Matematička analiza 1 - Poglavlje 10

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 16. RUJNA 2021.
PUBLISHED BY FER
WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

10. Integralni račun

Integralni račun je dio matematičke analize koji se bavi integralima funkcija, a ima široku primjenu u svim područjima matematike i ostalim znanostima, posebice u tehničkim znanostima i inženjerstvu. Motivacija za razvoj integralnog računa su bili fizikalni problemi računanja puta i određivanja površine. Za razliku od diferencijalnog računa gdje smo se pitali kojom brzinom se mijenja neka veličina, ovdje ćemo se pitati koliko iznosi promjena te veličine ukoliko znamo brzinu kojom se ona mijenja. To će voditi na postupke suprotne deriviranju. Kasnije se integralni račun proširio na proučavanje mnogih drugih problema i danas je još uvijek bitan za razvoj različitih područja u elektrotehnici, obradi i prijenosu signala, informacijskim i komunikacijskim tehnologijama te ostalim područjima iz vaše struke.

Ključni pojmovi: primitivna funkcija, određeni integral, teorem srednje vrijednosti integralnog računa, srednja vrijednost funkcije, Newton-Leibnizova formula, neodređeni integral, direktno (neposredno) integriranje

10.1 Primitivna funkcija

Vidjeli smo da su počeci diferencijalnog računa bili vezani uz računanje brzine kojom se tijelo giba u određenom trenutku, no možemo se zapitati i suprotno: ako znamo brzinu kojom se tijelo giba, možemo li odrediti njegov položaj u datom trenutku, odnosno put koji je tijelo prešlo? Ili sličan problem: ako znamo brzinu kojom voda istjeca iz spremnika, možemo li odrediti koliko vode je iscurilo u određenom periodu? Biolog će se zapitati: ako znamo kojom brzinom raste populacija bakterija, možemo li odrediti koliko će biti bakterija nakon određenog vremena? Ako u svim navedenim problemima tu poznatu brzinu zamislimo kao funkciju f, odgovor na ta pitanja će nam dati funkcija F čija derivacija će biti jednaka f. Ako takva funkcija F postoji, zvat ćemo je primitivna funkcija od f.

Definicija 10.1.1 Neka je funkcija f definirana na intervalu $I = \langle a,b \rangle \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija F se zove

primitivna funkcija od f na I, ako za svaki $x \in I$ vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

Napomena 10.1 Osim naziva primitivna funkcija, često se koristi i naziv **antiderivacija** jer pri određivanju funkcije F radimo obrnuti postupak od deriviranja.

Primjer 10.1 Neka je $f(x) = x^2$. Tada je njena primitivna funkcija $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ jer je $F'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = x^2 = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

No to nije jedina primitivna funkcija od x^2. Isto tako su i $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ i $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ primitivne funkcije of $f(x)$. Primijetimo da je i bilo koja druga funkcija oblika $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ neka konstanta, također primitivna funkcija od $f(x)$ jer je derivacija konstante nula. ■

Iz prethodnog primjera vidimo da jedna funkcija na nekom intervalu može imati beskonačno različitih primitivnih funkcija. No sve te primitivne funkcije su ipak međusobno usko povezane - uvijek se razlikuju samo za konstantu.

Teorem 10.1.1
(1) Neka su F_1 i F_2 primitivne funkcije od f na intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Tada za svaki $x \in I$ vrijedi

$$F_2(x) - F_1(x) = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

tj. F_1 i F_2 se razlikuju za konstantu.
(2) Ako je F_1 primitivna funkcija od f na I, onda je i svaka funkcija oblika $F_2 = F_1 + C$ također primitivna funkcija od f na I.

Dokaz. (1) Po uvjetu teorema je $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ na I, pa kao posljedicu Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti imamo $F_2(x) = F_1(x) + C$, za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$.

(2) Ako je $F_1'(x) = f(x)$ za $x \in I$, onda je

$$F_2'(x) = (F_1(x) + C)' = F_1'(x) + 0 = f(x),$$

pa je i funkcija $F_2(x) = F_1(x) + C$ primitivna funkcija od $f(x)$.

■

Napomena 10.2 Iz Teorema 11.1.1 slijedi da je skup svih primitivnih funkcija od f oblika $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$, gdje F neka primitivna funkcija od f.

Primjer 10.2 Nađite neku primitivnu funkciju od $f(x) = \sin 2x$.

Rješenje. Primitivna funkcija koja se prirodno nameće je $F_1(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ jer je

$$(-\tfrac{1}{2}\cos 2x)' = -\tfrac{1}{2}(-\sin 2x) \cdot 2 = \sin 2x.$$

No možemo uzeti i funkciju $F_2(x) = \sin^2 x$ jer je $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$.

Po prethodnom teoremu one se razlikuju za konstantu. To je doista tako jer koristeći trigonometrijske identitete imamo

$$F_1(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) = -\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \sin^2 x - \frac{1}{2} = F_2(x) - \frac{1}{2}.$$

■

■ **Primjer 10.3** Nađite skup svih primitivnih funkcija od $f(x) = 2x + e^x$.

Rješenje. Zbog linearnosti derivacije, primitivnu funkciju možemo tražiti tako da promatramo svaki pribrojnik zasebno pa je stoga jedna primitivna funkcija $F(x) = x^2 + e^x$. Prema Napomeni 11.2 slijedi da je skup svih primitivnih funkcija $\{x^2 + e^x + C : C \in \mathbb{R}\}$. ■

Vježba 10.1 Nađite skup svih primitivnih funkcija od $f(x) = 5 + 3\cos x - e^{2x}$.

U primjeni antiderivacije često se događa da moramo naći jednu određenu primitivnu funkciju, odnosno funkciju koja zadovoljavaju neki uvjet. Taj uvjet se često naziva i *početnim uvjetom* jer se odnosi na poznato stanje s početka promatranja zadanog problema.

■ **Primjer 10.4** Tijelo se giba pravocrtno s brzinom $v(t) = 3t^2 - 4t$. Ako je početni položaj tijela $s(0) = 1$, nađite funkciju puta u ovisnosti o vremenu, odnosno $s(t)$. Odredite položaj tijela u trenutku $t = 4$.

Rješenje. S obzirom da je brzina derivacija puta po vremenu, tj. $v(t) = s'(t)$, da bismo pronašli put trebamo antiderivirati brzinu. Nađimo prvo skup svih primitivnih funkcija koje opisuju put tijela:

$$s(t) = t^3 - 2t^2 + C.$$

Iz uvjeta na početni položaj imamo $s(0) = C = 1$, odnosno funkcija puta je

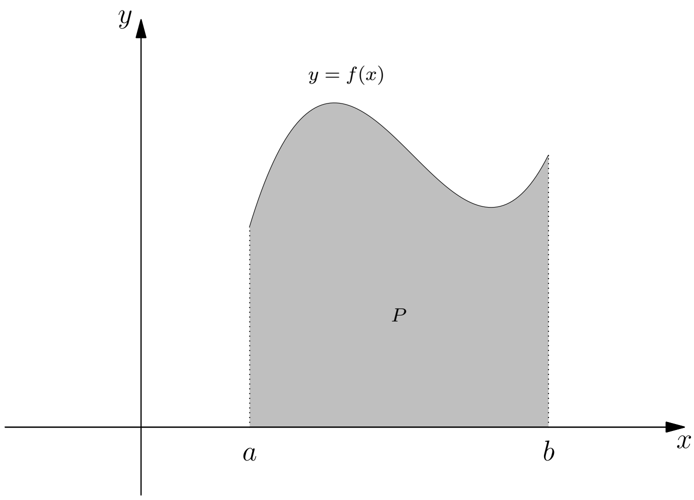
$$s(t) = t^3 - 2t^2 + 1.$$

Položaj tijela u trenutku $t = 4$ iznosi $s(4) = 33$. ■

10.2 Određeni integral

10.2.1 Problem površine

Problem tangente i trenutne brzine su bili centralna ideja diferencijalnog računa i služili su nam kao motivacija za uvođenje derivacije. Na sličan način, računanja površine i prijeđenog puta su osnovni koncept integralnog računa i koristit će nam za uvođenje pojma određenog integrala. Osnovni problem je odrediti površinu ispod grafa (nenegativne) funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, Slika 11.1.



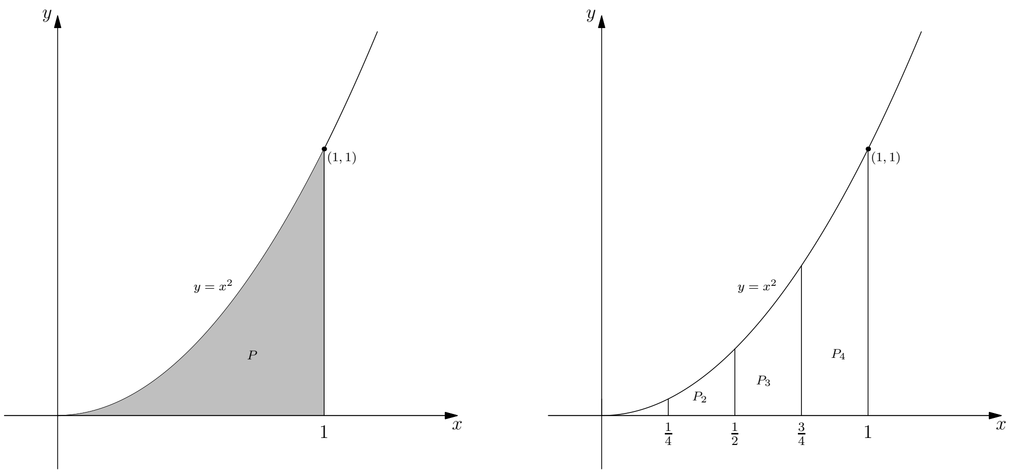
Slika 10.1: Problem površine ispod grafa funkcije

Ovdje pretpostavljamo da je na danom intervalu funkcija f neprekidna i $f(x) \geq 0$, odnosno želimo odrediti površinu lika omeđenog krivuljom $y = f(x)$, osi x te vertikalnim pravcima $x = a$ i $x = b$.

Ovaj problem je istovjetan problemu računanja puta kojeg je tijelo prešlo od trenutka $t = a$ do $t = b$ ukoliko mu je poznata brzina $v(t)$ (put je površina ispod krivulje brzine na $v - t$ dijagramu).

Pri rješavanju novih problema, uobičajeno je krenuti od poznatih stvari, a najjednostavnije je odrediti površinu pravokutnika. Naime, ukoliko vertikalnim pravcima podijelimo lik P na n manjih dijelova, intuitivno je jasno da svaki od dijelova možemo aproksimirati površinom pravokutnika i tako približno odrediti površinu cijelog lika. Ukoliko je n veći, odnosno podijelimo li na više dijelova, aproksimacija će biti točnija jer će uži dijelovi oblikom biti sličniji pravokutniku. To će nam biti glavna ideja u rješavanju ovog problema, a prvo ćemo vidjeti kako to izgleda na jednom jednostavnom primjeru.

■ **Primjer 10.5** Odredite približno površinu ispod parabole $y = x^2$ na intervalu $[0, 1]$, Slika 11.2.



Slika 10.2: Površina ispod parabole $y = x^2$

Rješenje. Podijelimo prvo P na 4 dijela. Pritom je najlakše napraviti ekvidistantnu podjelu, odnosno segment $[0, 1]$ ćemo podijeliti na 4 jednaka dijela svaki širine $\frac{1}{4}$ (Slika 11.2. desno).

Ako želimo odrediti dobivene površine, možemo ih aproksimirati pravokutnicima na dva načina:

- uzimajući za visinu pravokutnika desni rub svakog podsegmenta; time dobijemo veću površinu od tražene (kažemo da površinu aproksimiramo odozgo) (Slika 11.3 lijevo)
- uzimajući za visinu pravokutnika lijevi rub svakog podsegmenta; time dobijemo manju površinu od tražene (kažemo da površinu aproksimiramo odozdo) (Slika 11.3 desno)

U prvom slučaju su visine $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$ i 1^2 pa je ukupna površina jednaka sumi površina tih četriju pravokutnika

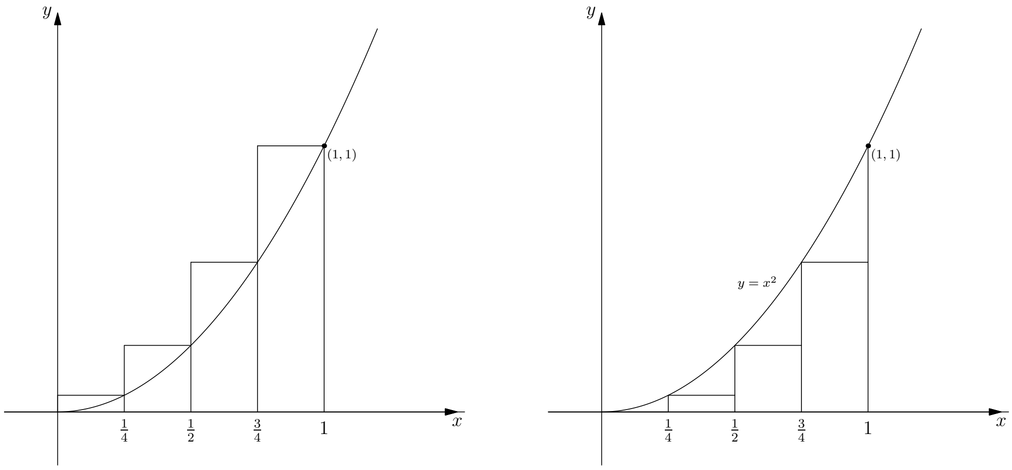
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{15}{32} = 0.46875.$$

Na isti način, u drugom slučaju s manjim pravokutnicima dobijemo

$$\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{32} = 0.21875.$$

Zaključujemo da je točna površina negdje između te dvije vrijednosti, odnosno

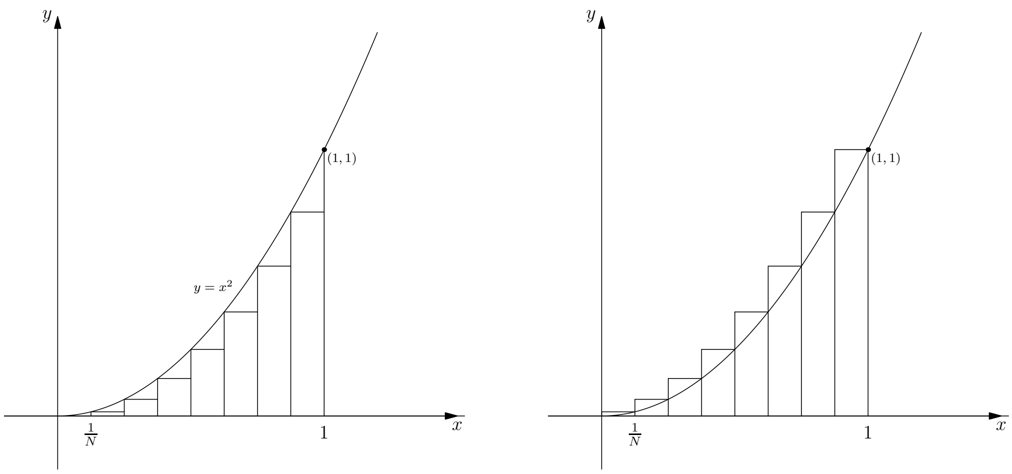
$$0.21875 < P < 0.46875.$$



Slika 10.3: Aproksimacija površine pravokutnicima odozgo i odozdo

No htjeli bismo imati precizniju donju i gornju ogradu na traženu površinu. Podijelimo li lik na 8 dijelova (svaki širine $\frac{1}{8}$, Slika 11.4), koristeći isti postupak opisan maloprije dobijemo ocjenu

$$0.2734375 < P < 0.3984375.$$



Slika 10.4: Aproksimacija površine podjelom na $N = 8$ pravokutnika

Primijećujemo da smo dobili bolju procjenu za površinu P, a intuitivno je jasno ako povećamo broj podjela, odnosno aproksimiramo li sa sve više pravokutnika manjih širina, procjena će biti sve preciznija. Lako možete i sami to implementirati na računalu jednostavnom `for` petljom čime dobijemo rezultate prikazane u Tablici 11.1.

Uzimajući podjelu na $n = 1000$ intervala već smo dobili prilično dobru procjenu, posebno ako uzmemo aritmetičku sredinu donje i gornje aproksimacije:

$$P \approx 0.3333335.$$

Uzimajući daljnju podjelu na još više intervala, primijećujemo da donja i gornja suma su doista sve bliže $\frac{1}{3}$ te naslućujemo da je točna vrijednost površine $\frac{1}{3}$, što ćemo u nastavku i formalno dokazati. ■

n	donja suma	gornja suma
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Tablica 10.1: Gornja i donja aproksimacija površine

Crtica

Problemom određivanja površine ispod parabole bavio se i poznati grčki matematičar Arhimed (287. - 212. pr.Kr.). Sličim pristupom, ali upisivanjem sve manjih trokuta u parabolu, uspio je izvesti i dokazati formulu kojom možemo izračunati površinu ispod parabole. To je prvi poznati primjer računanja sume beskonačnog reda i samim time preteča integralnog računa kojeg su Newton i Leibniz razvili u 17. stoljeću, dakle tek 2 tisuće godina nakon Arhimeda!

10.2.2 Definicija određenog integrala

Primijenimo postupak iz prethodnog primjera na općenitu funkciju $f(x)$, odnosno na površinu lika sa Slike 11.1. Dakle, napravimo prvo ekvidistantnu podjelu segmenta $[a,b]$ na n dijelova

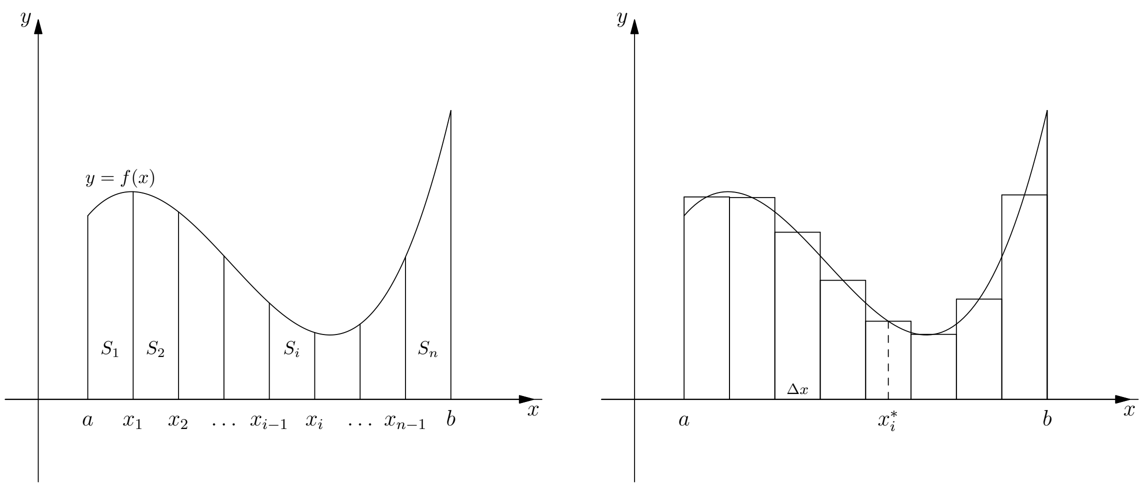
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

kao što je prikazano na Slici 11.5 lijevo. Svaki podsegment je širine

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

odnosno vrijedi

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i = 1, \ldots, n.$$



Slika 10.5

Vidjeli smo da te dijelove možemo aproksimirati površinama pravokutnika čija je visina vrijednost funkcije u desnom ili lijevom rubu segmenta, odnosno $f(x_i)$ ili $f(x_{i-1})$ za podsegment $[x_{i-1}, x_i]$. No za računanje visine možemo odabrati i bilo koji drugi x iz tog podintervala, odnosno neka je $x_i^\star$ proizvoljna točka iz podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, a pripadna visina pravokutnika $f(x_i^\star)$, vidi Sliku 11.5 desno.

Dakle, površinu P možemo aproksimirati sa sumom površina pravokutnika čija je širina Δx, a visina vrijednost funkcije u proizvoljnoj točki $x_i^\star$ svakog podintervala:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\cdot\Delta x, \qquad x_i^\star \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{10.1}$$

Sumu σ_n nazivamo integralna suma.

Intuitivno nam je jasno što je n veći, odnosno što je širina podintervala Δx manja, pravokutnici će biti sve uži i uži i njihova suma će bolje aproksimirati traženu površinu. To smo se konkretno uvjerili na primjeru površine ispod parabole iz Primjera 11.5. Stoga je prirodno uvesti limes i reći da je točna vrijednost površine jednaka

$$P = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\cdot\Delta x. \tag{10.2}$$

Time smo konačno stigli do definicije određenog integrala.

Definicija 10.2.1 **Određeni integral** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ definiran je s

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\cdot\Delta x, \tag{10.3}$$

ukoliko taj limes postoji i ne ovisi o izboru točaka $x_i^\star \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots,n$.
Tada još kažemo da je funkcija f **integrabilna** na intervalu $[a,b]$. ■

U oznaci $\int_a^b f(x)\,dx$, znak $\int$ predstavlja znak integracije, $f(x)$ zovemo podintegralna funkcija, a dx je diferencijal argumenta, odnosno oznaka varijable integracije. Realni brojevi a i b su granice integracije pri čemu a zovemo donjom granicom, a b gornjom granicom integracije.

Crtica

Oznaku za integral $\int$ je uveo poznati njemački matematičar, fizičar i filozof Gottfried Wilhelm (von) Leibniz (1646. - 1716.). Ona predstavlja izduženo slovo S, a odabrana je jer integral predstavlja limes suma.

Napomena 10.3 Određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ je realan broj! Odnosno, on ne ovisi o varijabli x te stoga možemo upotrijebiti bilo koje drugo slovo bez da mijenjamo vrijednost integrala:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

Napomena 10.4 Integralna suma σ_n se još zove i Riemannova suma, a integral se još naziva i Riemannov integral funkcije f.

Dodatak

Točnije, Riemannov integral se definira pomoću gornjih i donjih suma s kojima smo se upoznali u Primjeru 11.1 (vidi Tablicu 11.1). Takve sume se nazivaju gornja i donja Darbouxova suma. Supremum donjih Darbouxovih suma se naziva donji Riemannov integral, a infimum gornjih Darbouxovih suma se naziva gornji Riemannov integral. Ukoliko su oba Riemannova integrala jednaka, tu vrijednost nazivamo Riemannov integral. Detaljnije o tome možete pročitati u literaturi.

Crtica

Njemački matematičar Bernard Riemann (1826. - 1866.) doktorirao je pod mentorstvom poznatog Gaussa na Sveučilištu u Göttingenu i ostao je tamo predavati. Gauss, koji nije imao običaj hvaliti druge matematičare, rekao je za Riemanna da ima "kreativni, aktivni, pravcati matematički um i sjajnu plodnu originalnost". Osim definicije integrala koju mi koristimo, Riemann je dao velike doprinose funkcijama kompleksne varijable, teoriji brojeva i geometriji. Njegov opći koncept prostora i geometrije će 50 godina kasnije biti glavna podloga za Einsteinovu opću teoriju relativnosti. Zanimljivo je da je Riemann objavio samo jedan rad iz teorije brojeva, no u njemu je postavio poznatu Riemannovu hipotezu koja je još uvijek jedan od šest milenijskih matematičkih problema čije rješenje se nagrađuje s milijun dolara.

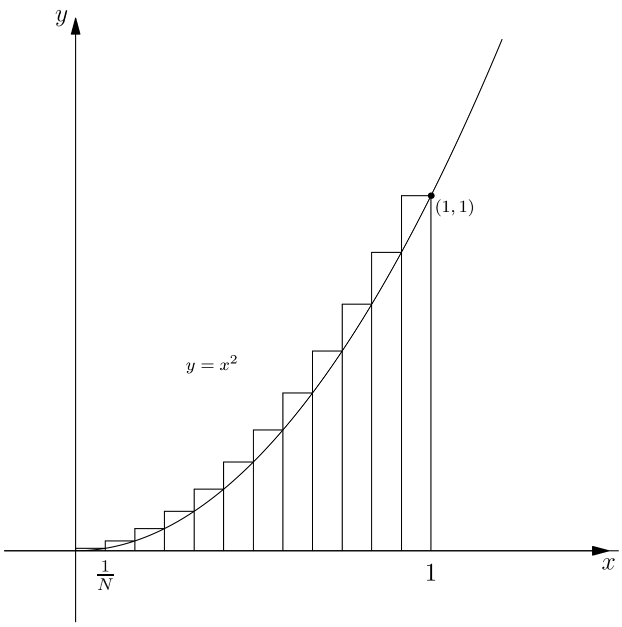
Napomena 10.5 S obzirom da u definiciji određenog integrala $x_i^\star$ predstavlja bilo koju vrijednost iz intervala $[x_{i-1}, x_i]$, u računu se često uzima desni rub svakog intervala, odnosno $x_i^\star = x_i = a + i \cdot \Delta x$, $i = 1, \ldots, n$, te tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}. \tag{10.4}$$

■ **Primjer 10.6** Izračunajte $\int_0^1 x^2\,dx$ koristeći definiciju određenog integrala.

Rješenje. Vrijednost ovog integrala predstavlja površinu ispod krivulje $y = x^2$ na intervalu $[0,1]$ koju smo već približno odredili u Primjeru 11.5 koristeći gornju i donju sumu površine pravokutnika. Vidjeli smo što je n veći da su obje sume bliže $\frac{1}{3}$ te ćemo sada dokazati da je vrijednost te površine, odnosno zadanog integrala, doista jednaka $\frac{1}{3}$.

Pri izračunu ćemo koristiti Napomenu 11.5, odnosno prilikom računanja integralnih suma koristit ćemo desni rub svakog podintervala. Tada je $a = 0$, $b = 1$, $\Delta x = \frac{1}{n}$, pa je $x_i = \frac{i}{n}$ kao na Slici 11.6.



Slika 10.6: Aproksimacija površine podjelom na n pravokutnika

Sada imamo

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

U Primjeru 1.10 vidjeli smo da je suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednaka

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

čime dobivamo

$$\sigma_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Konačno, vrijednost integrala jednaka je limesu prethodnog izraza koji se lako izračuna:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

■

Vježba 10.2 Koristeći definiciju integrala izračunajte površinu ispod krivulje $y = x^3$ na segmentu $[0,1]$. Pri računu iskoristite sljedeću formulu za sumu kubova prvih n prirodnih brojeva:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

> **Napomena 10.6** Definicija i računanje određenog integrala preko limesa integralnih suma se može koristiti i u obratnom smjeru: za računanje limesa preko određenog integrala.

■ **Primjer 10.7** Limes

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{2}{n}i} \cdot \frac{2}{n}$$

zapišite u obliku određenog integrala.

Rješenje. Usporedimo limes sa zapisom (10.4) iz Napomene 11.5. Prvo možemo primijetiti da je $\Delta x = \frac{2}{n}$, odnosno širina promatranog intervala jednaka je $b - a = 2$. Sada imamo dva načina odabira točaka x_i i zapisivanja funkcije $f(x)$.

1. način. Ukoliko odaberemo $f(x) = \sqrt{x}$, tada su $x_i = 1 + i\Delta x$, odnosno donja granica je $a = 1$. S obzirom da je širina intervala 2, gornja granica je $b = 3$ pa smo time dobili

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{2}{n}i} \cdot \frac{2}{n} = \int_1^3 \sqrt{x}\,dx.$$

2. način. Ukoliko stavimo $f(x) = \sqrt{1+x}$, tada su $x_i = i\Delta x$, odnosno donja granica je $a = 0$ pa imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{2}{n}i} \cdot \frac{2}{n} = \int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx.$$

Kada naučimo računati određeni integral, lako ćemo dobiti da je vrijednost ovog integrala, a time i zadanog limesa, jednaka $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

■

Vježba 10.3 Zapišite limes

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{-5i/n} \cdot \frac{5}{n}$$

u obliku određenog integrala.

Kada smo definirali određeni integral, pretpostavili smo da je $a < b$. Za slučajeve kada to nije tako, koristit ćemo sljedeću definiciju.

Definicija 10.2.2 Neka je f integrabilna na $[a,b]$.

(1) Ako je $a=b$, definiramo $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

(2) Ako je donja granica integracije veća od gornje, određeni integral definiramo formulom $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

Primjer 10.8

$$\int_2^2 \sqrt{1+x^2}\,dx = 0, \qquad \int_4^2 x^3\,dx = -\int_2^4 x^3\,dx.$$

Lako se vidi da određeni integral ima sljedeća svojstva.

Teorem 10.2.1 — Svojstva određenog integrala.
Neka su f i g integrabilne na $[a,b]$. Tada vrijedi:

(1) Svojstvo linearnosti

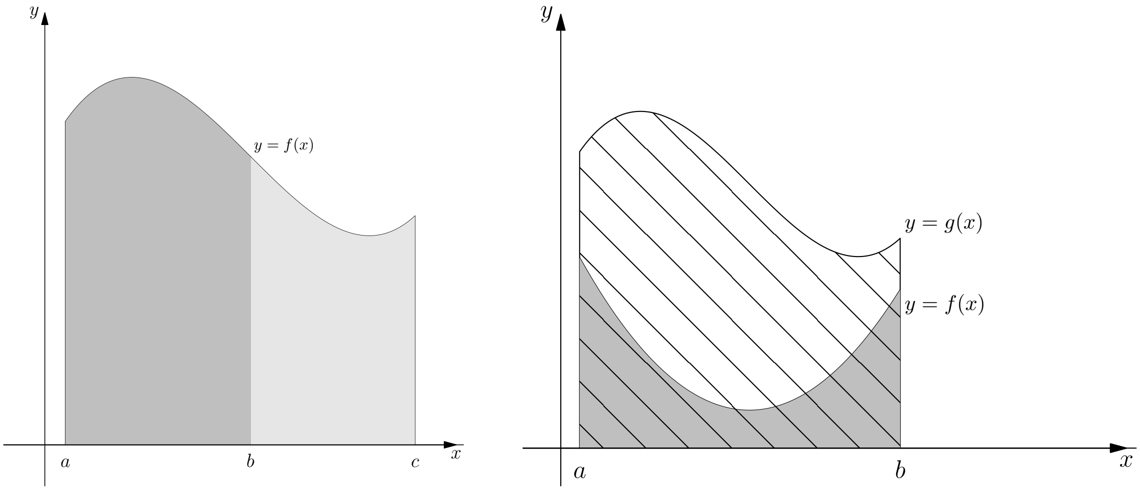
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx, \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

(2) Za bilo koji poredak točaka $a,b,c\in\mathbb{R}$ vrijedi (Slika 11.7 lijevo)

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

(3) Svojstvo monotonosti (Slika 11.7 desno)

$$f(x)\le g(x),\ \forall x\in\langle a,b\rangle \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$



Slika 10.7: Svojstva određenog integrala

U Definiciji 11.2.1 upoznali smo se s pojmom integrabilnih funkcija za koje postoji limes integralnih suma i za koje smo definirali određen integral. No nisu sve funkcije integrabilne pa se postavlja pitanje koje funkcije ćemo moći integrirati. Pokazat će se da su sve elementarne funkcije koje najčešće koristimo ipak integrabilne o čemu nam govore sljedeći teoremi. Dokaze teorema na ovom mjestu izostavljamo jer zahtjevaju naprednija znanja matematičke analize.

Teorem 10.2.2 Ako je f neprekinuta na intervalu $[a,b]$, onda je f integrabilna na $[a,b]$.

Teorem 10.2.3 Ako je f omeđena i ima konačan broj prekida (prve vrste) na intervalu $[a,b]$, onda je f integrabilna na $[a,b]$.

Primjer 10.9 Funkcija predznaka $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je integrabilna na svakom $[a,b] \subset \mathbb{R}$ jer je omeđena i ima samo jedan prekid (u nuli). ∎

Teorem 10.2.4 Ako je f omeđena i monotona na intervalu $[a,b]$, onda je f integrabilna na $[a,b]$.

10.3 Osnovni teoremi diferencijalnog i integralnog računa

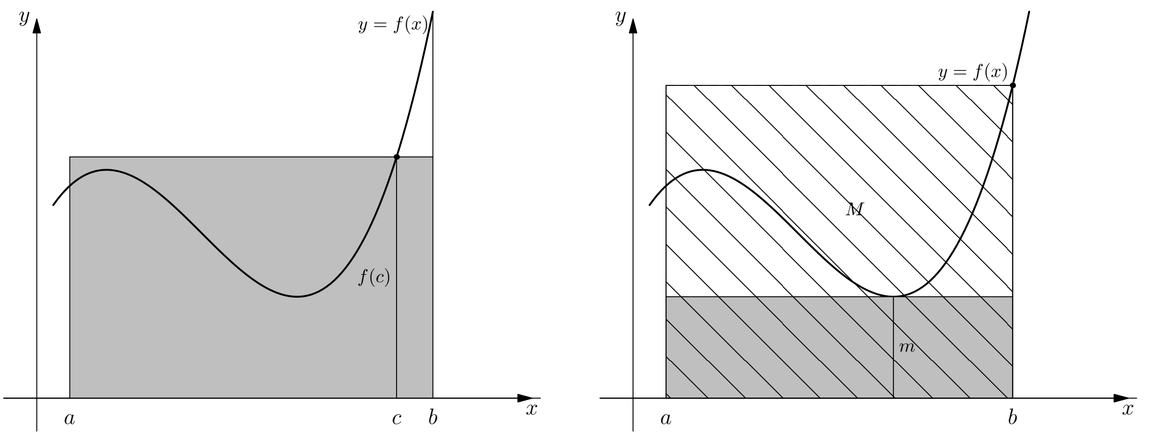
10.3.1 Teorem srednje vrijednosti integralnog računa

U ovoj cjelini ćemo se upoznati s jednim od najvažnijih teorema matematičke analize - teorema koji povezuje diferencijalni i integralni račun. No prije nego pokažemo i dokažemo tu vezu, prisjetimo se Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti iz diferencijalnog računa (Teorem 9.2.3). Teoremom smo vidjeli da za neprekinutu i diferencijabilnu funkciju f na intervalu $[a,b]$ postoji $c \in \langle a,b \rangle$ takav da je $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, odnosno geometrijski, tangenta na krivulju u točki c ima koeficijent smjera isti kao sekanta kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. U integralnom računu imamo analogon tom teoremu srednje vrijednosti.

Teorem 10.3.1 — Teorem srednje vrijednosti integralnog računa.
Neka je f neprekinuta na intervalu $[a,b]$. Tada postoji $c \in \langle a,b \rangle$ takav da je

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Napomena 10.7 Geometrijska interpretacija teorema srednje vrijednosti integralnog računa prikazana je na Slici 11.8 lijevo. Prisjetimo se da određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ predstavlja površinu P ispod grafa funkcije f na intervalu $[a,b]$, a s desne strane imamo produkt $f(c) \cdot (b-a)$ koji odgovara površini pravokutnika širine $b-a$ s visinom $f(c)$. Dakle, teorem srednje vrijednosti nam kaže da postoji točka $x = c \in \langle a,b \rangle$ takva da je površina pravokutnika $P = f(c) \cdot (b-a)$ upravo jednaka cijeloj površini ispod grafa funkcije f na tom intervalu!



Slika 10.8: Teorem srednje vrijednosti integralnog računa

Napomena 10.8 Vrijednost
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
nazivamo srednja vrijednost funkcije f na intervalu $[a,b]$.

Dokaz. Budući je f neprekinuta na $[a,b]$, postoji njena minimalna i maksimalna vrijednost na tom intervalu:
$$m = \min_{[a,b]} f(x), \qquad M = \max_{[a,b]} f(x).$$
Ukoliko sada pogledamo pravokutnike nad danim intervalom, odnosno pravokutnike širine $b-a$, tada će najmanji pravokutnik imati visinu m, a najveći visinu M, dok će vrijednost površine ispod krivulje $y = f(x)$ na tom intervalu biti negdje između površina tih dvaju pravokutnika, kao što je prikazano na Slici 11.8 desno.

To matematički možemo zapisati na sljedeći način:
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$
Dijeljeći s $(b-a)$ odavde dobivamo
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M, \quad \text{odnosno} \quad \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \in [m,M].$$
S obzirom da je funkcija f neprekinuta i vrijedi $f([a,b]) = [m,M]$, zaključujemo da f poprima sve vrijednosti između m i M. Dakle, postoji $c \in \langle a,b\rangle$ za koji će vrijednost funkcije $f(c)$ biti jednaka izrazu $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, a odatle slijedi tvrdnja teorema. ■

■ **Primjer 10.10** Odredimo srednju vrijednost funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0,1]$. Za koji $c \in \langle 0,1\rangle$ se ona postiže?

Rješenje. U Primjeru 11.6 smo pokazali da je $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ pa je prema Napomeni 11.8 srednja vrijednost funkcije f na danom intervalu jednaka
$$f(c) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$
Ona se postiže za
$$f(c) = c^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [0,1].$$
■

10.3.2 Newton-Leibnizova formula

Prisjetimo se da vrijednost određenog integrala ne ovisi o nazivu varijable $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$. Promotrimo sada određeni integral oblika
$$\int_a^x f(t)\,dt,$$
gdje je gornja granica varijabilna. Tu varijablu smo označili s x, a za varijablu integracije smo uzeli t. Navedeni integral je zapravo funkcija u varijabli x koju možemo označiti s
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$
Ovako konstruirana funkcija će nam omogućiti da pokažemo vezu između diferencijalnog i integralnog računa kroz odnos funkcija $\Phi(x)$ i $f(x)$.

Teorem 10.3.2 — Konstrukcija primitivne funkcije pomoću određenog integrala. Neka je f neprekinuta funkcija na $[a,b]$. Tada je funkcija

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b],$$

diferencijabilna na $\langle a,b\rangle$ i vrijedi $\Phi'(x) = f(x)$.

Napomena 10.9 Drugim riječima, teorem kaže da je određeni integral $\int_a^x f(t)\,dt$ primitivna funkcija od svoje podintegralne funkcije s obzirom na gornju granicu integracije. Iskaz teorema možemo formalno zapisati na način

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Dokaz. Derivirajmo funkciju $\Phi(x)$ po definiciji:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x}.$$

Primijetite da izraz u brojniku možemo napisati u obliku jednog integrala koristeći Definiciju 11.2 i svojstvo aditivnosti iz Teorema 11.2.1 na sljedeći način:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Na dobiveni integral možemo primijeniti teorem srednje vrijednosti integralnog računa, odnosno postoji $c_x \in \langle x, x+\Delta x\rangle$ takav da je

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c_x)\cdot\Delta x.$$

Vratimo se sada u limes:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c_x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \begin{pmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Rightarrow\ c_x \to x \end{pmatrix} = \lim_{c_x\to x} f(c_x) = f(x).$$

U zadnjem koraku smo prilikom računanja limesa koristili neprekinutost funkcije f te je time teorem dokazan. ■

Jedna od primjena ovog teorema je na funkcije koje su zadane integralom, a ne možemo im naći primitivne funkcije integriranjem.

■ **Primjer 10.11** Neka je $S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t^2)\,dt$. Odredite $S'(1)$ i $S''(1)$.

Rješenje. Po prethodnom teoremu, deriviranjem funkcije $S(x)$ imamo

$$S'(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x^2) \quad\Rightarrow\quad S'(1) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

a druga derivacija nam daje

$$S''(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x^2)\cdot\pi x \quad\Rightarrow\quad S''(1) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\pi = 0.$$

■

Dodatak Možda se na prvi pogled čini čudnim definirati funkcije na ovakav način pomoću integrala, no fizika, elektrotehnika i statistika su pune takvih funkcija. Funkcija $S(x)$ iz prethodnog primjera se zove Fresnelova funkcija i vezana je uz difrakciju valova, a danas se koristi u dizajniranju autoputeva. U inženjerskoj struci je poznata funkcija sinus integralni

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

koja je od velike važnosti u obradi signala, a u vjerojatnosti i statistici je veoma bitna *error funkcija* definirana s

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Sa svim spomenutim funkcijama ćete se susretati na višim godinama studija.

Vježba 10.4 Nađite prvu i drugu derivaciju funkcije $g(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$.

Vidjeli smo da je određeni integral definiran preko limesa integralnih suma što općenito nije jednostavan način za određivanje vrijednosti integrala. Prethodni teorem koji je povezao deriviranje i integriranje nam omogućava računanje određenog integrala na puno jednostavniji način koristeći primitivnu funkciju.

Teorem 10.3.3 — Newton-Leibnizova formula.

Neka je f neprekinuta funkcija na $[a,b]$, te neka je $F(x)$ bilo koja primitivna funkcija od $f(x)$ na $[a,b]$. Tada je:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Po Teoremu 11.3.2, funkcija $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ je primitivna funkcija od $f(x)$, pa vrijedi $\Phi(x) = F(x) + C$ jer se dvije primitivne funkcije razlikuju za konstantu (Teorem 11.1.2). Za $x = a$ dobijemo

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C.$$

Slijedi $C = -F(a)$, odnosno $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Tada, za $x = b$ imamo

$$\Phi(b) = F(b) - F(a) \qquad \text{i} \qquad \Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

odnosno slijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

■

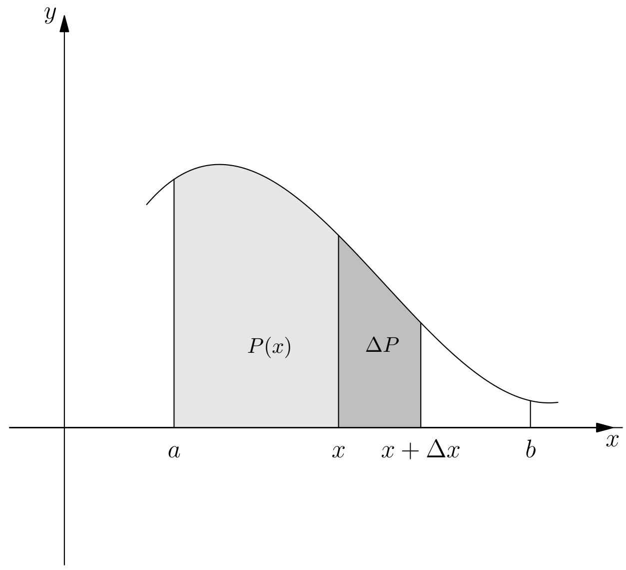
Napomena 10.10 Veza određenog integrala, odnosno površine ispod grafa funkcije $f(x)$ i njene primitivne funkcije vidljiva je iz geometrijske interpretacije Teorema 11.3.2. Neka je

$$P(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

površina lika od apscise a do apscise x, kao na Slici 11.9. Poveća li se x za Δx, nova je površina $P(x+\Delta x) = P(x) + \Delta P$. Po Teoremu 11.3.2. slijedi

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x),$$

odnosno površina P je funkcija od x kojoj je f derivacija.



Slika 10.9

Crtica

Njemački matematičar Gottfried Wilhelm **Leibniz** (1646. - 1716.) i engleski matematičar Sir Isaac **Newton** (1642. - 1726.) postavili su u 17. stoljeću temelje diferencijalnog i integralnog računa. Tijekom povijesti je bilo nedoumice tko je od njih dvojice bio prvi, no pažljivom analizom njihovih tekstova i radova, danas se smatra da su nezavisno jedan od drugog otkrili i postavili diferencijalno-integralni račun te stoga Newton-Leibnizova formula nosi ime po obojici. No Leibniz je bio više usredotočen na postavljanje oznaka i formalizam te je krenuo u istraživanju od integralnog računa, a Newton je krenuo od derivacija te je prvi primijenio diferencijalni račun u fizici. Inače, preteče infinitezimalnog računa se mogu naći u radovima matematičara iz Europe, Kine i Indije još u srednjem vijeku.

Pogledajmo na par primjera primjenu Newton-Leibnizove formule na računanje određenog integrala.

■ **Primjer 10.12**

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Tu smo koristili činjenicu da je $F(x) = \frac{x^3}{3}$ primitivna funkcija od $f(x) = x^2$ u što smo se uvjerili u Primjeru 11.1. Primijetite koliko je ovaj račun jednostavniji od limesa integralnih suma iz Primjera 11.2. ■

Vježba 10.5 Uvjerite se da za određeni integral potencije općenito vrijedi sljedeće:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \qquad n \neq -1.$$

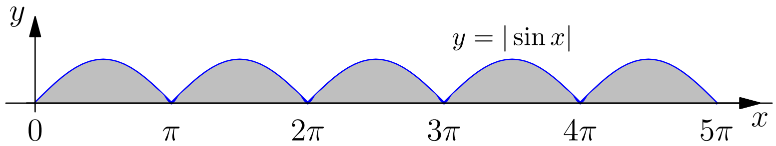
■ **Primjer 10.13** Izračunajte površinu ispod prvog luka sinosoide $f(x) = \sin x$.

Rješenje. Površina je jednaka određenom integralu funkcije $\sin x$ na intervalu $[0,\pi]$, a pri računanju ćemo koristiti primitivnu funkciju $F(x) = -\cos x$:

$$P = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2.$$

■

Primjer 10.14 Izračunajte $\int_0^{5\pi} |\sin x|\, dx$.



Slika 10.10

Rješenje. S obzirom da je podintegralna funkcija periodična s periodom $T = \pi$, integral možemo izračunati kao:

$$P = \int_0^{5\pi} |\sin x|\, dx = 5\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 5 \cdot 2 = 10.$$

■

Primjer 10.15 Izračunajte $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$.

Rješenje. U ovom slučaju određeni integral moramo podijeliti na dva dijela jer na intervalu $[-1,0\rangle$ funkcija $f(x) = x$ poprima negativne vrijednosti, a na $[0,2]$ pozitivne:

$$\int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_0^2 x\, dx = -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Provjerite rješenje crtanjem grafa funkcije $y = |x|$ i elementarnim računanjem površine.

■

Ovdje je korisno primijetiti sljedeće svojstvo određenog integrala na simetričnom intervalu oko nule:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\, dx, & f \text{ parna} \\ 0, & f \text{ neparna.} \end{cases}$$

Ovo direktno slijedi iz geometrijske interpretacije određenog integrala, vidi Sliku 11.11. Parna funkcija je simetrična s obzirom na os y pa je vrijednost površine jednaka na $[-a,0]$ i $[0,a]$, a kod neparnih funkcija vrijednost integrala je različitog predznaka na $[-a,0]$ i $[0,a]$. U sljedećem poglavlju ćemo to i formalno dokazati koristeći tehnike integriranja.

Primjer 10.16 Vrijedi

$$\int_{-2}^{2} \sin(x^3)\, dx = 0$$

jer je funkcija $f(x) = \sin(x^3)$ neparna. ■

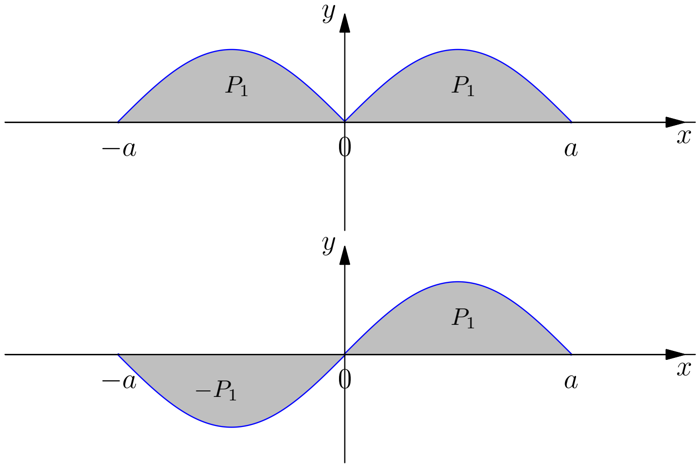
Primjer 10.17 Izračunajte $\int_{-2}^{2} x^4\, dx$.

Rješenje. Podintegralna funkcija je parna pa možemo pisati

$$\int_{-2}^{2} x^4\, dx = 2\int_0^2 x^4\, dx = 2\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{64}{5}.$$

■

U primjeni se ponekad funkcija zadaje po slučajevima u ovisnosti o vrijednosti njenog argumenta. I tada možemo lako integrirati podjelom integrala na više dijelova.



Slika 10.11

■ **Primjer 10.18** Izračunajte $\int_0^4 f(x)\,dx$ ako je

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Rješenje. Određeni integral na segmentu $[0,4]$ trebamo podijeliti na dva dijela, od 0 do 1 (točka prekida) i od 1 do 4:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^4 2\,dx = e^x\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^4 = e - 1 + 2(4-1) = e + 5.$$

Primijetite da je funkcija $f(x)$ integrabilna na danom intervalu neovisno o prekidu u točki $x = 1$ (u skladu s Teoremom 11.2.3). Intuitivno je to jasno jer smo traženu površinu ispod krivulje $y = f(x)$ računali kao zbroj dviju površina. ■

10.4 Neodređeni integral

10.4.1 Definicija i svojstva

U prethodnom poglavlju smo vidjeli da nam je za računanje određenog integrala potrebna primitivna funkcija $F(x)$ od podintegralne funkcije $f(x)$. Također smo u potpoglavlju 11.1. vidjeli značaj traženja primitivnih funkcija u matematičkoj analizi i primjenama u inženjerstvu. S obzirom da je traženje primitivne funkcije, tj. integriranje, suprotan postupak od deriviranja, a neće nas uvijek zanimati vrijednost određenog integrala nego samo primitivna funkcija, korisno je uvesti pojam neodređenog integrala.

Definicija 10.4.1 **Neodređeni integral** funkcije f na intervalu $\langle a,b\rangle$ je skup svih primitivnih funkcija od f na $\langle a,b\rangle$. Označavamo ga s

$$\int f(x)\,dx$$

■

Vidjeli smo u Teoremu 11.1.1 da se dvije primitivne funkcije razlikuju za konstantu. Stoga, ako je $F(x)$ neka primitivna funkcija od $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$, tada je

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

gdje je C proizvoljna aditivna konstanta integracije. To kraće pišemo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

■ **Primjer 10.19** Pogledajmo nekoliko jednostavnih neodređenih integrala koji se lako provjere deriviranjem desne strane jednakosti:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

Primijetite da su navedeni integrali definirani na svim intervalima $I \subseteq \mathbb{R}$, dok je primjerice neodređeni integral

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

definiran na $\langle -\infty, 0\rangle$ ili $\langle 0, +\infty\rangle$ jer je domena podintegralne funkcije $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

■

Napomena 10.11 Kod neodređenog integrala, znak $\int$ treba doživljavati samo kao oznaku integriranja koju smo preuzeli iz definicije određenog integrala, odnosno ovdje $\int$ ne predstavlja znak sumacije i njegovo rješenje nije broj.

Sljedeći teorem o neodređenom integralu pokazuje da su integriranje i deriviranje doista inverzni procesi.

Teorem 10.4.1 Za neodređeni integral vrijedi

(1) $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$

(2) $\displaystyle \int f'(x)\,dx = f(x) + C$

Dokaz. (1) Direktno slijedi iz definicije neodređenog integrala gdje je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) + 0 = f(x).$$

(2) Lako se pokaže deriviranjem desne strane jednakosti: $(f(x) + C)' = f'(x)$. ■

Kao i određeni integral, neodređeni integral ima svojstvo linearnosti. To se lako pokaže deriviranjem desne strane i koristeći linearnost derivacije.

Teorem 10.4.2 — Svojstvo linearnosti neodređenog integrala.

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

■ **Primjer 10.20**

$$\begin{aligned}\int (4x + 3\sin x)\,dx &= 4\int x\,dx + 3\int \sin x\,dx = 4\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 3(-\cos x + C_2)\\ &= 2x^2 - 3\cos x + 4C_1 + 3C_2 = 2x^2 - 3\cos x + C.\end{aligned}$$

Napomena 10.12 Primijetite da smo ovdje imali 2 neodređena integrala kojima smo redom dobili konstante C_1 i C_2 te konačno $4C_1+3C_2$. No to je opet konstanta koja poprima bilo koju realnu vrijednost. Stoga je dovoljno napisati samo jednu konstantu C čime smo dobili sve primitivne funkcije.

■

S obzirom da se primitivna funkcija dobije suprotnim postupkom od deriviranja, slično kao što smo imali tablicu derivacija, možemo napisati suprotnu tablicu integrala elementarnih funkcija. Običaj je tablicu napisati za neodređeni integral s aditivnom konstantom, a pripadne primitivne funkcije (bez konstante) ćemo koristiti i kod rješavanja određenog integrala pomoću Newton-Leibnizove formule.

$\int 0\,dx = C$	$\int dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ a>0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert + C,\ a\neq 0$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ a>0$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C,\ a>0$

Tablica 10.2: Tablica neodređenih integrala

Napomena 10.13 Podrazumijeva se da su navedeni integrali definirani na otvorenim intervalima I na kojima je podintegralna funkcija definirana u svakoj točki. Primjerice, integral $\int \frac{dx}{x}$ je definiran na $I = \langle -\infty, 0\rangle$ te je tada jednak $\ln(-x)$ ili na $I = \langle 0, +\infty\rangle$, a tada je jednak $\ln x$. Integral $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ je definiran na $\langle -\infty, -a\rangle$, $\langle -a, a\rangle$ ili $\langle a, +\infty\rangle$.

Napomena 10.14 Sve tablične integrale lako dokazujemo deriviranjem desne strane. Primjerice:

$$(\ln\lvert x\rvert)' = \begin{cases} (\ln(x))' = \frac{1}{x}, & x>0 \\ (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}, & x<0, \end{cases}$$

$$\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad x\in\langle -a,a\rangle.$$

Vježba 10.6 Deriviranjem provjerite sve tablične integrale. Primijetite da se u zadnja dva tablična integrala zapravo radi o area funkcijama izraženim pomoću logaritamske funkcije.

10.4.2 Neposredno (direktno) integriranje

Koristeći tablicu integrala i svojstvo linearnosti, sada možemo direktno integrirati razne funkcije.

■ **Primjer 10.21**

$$\begin{aligned}\int (5x^3+3x-\sqrt[3]{x}+4)\,dx &= 5\int x^3\,dx + 3\int x\,dx - \int x^{1/3}\,dx + 4\int dx\\ &= \frac{5}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^{4/3}+4x+C\end{aligned}$$

Već smo napomenuli da se umjesto više konstanti integracije (posebno za svaki neodređeni integral) piše samo jedna. ■

■ **Primjer 10.22**

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x^2}\,dx &= \int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx\\ &= \int x^{-2}\,dx + 2\int x^{-3/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{x^{-1}}{-1}+2\frac{x^{-1/2}}{-1/2}+\ln|x|+C = -\frac{1}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+\ln|x|+C\end{aligned}$$

■

Vježba 10.7 Izračunajte $\int (\frac{2}{x}+\sqrt{x})^3\,dx$.

Zbog jednostavnosti, nećemo više posebno zapisivati integral zbroja u zbroj integrala nego ćemo direktno integrirati.

■ **Primjer 10.23**

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx = \ln|x+\sqrt{x^2+4}|+\arcsin\frac{x}{2}+C$$

■

Napomena 10.15 Kod tabličnih integrala iz prethodnog primjera treba biti oprezan, pogledajmo sljedeći integral:

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} \neq \operatorname{arctg}(2x)+C$$

Da ovo doista nije točan postupak možete se uvjeriti deriviranjem desne strane izraza.

Ispravan način rješavanja je sljedeći:

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{4(\frac{1}{4}+x^2)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{1}{4}+x^2}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\frac{1}{2}})+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)+C$$

■ **Primjer 10.24**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4(\frac{9}{4}-x^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$$

■

Vježba 10.8 Izračunajte $\int\left(\frac{3}{2-8x^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$.

Svojstva integriranja prikazana u prethodnim primjerima vrijede i za određene integrale.

■ **Primjer 10.25**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sin x+\frac{3}{\cos^2 x})\,dx = (-2\cos x+3\operatorname{tg} x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= (-\sqrt{2}+3)-(-2+0) = 5-\sqrt{2}$$

■

■ **Primjer 10.26**

$$\int_1^3 \frac{x^2}{x^2+3}\,dx = \int_1^3 \frac{x^2+3-3}{x^2+3}\,dx = \int_1^3 (1-\frac{3}{x^2+3})\,dx$$
$$= \left(x-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_1^3$$
$$= (3-\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3})-(1-\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}) = 2-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

■

Vježba 10.9 Izračunajte određene integrale $\int_0^1 (3e^x+4x\sqrt{x}-5)\,dx$ i $\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Integrali trigonometrijskih funkcija se ponekad mogu svesti na tablične integrale koristeći trigonometrijske identite.

■ **Primjer 10.27**

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 2x}\,dx = \int \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2\sin x\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x+C$$

■

■ **Primjer 10.28**

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int (\frac{1}{\cos^2 x}-1)\,dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

■

Vježba 10.10 Izračunajte $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

10.4.3 Uvod u diferencijalne jednadžbe

U primjenama matematičke analize, konkretno diferencijalnog i integralnog računa, često se događa situacija da je potrebno naći funkciju za koju imamo neka saznanja o njenoj derivaciji. Takve probleme opisujemo jednadžbama koje uključuju derivaciju funkcije, a nazivamo ih diferencijalnim jednadžbama. Pri njihovom rješavanju koristit će se postupak integriranja, a iz prethodnih primjera je jasno da će rješenje biti funkcija koja sadrži proizvoljnu konstantu. Reći ćemo da je to opće rješenje diferencijalne jednadžbe. Međutim, u primjenama je često poznat dodatni uvjet na funkciju (primjerice, početno stanje promatranog problema) koji omogućava da odredimo konstantu integracije, odnosno da dobijemo jedinstveno rješenje problema.

■ **Primjer 10.29** Nađite y za koji vrijedi $y'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{4}{x^2+1}$ i $y(0) = 2$.

Rješenje. Integriranjem jednadžbe slijedi

$$y(x) = \int \left(\frac{1}{2}e^x + \frac{4}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}e^x + 4\operatorname{arctg} x + C.$$

S obzirom da nam je poznat uvjet $y(0) = 2$, uvrštavanjem u dobiveni y imamo

$$y(0) = \frac{1}{2}e^0 + 4\operatorname{arctg} 0 + C = \frac{1}{2} + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}.$$

Stoga je konačno rješenje funkcija

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + 4\operatorname{arctg} x + \frac{3}{2}.$$

■

■ **Primjer 10.30** Tijelo se giba pravocrtno s akceleracijom $a(t) = 6t + 4$. Ako je početna brzina tijela $v(0) = -6$, a početni položaj $s(0) = 5$, nađite funkciju puta u ovisnosti o vremenu, odnosno $s(t)$.

Rješenje. S obzirom da je $a(t) = v'(t) = 6t + 4$, integriranjem dobivamo

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int (6t + 4)\, dt = 3t^2 + 4t + C.$$

Iz uvjeta na početnu brzinu imamo $v(0) = C = -6$, odnosno

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6.$$

Sada preostaje odrediti funkciju puta za koju vrijedi $s(t) = v'(t)$ pa integriranjem brzine imamo

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int (3t^2 + 4t - 6)\, dt = t^3 + 2t^2 - 6t + D.$$

Ponovno iz početnog uvjeta (na položaj tijela) možemo odrediti konstantu D:

$$s(0) = D = 5.$$

Dakle, funkcija puta je jednaka

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 5.$$

■

Vježba 10.11 Nađite funkciju f za koju vrijedi $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$, $f(1) = 1$.

Diferencijalne jednadžbe su veoma bitan matematički alat u primjenama i čine veliko područje u matematičkoj analizi koje nadmašuje opseg ovog predmeta. Stoga ćemo se njima detaljno baviti u Matematičkoj analizi 2.

10.5 Pitanja za ponavljanje

1. Definirajte primitivnu funkciju od funkcije f.
2. Neka su F_1 i F_2 dvije primitivne funkcije of f. U kojem su odnosu F_1 i F_2?
3. Ako je F primitivna funkcija od f, što je skup svih primitivnih funkcija od f? Obrazložite odgovor.
4. Definirajte određeni integral i geometrijski interpretirajte definiciju na primjeru grafa pozitivne funkcije.
5. Iskažite teorem srednje vrijednosti integralnog računa i objasnite njegovu geometrijsku interpretaciju.
6. Nađite srednju vrijednost funkcija $f(x) = 1$ i $g(x) = x$ na intervalu $[a,b]$ i odgovarajuće $c \in \langle a,b \rangle$. Skicirajte obje funkcije i geometrijsku interpretaciju izračunatih vrijednosti.
7. Korištenjem teorema srednje vrijednosti integralnog računa, pokažite da za $a \leq b$ vrijedi:
$$\Big| \int_a^b \sin x \, dx \Big| \leq b - a.$$
8. Dokažite koristeći svojstva integrala i definiciju derivacije: Ako je $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekinuta, tada je
$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t)\, dt = g(x), \; x \in [a,b].$$
9. Za neprekidnu funkciju f na $[a,b]$ i diferencijabilnu funkciju $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, pokažite da vrijedi:
$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x), \; x \in [a,b].$$
10. Iskažite i dokažite Newton-Leibnizovu formulu.
11. Objasnite u kojem smislu su deriviranje i integriranje inverzni procesi.
12. Definirajte neodređeni integral. Objasnite razliku između primitivne funkcije i neodređenog integrala.
13. (a) Dokažite svojstvo linearnosti za neodređeni integral.
    (b) Dokažite svojstvo linearnosti za određeni integral.
14. (a) Ima li funkcija $f(x) = e^{-x^2}$ primitivnu funkciju na $[0,1]$?
    (b) Ima li funkcija $f(x) = e^{-x^2}$ primitivnu funkciju na segmentu $[0,1]$ u skupu elementarnih funkcija?
15. Objasnite možemo li izračunati $\int_0^1 f(x)\, dx$ za tzv. *Dirichletovu funkciju*:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
16. Dokažite svojstvo da je integral neparne funkcije na simetričnom intervalu oko 0 jednak 0.
17. Za svaku od sljedećih tvrdnji odredite da li je točna ili netočna:
    (a) Površina između grafa funkcije f i osi x na intervalu $[a,b]$ jednaka je
$$P = \int_a^b f(x)\, dx.$$

(b) ako su f i g neprekinute funkcije, tada vrijedi

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ako su f i g neprekinute funkcije, tada vrijedi

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

(d) Ako je f neprekinuta funkcija tada vrijedi

$$\int_a^b \pi f(x)\,dx = \pi \int_a^b f(x)\,dx$$

(e) Ako je f neprekinuta funkcija tada vrijedi

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = x^2 \int_0^1 f(x)\,dx$$

(f) Vrijedi

$$\int_{-3}^3 (ax^2+bx+c)\,dx = 2\int_0^3 (ax^2+bx+c)\,dx$$

10.6 Zadaci za vježbu

1. Pokažite da je funkcija $g(x) = \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})$ primitivna funkcija od $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.
2. Odredite primitivnu funkciju od $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ na $\mathbb{R}$ za koju vrijedi da ima nultočku u točki $x = 2$.
3. Koristeći definiciju integrala izračunajte $\int_1^3 x\,dx$.
4. Zapišite limes
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$$
u obliku određenog integrala i potom ga izračunajte.
5. Koristeći osnovni teorem diferencijalnog i integralnog računa, derivirajte funkcije

   (a) $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt$

   (b) $g(x) = \int_x^2 t\sin t\,dt$

   (c) $h(x) = \int_0^{x^2} \dfrac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$

   (d) $u(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt$
6. Neka je f neprekinuta i neka vrijedi $\int_0^x f(t)\,dt = 2x(\sin x+1)$. Odredite $f(\frac{\pi}{2})$.
7. Pokažite da funkcija $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ nema lokalnih ekstrema. Ima li ta funkcija točke infleksije?
8. Ako je $f(1) = 12$, f' neprekidna i $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, koliko je $f(4)$?
9. Ako je $\int_{-2}^0 f(x)\,dx = 2$, koliko je $\int_0^{-2} 5f(x)\,dx$?
10. Odredite vrijednost integrala:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x + x}{x^2+\cos x}\,dx$$
Obrazložite.
11. Izračunajte sljedeće određene i neodređene integrale:

(a) $\int (3x^4 - \sqrt[4]{x} + 5e^x)\,dx$

(b) $\int_1^8 (\sqrt[3]{x} + 2x - 3)\,dx$

(c) $\int (x\sqrt{x} + 4\cos x)\,dx$

(d) $\int \frac{x^2 - 2x + \pi}{3}\,dx$

(e) $\int (x-4)(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

(f) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(g) $\int_4^9 \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

(h) $\int \frac{(2x-1)^2}{x}\,dx$

(i) $\int_{-1}^0 (3x+2)^3\,dx$

(j) $\int \frac{dx}{x^2+3}$

(k) $\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

(l) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3}{\cos^2 x}\,dx$

(m) $\int \frac{\sin^3 x + 2}{\sin^2 x}\,dx$

(n) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$

12. Izračunajte $\int_0^5 |x-2|\,dx$.

13. Izračunajte $\int_{-2}^3 f(x)\,dx$ ako je

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

14. Izračunajte $\int_0^3 g(x)\,dx$, ako je funkcija $g(x)$ dana s

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 1,\ 2 \\ x^2, & \text{inače}. \end{cases}$$

Obrazložite.

10.7 Rješenja

1. Pokažite da je $g'(x) = f(x)$.
2. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{8}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\dfrac{2i}{n})\cdot\dfrac{2}{n} = 4$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$
5. (a) $\sqrt{1+x^2}$ (b) $-x\sin x$ (c) $\frac{2x^2}{x^2+1}$ (d) xe^x
6. 4
7. Ima točku infleksiju u $x = 0$.
8. 29
9. -10
10. 0 (jer je podintegralna funkcija neparna)
11. (a) $\frac{3}{5}x^5 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + 5e^x + C$
    (b) $\frac{213}{4}$
    (c) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4\sin x + C$
    (d) $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{\pi}{3}x + C$
    (e) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C$
    (f) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$
    (g) 36
    (h) $2x^2 - 4x + \ln x + C$
    (i) $\frac{5}{4}$
    (j) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$
    (k) π
    (l) $\sqrt{3}$
    (m) $-\cos x - 2\operatorname{ctg} x + C$
    (n) $-\operatorname{ctg} x - x + C$
12. $\frac{13}{2}$
13. 11
14. 9