Zdenković iz Zagreba, unuke najstarijeg Fellerova brata Ferdinanda.

jasno da ne postoji najveći prirodan broj (ali postoji najmanji – broj 1). Intuitivno je jasno i načelo matematičke indukcije, jer ga i predškolsko dijete razumije kroz igru dominima (vidi str. 21). Naša je intuicija toliko jaka, da na njenim temeljima nastaju aksiomi (vidi na primjer Peanove aksiome za skup prirodnih brojeva, str. 24, koji su smiješno jednostavni). Slutnje nas zatim dovode do novih relacija, koje dokazujemo na temelju aksioma ili s pomoću već prije dokazanih relacija. Intuicija o nekom novom pojmu razvija se iskustvom, kroz primjere.

(c) **Primjene.** U primjenama se teorijski objekti obično poistovjećuju s nekim sasvim konkretnim objektima, u najrazličitijim područjima ljudskog djelovanja. Od prognoze vremena (numerički modeli za analizu i prognozu tlaka i temperature zraka te brzine i smjera vjetra), organizacije prometa u gradovima i državama, pronalaženja optimalnog puta u prometu s pomoću mobitela, stabilnosti elektro-energetskih sustava, stabilnosti građevinskih objekata (na primjer, s obzirom na potrese), optimizacija u gradnji prijevoznih sredstava, optimizacija algoritama, eksploataciji i transportu nafte, robotici, seizmologiji, itd.

Tek u međusobnoj povezanosti ovih triju aspekata može se doista dobro razumjeti sadržaj neke znanstvene discipline; vidi [Fe]. Razmislite o ovim trima aspektima u području vašeg užeg (specijalističkog) interesa.

U jeziku matematike veliku važnost imaju *oznake* i *definicije*. Neki od osnovnih skupova koje ćemo rabiti u daljnjem su sljedeći:

– skup *prirodnih brojeva* $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$, pri čemu oznaka $A := B$ znači da se izraz A na lijevoj strani definira kao izraz B na desnoj;[1]

Vatroslav Lopašić (1911.-2003.), profesor FER-a na Sveučilištu u Zagrebu, znao je reći da su one tri točkice u definiciji skupa $\mathbb{N} = \{1,2,3\dots\}$ svih prirodnih brojeva zapravo zastrašujuće. Doista, među njima je na primjer broj $m_1 = 10^{80}$, tj. 1 s osamdeset nula iza sebe, koji predstavlja približan broj atoma u cijelom vidljivom svemiru! Ali među točkicama je i broj $m_2 = 10^{m_1}$, prema kojem je spomenuti broj m_1 najobičniji patuljak. A što bismo mogli reći za broj $m_3 = 10^{m_2}$? ...

$$\cdots \quad \underset{-n}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{-3}{\bullet} \quad \underset{-2}{\bullet} \quad \underset{-1}{\bullet} \quad \underset{0}{\bullet} \quad \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \quad \underset{3}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{n}{\bullet} \quad \cdots$$

Slika 1.2: Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z} := \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$. U njemu je sadržan skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$.

– skup *cijelih brojeva* $\mathbb{Z} := \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$; vidi Sliku 1.2;

– skup *racionalnih brojeva* $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$, koji se mogu napisati kao kvocijenti cijelih brojeva; možemo ga zamisliti kao pravac, ali jako 'rupičast', tj. s puno 'šupljina' (tako da između svaka dva racionalna broja postoji realan broj koji nije racionalan; vidi u Odjeljku 1.6);

– skup *realnih brojeva* $\mathbb{R}$, koji predočujemo s realnim pravcem, a shvaćamo ga kao 'popunjenje' skupa racionalnih brojeva s *iracionalnim brojevima* (tj. brojevima koji nisu racionalni), kao što su $\sqrt{2} \approx 1.41$ (vidi Lemu 3), $\sqrt{3} \approx 1.71$, $\mathrm{e} \approx 2.72$ (baza prirodnog logaritma), $\pi \approx 3.14$ i puno drugih, koji nisu racionalni. Podsjetimo da se broj π definira kao omjer (tj. kvocijent) opsega O bilo koje kružnice i njezina promjera $2r$, tako da je jednakost $O = 2r\pi$ (koju znamo iz osnovne škole) izravna posljedica definicije broja $\pi \approx 3.14$. Definiciju broja $\mathrm{e} \approx 2.72$ upoznat ćemo u poglavlju o nizovima.

U skupu realnih brojeva, iracionalnih brojeva ima 'bitno više' nego racionalnih; vidi Odjeljak 3.3. Ako na primjer na realnom pravcu na slučajan način biramo neki realan broj, skoro je sigurno da će odabrani broj biti iracionalan!

– skup *kompleksnih brojeva* $\mathbb{C} := \{z = x + y\mathrm{i} : x,y \in \mathbb{R}\}$, gdje je i tzv. *imaginarna jedinica*, za koju definiramo $\mathrm{i}^2 = -1$, predočuje se Gaussovom ravninom; o skupu kompleksnih brojeva će više riječi biti u Poglavlju 2.

Primijetite da su navedeni skupovi jedan u drugog uloženi kao podskupovi, tj. skup $\mathbb{N}$ je sadržan u $\mathbb{Z}$, skup $\mathbb{Z}$ je sadržan u $\mathbb{Q}$, skup $\mathbb{Q}$ je sadržan u $\mathbb{R}$, a skup $\mathbb{R}$ u $\mathbb{C}$, što kraće zapisujemo ovako:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

(O pojmu podskupa vidi općenitije na str. 9.) Na svakom od ovih skupova imamo definirane operacije zbrajanja i množenja, a na skupovima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i dijeljenje s brojevima različitim od nule.

Ako je zadano ukupno n realnih (ili kompleksnih) brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$, onda njihov zbroj označujemo s velikim grčkim slovom 'sigma':

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

[1] Kod Francuza i još nekih naroda, skup prirodnih brojeva po definiciji započinje s nulom, a ne s jedinicom. Zato kod čitanja članaka i knjiga treba pripaziti na što autor misli pod pojmom prirodnog broja.

Na primjer, $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$. Naravno, isti zbroj možemo zapisati i s pomoću drugih indeksa, na primjer kao $\sum_{j=1}^{5} j^2$ ili $\sum_{i=0}^{4} (i+1)^2$.

Na sličan način, umnožak zadanih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označujemo s velikim grčkim slovom 'pi':

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

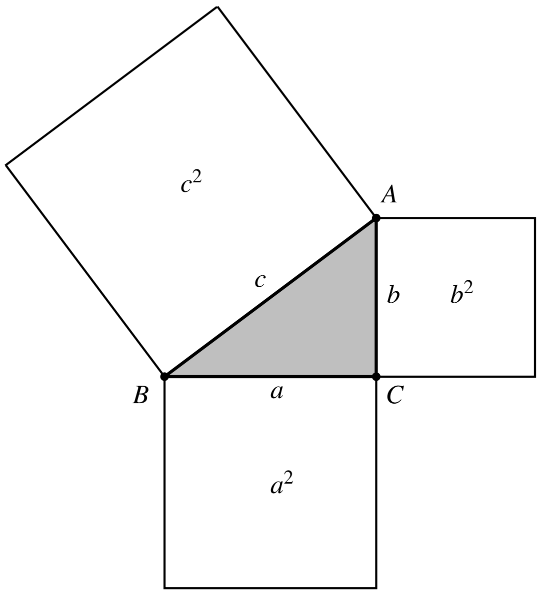
Na primjer, $\prod_{k=1}^{5} \sin k = \sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 4 \cdot \sin 5$, gdje vrijednosti uz sinuse uzimamo u radijanima; vidi str. **??**.

Za realan broj x kažemo da je *nenegativan* ako je $x \geq 0$. Ako je $x > 0$, kažemo da je x *pozitivan*.Na primjer, realan broj 0 je nenegativan broj, dok je 1 istovremeno i nenegativan i pozitivan broj.

Otvoren interval između dva zadana realna broja a i b takva da je $a < b$, označujemo s $\langle a, b \rangle$ (pri tome, ako je riječ o neomeđenim otvorenim intervalima, dopuštamo da bude $a = -\infty$ ili $b = +\infty$).[2] Ovdje je ∞ oznaka za *beskonačno*. U slučaju realnih brojeva $a \leq b$ definiramo *zatvoren interval* $[a, b]$, koji uključuje ne samo unutarnje točke iz otvorenog intervala $\langle a, b \rangle$ (ako postoje), nego i rubne točke a i b, tj. $[a, b] = \langle a, b \rangle \cup \{a, b\}$. Zatvoren interval $[a, b]$ je uvijek omeđen.

Oznaka $x \in \langle a, b \rangle$ (čitaj: 'x je element otvorenog intervala $\langle a, b \rangle$) nam znači da je $a < x < b$, dok nam $x \in [a, b]$ (čitaj: x je element zatvorenog intervala $[a, b]$) znači da je $a \leq x \leq b$.

Teoremima iskazujemo matematičke tvrdnje. Svaki teorem ima svoje pretpostavke (uvjete), koji su dovoljni da bi zaključak vrijedio. Važno je u iskazu teorema obratiti pozornost na pretpostavke, pod kojima tvrdnja vrijedi.



Slika 1.3: Pitagorin poučak kaže da za svaki pravokutan trokut ABC s katetama duljina a i b te s hipotenuzom duljine c vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$. Vidi Teorem 1.1.1.

U iskazu teorema je uvijek dobro upitati se jesu li uvjeti teorema najopćenitiji mogući, tj. mogu li se pretpostavke oslabiti. Vrijedi li *obrat teorema*, tj. nisu li dovoljni uvjeti da teorem vrijedi možda i nužni? Također je dobro za svaki teorem znati barem jedan dobar *primjer* koji ga ilustrira. Je li teorem iskazan na najsažetiji i najelegantniji mogući način? Svi dobro poznajemo *Pitagorin teorem* (ili Pitagorin poučak; vidi Sliku 1.3), koji također ima svoje pretpostavke i zaključak.

[2] U francuskoj literaturi, kao i kod još nekih naroda, za otvoren interval $\langle a, b \rangle$ rabi se oznaka $]a, b[$.

Teorem 1.1.1 — Pitagorin poučak. U svakom pravokutnom trokutu je površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama.

Dodatak

Od Antike do danas poznato je nekoliko stotina različitih dokaza ovog teorema, od kojih su najzanimljiviji geometrijski. Pogledajte članak [Bom], u kojem je prikupljeno trideset dokaza. Jeste li ikada vidjeli barem jedan dokaz Pitagorina poučka?

Jedan od primjera pravokutnog trokuta s cjelobrojnim duljinama stranica onaj za koji vrijedi $a = 3$, $b = 4$ i $c = 5$ (i za njega doista vrijedi $3^2 + 4^2 = 5^2$). Vrijedi i obrat Pitagorina teorema, tj., *ako je neki trokut s duljinama stranica a, b i c takav da je $c^2 = a^2 + b^2$, onda je zadani trokut pravokutan*, a pravi kut se nalazi nasuprot stranici c. To je međutim sasvim druga tvrdnja, te za nju postoji poseban dokaz.

Dodatak

Pitagorina Diofantska jednadžba je jednadžba $a^2 + b^2 = c^2$ u kojoj su nepoznanice a, b i c *cjelobrojne*. Trojci (a,b,c) koji daju rješenja Pitagorine Diofantske jednadžbe zovu se *Pitagorini trojci*. *Svi* Pitagorini trojci se mogu dobiti u obliku $a = r(u^2 - v^2)$, $b = 2ruv$ i $c = r(u^2 + v^2)$, gdje su r, u i v po volji odabrani cijeli brojevi.

Općenito, *Diofantska jednadžba* je jednadžba u kojoj su nepoznanice cjelobrojne. Dobile su naziv po grčkom matematičaru Diofantu iz 3. st. prije Krista.

1.2 Skupovi i operacije sa skupovima

Skupove označujemo velikim slovima, a obično ih zadajemo na jedan od sljedeća dva načina:

(a) *popisivanjem svih njegovih elemenata*, na primjer $A = \{1,2,3\}$, pri čemu su poredak elemenata i njihove kratnosti nebitni: $A = \{2,1,3\} = \{3,1,3,2,3,2,2,2\}$.

(b) opisom karakterističnog svojstva elemenata.

Vježba 1.1 Uvjerite se da je s $A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 = 0\}$ opisan skup svih realnih nultočaka polinoma $x^2 - 2x - 3$ (koje su to?). Skup $B := \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$ je očevidno prazan, jer ne postoji niti jedan realan broj x takav da je $x^2 = -1$.

Prazan skup označujemo s $\emptyset$, te on ne sadrži niti jedan element, tj. $\emptyset := \{\,\}$. Skup $\{\emptyset\}$ nije prazan, jer on sadrži jedan element (prazan skup!). Dakle, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Pokazuje se da postoji samo jedan prazan skup. On je podskup bilo kojeg skupa, pa i samog sebe.

Bilo koji neprazan skup se sastoji od svojih *elemenata*. Ako je neki element a sadržan u skupu A, pišemo $a \in A$ (čitaj 'a je element skupa A' ili 'element a je sadržan u skupu A'). Ako element a nije sadržan u skupu A, pišemo $a \notin A$. Ako su A i B dva skupa, takva da je svaki element iz A sadržan u B, onda pišemo $A \subseteq B$ i kažemo da je A *podskup* skupa B. Ako je $A \subseteq B$, te su još pritom skupovi A i B međusobno različiti (tj. postoji element u B koji nije sadržan u A), onda govorimo da je A *pravi podskup* od B, i pišemo $A \subset B$.

Ako skup A ima konačno mnogo elemenata, onda kažemo da je riječ o *konačnom skupu*. U suprotnom kažemo da je skup *beskonačan*. Ako je skup A konačan, s međusobno različitim elementima $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, onda kažemo da skup A ima n elemenata. Prazan skup $\emptyset$ ima nula elemenata.

Broj elemenata konačnog skupa zovemo **kardinalnim brojem skupa**, i označujemo ga s $|A|$.[3]

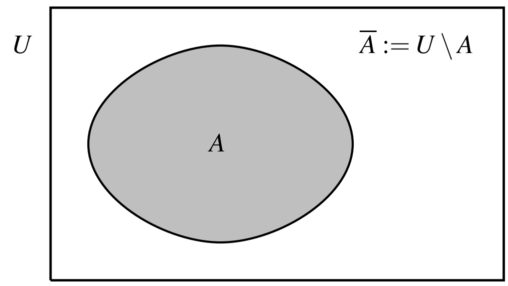
[3] Pojam kardinalnog broja skupa će biti preciznije uveden u trećem poglavlju (Funkcije).

Na primjer, $|\{4,2,7\}| = 3$, $|\{7,3,3,7,3\}| = 2$, $|\emptyset| = 0$, ali $|\{\emptyset\}| = 1$. Često se u literaturi za kardinalni broj skupa A rabi i oznaka $\sharp A$, s pomoću glazbenog znaka povisilice $\sharp$, a ponekad i $\operatorname{card} A$.

Vježba 1.2 Koliko elemenata ima skup $A = \{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7,8,9\}\}$? Koji su njegovi elementi? Koliki je kardinalni broj skupa A? Je li $2 \in A$? Je li $\{1,2\} \in A$? Ista pitanja za skup $B = \{\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7,8,9\}\}\}$.

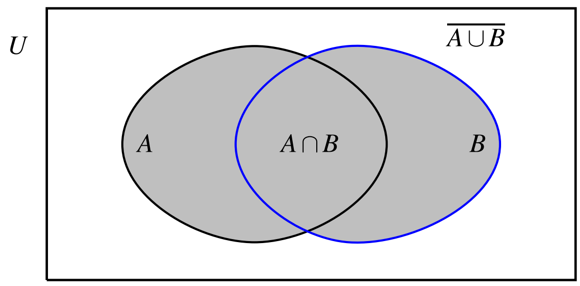
Uvedimo nekoliko osnovnih operacija sa skupovima. Ako su A i B bilo koji skupovi, onda se njihova *razlika*, u oznaci $A \setminus B$ (*skupovna razlika*), definira kao skup svih elemenata iz A koji nisu u skupu B.

Vježba 1.3 Provjerite da za $A := \{0,1,2,3\}$ i $B := \{2,3,4,5\}$ vrijedi $A \setminus B = \{0,1\}$. Koliko iznosi $\{1,2,2,1\} \setminus \{1,2\}$? A koliko $|\{1,2\} \setminus \{1,2,3\}|$?



Slika 1.4: Skup A (osjenčan sivom bojom) sadržan u nekom univerzalnom skupu U, određuje svoj *komplement* $\overline{A} := U \setminus A$, koji odgovara području unutar skupa U koji je izvan skupa A.

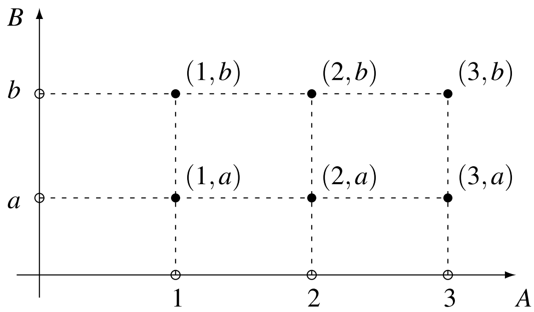
Ako je A podskup unaprijed zadanog skupa U, onda *komplement skupa* A u odnosu na U, u oznaci $\overline{A}$ (ponekad i A^c), definiramo kao skup svih elemenata u skupu U koji nisu u A, tj. $\overline{A} := U \setminus A$; vidi Sliku 1.4. Na primjer, ako je $U = \mathbb{R}$, onda je komplement skupa svih racionalnih brojeva jednak skupu svih *iracionalnih brojeva* u $\mathbb{R}$.



Slika 1.5: Skupovi A i B (osjenčani) sadržani u nekom univerzalnom skupu U, određuju njihovu uniju $A \cup B$ (ukupni osjenčani skup) i presjek $A \cap B$ (vidljiv na slici). Primijetite da skup $\overline{A \cup B}$ odgovara bijelom području unutar skupa U. Uvjerite se da je taj skup jednak $\overline{A} \cap \overline{B}$ (pogledajte skupove $\overline{A}$ i $\overline{B}$), tj. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Doista, kazati da x nije u $A \cup B$, isto je što i reći da x nije niti u A niti u B, tj. $x \notin A$ i $x \notin B$, tj. $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Na sličan način, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morganove formule).

Uniju skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, definiramo kao skup svih elemenata koji su sadržani u A *ili* u B. Naglašavamo veznik *ili*, koji je tzv. *inkluzivni* (uključivi) *ili*, što znači da u uniju uključujemo i one elemente x koji su u oba skupa istodobno. Vidi Sliku 1.5. *Presjek* skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, definiramo kao skup svih elemenata koji su sadržani istodobno u A *i* u B.

Ako je $A \cap B = \emptyset$, tj. ako A i B nemaju zajedničkih elemenata, onda kažemo da su skupovi A i B *disjunktni*. Za uniju takva dva skupa kažemo da je *disjunktna*. Općenitije, za uniju $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ kažemo da je *disjunktna unija*, ako je presjek bilo koja dva skupa iz unije prazan, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve indekse $i \neq j$.



Slika 1.6: Kartezijev umnožak $A \times B$ skupova $A := \{1,2,3\}$ i $B := \{a,b\}$ sastoji se od $3 \cdot 2 = 6$ točaka: $(1,a)$, $(2,a)$, $(3,a)$, $(1,b)$, $(2,b)$ i $(3,b)$. Vidi (1.1).

Definicija 1.2.1 Za bilo koja dva neprazna skupa A i B, definiramo njihov **Kartezijev produkt**, u oznaci $A \times B$, kao skup svih *poredanih dvojaca* (a,b), gdje je $a \in A$ i $b \in B$.[a] Drugim riječima,

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}. \tag{1.1}$$

Za poredane dvojce (a,b) i (c,d), sadržane u $A \times B$, kažemo da su međusobno *jednaki* i pišemo $(a,b) = (c,d)$ onda i samo onda ako je $a = c$ i $b = d$. ■

[a] Kada kažemo 'poredani dvojac' (a,b), onda to znači da nam je poredak bitan. Drugim riječima, ako je $a \neq b$, onda dvojce (a,b) i (b,a) smatramo različitim, tj. $(a,b) \neq (b,a)$. Podsjetimo da je kod skupova poredak nebitan: $\{a,b\} = \{b,a\}$. U hrvatskoj literaturi se poredani dvojac zove i 'uređeni par'.

■ **Primjer 1.1** Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{a,b\}$ takav da je $a \neq b$. Onda skup $A \times B$ ima ukupno šest elemenata:

$$A \times B = \{(1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (2,b), (3,b)\}.$$

Skup $B \times A$ ima isti broj elemenata kao i $A \times B$:

$$B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}.$$

■

Općenito, vidimo da ako skup A ima m elemenata, a skup B n elemenata, onda $A \times B$ ima točno $m \cdot n$ elemenata; vidi Sliku 1.6. Ovo se pravilo u kombinatorici zove *produktnim pravilom*; vidi Propoziciju **??** na str. **??**. To je razlog zašto se Kartezijev umnožak označava kao $A \times B$.

U daljnjem ćemo često rabiti oznaku $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ za *dvodimenzionalni prostor* (ravninu), tj. $\mathbb{R}^2 := \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Slično definiramo i *trodimenzionalni prostor* $\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$. O njima i njihovim generalizacijama (tzv. vektorskim prostorima) će više riječi biti u kolegiju Linearna algebra.

Navedimo neka osnovna svojstva skupovnih operacija.

Teorem 1.2.1 Neka su zadana bilo koja tri podskupa A, B i C nekog zadanog skupa U. Onda vrijedi:

(a) $\overline{\overline{A}} = A$ (pravilo dvostrukog komplementa s obzirom na skup U);

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (zakoni distribucije za skupove);

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morganove formule za skupove);

(d) $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \cup \overline{A} = U$, $\overline{\emptyset} = U$, $\overline{U} = \emptyset$.

Za dva skupa A i B kažemo da su *jednaki*, i pišemo $A = B$, ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Drugim riječima, skupovi A i B sadrže potpuno iste elemente.

1.3 Uvod u matematičku logiku i pravila zaključivanja

1.3.1 Sudovi

Jedan od osnovnih pojmova matematičke logike je sud. **Sud** je tvrdnja koja je ili istinita ili lažna. Ako je sud X istinit, onda pišemo $X \equiv T$, a ako je neistinit, onda pišemo $X \equiv F$. Oznaka T dolazi od engleskog True - istinit, a F od False - neistinit. Vrijednosti T (istinit) ili F (neistinit) koje pridružujemo bilo kojem sudu X zovu se *istinitostne vrijednosti* suda.

Matematičku logiku ne zanima formalni sadržaj suda A, nego samo je li on istinit ili lažan, tj. je li $A \equiv F$ ili $A \equiv T$.

■ **Primjer 1.2** Sud A opisan sa $5 > 3$ je istinit (tj. $A \equiv T$), sud B opisan sa $4 \geq 4$ također (tj. $B \equiv T$), dok je sud C opisan sa $2 \geq 5$ lažan (tj. $C \equiv F$). ■

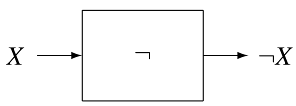
Ponekad se u literaturi umjesto oznaka F i T za laž i istinu, susreće oznaka $\perp$ i $\top$, ili čak 0 i 1.

Sa sudovima možemo obavljati logičke operacije. Za bilo koji zadani sud X definiramo njegovu **negaciju** $\neg X$ (čitaj 'non X' ili 'ne X' ili 'negacija suda X'), koja je istinita jedino ako je X lažna. Operacija $\neg$ na sudovima zove se *operacija negiranja*. To je tzv. *unarna operacija*, tj. operacija jedne varijable (suda), jer negiramo samo *jedan* sud. Djelovanje operacije negiranja se kraće opisuje s pomoću odgovarajuće *tablice istinitosti*:

X	$\neg X$
F	T
T	F

(1.2)

Operacija negiranja suda X može se predočiti kao Booleova funkcija jedne varijable; vidi Sliku 1.7.



Slika 1.7: Negacija suda X, opisana tablicom u (1.2), može se predočiti kao Booleova funkcija jedne varijable, tj. kao unarna operacija na skupu $\{F, T\}$. Varijabla (tj. sud) A poprima samo dvije moguće vrijednosti: istina (T) ili laž (F). Ta se Booleova funkcija ostvaruje s pomoću jednostavnog elektroničkog sklopa, koji se zove *invertor*.

Postoji nekoliko osnovnih *binarnih operacija* sa sudovima, tj. logičkih operacija koje djeluju na bilo koja *dva* suda X i Y. Od ukupno 16 binarnih operacija sa sudovima, pogledajmo sljedeće četiri najvažnije.

(a) **Konjunkcija sudova** X i Y, u oznaci $X \wedge Y$ (čitamo 'X i Y'), je sud koji je istinit jedino u slučaju kada su oba suda X i Y istiniti. Drugim riječima, u preostala tri slučaja je konjunkcija sudova lažna; vidi tablicu istinitosti na str. 13.

Primijetite da je ova operacija komutativna, tj. $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$, pri čemu oznaka $\equiv$ ovdje znači da lijeva i desna strana imaju identički jednake istinitostne vrijednosti za sve sudove X i Y.

(b) **Disjunkcija sudova** X i Y, u oznaci $X \vee Y$ (čitamo 'X ili Y'), je sud koji je lažan jedino u slučaju kada su oba suda X i Y lažni. I ova je operacija komutativna, tj. $X \vee Y \equiv Y \vee X$.

Disjunkcija sudova je u ovoj definiciji *inkluzivna* (uključujuća), tj. oznaka $A \vee B$ nam označuje 'A ili B ili oboje'. Na primjer, ako je A sud 'Mira ima plave oči' a B sud 'Mira ima crnu kosu', onda nam $A \vee B$ označuje sud 'Mira ima plave oči *ili* crnu kosu', s tim da može biti i oboje.

(c) **Implikacija sudova** X i Y, u oznaci $X \Rightarrow Y$ (čitaj 'iz X slijedi Y' ili 'X implicira Y' ili 'ako je X, onda je Y'), je lažan sud jedino u slučaju kada je sud X istinit, a Y lažan.

Logička operacija implikacije nije komutativna, tj. $X \Rightarrow Y$ nije logički ekvivalentno s $Y \Rightarrow X$. Na primjer, ako je sud X istinit, a Y lažan, onda je sud $X \Rightarrow Y$ lažan, a $Y \Rightarrow X$ istinit.

Iz definicije implikacije slijedi da ako je sud X lažan, a Y istinit, onda je sud $X \Rightarrow Y$ istinit. Ova pomalo zbunjujuća definicija se može lako ilustrirati ovako. Krenimo od jednog lažnog suda, na primjer X neka je sud $1 = -1$, gdje u ovoj jednakosti stoje cijeli brojevi. Ako kvadriramo ovu jednakost, dolazimo do $1 = 1$, tj. do istinitog suda Y. Prema tome, iz laži može slijediti istina.

Sud $X \Rightarrow Y$ se još često čita i ovako: 'X je *dovoljan* uvjet za Y' ili 'Y je *nuždan* uvjet za X'.

Vježba 1.4 Uvjerite se da su sljedeće tri implikacije sadržajno potpuno iste:

– ako je Katica građanka Županje, onda je i građanka Hrvatske;

– da bi Katica bila građanka Hrvatske, dovoljno je da je građanka Županje;

– da bi Katica bila građanka Županje, nužno je da je građanka Hrvatske.

Vježba 1.5 (i) Da biste diplomirali na FER-u, je li nužno ili dovoljno položiti ispit iz Matematike 1?

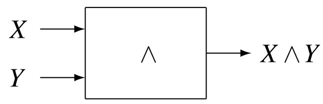
(ii) Da bi za neki realan broj x vrijedilo $x^2 = 1$, je li nužno ili dovoljno da bude $x = 1$?

(d) **Ekvivalencija sudova** X i Y, u oznaci $X \Leftrightarrow Y$ ('X je ekvivalentno s Y' ili 'X vrijedi onda i samo onda ako vrijedi Y'), je istinita jedino ako su sudovi X i Y oba istiniti ili oba lažni. Ekvivalencija sudova je komutativna, tj. $X \Leftrightarrow Y \equiv Y \Leftrightarrow X$.

Navedene binarne operacije sa sudovima možemo opisati i s pomoću odgovarajuće istinitostne tablice:

$$
\begin{array}{cc||c|c|c|c}
X & Y & X \wedge Y & X \vee Y & X \Rightarrow Y & X \Leftrightarrow Y \\
\hline
F & F & F & F & T & T \\
F & T & F & T & T & F \\
T & F & F & T & F & F \\
T & T & T & T & T & T
\end{array}
\qquad (1.3)
$$

Konjunkcija, disjunkcija, implikacija i ekvivalencije mogu se shvatiti kao sudne forme ili Booleove funkcije dviju varijabla, tj. sudova X i Y; vidi Sliku 1.8 za konjunkciju. Parovi ulaznih sudova (X,Y) poprimaju četiri moguće vrijednosti: (F,F), (F,T), (T,F) ili (T,T). Konjunkcija $X \wedge Y$ poprima samo dvije moguće vrijednosti: T ili F, kao i ostale binarne operacije.



Slika 1.8: Grafički prikaz konjunkcije $X \wedge Y$ (definirane tablicom (1.3)), shvaćene kao Booleove funkcije dviju varijabla, tj. sudova X i Y. Ona se može realizirati s pomoću jednostavnog elektroničkog sklopa. Na sličan se način može predočiti bilo koja od 16 Booleovih funkcija dviju varijabla, na primjer $X \vee Y$, $X \Rightarrow Y$ i $X \Leftrightarrow Y$.

Sljedeći teorem je vrlo lako provjeriti s pomoću tablica istinitosti.

Teorem 1.3.1 Neka su X, Y i Z bilo koja tri suda. Onda vrijede sljedeće logičke ekvivalencije:

(a) $\neg(\neg X) \equiv X$ (pravilo dvostruke negacije)

(b) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ (zakoni distribucije za sudove)

(c) $\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$ (De Morganove formule za sudove)

(d) $\neg(X \Rightarrow Y) \equiv X \wedge \neg Y$ (negacija implikacije).

(e) $X \Rightarrow Y \equiv \neg Y \Rightarrow \neg X$ (obrat po kontrapoziciji)

(f) $X \Leftrightarrow Y \equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$.

Dokaz. Ilustrirajmo dokaz samo na primjeru prve De Morganove formule (c). Pogledajmo tablicu istinitosti od $\neg(X \wedge Y)$:

X	Y	$X \wedge Y$	$\neg(X \wedge Y)$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	F

Pogledajmo zatim tablicu istinitosti od $\neg X \vee \neg Y$:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \vee \neg Y$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

Kao što vidimo, vrijednosti Booleovih funkcija $\neg(X \wedge Y)$ i $\neg X \vee \neg Y$ se podudaraju za sve ulazne slogove istinitosti. Time je dokazano da je $\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$. Na sličan način se dokazuju i ostale tvrdnje. Za tvrdnje pod (b) u kojima imamo tri varijable, imat ćemo ukupno osam ulaznih slogova istinitosti. ■

Vježba 1.6 Uvjerite se da je sljedećim sudovima izrečeno isto, te da drugi sud nastaje iz prvog obratom po kontrapoziciji, i obratno:

– Ako je Katica građanka Županje, onda je ona i građanka Hrvatske.

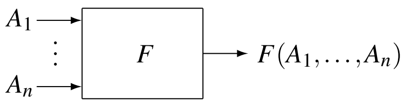
– Ako Katica nije građanka Hrvatske, onda ona nije građanka Županje.

U ovom slučaju pod sudom X podrazumjevamo 'Katica je građanka Županje', a pod Y sud 'Katica je građanka Hrvatske'. Uvjerite se da u ovom slučaju sudovi $X \Rightarrow Y$ i $\neg X \Rightarrow \neg Y$ nisu jednakih istinitostnih vrijednosti.

Operacije među skupovima možemo lako opisati s pomoću logičkih operacija. Ako su A i B bilo koja dva skupa, onda je:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Komplement nekog skupa A sadržanog u skupu U možemo zapisati ovako: $\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U : \neg(x \in A)\}$.



Slika 1.9: Grafički prikaz sudne forme (Booleove funkcije) s n ulaznih sudova $A_1,\ldots,A_n$ i s izlaznim sudom $F(A_1,\ldots,A_n)$. Booleovih funkcija n varijabla ima ukupno 2^{2^n}; vidi (**??**) na str. **??**.

Sudnom formom ili **Booleovom funkcijom** n varijabla, gdje je n prirodan broj, zovemo logičku formulu $F(A_1,\ldots,A_n)$ koja ovisi o sudovima $A_1,\ldots,A_n$. Možemo ju zamisliti kao funkciju F koja bilo kojem poredanom n-tercu sudova $(A_1,\ldots,A_n)$ pridružuje sud $F(A_1,\ldots,A_n)$; vidi Sliku 1.9. Mogućih vrijednosti ulaznih n-teraca $(A_1,\ldots,A_n)$ ima točno 2^n, jer svaki sud A_k, gdje je $k = 1,\ldots,n$, poprima dvije moguće vrijednosti: istina (tj. T) ili laž (tj. F). Kao što vidimo, sudne forme su n-narne operacije na dvočlanom skupu $\{F,T\}$.

Na primjer, sudna forma

$$\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C), \tag{1.4}$$

je sudna forma (Booleova funkcija) s tri varijable: sudovima A, B i C, tj. $n = 3$.

Za neku sudnu formu kažemo da je *tautologija*, ako je istinita za sva moguće slogove istinitosti, tj. ako je identički istinita za bilo koji izbor ulaznih sudova. Takva je na primjer sudna forma 1.4, koja se zove *zakon silogizma*. Evo još nekoliko primjera tautologija, koji se lako provjere s pomoću tablica istinitosti.

Propozicija 1 Sljedeće sudne forme su tautologije, tj. identički istinite:

(a) $\big(A \wedge (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ (modus ponens);
(b) $\big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\big) \Rightarrow \neg A$ (modus tollens);
(c) $\big((\neg A \Rightarrow B) \wedge \neg B\big) \Rightarrow A$ (dokaz iz protuslovlja).

Dodatak

Za sudove A i B, odgovarajući sud $\neg A \wedge \neg B$ nam daje Booleovu funkciju *NI* (engl. *NAND*). Napišite tablicu istinitosti te binarne operacije na sudovima. Uvjerite se da se negacija, implikacija, disjunkcija, implikacija, equivalencija i tautologija (identička istina) sudova A i B mogu zapisati samo s pomoću operacije NI.[4]

Rješenje. Označimo $\mathrm{NI}(A,B) := \neg A \wedge \neg B$. Negaciju $\neg A$ dobijemo kao $\mathrm{NI}(A,A) = \neg A \wedge \neg A \equiv \neg A$. Konjunkciju dobijemo kao

$$\mathrm{NI}(\neg A, \neg B) = \neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B) \equiv A \wedge B. \tag{1.5}$$

Drugim riječima, $A \wedge B \equiv \mathrm{NI}(\mathrm{NI}(A,A), \mathrm{NI}(B,B))$. Rabeći De Morganovo pravilo, dobivamo da se disjunkcija sudova može dobiti kao

$$\neg\mathrm{NI}(A,B) = \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B.$$

Ovdje smo upotrijebili samo operacije negiranja i ni. Implikaciju $A \Rightarrow B$ možemo prikazati kao $\neg(A \wedge \neg B)$ (vidi slučaj (d) Teorema (1.3.1)), a za konjunkciju smo već pokazali da tvrdnja vrijedi (vidi (1.5)), pa imamo

$$\neg\mathrm{NI}(\neg A, B) = \neg(A \wedge \neg B) \equiv A \Rightarrow B.$$

Za ekvivalenciju vrijedi $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, tj. $A \Leftrightarrow B = \mathrm{NI}(\neg(A \Rightarrow B), \neg(B \Rightarrow A))$, pa je

$$\mathrm{NI}\left(\mathrm{NI}(\neg A, B), \mathrm{NI}(\neg B, A)\right) \equiv A \Leftrightarrow B.$$

Identički istinit sud (tautologiju) možemo dobiti na primjer ovako:

$$\neg\mathrm{NI}(A, \neg A) = \neg(\neg A \wedge \neg(\neg A)) \equiv \neg(\neg A \wedge A) \equiv \neg F \equiv T.$$

1.3.2 Predikati i kvantifikatori

Pretpostavimo da je zadan bilo koji neprazni skup U. **Predikat** je izjava $P(x)$ koja za svaki konkretni $x = a \in U$ postaje sud $P(a)$. Predikatom se opisuje neko karakteristično *svojstvo* općeg elemenata x.

■ **Primjer 1.3** Ako je U skup svih učenika nekog razreda, onda $P(x)$ može biti predikat 'učenik x ima plave oči'. Za svakog pojedinog učenika $x = a \in U$ je sud $P(a)$ istinit (tj. T) ili lažan (tj. F). Karakteristično svojstvo $P(x)$ učenika x, koje nas ovdje zanima, je 'imati plave oči'. ■

■ **Primjer 1.4** Neka je $U = \mathbb{N}$. Rečenice kao $P(x)$: "$x^2 < 5$", $Q(x_1, x_2, x_3)$: "$x_1 + x_2 = x_3$" su predikati, jer uvrštenjem konkretnih vrijednosti x iz U dotično, x_1, x_2 i x_3 iz U, one postaju sudovi. Na primjer, $P(2)$: "$2^2 < 5$" je istinit sud, $P(3) \equiv F$, $Q(1,4,5) \equiv T$ (jer je $1+4=5$), a $Q(5,1,4) \equiv F$ (jer je $5+1 \neq 4$). ■

Kao što vidimo, predikat $P(x)$ možemo gledati kao funkciju koja bilo kojem $a \in U$ pridružuje *sud* $P(a)$. Na primjer, ako je U dvočlan skup, tj. $U = \{a_1, a_2\}$, onda predikat $P(x)$ možemo shvatiti kao pridruživanje $a_1 \mapsto P(a_1)$, $a_2 \mapsto P(a_2)$.

Svakom predikatu $P(x)$ moguće je pridružiti sud

$$\forall x P(x)$$

(čitaj '**za svaki** x vrijedi svojstvo $P(x)$'), koji je istinit jedino onda kad je za sve konkretne $x = a \in U$, sud $P(a)$ istinit.

Kvantifikator $\forall$ ('za svaki') zovemo *univerzalnim kvantifikatorom*. Nastao je kao obrnuto slovo A.

[4] Pokazuje se da se bilo koja sudna forma (tj. Booleova funkcija) konačno mnogo varijabla može ostvariti samo s pomoću operacije NI. (U tom slučaju se kaže da je operacija NI *funkcionalno potpuna*. Isto svojstvo ima i Booleova funkcija NILI (engl. NOR), definirana sa $\mathrm{NILI}(A,B) := \neg A \vee \neg B$.)

Na primjer, ako je $P(x)$ definiran na dvočlanom skupu $U = \{a_1, a_2\}$, onda je $(\forall x \in U)\, P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2)$. Općenito, za bilo koji neprazan skup U možemo pisati

$$(\forall x \in U)\, P(x) \equiv \bigwedge_{a \in U} P(a),$$

gdje desna strana označava konjunkciju svih sudova $P(a)$, za $a \in U$.

Slično tome, uvodimo *egzistencijalni kvantifikator* $\exists$, s pomoću kojeg od predikata $P(x)$ dobivamo sud

$$\exists x\, P(x)$$

(čitaj '**postoji x** tako da vrijedi svojstvo $P(x)$'). Taj sud je po definiciji istinit ako postoji barem jedan element $x = a \in U$ takav da je $P(a)$ istinit, a inače je lažan.

Ako je na primjer $P(x)$ predikat definiran na dvočlanom skupu $U = \{a_1, a_2\}$, onda je $\exists x\, P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2)$. Općenito, za bilo koji neprazan skup U možemo pisati

$$(\exists x \in U)\, P(x) \equiv \bigvee_{a \in U} P(a),$$

gdje desna strana označava disjunkciju svih sudova $P(a)$, za sve $a \in U$.

Vrijedi ovakav teorem, koji predstavlja generalizaciju De Morganovih formula za sudove (vidi slučaj (c) u Teoremu 1.3.1).

Teorem 1.3.2 — De Morganove formule za predikate. Neka je $P(x)$ bilo koji predikat. Onda vrijede sljedeće logičke ekvivalencije:

(a) $\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

(b) $\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$.

■ **Primjer 1.5** Umjesto dokaza tvrdnje pod (a) u Teoremu 1.3.2, pogledajmo radije jedan vrlo jednostavan primjer. Neka je U skup svih učenika nekog razreda, a $P(x)$ neka je predikat 'x ima plave oči'. Ako negiramo sud 'svaki učenik x ima plave oči', onda je to isto što i reći da 'postoji učenik x koji nema plave oči'. Time je ilustriran slučaj (a) u Teoremu 1.3.2.

U slučaju (b), negirati sud 'postoji učenik u razredu koji ima plave oči', isto je što i reći da 'svaki učenik nema plave oči'. U hrvatskom jeziku umjesto 'svaki učenik nema plave oči' kažemo malo drugačije: 'niti jedan učenik nema plave oči'. ■

Sud $\neg(\forall x \in \mathbb{R})\,(x^2 = 2) \equiv (\exists x \in \mathbb{R})\,(x^2 \neq 2)$ je istinit, jer na primjer za $x = 3$ je $3^2 \neq 2$. Zanimljivo je da je i sud $\neg(\exists x \in \mathbb{Q})\,(x^2 = 2) \equiv (\forall x \in \mathbb{Q})\,(x^2 \neq 2)$ istinit.

Već su stari Grci znali da ne postoji racionalan broj x takav da je $x^2 = 2$ (tj. za svaki racionalan broj x je $x^2 \neq 2$); dokaz te tvrdnje je iznenađujuće jednostavan, pogledajte Lemu 3.

Kao što smo već vidjeli, skupove često zadajemo tako da u nekom univerzalnom skupu U gledamo neko karakteristično svojstvo elemenata x, tj. predikat $P(x)$. Odgovarajući skup A sadržan u skupu U definiramo kao skup svih elemenata $a \in U$ za koje je sud $P(a)$ istinit. Taj skup zapisujemo kao $A = \{a \in U : P(a) \equiv T\}$ (zovemo ga *karakterističnim skupa* predikata $P(x)$), ili još kraće,

$$A = \{x \in U : P(x)\}.$$

■ **Primjer 1.6** Skup $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x = 5\}$ je skup svih rješenja jednadžbe $x^2 + 3x = 5$ u skupu realnih brojeva. Pripadajući predikat $P(x)$ je jednakost $x^2 + 3x = 5$, s univerzalnim skupom $U := \mathbb{R}$. ■

Ako početni predikat ima dvije varijable, na primjer $P(x,y)$ (dvomjesni predikat), gdje su $x \in U$ i $y \in V$, onda možemo definirati novi predikat $\forall x P(x,y)$, koji ovisi samo o y. Možemo ga gledati kao predikat $Q(y) := \forall x P(x,y)$. Prema tome, možemo definirati na primjer sud $\exists y Q(y) := \exists y \forall x P(x,y)$. Na sličan način, iz početnog predikata $P(x,y)$ moguće je dobiti još tri nova suda: $\exists x \forall y P(x,y)$, $\exists x \exists y P(x,y)$ i $\forall x \forall y P(x,y)$. Jasno je da vrijedi

$$\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y), \qquad \forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y).$$

Na temelju De Morganovih formula dobivamo na primjer ovakvu ekvivalenciju:

$$\neg \forall x \exists y P(x,y) \equiv \exists x \forall y \neg P(x,y).$$

Još općenitije, sudna forma $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ koja za svaki slog (izbor) elemenata $x_1,x_2,\ldots,x_n$ univerzalnog skupa U postaje sud, zove se n**-mjesni predikat** na U. Skup $\mathscr{C}_P$ svih slogova $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ elemenata iz U za koje je $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ istinit zove se *karakterističan skup predikata* P. On potpuno određuje P u logičkom smislu, tj. s obzirom na istinitost.

■ **Primjer 1.7** Neka je $U = \mathbb{N}$. Za predikat $P(x,y)$ opisan sa "$x+y=5$" je

$$\mathscr{C}_P = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

■

Iz predikata možemo tvoriti nove predikate logičkim operacijama.

■ **Primjer 1.8** Neka je $U = \{2,3,4\}$, a $P(x,y)$ neka je predikat "$x \geq y$". Vidimo da je $\mathscr{C}_P = \{(2,2),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$. Sada je izraz $\forall x P(x,y)$ jednomjesni predikat $\forall x P(x,y) =: P_1(y)$, jer za svaki konkretni y postaje sud. Naime:

za $y=2$ je $P_1(2) = \forall x(x \geq 2) \equiv T$,

za $y=3$ je $P_1(3) = \forall x(x \geq 3) \equiv F$ (uzimljući $x=2$),

za $y=4$ je $P_1(4) = \forall x(x \geq 4) \equiv F$ (uzimljući $x=2$ ili $x=3$).

Vidimo da je $\forall y P_1(y) \equiv F$ i $\exists y P_1(y) \equiv T$, jer je $P_1(3) = F$, $P_1(2) = T$. Odatle slijedi da je $\forall y \forall x P(x,y) = F$, $\exists y \forall x P(x,y) = T$. ■

Vrijedi i općenito. Primjenom samo jednog kvantifikatora (na primjer egzistencijalnog) za točno jedno mjesto x_i predikata $P(x_1,\ldots,x_n)$ dobivamo iz n-mjesnog predikata $(n-1)$-mjesni predikat $\exists x_i P(x_1,\ldots,x_n)$, koji ovisi samo o varijablama različitim od x_i. Opetovanom primjenom po jednog kvantifikatora za svako mjesto x_i predikata $P(x_1,\ldots,x_n)$ dobivamo iz n-mjesnog predikata *sud*.

Vježba 1.7 Provjerite ove jednakosti skupova:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \langle 0,+\infty \rangle$;

(b) $S := \{k \in \mathbb{N} : k < 5\} = \{1,2,3,4\}$, $2 \in S$, $5 \notin S$;

(c) $\mathbb{R} \times \{1\} = \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$, pravac $y=1$ (a x bilo kakav realan broj) u ravnini $\mathbb{R}^2$;

(d) $\langle 1,3 \rangle \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x \in \langle 1,3 \rangle,\ y \in \mathbb{R}\}$, traka $1 < x < 3$ (a y bilo kakav realan broj) u ravnini $\mathbb{R}^2$.

Vježba 1.8 Zaokružite istinite tvrdnje:

(a) $\{1,2,3\} = \{3,2,1,3\}$;

(b) $\{2\} \in \{1,2,3\}$;

(c) $2 \subseteq \{1,2,3\}$;

(d) $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$;

(e) $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$;
(f) $\{2\} \cup \{1\} \cup \emptyset = \{1,2\}$.

■ **Primjer 1.9** Zadani su sljedeći sudovi:
(a) $A \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x^2 = xy \Rightarrow x = y)$;
(b) $B \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 = xy \Rightarrow x = y)$;
(c) $C \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$;
(d) $D \equiv (\forall x \geq 0)(\forall y \geq 0)(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$;
(e) $E \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow x^3 < y^3)$.
Negirajte svaki od danih sudova i zapišite ga ne koristeći znak negacije. Koji je od sudova istinit: A ili $\neg A$, B ili $\neg B$?

Rješenje. (a) Negacija suda A je $\neg A \equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x^2 = xy \wedge x \neq y)$. Možemo odabrati $x = 0$, pa je onda za svaki $y \neq 0$ sud $x^2 = xy \wedge x \neq y$ istinit, iz čega vidimo da je sud $\neg A$ istinit. Prema tome, sud A je lažan. Ovaj primjer pokazuje da jednakost $x^2 = xy$ nesmijemo skraćivati s x, jer x može biti jednak 0.

(b) Sud B je istinit, jer za $y = 0$ dobivamo implikaciju $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, koja je istinita za svaki $x \in \mathbb{R}$ (provjerite da je doista tako, najprije za $x = 0$, a zatim za $x \neq 0$).

(c) Sud C nije istinit, jer za $x = -3$ i $y = 1$ vrijedi $-3 < 1$, ali $(-3)^2 < 1^3$, tj. $9 < 1$, nije istinito. Prema tome, za taj izbor brojeva x i y, implikacija $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ nije istinita.

(d) Sud D je istinit, jer kvadriranje *nenegativanih* realnih brojeva čuva poredak među njima, tj. kvadratna je funkcija strogo rastuća na skupu nenegativnih realnih brojeva.

(e) Sud E je istinit, jer kubiranje realnih brojeva čuva poredak među njima, tj. kubna je funkcija strogo rastuća. ■

Dodatne primjere iz matematičke logike (kao i nekih drugih područja matematike) možete vidjeti u Interaktivnom uvodu u Matematičku analizu, pripremljenom u programu Jupyter. Pogledajte također dodatne zadatke iz matematičke logike na str. 35 ove knjige.

1.3.3 Matematički dokazi i metode dokazivanja

Matematičke tvrdnje (u teoremima, propozicijama i lemama) obično imaju oblik implikacije ili ekvivalencije. Njihovi se dokazi mogu provoditi raznim metodama, od kojih ćemo neke opisati jednostavnim primjerima. Složeniji dokazi se nerijetko oslanjaju ne prethodno dokazane matematičke tvrdnje.

Dodatak

Najopsežniji danas poznati dokaz u povijesti matematike odnosi se na znameniti *Teorem o klasifikaciji konačnih grupa*. Iako je iskaz tog teorema vrlo kratak (sastoji se od samo jedne rečenice), njegov dokaz obasiže čak oko deset tisuća stranica teškog matematičkog teksta, koji se nalazi u raznima člancima nekoliko stotina matematičara. Među značajnim osobama koje su doprinijele rješavanju problema klasifikacije konačnih grupa je istaknuti hrvatski matematičar Zvonimir Janko.

Izravan dokaz

Pogledajmo jednostavan primjer iz aritmetike.

Lema 1 Ako su a i b neparni cijeli brojevi, onda je i njihov umnožak ab neparan. Ako je barem jedan od brojeva a ili b paran, onda je njihov umnožak paran.

Dokaz. Ako su a i b neparni cijeli brojevi, onda se mogu napisati kao parni uvećani za 1, tj. kao $a = 2k + 1$ i $b = 2l + 1$, gdje su k i l cijeli brojevi. Prema tome je njihov umnožak $ab =$

$(2k+1)(2l+1) = 4kl+2k+2l+1 = 2(2kl+k+l)+1$ također zbroj parnog broja i jedinice, dakle neparan broj. Time je prva tvrdnja dokazana. Ako je na primjer broj a paran, tj. $a = 2k$, a b bilo kakav cijeli broj, onda je njihov umnožak $ab = (2k)b = 2(kb)$ paran broj. ∎

Pravilo kontrapozicije: $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Započinjemo s jednostavnim primerom iz aritmetike cijelih brojeva.

Lema 2 Neka je n bilo koji cijeli broj. Ako je n^2 paran, onda je i n paran.

Dokaz. Obratom po kontrapoziciji, to je isto što i dokazati da iz pretpostavke da je n neparan slijedi da je n^2 neparan. To je međutim izravna posljedica prethodne Leme 1, u kojoj uzimamo $a = b = n$. ∎

Kontradikcija (ili protuslovlje)

Sljedeći su rezultat poznavali već stari Grci, točnije, Euklid u 4. stoljeću prije Krista.

Lema 3 Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan, tj. ne može se napisati kao kvocijent dvaju cijelih brojeva.

Dokaz. Pretpostavimo, protivno tvrdnji leme, da se $\sqrt{2}$ može napisati kao kvocijent dvaju cijelih brojeva, tj. $\sqrt{2} = a/b$, gdje su a i b cijeli brojevi, uz $b \neq 0$. Možemo odmah pretpostaviti da su brojevi a i b u kvocijentu a/b skraćeni do kraja, tj. brojevi a i b nemaju niti jedan zajednički cjelobrojni djelitelj, osim ± 1 (trivijalni zajednički djelitelji).

Kvadriranjem jednadžbe $\sqrt{2} = a/b$ dobivamo da je $a^2 = 2b^2$. Dakle a^2 je paran broj, pa je prema Lemi 2 i broj a paran, tj. $a = 2k$ za neki cijeli broj k. Uvrštavajući to u $a^2 = 2b^2$, dobivamo da je $b^2 = 2k^2$, pa je i broj b^2 paran. Opet iz Leme 2 slijedi da je i broj b paran, tj. $b = 2l$ za neki cijeli broj l. Time smo dobili da brojevi a i b oba parni, tj. imaju zajednički djelitelj 2, a to je kontradikcija (protuslovlje) s pretpostavkom da su a i b skraćeni do kraja u kvocijentu a/b. ∎

Dodatak

Na sličan se način dokazuje da su na primjer i brojevi $\sqrt{3}$ i $\sqrt{5}$ iracionalni. Štoviše, ako je $n \geq 2$ prirodan broj koji nije kvadrat nekog prirodnog broja (tj. n nije oblika 4, 9, 16 itd.), onda je broj $\sqrt{n}$ iracionalan.

Doista, pretpostavimo li da je $\sqrt{n}$ racionalan broj, tj. $\sqrt{n} = a/b$, gdje su a i b prirodni brojevi (pretpostavimo odmah da je razlomak a/b skraćen do kraja, tj. da su a i b relativno prosti), onda je $a^2 = nb^2$. Budući da su a i b relativno prosti, onda mora a^2 dijeliti n, tj. $n = ka^2$ za neki prirodan broj k. Uvrštavanjem u $a^2 = nb^2$ dobivamo da je $a^2 = ka^2b^2$, tj. $1 = kb^2$. Budući da su k i b prirodni brojevi, slijedi da je $k = 1$ i $b = 1$. Prema tome je $n = a^2$, tj. n je kvadrat prirodnog broja, što je kontradikcija s pretpostavkom. Ovaj kratak i elegantan dokaz je dao engleski matematičar *Godfrey H. Hardy* (1877.-1947.).

Lema 4 Neka je q racionalan broj različit od 0, a x bilo koji iracionalan realan broj. Onda je umnožak $q \cdot x$ iracionalan broj.

Dokaz. Doista, pretpostavimo li (nasuprot tvrdnji leme) da je umnožak $y := q \cdot x$ racionalan, onda bi $x = y/q$ bio racionalan broj (jer je kvocijent dvaju racionalnih). To je u protuslovlju s pretpostavkom da je x iracionalan. Time je tvrdnja leme dokazana. ∎

Opovrgavanje hipoteze kontraprimjerom

U suvremenoj matematici postoji velik broj otvorenih problema (na tisuće), koji se ponekad izražavaju kao slutnje (hipoteze).

Vrlo je lako uvjeriti se da je umnožak bilo kojeg racionalnog i iracionalnog broja uvijek iracionalan; vidi Lemu 4. Kako je s produktom dvaju iracionalnih brojeva? Moglo bi se pomisliti da umnožak dvaju iracionalnih brojeva mora biti također iracionalan. To međutim nije točno, kao što pokazuje sljedeći vrlo jednostavan kontraprimjer. Uzmimo dva iracionalna broja, $a = \sqrt{2}$ i $b = \sqrt{2}$. Onda je umnožak $ab = 2$, tj. racionalan broj.

Je li zbroj dvaju iracionalnih brojeva iracionalan? Evo jednostavan kontraprimjer. Realni brojevi $a = \sqrt{2}$ i $b = -\sqrt{2}$ su iracionalni, ali njihov zbroj $a + b = 0$ je racionalan broj (čak cijeli broj). Još jednostavniji primjer se dobiva za $a = \sqrt{2}$ i $b = -\sqrt{2}$.

Dodatak

Vrlo je poznata *Goldbachova slutnja* iz 18. st. (točnije, iz 1742.), da se svaki paran prirodan broj veći od 2 može napisati kao zbroj dvaju prostih brojeva. Na primjer, $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 5+3$, $10 = 5+5 = 7+3$, $12 = 5+7$, itd.

Podsjetimo se:

> Prirodan broj n veći od 1 je po definiciji **prost broj**[a] ako nema drugih djelitelja osim 1 i n.
>
> [a] Riječ 'prost' broj ovdje treba shvatiti kao 'jednostavan' broj. Prirodni brojevi koji nisu prosti zovu se **složeni brojevi**. Na primjer, broj 6 je složen broj jer je $6 = 2 \cdot 3$.

Već su stari Grci znali da prostih brojeva ima beskonačno mnogo, a strogi dokaz se nalazi u Euklidovom djelu *Elementi* iz 4. st. prije Krista:

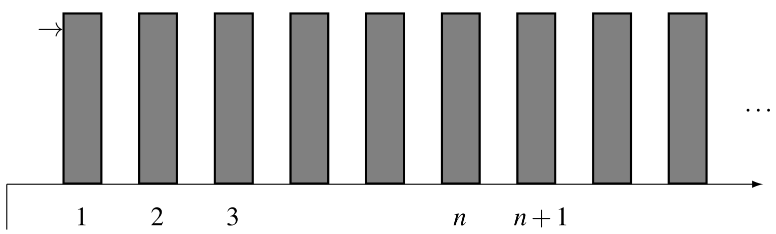
$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47\ \text{ itd.} \tag{1.6}$$

Ni do danas nije poznato je li Goldbachova slutnja istinita. Do godine 2008. je uz pomoć računala provjerena do broja $12 \cdot 10^{17}$; vidi [Pick, str. 178]. Ili možda ipak postoji neki (jako veliki) paran broj koji se ne može napisati kao zbroj dvaju prostih brojeva?

1.4 Prirodni brojevi. Matematička indukcija

U skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, najmanji broj je 1. Svaki prirodan broj ima svojeg jednoznačno određenog *sljedbenika*: broj 2 je sljedbenik od 1, 3 je sljedbenik od 2, i općenito, broj $n+1$ je sljedbenik od n. Počevši od broja 2, svaki prirodan broj ima svojeg jednoznačno određenog prethodnika (broj 1 je jedini koji nema svojeg prethodnika). Ovdje ćemo dotaknuti još jednu suštinsku osobitost prirodnih brojeva, koje se ogleda u tzv. 'načelu matematičke indukcije'.

Načelo matematičke indukcije ćemo najprije objasniti na jednostavnoj dječjoj igri dominima, koju svi poznajemo. Pretpostavimo da smo na ravnu tvrdu podlogu stavili niz domina (okomito), jedno do drugog; vidi Sliku 1.10. Ako je na desnu stranu *palo prvo domino*, te *ako znamo da padom bilo kojeg domina pada i sljedeće* (tj. svaka dva uzastopna domina su dovoljno blizu), *zaključak je da će pasti sva domina*. Taj princip razumije i predškolsko dijete. Princip matematičke indukcije je vrlo sličan igri domina.



Slika 1.10: Načelo matematičke indukcije najlakše je razumjeti na primjeru domina. Ako je palo prvo domino, te ako znamo da (za bilo koji prirodan broj n) padom n-tog domina pada i $n+1$-vo, onda će pasti *sva* domina.

Matematička indukcija koristi se za dokazivanje tvrdnje $T(n)$ koja ovisi o prirodnim brojevima n, počevši od $n = 1$ (rjeđe počevši od nekog prirodnog broja n_0, tj. za $n \geq n_0$, ponekad i za cijeli broj).

Načelo (princip) matematičke indukcije glasi ovako. Ako

(B) tvrdnja $T(n)$ vrijedi za najamnji mogući $n = n_0$, tj. vrijedi $T(n_0)$ (*baza indukcije*), te ako

(P) iz *pretpostavke* da je tvrdnja $T(n)$ istinita za *neki* (ali bilo koji) prirodan broj $n \geq n_0$,

(K) slijedi da je istinita i tvrdnja $T(n+1)$,

onda imamo *zaključak* da je tvrdnja $T(n)$ istinita za *sve* prirodne brojeve $n \geq n_0$.

Ovdje smo s (B), (P) i (K) označili redom bazu indukcije, te pretpostavku i korak indukcije. Ilustrirajmo načelo matematičke indukcije na sljedećem primjeru jedne tvrdnje koja ovisi o prirodnom broju n, koja omogućava vrlo kratko računanje zbroja kvadrata svih prirodnih brojeva od 1 do n. Za tu su formulu znali već stari Grci.

■ **Primjer 1.10** Za svaki prirodan broj n vrijedi da je

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{1.7}$$

Dokaz ove jednakosti provodimo matematičkom indukcijom:

(B) Baza indukcije se sastoji od izravne provjere za $n = 1$: $1^2 = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3$, a to vrijedi.

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki po volji odabran prirodni broj n:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{1.8}$$

(K) Dokažimo da onda ta tvrdnja vrijedi za $n+1$ umjesto n, tj.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)\big(2(n+1)+1\big).$$

Da bismo to dokazali, iskoristit ćemo induktivnu pretpostavku (1.8) na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + (n+1)^2 \\ &\overset{(P)}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3). \end{aligned} \tag{1.9}$$

(Zadnju, *očekivanu* jednakost, provjeravamo računom sa strane, svođenjem do jednakosti $0 = 0$, te zatim vraćanjem od $0 = 0$ istim putem nazad do nje. Provedite to sami.) Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi i za $n+1$, pa je time induktivni korak završen.

Dakle, prema principu matematičke indukcije, početna tvrdnja (1.7) vrijedi za sve prirodne brojeve n. ■

Crtica

Jednakost (1.7), koju smo upravo dokazali matematičkom indukcijom, omogućila je *Arhimedu* (u 3. st. prije Krista) da na vrlo jednostavan način izračuna površinu ispod parabole $y = x^2$ na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, tj. površinu lika u (x,y)-ravnini određenog nejednakostima $0 \leq x \leq 1$ i $0 \leq y \leq x^2$. Ta površina iznosi točno $1/3$.

Dodatak

Tvrdnju u jednakosti (1.7) dokazali smo matematičkom indukcijom, ali nismo objasnili kako se do te jednakosti dolazi. Jedan od načina je sljedeći. Označimo li zbroj kvadrata na lijevoj strani od (1.7) s $S(n)$, možemo *pretpostaviti* da je taj izraz jednak nekom *kubnom* polinomu u n, tj. da vrijedi

$$S(n) = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

za sve $n \geq 1$. Da bismo odredili nepoznate koeficijente a, b, c i d u toj (za sada hipotetičkoj) jednakosti, uvrštavajući u nju redom vrijednosti $n = 1, 2, 3, 4$, dobivamo sustav od četiri jednadžbe s navedene četiri nepoznanice, koji zatim riješimo. Time se, nakon faktoriziranja dobivenog kubnog polinoma, dolazi upravo do izraza na desnoj strani u jednakosti (1.7). Zatim se ta (hipotetička) jednakost dokaže za sve $n \geq 1$ matematičkom indukcijom, kao što je opisano gore. Postoje i drugi, izravni načini da se dođe do jednakosti (1.7).

Problem 1.1 Može li se zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva, tj. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, dobiti kao polinom četvrtog stupnja u varijabli n? Kako pronaći taj polinom?

■ **Primjer 1.11** *Bernoullijeva nejednakost* kaže da za svaki prirodan broj n i svaki pozitivan realan broj $x \geq -1$ vrijedi

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.10}$$

Učvrstimo bilo koju vrijednost od $x \geq -1$. Da bismo matematičkom indukcijom dokazali Bernoullijevu nejednakost, provjerimo najprije bazu indukcije:

(B) $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ doista vrijedi, jer ovdje vrijedi čak jednakost.

(P) Pretpostavimo da za neki učvršćeni prirodan broj n tvrdnja vrijedi, tj. $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
(K) Da bismo napravili korak indukcije, moramo iskoristiti induktivnu pretpostavku. U tu svrhu pišemo[5]

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\overset{(P)}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x,\end{aligned}$$

Time je korak indukcije proveden.

Rabeći načelo matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdnja (1.10) vrijedi za sve prirodne brojeve n. ■

Dodatak

Bernoullijeva nejednakost (1.10), gledana kao tvrdnja u ovisnosti o n (a s fiksiranim $x > 0$), zapravo kaže da *eksponencijalna funkcija* $n \mapsto (1+x)^n$ raste brže od linearne funkcije $n \mapsto 1 + nx$. Iz te tvrdnje vidimo da čak i za vrlo mali $x > 0$, broj $(1+x)^n$ može biti jako velik, pod uvjetom da je eksponent n dovoljno velik. Na primjer, $1.001^n > 200$ za dovoljno veliki n, na primjer za $n = 200\,000$, jer je $200\,000 \cdot 0.001 = 200$; vidi (1.10).[6]

Vježba 1.9 Već su stari Grci poznavali formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.11}$$

Možete ju lako dokazati sami matematičkom indukcijom.

[5] Primijetite da je $1 + x \geq 0$.

[6] Zapravo, dovoljna je i puno manja potencija n, jer rješavajući nejednakost $1.001^n > 200$ izravno, dobivamo da je ona ispunjena već sa $n = 5\,300$.

Dodatak

Spomenimo da su stari Grci znali i izravan, geometrijski dokaz za tu tvrdnju. Podsjetimo na vrlo kratak i domišljat algebarski dokaz, koji smo upoznali u srednjoj školi. Označimo $s_n := 1+2+\cdots+n$. Napišimo zatim istu sumu ovako $s_n = n+(n-1)+\cdots+1$. Zbrojimo obje jednakosti, tako da zbrajamo prve članove u svakoj jednakosti, zatim druge, itd. (ova se ideju zove *Gaussova dosjetka*; naime, za zbrajanje vrijedi zakon asocijativnosti, pa članove u sumi možemo po volji grupirati):

$$\begin{array}{ccccccccc} s_n & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n \\ s_n & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 1 \\ \hline 2s_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) \end{array}$$

Budući da u zadnjem redku na desnoj strani imamo ukupno n pribrojnika, od kojih svaki iznosi $n+1$, onda je $2s_n = n(n+1)$, tj. $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$, što je i trebalo dokazati. Ovakav je račun Carl F. Gauss proveo (za $n = 100$) kao dijete u svojoj školi, u dobi od samo 10 godina!

Moglo bi se pomisliti da je načelo matematičke indukcije moguće dobiti nekim rezoniranjem. Pokazuje se, međutim, da to načelo zapravo ulazi u samu bit skupa prirodnih brojeva. Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, zajedno s operacijom zbrajanja $+$, ima naime sljedeća osnovna svojstva:

(1) $1 \in \mathbb{N}$

(2) ako je $n \in \mathbb{N}$, onda je $n+1 \in \mathbb{N}$

(3) ako je $n+1 = m+1$, onda je $m = n$

(4) ne postoji prirodan broj n takav da je $1 = n+1$

(5) (*aksiom matematičke indukcije*) Neka je A podskup skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, takav da vrijedi (i) $1 \in A$, te (ii) za bilo koji prirodan broj n, iz $n \in A$ slijedi da je $n+1 \in A$. Onda je $A = \mathbb{N}$.

Pokazuje se da ovih pet svojstava jednoznačno određuje skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Ta se temeljna svojstva zovu *aksiomi* skupa prirodnih brojeva, ili *Peanovi aksiomi* (po talijanskom matematičaru *Giuseppe Peanu*, koji ih je uveo 1891., iako ih je još ranije, 1888., poznavao njemački matematičar *Wilhelm Dedekind*). Posljednji, peti aksiom prirodnih brojeva, zove se *aksiom* (ili *načelo*) *matematičke indukcije*.

Dodatak

Lako je razumjeti da je Peanov aksiom ekvivalentan sljedećem modificiranom načelu matematičke indukcije, u kojem je induktivna pretpostavka osjetno jača:

$(5)'$ (*modificirano načelo matematičke indukcije*) Neka je A podskup skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, takav da vrijedi (i) $1 \in A$, te (ii) iz $1,2,\dots,n \in A$ slijedi $n+1 \in A$. Onda je $A = \mathbb{N}$.

Drugim riječima, vidimo da u pretpostavci (P) općeg načela indukcije smijemo uzeti da neka tvrdnja vrijedi za vrijednosti $1,2,\dots,n$ (a ne samo za n), te zatim (s pomoću te puno jače pretpostavke) dokazivati da tvrdnja vrijedi i za vrijednost $n+1$. Ako je to ispunjeno (te ako (B) tvrdnja vrijedi za $n = 1$), onda je tvrdnja istinita za *sve* prirodne brojeve n.

U nekim okolnostima je modificirano načelo matematičke indukcije vrlo korisno. Evo jedan takav primjer. (U njemu se načelo indukcije rabi za skup nenegativnih cijelih brojeva, tj. za $\mathbb{N} \cup \{0\}$ umjesto za $\mathbb{N}$.)

■ **Primjer 1.12** Znameniti *Fibonaccijev niz* brojeva $(F_n)_{n\geq 0} = (F_0, F_1, F_2, \dots)$, definira se ovako: prva dva člana su $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, a daljnji se članovi računaju putem

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{za sve } n \geq 2, \tag{1.12}$$

tj., za $n \geq 2$ je svaki član Fibonaccijeva niza jednak zbroju prethodna dva člana. Na primjer, $F_2 = F_1 + F_0 = 1+0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$, $F_4 = F_3 + F_2 = 3$, itd.:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

Dokažimo da za sve nenegativne cijele brojeve n (tj. za $n \geq 0$) vrijedi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \tag{1.13}$$

gdje je $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61$ (tzv. *zlatni broj* ili *zlatni omjer*), a $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.61$. (Naputak. Tvrdnju (1.12) treba najprije provjeriti za $n = 0$ i $n = 1$, a zatim iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za brojeve $n-1$ i n dokazati da ona vrijedi i za $n+1$. Time će (1.13) biti dokazano s pomoću ovako modificiranog načela matematičke indukcije.)

Budući da je $|\beta| < 1$ (naime, $|\beta| \approx 0.61$), za velike prirodne brojeve n će vrijednost β^n biti zanemarivo mala, pa je $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n$ (s to manjom pogreškom što je n veći, jer je pogreška jednaka točno $\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n$). Kao što vidimo, Fibonaccijev niz $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}(1.6)^n$ raste eksponencijalnom brzinom. Također primijetimo da su α i β korijeni jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$ (provjerite!), pa vrijedi $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ i $\beta^2 - \beta - 1 = 0$, tj.

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad \beta^2 = \beta + 1. \tag{1.14}$$

Dokaz formule (1.13) provodimo modificiranom matematičkom indukcijom.

(B) Za $n = 0$ i $n = 1$ je $F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0 - \beta^0) = 0$ i $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = 1$.

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neka dva uzastopna indeksa $n-1$ i n, gdje je $n \geq 1$, tj. $F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$ i $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$.

(K) Treba dokazati da je $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$. Da bismo to vidjeli, krenimo sa $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha^n + \alpha^{n-1}) + (\beta^n + \beta^{n-1}))$. Induktivni korak bit će dokazan ako se uvjerimo da je $\alpha^n + \alpha^{n-1} = \alpha^{n+1}$ i $\beta^n + \beta^{n-1} = \beta^{n+1}$. Dijeljenjem ovih jednakosti s α^{n-1}, odnosno s β^{n-1}, dobivamo dvije njima ekvivalentne jednakosti $\alpha + 1 = \alpha^2$ i $\beta + 1 = \beta^2$. Ove su dvije jednakosti istinite, kao što smo već vidjeli u (1.14). Time je korak indukcije završen.

Tvrdnja (1.13) slijedi iz (modificiranog) načela matematičke indukcije. (Vidi $(5)'$ na str. 24.) ■

1.5 Cijeli brojevi

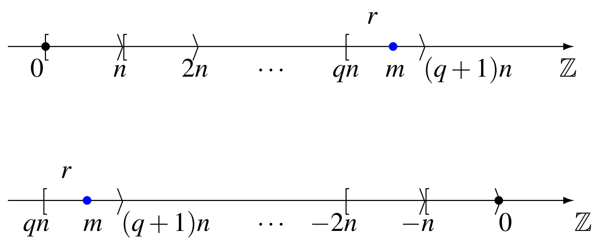
Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ definirane su uobičajene operacije zbrajanja i množenja. Oduzimanje cijelih brojeva a i b možemo definirati putem zbrajanja: $a - b := a + (-b)$, gdje je $-b := (-1)b$. Oduzimanjem bilo kojih cijelih brojeva dobiva se opet cijeli broj.

Temeljan pojam u skupu cijelih brojeva je djeljivost. Neka je n cijeli broj različit od nule. Kažemo da n *dijeli* cijeli broj m, ako postoji cijeli broj q takav da je $m = qn$. Broj n zovemo *djeliteljem* broja m. Također kažemo da je m *djeljiv* s n i pišemo $n \,|\, m$ (čitaj n dijeli m). Na primjer, $2 \,|\, 6$ (tj. broj 2 dijeli 6, ili 2 je djelitelj od 6), jer je $6 = 3 \cdot 2$.

Propozicija 2 — Stavak o dijeljenju cijelih brojeva. Neka je m bilo koji cijeli broj i n prirodan broj. Onda postoje jednoznačno određeni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n. \tag{1.15}$$

Broj q zovemo *nepotpunim kvocijentom*, a $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ *ostatkom* pri dijeljenju broja m s n. Vidi Sliku 1.11.



Slika 1.11: Dijeljenje cijelog broja m s prirodnim brojem n. Prikazan je najprije slučaj kad je $m \geq 0$ (i dakle $q \geq 0$), a zatim slučaj $m < 0$ (i dakle $q < 0$). Prvo treba naći najveći cijeli broj q takav da je $qn \leq m$, te je zatim ostatak $r = m - qn \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. U rastavu $m = qn + r$ su nepotpuni kvocijent q i ostatak $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ određeni jednoznačno. Vidi Propoziciju 2.

Dokaz. Cijeli broj m se sigurno nalazi u nekom od poluotvorenih intervala $[qn, (q+1)n\rangle$, gdje je q cijeli broj, jer ti intervali pokrivaju sve cijele brojeve (tj. unija svih intervala oblika $[qn, (q+1)n\rangle$ sadrži skup $\mathbb{Z}$). Budući da su svi intervali u toj uniji međusobno disjunktni (tj. praznog su presjeka), onda je cijeli broj q takav da je $m \in [qn, (q+1)n\rangle$, određen jednoznačno. Prema tome vrijedi $qn \leq m < (q+1)n$. Za broj $r := m - qn$ vrijedi $r \geq 0$, jer je $m \geq qn$. Također, $r < n$, jer je $r = m - qn < (q+1)n - qn = n$. ■

■ **Primjer 1.13** Pogledajmo dva jednostavna primjera.

(a) Za $m = 37$ i $n = 7$ je $37 = 5 \cdot 7 + 2$. Dakle, nepotpuni kovcijent je $q = 5$, a ostatak pri dijeljenju 37 sa 5 je $r = 2$.

(b) Za $m = -37$ je $-37 = -6 \cdot 7 + 5$, pa je $q = -6$, a ostatak pri dijeljenju broja -37 sa 7 iznosi $r = 5$. ■

Neka je n prirodan broj koji je ≥ 2. Za dva cijela broja a i b kažemo da su **kongruentni po modulu** n, ako je njihova razlika $a - b$ cjelobrojni višekratnik od n, tj. djeljiva s n, tj. $n \,|\, a - b$. U tom slučaju pišemo

$$a \equiv b \pmod{n}. \tag{1.16}$$

Na primjer, vrijedi $7 \equiv 19 \pmod{3}$, jer je razlika $7 - 19 = -12$ djeljiva s 3.

■ **Primjer 1.14** Vrlo lako je provjeriti da ako je $a \equiv b \pmod{n}$, onda brojevi a i b pri dijeljenju s n daju isti ostatak, a vrijedi i obratno.

Doista, ako je $a = q_1 n + r_1$ i $b = q_2 n + r_2$, onda je $a - b = (q_1 - q_2)n + (r_1 - r_2)$. Dakle, ako je $a - b$ djeljiv s n, onda je i $r_1 - r_2$ djeljiv s n, a budući da je $|r_1 - r_2| < n$, onda mora biti $r_1 = r_2$. Obratno, ako je $r_1 = r_2$, onda je $a - b = (q_1 - q_2)n$, pa je $a \equiv b \pmod{n}$. ■

Na primjer, brojevi 7 i 19 pri dijeljenju s 3 oba daju isti ostatak (ostatak je 1), pa je $7 \equiv 19 \pmod{3}$.

Najvažniji podskup sadržan u skupu prirodnih brojeva je skup prostih brojeva. Podsjetimo da je prirodan broj p *prost broj*, ako je ≥ 2, te ako su mu jedini djelitelji 1 i p.

Jedan od temeljnih rezultata o prirodnim brojevima je teorem o njihovu jednoznačnom rastavu na proste faktore, koji ovdje navodimo bez dokaza. Za prost broj p kažemo da je *prosti djelitelj* prirodnog broja $n \geq 2$, ako je n djeljiv s p.

Teorem 1.5.1 — Osnovni teorem aritmetike. Neka je n bilo koji prirodan broj strogo veći od jedan (tj. $n \geq 2$). Onda postoje jednoznačno određeni međusobno različiti prosti djelitelji $p_1, \ldots, p_k$ (njih ukupno k) broja n, te jednoznačno određeni prirodni brojevi $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, takvi da vrijedi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}. \tag{1.17}$$

Svaki djelitelj a prirodnog broja n ima oblik

$$a = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}, \tag{1.18}$$

pri čemu su $\beta_j \in \{0, 1, \ldots, \alpha_j\}$ za sve $j = 1, \ldots, k$.

Prikaz (1.17) zove se *rastavom prirodnog broja n* na proste djelitelje, ili kraće *faktorizacijom* broja n. Broj α_j u rastavu (1.17) broja n na proste djelitelje zove se *kratnošću* djelitelja p_j.

Obično su u tom rastavu prosti djelitelji $p_1, \ldots, p_k$ poredani po veličini, tj. tako da je $p_1 < \cdots < p_k$. Uz taj dodatni dogovor je onda rastav prirodnog broja n na proste faktore u (1.17) određen potpuno jednoznačno.

■ **Primjer 1.15** Broj 5 (kao i bilo koji drugi prost broj) ima najjednostavniju moguću faktorizaciju: $5 = 5^1$ (zato se i zove prostim brojem). Za broj šest vrijedi $6 = 2^1 3^1$, zatim $8 = 2^3$, $12 = 4 \cdot 3 = 2^2 3^1$, a do rastava broja 112 dolazimo u nekoliko jednostavnih koraka: $112 = 2 \cdot 56 = 2 \cdot 7 \cdot 8 = 2 \cdot 7 \cdot 2^3 = 2^4 \cdot 7^1$. ■

Neka su a i b bilo koji prirodni brojevi. Za prirodan broj d kažemo da je *zajednički djelitelj* prirodnih brojeva a i b ako su oba ta broja djeljiva s d. **Najveći zajednički djelitelj** brojeva a i b označujemo sa $\mathrm{Nzd}(a,b)$.[7] **Najmanjim zajedničkim višekratnikom** prirodnih brojeva a i b zovemo najmanji prirodan broj d koji je djeljiv i s a i s b, te ga označujemo sa $\mathrm{nzv}(a,b)$.[8]

Najveći zajednički djelitelj brojeva 12 i 8 je broj 4. Najmanji zajednički višekratnik tih brojeva je 24.

Ako prirodni brojevi a i b imaju proste faktore $p_1, \ldots, p_k$, onda prema osnovnom teoremu aritmetike vrijedi $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ i $b = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$ (neke od potencija mogu biti nula). Očevidno je najveći zajednički djelitelj brojeva a i b jednak

$$\mathrm{Nzd}(a,b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}}, \tag{1.19}$$

dok je njihov najmanji zajednički višekratnik jednak

$$\mathrm{nzv}(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}. \tag{1.20}$$

■ **Primjer 1.16** Najveći zajednički djelitelj brojeva $12 = 2^2 3^1$ i $8 = 2^3 3^0$ je broj $2^2 3^0 = 4$. Najmanji zajednički višekratnik tih brojeva je $2^3 3^1 = 24$. ■

Umnožak najvećeg zajedničkog djelitelja i najmanjeg zajedničkog višekratnika prirodnih brojeva a i b je jednak umnošku ab:

$$\mathrm{Nzd}(a,b) \cdot \mathrm{nzv}(a,b) = ab. \tag{1.21}$$

[7] Najveći zajednički djelitelj se u hrvatskoj matematičkoj literaturi zove još i *najvećom zajedničkom mjerom* prirodnih brojeva a i b. U uporabi je vrlo kratka oznaka (a,b).

[8] Često je za najmanji zajednički višekratnik brojeva a i b u uporabi i vrlo kratka oznaka $[a,b]$ (koja se, nažalost, podudara s oznakom za zatvoren interval na realnom pravcu). Najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik mogu se definirati i za bilo koji konačan broj prirodnih brojeva.

što slijedi odmah iz gornje dvije jednakosti (1.19) i (1.20). Prema tome, ako znamo najveći zajednički djelitelj, onda odmah znamo i najmanji zajednički višekratnik brojeva a i b (i obratno).

Nalaženje najvećeg zajedničkog djelitelja prirodnih brojeva a i b putem rastava na proste faktore nije najefikasnije. Puno je efikasniji *Euklidov algoritam* (koji je zapravo i optimalan), poznat još iz 4. st. prije Krista, a možda i ranije. On će biti obrađen u kolegiju *Diskretna matematika*. Vidi na primjer [Duj2, str. 4].

Za prirodne brojeve a i b kažemo da su **relativno prosti**, ako je razlomak a/b neskrativ, ili što je isto, a i b nemaju netrivijalne zajedničke djelitelje (tj. njihov najveći zajednički djelitelj jednak je 1). Za relativno proste prirodne brojeve a i b je njihov najmanji zajednički višekratnik jednak ab, što slijedi odmah iz (1.21).

Vježba 1.10 Provjerite da su brojevi 12 i 25 su relativno prosti. Nađite sve prirodne brojeve koji su manji od 20 i relativno prosti s njime.

1.6 Racionalni brojevi

Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ definira se kao skup svih razlomaka $\frac{m}{n}$, gdje su m i n cijeli brojevi takvi da je nazivnik $n \neq 0$. Za razlomke se koriste i još neke druge oznake: $\frac{m}{n} = m/n = m \cdot n^{-1}$ (a rjeđe $m : n$). Na skupu racionalnih brojeva imamo definirane operacije zbrajanja i množenja. Za bilo koji racionalan broj $q := m/n$ koji je različit od 0, dobro je definiran njegov inverz $q^{-1} := n/m$, koji je također racionalan broj. Taj broj zapisujemo i kao $q^{-1} = 1/q = \frac{1}{q}$. Za bilo koja četiri racionalna broja a, b, c i d, takva da su b i d različiti od nula, vrijedi pravilo zbrajanja razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}. \tag{1.22}$$

Svaki racionalan broj u svojem decimalnom prikazu ima *periodički zapis*. (Pritom na primjer cijeli broj 5 možemo pisati i kao $4.9999\ldots$, a broj 3.18 kao $3.179999\ldots$.) I obratno, svaki decimalan broj s *periodičkim decimalnim prikazom* je racionalan.

■ **Primjer 1.17** Na primjer, za broj $x = 2.939393\ldots$ (gdje se brojke 93 periodički ponavljaju) je

$$100x - x = 293.93939393\ldots - 2.939393\ldots = 291\,,$$

tj. $99x = 291$, pa je $x = 291/99$ racionalan broj.

Ako je $y = 2.13215215215\ldots$ (tj. brojke 215 se periodički ponavljaju iza brojaka 13), onda je

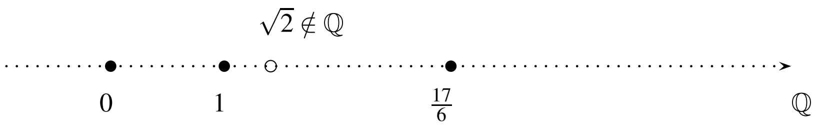
$$100\,000y - 100y = 213\,215.215215\ldots - 213.215215215\ldots = 215\,002,$$

tj. $99\,900y = 215\,002$, pa je $y = 215\,002/99\,900$ racionalan broj. Kao što vidimo, broj y množimo sa 100 da bismo se dočepali periodičkog dijela u njegovu decimalnu prikazu, te zatim taj broj množimo još sa tisuću, te od drugog oduzimamo prvi, čime se periodički dijelovi u potpunosti pokrate. ■

Ako realan broj x nema periodički prikaz nekon nekog decimalnog mjesta, onda on nije racionalan, i obratno. Na primjer, budući da je $\sqrt{2}$ iracionalan, onda on u svojem decimalnom prikazu $1.41\ldots$ nema periodičkog ponavljanja.

Između bilo koja dva zadana cijela broja postoji samo konačno mnogo cijelih brojeva. Nasuprot tome, između bilo koja dva racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Kažemo da je skup racionalnih brojeva *gust* u sebi.

Doista, uzmemo li bilo koja dva različita racionalna broja a i b, onda je njihova aritmetička sredina $\frac{a+b}{2}$ također racionalan broj, koji je na sredini između a i b.

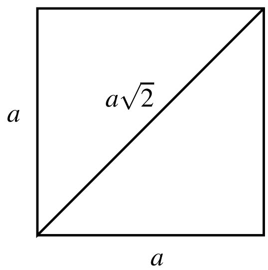


Slika 1.12: Pravac racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je posvuda 'šupljikav'. Na primjer, na mjestu broja $\sqrt{2}$ je 'rupa', jer je taj broj iracionalan; vidi Lemu 3. Primijetite također da je $\sqrt{2} \approx 1.41$, a broj $1.41 = \frac{141}{100}$ je racionalan broj (racionalna aproksimacija iracionalnog broja $\sqrt{2}$).

Skup racionalnih brojeva, iako posvuda gust u sebi, je ujedno i 'posvuda šupljikav', tj. između svaka dva racionalna broj postoji 'rupa' (tj. iracionalan broj). Vidi Sliku 1.12.

Doista, vidjeli smo u Lemi 3 da realan broj $\sqrt{2}$ (definiran kao pozitivno rješenje jednadžbe $x^2 = 2$) nije racionalan. Odatle slijedi da je umnožak $q\sqrt{2}$ iracionalan za svaki racionalan broj $q \neq 0$ (vidi Lemu 4), pa dobivamo jedan skup iracionalnih brojeva $\{q\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ koji je *gust* u skupu realnih brojeva. (Na primjer, broj $\frac{1}{n}\sqrt{2}$ je po volji malen iracionalan broj, ako uzmemo prirodan broj n dovoljno velik.) Znači da svaki otvoren interval u skupu realnih brojeva sadrži ne samo beskonačno mnogo racionalnih brojeva, nego i beskonačno iracionalnih. Drugim riječima, i skup iracionalnih brojeva je gust u $\mathbb{R}$.

Svi racionalni brojevi dobivaju se kao nultočke polinoma prvog stupnja $P(x) = nx - m$ s cjelobrojnim koeficijentima m i n, gdje je vodeći koeficijent $n \neq 0$. Nultočka je racionalan broj $x = m/n$.



Slika 1.13: Dijagonala kvadrata nije sumjerljiva s osnovicom, tj. omjer duljina dijagonale i osnovice (a taj omjer iznosi $\sqrt{2}$) nije racionalan broj; vidi Lemu 3.

Crtica

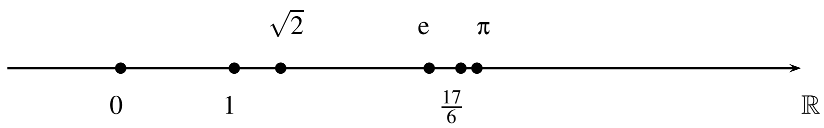
Još su stari Grci uveli pojam sumjerljivosti dužina. Za dvije dužine duljina a i b kaže se da su *sumjerljive*, ako je omjer a/b racionalan broj. To je isto što i reći da postoji neka manja zajednička jedinica duljine ℓ, tako da su a i b cjelobrojni višekratnici od ℓ, tj. $a = m\ell$ i $b = n\ell$, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$. Dakle, $a/b = (m\ell)/(n\ell) = m/n \in \mathbb{Q}$. I obratno.

Stari Grci su vjerovali da su svake dvije dužine sumjerljive. Međutim, Pitagorin učenik Hippasus je još u 4. st. prije Krista otkrio da postoje nesumjerljive dužine. Točnije, on je otkrio da su dijagonala kvadrata i njegova osnovica nesumjerljive dužine; vidi Sliku 1.13. Taj omjer iznosi točno $\sqrt{2}$, a kao što smo vidjeli u Lemi 3, taj je broj iracionalan. Ti su brojevi doveli do otkrića skupa realnih brojeva, koji predstavlja proširenje skupa racionalnih brojeva.

1.7 Realni brojevi

Skup realnih brojeva dobiva se 'popunjavanjem' pravca racionalnih brojeva, tako da pravac realnih brojeva nema (za razliku od pravca racionalnih brojeva) niti jedne šupljine. Zato skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ i prikazujemo s pomoću 'punog' pravca, koji se zove *linearni kontinuum*; vidi Sliku 1.14.

U njemu osim osnovnih binarnih *operacija* zbrajanja i množenja (te iz njih izvedenih operacija oduzimanja i dijeljenja), imamo još i binarnu *relaciju* $\leq$, kojom uspoređujemo realne brojeve na poznati način. U skupu realnih brojeva imamo i relaciju $\leq$ kojom uspoređujemo njene elemente. Za svaka dva realna broja x i y je ili $x \leq y$ ili $y \leq x$). Ako je $x \leq y$ i $x \neq y$, onda pišemo $x < y$.



Slika 1.14: Pravac realnih brojeva $\mathbb{R}$ (za razliku od pravca racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$; vidi Sliku 1.12) nema nikakvih 'šupljina', pa ga iz tog razloga zovemo *kontinuumom* (misli se na *neprekinuti* pravac, tj. na *potpun* pravac). U tom skupu svi racionalni brojevi čine *gust* podskup. Skup iracionalnih brojeva je također gust u $\mathbb{R}$.

1.7.1 Osnovno o realnim brojevima

Za neprazan podskup A sadržan u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ kažemo da je *odozgor omeđen* ako postoji realan broj M takav da je $x \leq M$ za sve $x \in A$. Jedno od temeljnih svojstava skupa realnih brojeva je da za svaki neprazan i odozgor omeđen skup A postoji realan broj koji predstavlja *najmanju* gornju među skupa A. Ta najmanja gornja međa skupa A zove se **supremum** skupa A, u oznaci $\sup A$. Ako je pritom broj $\sup A$ sadržan u A, onda se taj broj zove **maksimum skupa** A, u oznaci $\max A$.

Za neprazan podskup A sadržan u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ kažemo da je *odozdol omeđen* ako postoji realan broj m takav da je $m \leq x$ za sve $x \in A$. Najveća dolnja međa odozdol omeđenog skupa A zove se **infimum skupa** A, u oznaci $\inf A$. Ako je broj $\inf A$ sadržan u odozdol omeđenom skupu A, onda se taj broj zove **minimum skupa** A, u oznaci $\min A$.

Za neprazan podskup A sadržan u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ kažemo da je *omeđen* ako je omeđen i odozgor i odozdol, tj. postoje realni brojevi m i M takvi da je $m \leq x \leq M$ za sve $x \in A$.

■ **Primjer 1.18** Vrijedi da je $\inf[2,3\rangle = 2$, $\sup[2,3\rangle = 3$, $\min[2,3\rangle = 3$, dok $\max[2,3\rangle$ ne postoji, jer broj 3, iako jest supremum, nije sadržan u intervalu $[2,3\rangle$. ■

Ako je skup A neomeđen odozgor, onda pišemo $\sup A = +\infty$. Ako je A neomeđen odozdol, pišemo $\inf A = -\infty$.

Jedno od najvažnijih svojstava skupa realnih brojeva je da ako je neki njegov neprazan podskup A omeđen odozgor, onda je $\sup A$ realan broj. (Slično tome, ako je A omeđen odozdol, onda je $\inf A$ realan broj.) Ova vlastitost skupa realnih brojeva se naziva **potpunošću** skupa realnih brojeva. Intuitivno, potpunost skupa realnih brojeva znači da realni pravac nema rupa, tj. da se radi o **kontinuumu**.

Skup racionalnih brojeva nije potpun. Ako na primjer u skupu racionalnih brojeva definiramo skup $A := \mathbb{Q} \cap [0,\sqrt{2}\rangle$ (gdje $[0,\sqrt{2}\rangle$ shvaćamo kao interval u $\mathbb{R}$) onda taj skup nema supremum u skupu racionalnih brojeva, jer $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. S druge strane, u skupu realnih brojeva supremum skupa A postoji i jednak je $\sqrt{2}$.

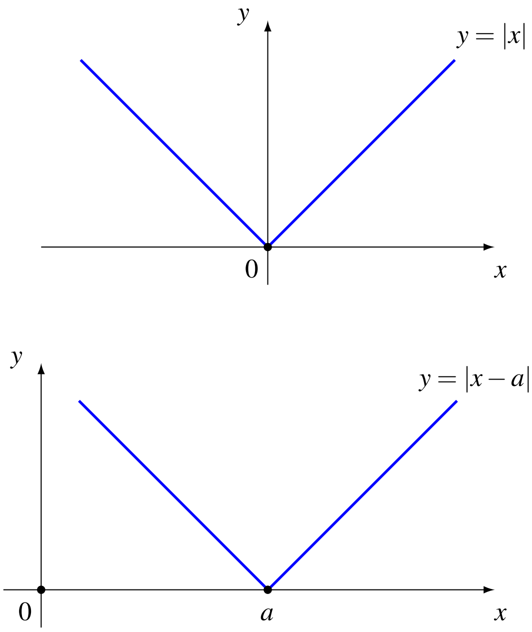
Dodatak

Nije teško pokazati da je potpunost skupa realnih brojeva ekvivalentna s **Cantorovim svojstvom**: ako je u $\mathbb{R}$ zadan bilo koji padajući slijed beskonačno mnogo omeđenih i zatvorenih intervala $[a_n, b_n]$, gdje je n prirodan broj (tj., za svaki n je $[a_n,b_n] \supseteq [a_{n+1},b_{n+1}]$), onda je presjek

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

svih tih intervala neprazan.

Ponekad je praktično uvesti pojam *proširenog realnog pravca*, $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Taj se skup označuje i ovako: $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, i shvaća se kao zatvoren interval.



Slika 1.15: Grafovi funkcija $y = |x|$ i $y = |x-a|$. Broj $|x-a|$ predstavlja *udaljenost* od a do x na realnom pravcu.

Apsolutna vrijednost realnog broja x, u oznaci $|x|$, definira se kao broj x ako je on nenegativan, a $-x$ ako je negativan. Drugim riječima,

$$|x| := \begin{cases} x & \text{za } x \geq 0 \\ -x & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Primijetite da je $|x| = \max\{x, -x\}$, tj. $|x|$ je najveći od brojeva x i $-x$. Vidi Sliku 1.15. Za svaki nenegativan realan broj r (tj. $r \geq 0$), broj $\sqrt{r}$ definiramo kao onaj *nenegativan* realan broj t za koji vrijedi $t^2 = r$. Na primjer, za svaki realan broj x vrijedi $\sqrt{x^2} = |x|$.

Na primjer, vrijedi $|3| = 3$, $|-\pi| = \pi$; $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ ili $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Za zadani broj x na realnom pravcu, *vrijednost* $|x|$ *jednaka je udaljenosti broja* x *od ishodišta.* Općenitije, za dva zadana realna broja x i a, njihova međusobna udaljenost jednaka je točno $|x-a|$.

Na primjer, međusobna udaljenost brojeva 3 i -4 jednaka je $|3-(-4)| = |7| = 7$.

Najednakost $|x| < \varepsilon$, gdje je broj ε zadan i pozitivan, je ekvivalentna s $-\varepsilon < x < \varepsilon$, tj. njome je opisan otvoreni interval $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$.

■ **Primjer 1.19** Nejednakost $|x-a| < \varepsilon$, gdje su brojevi $a \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ zadani unaprijed, ekvivalentna je s $-\varepsilon < x-a < \varepsilon$, tj. sa $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$, pa je s njome opisan otvoren interval $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon \rangle$:

$$|x-a| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon \rangle. \tag{1.23}$$

Vrlo je lako provjeriti da za realne brojeve vrijedi *nejednakost trokuta*: za bilo koja dva realna broja x i y vrijedi $|x+y| \le |x|+|y|$. Naziv 'nejednakost trokuta' bit će jasniji u kontekstu kompleksnih brojeva; vidi (**??**). ■

Dolnji cijeli dio[9] zadanog realnog broja x označujemo s $\lfloor x \rfloor$. To je najveći cijeli broj koji je $\le x$:

$$\lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}. \tag{1.24}$$

Na primjer, vrijedi $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, a $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$. Dolnji cijeli dio od x se često pojavljuje prigodom prebrojavanja elemenata raznih skupova. Vidi Primjer **??** na str. **??**.

Ako dijelimo cijeli broj m s prirodnim brojem n, onda prema Propoziciji 2 postoje jednoznačno određeni cijeli broj q i ostatak $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ pri dijeljenju m s n, takvi da je $m = nq + r$. Budući da je $\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$, a $\frac{r}{n} \in [0, 1\rangle$, zaključujemo da je

$$q = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor, \qquad r = m - n \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor.$$

Za bilo koji realan broj $x \ne 1$ i prirodan broj n možemo lako zbrojiti potencije broja x od nulte do n-te, ili točnije, brojeve 1, x, x^2, $\dots$, x^n (kažemo da ti brojevi čine konačan geometrijski niz):

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{1.25}$$

Ova formula je vrlo korisna u matematičkoj analizi.

Dokaz formule (1.25) je vrlo jednostavan. Označimo li $s_n := 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, onda je $s_n - xs_n = (1 + x + x^2 + \dots + x^n) - (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$, odakle slijedi da je $(1-x)s_n = 1 - x^{n+1}$, tj. $s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, čime je formula (1.25) dokazana. Dokaz se može provesti i matematičkom indukcijom po n, ali je navedeni dokaz puno kraći i prirodniji.

Dodatak

Kao što smo vidjeli, skup prirodnih brojeva opisan je s pomoću pet jednostavnih aksioma, koje zovemo Peanovim aksiomima; vidi str. 24. Skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$ (na kojem imamo zadane kao osnovne operacije zbrajanje i množenje, te relaciju poretka $\le$) moguće je opisati s pomoću petnaest aksioma. Posljednji, petnaesti aksiom je upravo aksiom potpunosti, spomenut na str. 30. Prvih četrnaest aksioma definira skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, a može ih bez ikakvih problema razumjeti svaki srednjoškolac. Zahvaljujući dodatnom, petnaestom aksiomu, moguće je (popunjavanjem 'rupa' u skupu racionalnih brojeva) strogo definirati iracionalne brojeve, kao što su $\sqrt{2}$, π, e (a kojih ima 'bitno više' nego racionalnih brojeva). Ovdje ne ulazimo u pojedinosti.

1.7.2 Algebarski i transcendentni brojevi

Ovaj se odjeljak, koji daje dodatne informacije o realnim brojevima, prilikom prvog čitanja može preskočiti.

Realan broj $x = \sqrt{2}$ je nultočka kvadratnog polinoma $P(x) = x^2 - 2$ s cjelobrojnim koeficijentima, a broj $x = \sqrt{3}$ je nultočka polinoma $P(x) = x^2 - 3$, također s cjelobrojnim koeficijentima.

Realni brojevi koji se mogu dobiti kao nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima zovu se **algebarski brojevi**. Kao što smo vidjeli, svaki racionalan broj $x = m/n$ (gdje su m i n cijeli

[9] Za $\lfloor x \rfloor$ su u uporabi još i nazivi 'najveći cijeli dio' ili 'pod' od x (na engleskom 'floor of x). Definira se i *gornji cijeli dio* ili 'strop' od x, kao najmanji cijeli broj koji je $\ge x$. Očevidno je $\lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil$. Na primjer, $\lceil 3.14 \rceil = 4$, $\lceil -3.14 \rceil = -3$.

brojevi i $n \neq 0$) je algebarski broj, jer je on nultočka polinoma $P(x) = nx - m$. Brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ su algebarski brojevi, koji nisu racionalni.

■ **Primjer 1.20** Broj $\sqrt[3]{2}$ je također algebarski, jer je nultočka polinoma $P(x) = x^3 - 2$. Provjerite je li broj $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}+3}$ algebarski.

Rješenje. Vrijedi $x^3 = \sqrt{2}+3$, tj. $x^3 - 3 = \sqrt{2}$, pa je $(x^3-3)^2 = 2$. Prema tome, broj $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}+3}$ je nultočka polinoma $P(x) = (x^3-3)^2 - 2$, koji je šestog stupnja, i to s cjelobrojim koeficijentima: $P(x) = x^6 - 6x^3 + 7$. ■

Iz prethodnog primjera je jasno da je svaki realan broj, prikazan s pomoću konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korijenovanja raconalnih brojeva – algebarski broj.

Vježba 1.11 Na primjer, broj $\sqrt[5]{\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{7}{4}+\sqrt{11}}}$ je algebarski (jer je nultočka polinoma stupnja $5\cdot 3\cdot 2 = 30$ s cjelobrojnim koeficijentima, kojega možete lako pronaći).

Moglo bi se pomisliti da je svaki realan broj algebarski (tj., prikaziv kao nultočka nekog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima). Pokazalo se da nije tako, tj. da postoje realni brojevi koji nisu algebarski.

Realni brojevi koji nisu algebarski (tj. koji se ne mogu dobiti kao nultočke polinoma s *cjeloborojnim* koeficijentima) zovu se **transcendentni brojevi**.

Neki od najpoznatijih transcendentnih brojeva su brojevi π i e. Dokazi transcendentnosti ovih brojeva su veoma teški.

Budući da je broj π transcendentan, onda je jasno da je i svaki njegov netrivijalni racionalan višekratnik (tj. broj oblika $q\pi$, gdje je q bilo koji racionalan broj različit od nula), također transcendentan. Na taj način vidimo da je skup svih transcendentnih brojeva gust na realnom pravcu.

Dodatak

Dokazom transcendentnosti broja π riješen je i klasičan problem *kvadrature kruga*, poznat još iz vremena Antike. Problem je sljedeći: ako imamo krug zadanog polumjera r, može li se samo s pomoću ravnala i šestara konstruirati kvadrat iste površine kao i taj krug? Budući da mora biti $r^2\pi = a^2$, gdje je a duljina stranice kvadrata, problem se svodi na konstrukciju (ravnalom i šestarom) dužine čija duljina je $a = r\sqrt{\pi}$, tj. na konstrukciju dužine čija duljina iznosi $\sqrt{\pi}$. Kad bi se taj broj mogao konstruirati ravnalom i šestarom, pokazuje se da bi onda broj $\sqrt{\pi}$ morao biti algebarski, dakle i njegov kvadrat, tj. broj π. Međutim, godine 1882. je njemački matematičar *Ferdinand von Lindemann* dokazao da je broj π nije algebarski, tj. da je transcendentan, čime je konačno (nakon više od dvije tisuća godina) dokazano da kvadratura kruga nije moguća.

Jasno je da je svaki transcendentan broj iracionalan, jer kad bi bio racionalan, bio bi nultočka polinoma $P(x) = nx - m$ s cjelobrojnim koeficijentima m i n, gdje je $n \neq 0$.

Broj 3.14 je, naravno, racionalan broj, jer ga možemo napisati kao kvocijent cijelih brojeva: $\frac{314}{100}$. On predstavlja racionalnu *aproksimaciju* (tj. približnu vrijednost) broja π, koji je iracionalan (i štoviše, čak transcendentan broj).

Budući da (za sada) imamo navedena u bitnome samo dva primjera transcendentnih brojeva (π i e), moglo bi se pomisliti da su takvi brojevi velika rijetkost. Međutim, istina je upravo suprotno. Može se pokazati da ako na slučajan način biramo neki realan broj, onda je 'skoro sigurno' da će taj broj biti transcendentan! (Pojam 'skoro sigurno' moguće je strogo definirati, što će i biti učinjeno u kolegiju Teorija vjerojatnosti.) Posebno, algebarski su brojevi (a time i racionalni) u skupu realnih brojeva 'velika rijetkost', iako su oba gusti u $\mathbb{R}$!

Dodatak

Pokazuje se da vrijedi sljedeći rezultat, koji su 1934. nezavisno otkrili Rus *Aleksandar O. Gel'fond* i Nijemac *Theodor Schneider*: ako je a algebarski broj različit od 0 i 1, te b iracionalan broj, onda je a^b transcendentan.

Na primjer, broj $2^{\sqrt{2}}$ je transcendentan.

Čitatelj je vjerojatno već primijetio da postoje polinomi $P(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima, koji nemaju niti jedan korijen u skupu realnih brojeva. Takav je na primjer kvadratni polinom $P(x) = x^2 + 1$. Pokušaj da i takvi polinomi imaju rješenja u nekom 'širem brojevnom sustavu', doveli su do otkrića imaginarne jedinice i kompleksnih brojeva. Unatoč početnoj sumnjičavosti u njihovu opravdanost, kompleksni su se brojevi pokazali iznimno važnim u raznim primjenama. Oni će biti predmet našeg zanimanja u sljedećem poglavlju.

1.8 Zadatci za vježbu

1.8.1 Pitanja za ponavljanje i produbljivanje gradiva

Zadatak 1.1 Koliki je kardinalni broj

(a) skupa $\emptyset$;
(b) skupa $\{\emptyset\}$;
(c) skupa $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
(d) skupa $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 3x + 4\}$;
(e) skupa $\{x, y \in \mathbb{Z} : |x| + |y| < 3\}$?

Zadatak 1.2 Neka su A i B dva podskupa univerzalnog skupa U i neka je zadano komplementiranje s obzirom na U. Ako je $\overline{A} = \overline{B}$, je li onda $A = B$?

Zadatak 1.3 U čemu je razlika između pojma suda i pojma predikata?

Zadatak 1.4 Zadan je predikat $P(x, y, z)$ s tri varijable. Koliko varijabla ima (a) predikat $\forall x\, P(x, y, z)$; (b) predikat $\forall x\, \exists y\, P(x, y, z)$; (c) predikat $\forall z\, \exists x\, \forall y\, P(x, y, z)$?

Zadatak 1.5 Objasnite obrat po kontrapoziciji u algebri sudova. Primijenite obrat po kontrapoziciji na ovu implikaciju: *Ako su m i n neparni prirodni brojevi, onda je mn također neparan*. Je li ta implikacija istinita?

Zadatak 1.6 Objasnite načelo matematičke indukcije. Ilustrirajte ga na primjeru formule za zbroj prvih n prirodnih brojeva; vidi (1.11) na str. 23.

Zadatak 1.7 Opisati teorem o dijeljenju cijelog broja s prirodnim brojem. Što je to ostatak kod dijeljenja, i koje vrijednosti ostatak može poporimiti? Ilustrirajte na dijeljenju (a) broja 29 sa 5; (a) broja -29 sa 5.

Zadatak 1.8 Što je to prost broj? Ispišite sve proste brojeve do broja 40. *Naputak:* moguće je poslužiti se *Eratostenovim sitom*, nazvanom po znamenitom Grčkom matematičaru i astronomu rođenom u 3. st. prije Krista. Zaokružimo broj dva (koji je prost broj), i zatim prekrižimo sve njegove višekratnike 4, 6, 8 itd. (koji su složeni brojevi). Sljedeći neprekriženi broj je 3, koji zaokružimo (to je prost broj), pa križamo sve njegove daljnje višekratnike (neki su već prekriženi), itd. Na taj način, križanjem višekratnika (tj. složenih brojeva), možemo 'prosijati' sve proste brojeve ne samo do broja 40, nego i do bilo kojeg unaprijed zadanog broja.

Zadatak 1.9 Opisati Osnovni teorem aritmetike. Rastavite broj $n = 132$ na proste faktore. Koje su kratnosti njegovi prosti faktori?

Zadatak 1.10 Objasniti dokaz neke matematičke tvrdnje kontradikcijom (protuslovljem). Ilustrirajte ga na primjeru ove tvrdnje: *skup svih prostih brojeva je beskonačan* (Euklidov teorem).

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, da je skup svih prostih brojeva konačan, na primjer $p_1,\dots,p_k$. Onda prirodan broj $p_1\dots p_k+1$ nije djeljiv niti s kojim od brojeva $p_1,\dots,p_k$ (jer pri dijeljenju s bilo kojim p_j daje ostatak 1). Međutim, prema Osnovnom teoremu aritmetike (vidi Teorem 1.5.1 na str. 27), broj $p_1\dots p_k+1$ se može napisati kao umnožak prostih brojeva $q_1\dots q_l$. Niti jedan od prostih brojeva q_j nije sadržan u skupu $\{p_1,\dots,p_k\}$, što je kontradikcija s pretpostavkom da skup $\{p_1,\dots,p_k\}$ čini sve proste brojeve. Prema tome, skup svih prostih brojeva je beskonačan.

Zadatak 1.11 Definirati najveći zajednički djelitelj i najveći zajednički višekratnik prirodnih brojeva. Koja je veza među njima? Odrediti najveći zajednički djelitelj brojeva 132 i 166.

Zadatak 1.12 Definirati dolnji cijeli dio realnog broja x. Odrediti dolnji cijeli dio od 2.4 i od -2.4.

Zadatak 1.13 Što su algebarski brojevi? Je li broj $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ algebarski? Objasniti zašto.

1.8.2 Kratka pitanja

Zadatak 1.14 Je li umnožak dvaju prostih brojeva opet prost broj? Je li zbroj dvaju prostih brojeva opet prost broj?

Zadatak 1.15 Kolika je udaljenost među realnim brojevima -2.6 i -7.3?

Zadatak 1.16 Je li dolnji cijeli dio od -5.001 jednak -5?

Zadatak 1.17 Je li broj $\sum_{k=1}^{10} 3^{-k}$ racionalan? Prikažite ga u obliku kvocjenta dvaju prirodnih brojeva. (Naputak. Upotrijebite formulu (1.25) na str. 32 za zbroj konačnog geometrijskog niza, sa $x=1/3$.)

Zadatak 1.18 Riješiti nejednakost $|x-5|<0.001$, gdje je x realan broj.

Zadatak 1.19 Neka je A neprazan i omeđen skup u $\mathbb{R}$. Ako postoji infimum skupa A, postoji li onda i njegov minimum? Ako postoji maksimum skupa A, postoji li onda njegov supremum?

Zadatak 1.20 Zadan je skup $A=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$. Je li taj skup konačan ili beskonačan? Je li taj skup omeđen? Odredite infimum i supremum skupa A. Postoj li minimum skupa A? Postoji li maksimum tog skupa?

1.8.3 Matematička logika

Zadatak 1.21 Ispitajte istinitost sljedećih sudova:

(a) $A\equiv(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})(y>x)$;
(b) $B\equiv(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})(y>x)$.

Zadatak 1.22 Ispitajte istinitost sljedećih sudova:
(a) $A\equiv(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})(x^2=y^2\Rightarrow x=y)$;
(b) $B\equiv(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})(x^2=y^2\Rightarrow |x|=|y|)$;
(c) $C\equiv(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})(x^3=y^3\Rightarrow x=y)$;
(d) $D\equiv(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})(x=y\Rightarrow x^n=y^n)$;
(e) $E\equiv(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{Z})(x=y\Rightarrow x^n=y^n)$;
(f) $F\equiv(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})(x=y\Rightarrow x^n=y^n)$.

Zadatak 1.23 Ispitajte istinitost sudova A, B i C:

$$A \equiv (\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + ax = b);$$

$$B \equiv (\forall a \in \mathbb{Z})(\exists b \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + ax = b);$$

$$C \equiv (\exists a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + ax = b).$$

Obrazložite odgovore.

Zadatak 1.24 Nađite primjer dvomjesnog predikata $P(x,y)$ takvog da sudovi $\forall x \exists y P(x,y)$ i $\exists y \forall y P(x,y)$ imaju različite istinitostne vrijednosti.

1.8.4 Matematička indukcija

Zadatak 1.25 Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Zadatak 1.26 Dokažite da je
(a) $2^n > n^2$ za sve $n \geq 5$;
(b) $n! > 2^n$ za sve $n \geq 4$

Zadatak 1.27 Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}. \tag{1.26}$$

Zadatak 1.28 Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva uvijek djeljiv s 9.

Zadatak 1.29 Matematičkom indukcijom dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \tag{1.27}$$

1.8.5 Rješenja grupe zadataka koji počinju na str. 35

1.21 (a) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ možemo odabrati na primjer $y := x+1$, pa je $y > x$. Dakle, sud A je istinit.
(b) Sud B nije istinit, jer ne postoji realan broj y koji bi bio veći od *svih* realnih brojeva x. Drugi način je da negiramo taj sud: $\neg B \equiv (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(y \leq x)$. Sud $\neg B$ je istinit, jer je za svaki $y \in \mathbb{R}$ možemo odabrati na primjer $x := y$. Prema tome, sud $\neg B$ je istinit.

1.22 (a) Sud A je lažan, jer na primjer za $x = 1$ i $y = -1$ vrijedi $x^2 = y^2$, ali je $x \neq y$. Naime, implikacija $1^2 = (-1)^2 \Rightarrow 1 = -1$ je lažna.
(b) Sud B je istinit, jer za realne brojeve iz $x^2 = y^2$ slijedi $x = \pm y$, tj. $|x| = |y|$. (Drugi način: vrijedi $\sqrt{x^2} = |x|$.)
(c) Sud C je istinit, jer je $(x^3)^{1/3} = x$ za svaki realan broj x. Dakle iz $x^3 = y^3$ vađenjem trećih korijena lijevo i desno dobivamo $x = y$. (P)
(d) Sud D je istinit: potenciranjem jednakosti $x = y$ s bilo kojim prirodnim brojem n dobivamo $x^n = y^n$.
(e). Uzmemo li $x = y = 0$ i $n = -1$, onda je $0 = 0$, ali jednakost $0^{-1} = 0^{-1}$ nema smisla, jer 0^{-1} nije dobro definiran realan broj. Stoga niti sud E nije dobro definiran, pa zadatak nema smisla.
(f) Sud F je istinit.

1.23 Za sud A, odgovarajuća kvadratna jednadžba $x^2+ax-b=0$ ima diskriminantu $D:=a^2+4b$. Ona može biti negativna, na primjer za 0 i $b=-1$, pa u tom slučaju nema kvadratna jednadžba nema realnih rješenja. Prema tome, sud A je lažan.

U slučaju suda B, za bilo koji cijeli broj a možemo odabrati bilo koji cijeli broj b takav da je $D:b=a^2+4b\geq 0$, tj. $b\geq -a^2/4$. U tom slučaju kvadratna jednadžba ima barem jedno realno rješenje. Sud B je prema tome istinit.

U slučaju suda C, neka je a bilo koji učvršćeni cijeli broj. Kad bi za svaki svaki cijeli broj b postojao realan korijen x kvadratne jednadžbe $x^2+ax-b=0$, to bi značilo da je diskriminanta negativna, tj. $D=a^2+4b\geq 0$, za sve cijele brojeve b. To je međutim nemoguće, jer možemo odabrati b takav da je $a^2+4b<0$, tj. $b<-a^2/4$. Prema tome, sud C je lažan.

1.24 Pokušajte s predikatom $P(x,y)$ opisanim na primjer nejednakošću $x<y$, gdje su x i y realni brojevi. Ima i bezbroj drugih mogućnosti.

1.25 (B) Za $n=1$ je lijeva strana jednaka 1, a desna $2!-1=1$, pa tvrdnja u ovom slučaju vrijedi.

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki učvršćeni prirodan broj n.
(K) Onda je

$$\begin{aligned}&1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!+(n+1)\cdot(n+1)!\overset{P}{=}(n+1)!-1+(n+1)\cdot(n+1)!\\&\quad=(n+1)!\cdot(1+n+1)-1=(n+2)!-1,\end{aligned}$$

čime je induktivni korak proveden.

Prema načelu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

1.26 (a) Za $n=5$ tvrdnja vrijedi, jer je $2^5>5^2$ (tj. $32>25$).

(P) Pretpostavimo da tvrdnja $2^n>n^2$ vrijedi za neki prirodan broj n.

(K) Onda je $2^{n+1}=2\cdot 2^n>2n^2$. Treba još samo provjeriti da je $2\cdot n^2>(n+1)^2$ za $n\geq 5$. Ta je nejednakost ekvivalentna s $n^2-2n-1>0$, koja je ispunjena za sve $n\geq 3$, jer za rješenja te nejednadžbe u skupu realnih brojeva vrijedi $n\in\langle-\infty,1-\sqrt{2}\rangle\cup\langle 1+\sqrt{2},+\infty\rangle)$. Time je induktivni korak završen.

Tvrdnja slijedi iz načela matematičke indukcije.

(b) (B) Za $n=4$ tvrdnja vrijedi, jer je $4!>2^4$ (tj. $24>16$).

(P) Pretpostavimo da za neki $n\geq 4$ vrijedi $n!>2^n$. (K) Onda je $(n+1)!=n!\cdot(n+1)\overset{(P)}{>}2^n(n+1)$. Dovoljno je provjeriti da vrijedi $2^n(n+1)\geq 2^{n+1}$, tj. $n+1>2$, tj. $n\geq 1$, a to jest istina.

Tvrdnja slijedi iz načela matematičke indukcije.

1.27 (B) Za $n=1$ tvrdnja vrijedi, jer je $1\geq\sqrt{1}$.

(P) Pretpostavimo da za neki prirodan broj vrijedi $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$.
(K) Onda je

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\overset{(P)}{\geq}\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Treba još samo provjeriti je li $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\sqrt{n+1}$. Množenjem s $\sqrt{n+1}$ dobivamo $\sqrt{n(n+1)}+1\geq n+1$, tj. $\sqrt{n(n+1)}>n$, što (nakon kvadriranja) vidimo da vrijedi. Time je induktivni korak završen.

Tvrdnja slijedi iz načela matematičke indukcije.

1.28 Treba dokazati da je broj $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ djeljiv s 9 za svaki prirodan broj n.

(B) Za $n=1$ tvrdnja vrijedi, jer je $1+8+27=36=4\cdot 9$.

(P) Pretpostavimo da je za neki prirodan broj n izraz $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ djeljiv s 9.

(K) Onda je $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3=(n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27=n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+9(n^2+3n+3)$, pa je i taj izraz djeljiv s 9, jer je po induktivnoj pretpostavci i broj $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ djeljiv s 9.

Time je matematičkom indukcijom dokazano da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

1.29 Koristit ćemo (za vježbu) matematičku indukciju kako je formulirana u petom Peanovom aksiomu na str. 24. Označimo s A skup svih prirodnih brojeva n za koje vrijedi jednakost (1.27). Želimo dokazati da je $A=\mathbb{N}$. Primijetimo da je $1\in A$, jer je $\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}$. Pretpostavimo da je $n\in A$ za neki prirodan broj n. Da bismo dokazali da je $n+1\in A$, pogledajmo

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}},$$

gdje smo u gornjoj jednakosti već iskoristili pretpostavku da je $n\in A$. Treba još samo provjeriti da je

$$2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}},$$

a to se odmah dobiva sređivanjem. Time je dokazano da je $n+1\in A$. Prema aksiomu matematičke indukcije slijedi da je $A=\mathbb{N}$, tj. tvrdnja (1.27) vrijedi za sve prirodne brojeve n.

1.9 Povijesne crtice

1.9.1 Crtice iz povijesti matematičke logike

Prvo sustavno proučavanje logičkog zaključivanja započeo je još grčki filozof *Aristotel* (384.-327. prije Krista). Temelje simboličke logike u modernom smislu postavio je njemački matematičar *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646.-1716.). Važne prinose razvoju matematičke logike dali su škotski matematičar *Augustus De Morgan* (1806.-1871.) i engleski matematičari *George Boole* (1815.-1864.) i *Bertrand Russel* (1872.-1970.).

De Morgan je uveo i načelo matematičke indukcije početkom 19. st., iako prva poznata uporaba tog načela potječe još iz 1575., od Talijana Francesca Maurolica (vidi [Knu, Odjeljak 1.2.1]). Po De Morganu su nazvane i poznate logičke formule: $\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$ i $\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B$, gdje su A i B bilo koji sudovi. Oznaku $\overline{A}$ za negaciju suda uveo je 1870. američki matematičar *Charles Sanders Pierce* (1839.-1914.).

De Morganove zakone na razini skupova, tj. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ i $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (gdje su A i B bilo koji skupovi sadržani u skupu U, te $\overline{A}:=U\setminus A$) znao je već i *Duns Scottus* (1265.-1308.), franjevac i filozof iz Škotske. Poznavao ih je i Indijac *Raghunahta* početkom 16. st.

Booleove algebre i Booleove funkcije uveo je engleski matematičar *George Boole* (1815.-1864.). Zanimljivo je da da je on bio samouk, tj. nije imao sustavnog matematičkog obrazovanja.

Pitagorin poučak bio je puno prije Pitagore poznat već u Indiji, o kojemu piše Indijski matematičar *Baudhayana* oko 800. g. prije Krista. Pretpostavlja se da je bio poznat čak i Babiloncima.

'Kartezijev umnožak' skupova A u B dobio je naziv po francuskom matematičaru i filozofu *René Descartesu* iz 17. st., čije latinizirano prezime glasi *Cartesius*.

1.9.2 Od prirodnih do realnih brojeva

Prirodni brojevi 1, 2, 3, itd. uvedeni su još u najranijoj povijesti čovječanstva, a nastali su iz raznih potreba prebrojavanja (na primjer stoke, radi trgovine itd.). Za nulu i za negativne cijele brojeve trebala su duga stoljeća povijesnog razvoja. Pojam *nule* u decimalnom zapisu prirodnih brojeva potvrđen je sasvim sigurno u Indiji već u 7. st. poslije Krista, kao i pojam *negativnih brojeva*. Nula se u Europi (na Iberskom poluotoku, posredstvom Arapa) pojavljuje u 11. st., a negativni brojevi tek u 17. st. Skupovi realnih i kompleksnih brojeva, tj. $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, strogo su definirani tek u 19. st. Prvu preciznu definiciju skupa realnih brojeva dao je *Georg Cantor* godine 1871.

Oznake $+$ i $-$ za operacije zbrajanja i oduzimanja uvedene su prvi put u djelu *J. Widmana* pod naslovom *Pregled trgovačke aritmetike*, Leipzig 1489.

Znak jednakosti $=$ uveo je u matematiku engleski matematičar *Robert Recorde* (1510.-1558.) u prvoj algebri objavljenoj na engleskom jeziku (u Londonu 1577. g., tj. poslije njegove smrti, pod nazivom *Brusilo oštroumnosti*), iz razloga “što ne može biti većma jednako nego dva usporedna mala poteza”. Relacije $>$ (veće od) i $<$ (manje od) potječu iz 17. st. (*T. Harriot*, London, 1631.).

Negativni brojevi pojavljuju se u Europi u Francuskoj tek koncem 15. st. Polovicom 16. st. imali su naziv “apsurdni brojevi”. U Indiji se pojavljuju znatno ranije, još u 7. st.

Oznaku $|x|$ i naziv “apsolutna vrijednost” realnog broja x uveo je Karl Weierstrass godine 1859.

Kvantifikatore $\forall$ i $\exists$ je u matematičku logiku uveo njemački matematičar *Friedrich Frege* (1848.-1925.) i nezavisno od njega američki matematičar *Charles Sanders Pierce* (1839.-1914.). Naziv *tautologija* (vidi str. 15) potječe od austrijskog filozofa *Ludwiga Wittgensteina* (1889.-1951.).

Najstarija poznata matematička knjiga u povijesti čovječanstva je *Ahmesova računica*, nastala oko 1650. g. prije Krista u Egiptu, s vrlo spretnim računanjem u bazi 60. Na taj je način Ahmes najstarija poznata osoba u povijesti matematike. U toj se knjizi nalazi prva poznata oznaka za zbrajanje, u obliku *para nožica* koje šeću od jednog broja prema drugome, kojeg treba dodati. Znameniti grčki matematičar *Euklid* (oko 325. do 270. g. prije Krista), koji je živio na prijelazu iz 4. u 3. stoljeće prije Krista (dakle prije skoro 2400. godina), uveo je u svojem znamenitom djelu “Elementi” definiciju prostog broja. Tu je dokazano da je skup prostih brojeva beskonačan. Spomenuti Euklidovi “Elementi”, koji predstavljaju sistematizaciju svega dotadašnjeg znanja iz matematike, spadaju među najvažnija djela u povijesti čovječanstva, i najprevođenije su djelo u povijesti poslije Biblije. Postoji i hrvatski prijevod. Pojavom Gutenbergova tiska 1455., Euklidovi elementi su nakon prvotiska 1482. doživjeli više od tisuću izdanja širom svijeta, na raznim jezicima.

Stari su Grci (točnije, Euklid) već u 4. st. prije Krista znali da je skup svih prostih brojeva beskonačan. (Dokaz nije težak, a dobiva se metodom protuslovlja.) Puno kasnije, tek u 19. stoljeću, ruski je matematičar *Pafnutij L. Čebišev* (1821.-1894.) dokazao da za *svaki* prirodan broj n, postoji barem jedan prost broj između n i $2n$. Taj rezultat je najprije kroz numeričke eksperimente naslutio francuski matematičar *Joseph Bertrand* (1822.-1900.).

Ako sa $\pi(n)$ označimo broj svih prostih brojeva koji ne premašuju n (tj. sadržane u intervalu $[2,n]$), pokazuje se da taj broj ima ovakvu asimptotiku za velike n:

$$\pi(n) \sim \frac{\ln n}{n} \quad \text{kad } n \text{ teži u beskonačno.} \tag{1.28}$$

To po definiciji znači da omjer izraza lijevo i desno uz $\sim$ teži prema 1 kad n teži u beskonačno. Tu su asimptotiku empirijski naslutili Carl F. Gauss i *Adrien-Marie Legendre* (1752.-1833.).

Pojam nule pojavio se u Indiji još u 7. st., te se proširio među Arapima i Kinezima, a kasnije i u Europi. Poznato je da su već u 7. st. pojam nule imali čak i Maje u Centralnoj Americi (vidi [Pick, str. 80]).

Oznaku ∞ za *beskonačno* uveo je 1665. godine engleski svećenik i matematičar *John Wallis* (1616.-1703.). Od njega potječu danas uobičajene oznake $x^0 = 1$, $x^{-1} = 1/x$, $x^{1/2} = \sqrt{x}$, $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ itd.

Oznaku $\sum$ za zbroj realnih brojeva uveo je još 1772. g. francuski matematičar *Joseph Lagrange* (1736.-1813).

Pojam iracionalnoga broja bio je poznat Pitagorejcima, sljedbenicima Pitagore, još u 4. st. prije Krista, koji su već tada znali da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, a svakako Euklidu. Pitagorejcima su brojevi bili poput bogova, radi svoje potpune neovisnosti o materijalnim promjenama. Legenda kaže da je iracionalnost broja $\sqrt{2}$ prvi dokazao *Hippasus*, jedan od Pitagorinih učenika (geometrijskom metodom, neuspješno pokušavajući dokazati da je $\sqrt{2}$ racionalan), ali su Pitagorejci vjerovali da iracionalni brojevi uopće ne postoje, pa je navodno Hippasus za kaznu utopljen u moru!

Iracionalnost broja π je dokazao *Johann Lambert* tek u 18. st., i taj dokaz nije jednostavan. Oznaku π za omjer opsega kruga i njegova promjera uveo je *William Jones* (1675.-1749.) iz Walesa.

Eratosten, autor algoritma za prosijavanje prostih brojeva (Eratostenovog sita; vidi str. 34), bio je grčki matematičar, astronom i geograf iz trećeg stoljeća prije Krista, poznat i po tome što je prvi izračunao opseg Zemaljske kugle.

1.9.3 Crtice o Fibonaccijevom nizu

Fibonaccijev niz (vidi str. 1.13) definiran je sa $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za sve $n \geq 2$ (tj. $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, itd.). Formulu

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

za n-ti član Fibonaccijeva niza (gdje je $n = 0, 1, 2, \ldots$) otkrio je još u 18. st. *Daniel Bernoulli*. Fibonaccijev niz je dobio naziv po *Fibonacciju* (*Leonardo iz Pise*), koji je taj niz otkrio još godine 1228., rješavajući problem razmnožavanja zečeva nakon n mjeseci. Ipak, taj je niz bio poznat još više od tisuću godina ranije u Indiji (matematičar *Pingala*), u vezi s prebrojavanjem broja mogućih riječi duljine n s dugim i kratkim slogovima u *sanskrtu*, jeziku klasične indijske književnosti. (Pogledajte ovaj kratak video-zapis.)

Zanimljivo je da u Kanadi postoji znanstveni časopis *The Fibonacci Quarterly*, posvećen isključivo Fibonaccijevim brojevima.

Više pojedinosti o iznimno zanimljivoj povijesti matematike može se vidjeti na primjer u knjigama [Mar, Gus, Bla, Pick, Brü1, Brü2], te u golemoj mrežnoj enciklopediji povijesti matematike [MacT].

1.9.4 Matematički časopisi i knjige

U svijetu danas postoji nekoliko stotina znanstvenih časopisa iz područja matematike, a nekoliko desetaka iz područja matematičke analize. U Hrvatskoj danas postoji desetak znanstvenih časopisa iz matematike, od kojih su neki specijalizirani za pojedina područja matematičke analize. Takav je na primjer časopis *Journal of Classical Analysis*, koji objavljuje poduzeće *Element* u Zagrebu. Najstariji hrvatski znanstveni časopis za matematiku je *Glasnik matematički*, koji objavljuje *Hrvatsko matematičko društvo*. Najraniji matematički časopisi u povijesti pojavili su se već u 17. st. Najstariji matematički znanstveni časopis koji se objavljuje neprekinuto do današnjeg dana je njemački časopis *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Žurnal za čistu i primijenjenu matematiku), od godine 1826.

Inače, istaknuti hrvatsko-američki matematičar William (Vilim) Feller, kao i mnogi drugi, bio je protiv podjele matematike na ‘čistu’ i ‘primijenjenu’. Naime, granice među njima ne mogu se strogo postaviti: napredak teorije često daje plodove u primjenama, i obratno – napredak u primjenama daje vrijedne poticaje teorijskim istraživanjima. Naziv Zavod za primijenjenu matematiku na FER-u Sveučilišta u Zagrebu, odraz je razmišljanja iz vremenu osnutka Zavoda godine 1919. na tadašnjem Tehničkom fakultetu. To je najstariji Zavod na sadašnjem FER-u, a staro ime Zavoda zadržano je kao posljedica tradicije. O povijesti *Zavoda za primijenjenu matematiku* vidi članak

[Iva]. Vrlo bogata Središnja matematička knjižnica, u kojoj se osim mnoštva knjiga nalazi i velik broj znanstvenih časopisa iz područja matematike (ukupno 1133 naslova, tekućih 198; 37 500 svezaka), može se vidjeti na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu.

Popis oznaka

Prekrasan kameni pleterni ornament u obliku znaka ∞, prikazan na gornjoj slici, nalazi se u gradiću Stonu na poluotoku Pelješcu, a dio je većeg reljefa. Označuje vječnost, kao i vječnu ljubav, a u matematici odgovarajući znak ∞ označuje beskonačnost.

Bibliografija

[AAB] Andrea Aglić Aljinović, Ilko Brnetić, Neven Elezović, Ljubo Marangunić, Mervan Pašić, Vesna Županović, Darko Žubrinić: *Matematika 1*, Element, Zagreb 2014.

[Bom] Mea Bombardelli: *Kako dokazati Pitagorin poučak na trideset načina?*, objavljeno u 'Biltenu seminara iz matematike za nastavnike mentore', 5. državani susret, Kraljevica 16.-19. svibnja 1996., Hrvatsko matematičko društvo i Ministarstvo prosvjete i športa, 1996., str. 11–25.

[Bla] Danilo Blanuša: *Viša matematika*, 1. dio, prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb 1963.

[Br] *Zadaci s pismenih ispita. Matematička analiza 1*, priredio prof.dr. Ilko Brnetić, Element, Zagreb 2005.

[Brü1] Franka Miriam Brückler: *Matematički dvoboji*, Školska knjiga, Zagreb 2011.

[Brü2] Franka Miriam Brückler: *Povijest matematike*

[CouRo] Richard Courant i Herbert Robbins: *What is Mathematics*, Oxford University Press, 1996

[Cvi] Maja Cvitković: *Kombinatorika*, zbirka zadataka, Element, Zagreb, 1994.

[Duj1] Andrej Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[Duj2] Andrej Dujella: *Diskretna matematika (Matematičke osnove kriptografije javnog ključa)*, PMF MO, Sveučilište u Zagrebu

[DujMar] Andrej Dujella i Marcel Maretić: *Kriptografija*, Element, Zagreb 2007.

[El1] Neven Elezović: *Funkcije kompleksne varijable*, Element, Zagreb 2010.

[El2] Neven Elezović: *Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb 2010.

[El3] Neven Elezović: *Diskontna matematika 1*, Element, Zagreb 2017.

[Fe] William Feller: *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Princeton, 1950.

[GKnP] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison – Wesley, 1995.

[Gus] Ivica Gusić: *Matematički rječnik*, Element, Zagreb 1995.

[Ham] Richard Hammack: *Book of Proof*, Virginia Commonwealth Univeristy, 2013.

[Iva] Ivan Ivanšić: *Zavod za primijenjenu matematiku*, FER, Sveučilište u Zagrebu, 2008.

[Jav] Petar Javor: *Matematička analiza*, Element, Zagreb 2000.

[Jupy] Jupyter

[KoŽu] Domagoj Kovačević i Darko Žubrinić: *Uvod u diskretnu matematiku*, Element, Zagreb 2017.

[Knu] Donald Knuth: *The Art of Computer Programming / Fundamental Algorithms*, Volume 1, Addison Wesley, 1973.

[La] Serge Lang: *A First Course in Calculus*, Fifth Edition, Springer, 1986.

[Mar] Željko Marković: *Uvod u višu analizu* I. dio, 4. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[MacT] *MacTutor History of Mathematics*

[NaPa] Anamari Nakić i Mario Osvin Pavčević: *Uvod u teoriju grafova*, Element, Zagreb 2013.

[Pap] Pavle Papić: *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[Paš] Mervan Pašić: *Matematika 1*, Merkur A.B.D., 2005.

[PaVe] Boris Pavković i Darko Veljan: *Elementarna matematika 1 i 2*, Školska knjiga 2004. i 2005.

[Pick] Clifford Pickover: *The Math Book*, Sterling, New York 2009. (u pripremi je hrvatski prijevod)

[Slap] Ivan Slapničar: *Matematika 1*, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split 2002.

[Ve] Darko Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[Žu1] Darko Žubrinić: *Vilim Feller istaknuti hrvatsko-američki matematičar / William Feller – Distinguished Croatian-American Mathematician*, Graphis, Zagreb 2006.

[Žu2] Darko Žubrinić: Interaktivni uvod u Matematičku analizu, pripremljen u programu Jupyter, Zagreb 2018.

Kazalo