10.

Skalarni umnožak. Ortogonalne i simetrične matrice

Sadržaj poglavlja

10.1. Skalarni umnožak

10.1.1. Skalarni umnožak u $\mathbf{R}^n$

Skalarni umnožak u V^3. Skalarni umnožak[1] vektora u trodimenzionalnom prostoru definirali smo formulom

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} := |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\varphi \tag{1}$$

gdje smo označili s $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ duljine vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, a s φ kut među njima. Ova formula nije pogodna za poopćenje u n-dimenzionalni prostor, naprosto stoga što nam zor ne pomaže niti pri računanju duljine niti kuta između dva vektora u takvome prostoru.

No, postoji i druga formula. Ako je $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ kanonska baza u V^3 u kojoj vektori imaju prikaze

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$

tad se skalarni umnožak *računa* formulom

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{2}$$

Za razliku od prethodne, ova se formula direktno poopćava u n-dimenzionalni prostor $\mathbf{R}^n$.

Skalarni umnožak u $\mathbf{R}^n$

Elementi prostora $\mathbf{R}^n$ uređene su n-torke:

$$\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n), \qquad \mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n).$$

Skalarni umnožak (produkt) vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ označavamo s $\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle$ i definiramo formulom

$$\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \tag{3}$$

Imajući definiran skalarni umnožak, možemo definirati geometrijske pojmove koje ne možemo naslutiti po zoru. Tako npr. **duljina** (**norma**) vektora računa se formulom

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{4}$$

Za definiciju kuta među vektorima služi nam formula (1):

$$\cos\varphi = \frac{\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}. \tag{5}$$

Pokazat ćemo da je vrijednost razlomka desno uvijek unutar intervala $[-1,1]$, tako da definicija ima smisla.

Specijalno, često ćemo koristiti pojam *okomitosti*. Dva su vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ **okomita**, (kažemo još **ortogonalna**) ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli:

$$\mathbf{x}\perp\mathbf{y} \iff x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = 0. \tag{6}$$

Svojstva skalarnoga umnoška. Izdvojiti ćemo četiri osnovna svojstva skalarnoga umnoška u prostoru $\mathbf{R}^n$:

1) **Pozitivnost.** Za svaki $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ vrijedi $\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle \geqslant 0$. Nadalje, $\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = 0$. Ovo svojstvo slijedi neposredno iz definicije:
$$\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$
2) **Homogenost.** Za svaki skalar $\alpha\in\mathbf{R}$ vrijedi
$$\langle\alpha\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\alpha\mathbf{y}\rangle = \alpha\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle.$$
Dokaz ovoga svojstva osniva se na definiciji množenja vektora sa skalarom:
$$\langle\alpha\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)y_i = \alpha\sum_{i=1}^{n}x_iy_i = \alpha\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle,$$
slično za umnožak $\langle\mathbf{x}\,|\,\alpha\mathbf{y}\rangle$.
3) **Komutativnost.** Za svake $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ vrijedi
$$\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\rangle.$$
Očigledno!
4) **Aditivnost.** Za svaka tri vektora $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^n$ vrijedi
$$\langle\mathbf{x}+\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{z}\rangle + \langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}\rangle.$$
I ovo se svojstvo lako provjerava prema definiciji skalarnoga umnoška.

Svojstva aditivnosti i homogenosti zovemo jednim imenom **linearnost** skalarnoga umnoška.

10.1.2. Unitarni i normirani prostori

Radi čega izdvajamo upravo ova četiri svojstva skalarnoga umnoška? Razlog tome je jer se pomoću njih može definirati skalarni umnožak u općenitijem vektorskom prostoru X.

Definicija skalarnog umnoška

Neka je X vektorski prostor. Za funkciju $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle : X\times X\to\mathbf{R}$ kažemo da je **skalarni umnožak (produkt)** ako ona ima svojstva

(S_1) $\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle \geqslant 0$, $\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = 0$.
(S_2) $\langle\alpha\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\alpha\mathbf{y}\rangle = \alpha\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle$.
(S_3) $\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\rangle$.
(S_4) $\langle\mathbf{x}+\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{z}\rangle + \langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}\rangle$.

Vektorski prostor X na kojem je definiran skalarni umnožak naziva se **unitarni prostor**.

Norma

Neka je X vektorski prostor. **Norma** na X je svaka funkcija $\|\cdot\| : X\to\mathbf{R}$ sa svojstvima

(N_1) **Pozitivnost**: za svaki $\mathbf{x}\in X$ vrijedi $\|x\| \geqslant 0$. Nadalje, $\|x\| = 0$ onda i samo onda ako je $\mathbf{x} = 0$.
(N_2) **Homogenost**: za svaki $\mathbf{x}\in X$ i svaki skalar $\alpha\in\mathbf{R}$ vrijedi
$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$
(N_3) **Nejednakost trokuta**: Za sve $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$ vrijedi
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Vektorski prostor na kojemu je definirana norma naziva se **normirani prostor**.

Teorem 1. Svaki unitarni prostor je normirani. U unitarnom prostoru norma se definira formulom

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle}.$$

Svojstva (N_1) i (N_2) slijede direktno iz definicije norme i svojstava skalarnoga umnoška. Da bismo dokazali nejednakost trokuta, potreban nam je dodatni rezultat koji iskazujemo u sljedećem teoremu.

Teorem 2. U svakom unitarnom prostoru vrijedi **Cauchy–Schwarzova nejednakost**, za sve $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$ vrijedi

$$|\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

Dokaz. Definirajmo funkciju realne varijable t formulom

$$f(t) = \langle t\mathbf{x}+\mathbf{y}\,|\,t\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle.$$

Vrijedi očito $f(t) \geqslant 0$ za svaki t. Riječ je o kvadratnoj funkciji:

$$f(t) = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle\,t^2 + 2\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle\,t + \langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2\,t^2 + 2\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle\,t + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Znamo da je kvadratna funkcija uvijek nenegativna onda i samo onda ako joj je diskriminanta manja ili jednaka nuli:

$$4\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle - 4\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \leqslant 0.$$

To je upravo Cauchy–Schwarzova nejednakost. ◄

Dokaz nejednakosti trokuta. Dokažimo da u unitarnom prostoru vrijedi nejednakost trokuta (N_3). Imamo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle\mathbf{x}+\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle\\ &= \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle + 2\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{y}\rangle\\ &\leqslant \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2\\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.\end{aligned}$$ ◄

Dokazali smo da se u unitarnom prostoru uvijek može definirati norma, a onda pomoću nje i **udaljenost vektora**

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

To nam omogućava da u linearnu algebru uvedemo tehnike *matematičke analize*, jer se pomoću udaljenosti mogu definirati ključni pojmovi konvergencije i limesa. U ovom udžbeniku se tom problematikom nećemo baviti.

Primjer 1. S $L^2[a,b]$ označavamo prostor svih po dijelovima neprekinutih funkcija definiranih na intervalu $[a,b]$ koje su **kvadratno integrabilne**:

$$\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Dvije funkcije ovog prostora, koje se razlikuju samo u konačno mnogo točaka, smatramo jednakima. Skalarni umnožak definiran je formulom

$$\langle f\,|\,g\rangle := \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

norma s

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

a udaljenost

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Uvjerite se da su za ovako definiran skalarni umnožak zadovoljena svojstva $(S_1)-(S_4)$.

Pojam norme i normiranog prostora općeniti je od skalarnog umnoška i unitarnih prostora. To znači da svaki normirani prostor ne mora biti unitarni. Postoje normirani prostori od velike važnosti u kojima se skalarni umnožak ne može definirati. Na primjer, normirani prostor $C[a,b]$ neprekinutih funkcija na intervalu $[a,b]$ u kojem je norma definirana formulom

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

nije unitaran prostor. Proučavanjem unitarnih i normiranih prostora bavi se (uz mnoge druge probleme) dio matematike zvan *funkcionalna analiza*.

Skalarni umnožak u kompleksnom vektorskom prostoru. . Ukoliko je vektorski prostor definiran nad poljem skalara $\mathbf{C}$, onda se definicija skalarnog umnoška mora neznatno promijeniti.

Svojstva homogenosti i komutativnosti se mijenjaju, i glase

$$\langle\alpha\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \alpha\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle, \tag{7}$$
$$\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \overline{\langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\rangle}. \tag{8}$$

(Potez označava kompleksno konjugiranje.)

Primijetimo da je zbog toga

$$\langle\mathbf{x}\,|\,\alpha\mathbf{y}\rangle = \overline{\langle\alpha\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\rangle} = \overline{\alpha\langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\rangle} = \overline{\alpha}\,\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle. \tag{9}$$

Tako na primjer, ako su f i g funkcije s vrijednostima koje mogu biti kompleksni brojevi, tad se navedeni primjer skalarnog umnoška u prostoru $L^2[a,b]$ mijenja u

$$\langle f\,|\,g\rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

U prostoru $\mathbf{C}^n$ definicija skalarnoga umnoška sad glasi:

$$\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle := x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n. \tag{10}$$

Primijetimo da se u slučaju vektora s realnim koeficijentima, ova definicija podudara s prijašnjom.

Opravdanje ove preinake možemo naći u tome što u suprotnome norma vektora ne bi bila pozitivan (pa ni realan) broj. No, uz ovu izmjenu vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1\overline{x}_1 + \ldots + x_n\overline{x}_n = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2. \tag{11}$$

10.1.3. Ortogonalnost, ortonormiranost i linearna nezavisnost

Pojam ortogonalnosti dvaju vektora proširuje se na niz od konačno mnogo vektora: vektori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ su **ortogonalni** ako su svaka dva vektora među njima ortogonalna. Oni su **ortonormirani** ako su ortogonalni i duljina svakoga vektora jednaka je 1.

Iz ortogonalnog skupa ne-nul vektora možemo odmah dobiti ortonormirani, dijeljenjem svakoga vektora s njegovom duljinom.

Primjer ortonormiranoga skupa je kanonska baza prostora $\mathbf{R}^n$. Nju čine vektori

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1,0,\ldots,0)\\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,\ldots,0)\\ &\vdots\\ \mathbf{e}_n &= (0,0,\ldots,1)\end{aligned}$$

za koje *prostim okom* vidimo da su ortogonalni i jedinične duljine.

Dva su okomita ne-nul vektora u V^2 linearno nezavisna. Isto vrijedi i za tri (ili manje) vektora u prostoru V^3: vektor okomit na dva zadana vektora ne može ležati u njihovoj ravnini.

Teorem 3. Ortogonalni vektori u unitarnom prostoru (različiti od nul vektora) linearno su nezavisni.

Dokaz. Napišimo linearnu kombinaciju ortogonalnih vektora koja iščezava:

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Pomnožimo ovu relaciju skalarno s vektorom $\mathbf{x}_1$ i iskoristimo svojstvo linearnosti skalarnoga umnoška:

$$\alpha_1\langle\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{x}_1\rangle + \alpha_2\langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{x}_1\rangle + \ldots + \alpha_k\langle\mathbf{x}_k\,|\,\mathbf{x}_1\rangle = 0.$$

Svi umnošci osim prvoga jednaki su nuli (zbog ortogonalnosti). Relacija prelazi u:

$$\alpha_1\|\mathbf{x}_1\|^2 = 0$$

odakle zaključujemo da vrijedi $\alpha_1 = 0$. Na isti način možemo zaključiti da su i svi ostali koeficijenti jednaki nuli. Stoga su vektori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ linearno nezavisni. ◄

Rastav vektora po ortogonalnoj bazi. U poglavlju §7 smo naučili da je problem određivanja komponenti nekoga vektora u rastavu po odabranoj bazi ekvivalentan s rješavanjem linearnoga sustava, dakle poprilično zahtijevan posao — *osim ako je promatrana baza ortogonalna*! Ortogonalnost baze pretvara otežak zadatak u trivijalan. Naime, iz prikaza

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$$

skalarnim množenjem s vektorom $\mathbf{e}_1$ zbog pretpostavljene ortogonalnosti slijedi

$$\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{e}_1\rangle = x_1\|\mathbf{e}_1\|^2$$

i slično za preostale koeficijente.

Teorem 4. Neka je $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ ortogonalna baza u unitarnom prostoru X. Svaki se vektor $\mathbf{x}\in X$ može prikazati u obliku

$$\mathbf{x} = \frac{\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{e}_1\rangle}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1 + \frac{\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{e}_2\rangle}{\|\mathbf{e}_2\|^2}\mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{e}_n\rangle}{\|\mathbf{e}_n\|^2}\mathbf{e}_n. \tag{12}$$

Vidimo da je za određivanje komponenti vektora dovoljno izračunati n skalarnih umnožaka (vrijednosti normi u nazivniku ne ovise o vektoru $\mathbf{x}$ i obično su unaprijed poznate).

Ova je formula utoliko važnija jer se može poopćiti i na beskonačno-dimenzionalne prostore, gdje pojam linearnoga sustava gubi uobičajeni smisao. Tim se problemom bavi *Fourierova analiza*, grana matematike od velikoga interesa u tehnici.

10.2. Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije

Grammova determinanta. Pokazali smo, koristeći skalarni umnožak, da su ortogonalni vektori linearno nezavisni. Iskažimo sad kriterij za nezavisnost vektora u unitarnom prostoru, a koji nisu nužno ortogonalni. Neka su $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ linearno nezavisni vektori. Onda linearna kombinacija

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

iščezava samo ako su svi koeficijenti jednaki nuli. Pomnožimo ovu jednakost skalarno redom s vektorima $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$. Dobivamo homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{x}_1\rangle\,\lambda_1 + \langle\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{x}_2\rangle\,\lambda_2 + \ldots + \langle\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{x}_n\rangle\,\lambda_n &= \mathbf{0},\\ \langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{x}_1\rangle\,\lambda_1 + \langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{x}_2\rangle\,\lambda_2 + \ldots + \langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{x}_n\rangle\,\lambda_n &= \mathbf{0},\\ &\vdots\\ \langle\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{x}_1\rangle\,\lambda_1 + \langle\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{x}_2\rangle\,\lambda_2 + \ldots + \langle\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{x}_n\rangle\,\lambda_n &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

po nepoznanicama $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ koji ima samo trivijalno rješenje. No, to se događa ako i samo ako je determinanta sustava različita od nule. Ta se determinanta označava simbolom $\Gamma(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ i naziva **Grammova determinanta**.

$$\Gamma(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) := \begin{vmatrix}\langle\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{x}_1\rangle & \langle\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{x}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{x}_n\rangle\\ \langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{x}_1\rangle & \langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{x}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{x}_n\rangle\\ \vdots & & & \\ \langle\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{x}_1\rangle & \langle\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{x}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{x}_n\rangle\end{vmatrix}.$$

Ponovimo zaključak

Teorem 5. Vektori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ su linearno nezavisni onda i samo onda ako je Gramova determinanta $\Gamma(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ različita od nule.

— ◆ —

Postupak ortogonalizacije. Naučili smo određivati bazu u nekim važnim prostorima, poput jezgre linearnog operatora. Sad ćemo naučiti kako vektore baze možemo odabrati da budu *ortogonalni*. Opisat ćemo općeniti algoritam za zamjenjivanje linearno nezavisnih vektora međusobno ortogonalnim vektorima. Taj se postupak naziva **Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije**.

Pretpostavimo da su $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ bilo koji linearno nezavisni vektori. Definirajmo

$$\mathbf{e}_1 := \mathbf{x}_1.$$

Vektor $\mathbf{e}_2$ ćemo izabrati tako da on zadovoljava sljedeća dva svojstva:

- okomit je na $\mathbf{e}_1$,
- potprostor $L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ podudara se s potprostorom $L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$,
- sustav $(O;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ ima istu orijentaciju kao i sustav $(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$.

Sva ta svojstva zadovoljava sljedeći vektor:

$$\mathbf{e}_2 := \mathbf{x}_2 - \frac{\langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{e}_1\rangle}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1.$$

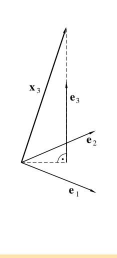
Treći vektor dobivamo formulom

$$\mathbf{e}_3 := \mathbf{x}_3 - \frac{\langle\mathbf{x}_3\,|\,\mathbf{e}_1\rangle}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1 - \frac{\langle\mathbf{x}_3\,|\,\mathbf{e}_2\rangle}{\|\mathbf{e}_2\|^2}\mathbf{e}_2,$$

i općenito,

$$\mathbf{e}_k := \mathbf{x}_k - \frac{\langle\mathbf{x}_k\,|\,\mathbf{e}_1\rangle}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1 - \ldots - \frac{\langle\mathbf{x}_k\,|\,\mathbf{e}_{k-1}\rangle}{\|\mathbf{e}_{k-1}\|^2}\mathbf{e}_{k-1}.$$

Ukoliko nakon svakog koraka vektor $\mathbf{e}_k$ zamijenimo s $\mathbf{e}_k/\|\mathbf{e}_k\|$, dobit ćemo ortonormirani niz istih svojstava.



Sl. 10.1. Vektor $\mathbf{e}_k$ dobivamo tako da od $\mathbf{x}_k$ oduzmemo njegovu projekciju na potprostor razapet s prvih $k-1$ vektora

Primjer 2. Ortogonalizirajmo skup $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3\}\subset\mathbf{R}^3$ ako je $\mathbf{x}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{x}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{x}_3 = (1,0,0)$.

► Prema navedenom algoritmu imamo

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{x}_1 = (1,1,1),\\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\langle\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{e}_1\rangle}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1\\ &= (1,1,1) - \tfrac{2}{3}(1,1,1) = (\tfrac13,\tfrac13,-\tfrac23)\\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\langle\mathbf{x}_3\,|\,\mathbf{e}_1\rangle}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1 - \frac{\langle\mathbf{x}_3\,|\,\mathbf{e}_2\rangle}{\|\mathbf{e}_2\|^2}\mathbf{e}_2,\\ &= (1,0,0) - \tfrac13(1,1,1) - \frac{\frac13}{\frac23}(\tfrac13,\tfrac13,-\tfrac23) = (\tfrac12,-\tfrac12,0).\end{aligned}$$

Dobiveni vektori su okomiti. Pritom vrijedi $L(\mathbf{e}_1) = L(\mathbf{x}_1)$, $L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, $L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$. Također, svi sustavi imaju istu orijentaciju.

Rezultat ortogonalizacije bitno ovisi o poretku vektora koje ortogonaliziramo. Razlog tome je upravo zahtjev da u svakom koraku k vrijedi $L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k) = L(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k)$. Tako na primjer, ako u gornjem primjeru izaberemo poredak $\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_1$ dobit ćemo za rezultat niz $(1,1,0)$, $(\tfrac12,-\tfrac12,0)$, $(0,0,1)$. Uzmemo li pak poredak $\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1$, ortogonalizacijom dobivamo kanonsku bazu u $\mathbf{R}^3$. Provjerite! ◄

— ◆ —

Ovaj postupak možemo zamisliti i u ponešto izmjenjenim okolnostima. Zamislimo da imamo nekoliko ortogonalnih vektora $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k\}$ koji ne čine bazu. Lako je zamisliti postupak koji će te vektore nadopuniti do *bilo koje* baze prostora: dovoljno je dodavati jedan po jedan vektor $\{\mathbf{x}_{k+1},\ldots,\mathbf{x}_n\}$ koji se ne nalazi u potprostoru razapetom s već odabranim vektorima. Sad Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonaliziramo zadani skup. Pri tom prvih k vektora ostaje nepromijenjeno (jer su već ortogonalni). Time smo dokazali sljedeći rezultat.

Teorem 6. Svaki se ortogonalni (ortonormirani) skup $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k$ može nadopuniti do ortogonalne (ortonormirane) baze.

10.3. Simetrične matrice

10.3.1. Skalarni umnožak i simetrične matrice

Mnogi fizikalni problemi koje zapisujemo s pomoću matrica uključuju račun sa *simetričnim* matricama — svojstvo i zakoni simetrije spadaju u osnovne zakone prirode. Mi ćemo u ovoj točki navesti neka najvažnija svojstva koja posjeduju takve matrice.

Simetrične matrice. Hermitske matrice

Kvadratna matrica je **simetrična** ako za njezine elemente vrijedi

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i,j,$$

odnosno, ako vrijedi

$$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}.$$

Za matricu s *kompleksnim* elementima kažemo da je **hermitska matrica**, ako za njezine elemente vrijedi

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \qquad \forall i,j.$$

Primijetimo da se pojam hermitske matrice podudara sa simetričnom matricom, ako su matrični elementi realni.

Prostor $\mathbf{R}^n$ često poistovjećujemo s prostorom vektor-stupaca dimenzije n:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) \longleftrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

Imajući to poistovjećivanje u pameti, skalarni umnožak dvaju vektora iz $\mathbf{R}^n$ možemo interpretirati pomoću matričnog umnoška vektor-retka s vektor-stupcem:

$$\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^\top\mathbf{y}. \tag{13}$$

jer je

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = [x_1,\ldots,x_n]\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}.$$

Ova se činjenica često koristi. U mnogim se priručnicima rabi samo ovakav matrični zapis skalarnoga umnoška.

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica. Onda je definiran skalarni umnožak vektora $\mathbf{Ax}$ i vektora $\mathbf{y}$ i vrijedi

$$\langle\mathbf{Ax}\,|\,\mathbf{y}\rangle = (\mathbf{Ax})^\top\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top\mathbf{A}^\top)\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top(\mathbf{A}^\top\mathbf{y}) = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{A}^\top\mathbf{y}\rangle. \tag{14}$$

Pri tome smo koristili svojstvo operacije transponiranja.

Za simetričnu matricu $\mathbf{A}$ pak vrijedi

$$\langle\mathbf{Ax}\,|\,\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{A}^\top\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{Ay}\rangle. \tag{15}$$

10.3.2. Vlastite vrijednosti simetričnih matrica

Vlastite vrijednosti su nultočke karakterističnog polinoma. Znamo da su nultočke nekog polinoma u principu kompleksni brojevi.

Ako se ograničimo samo na realne skalare, moraju li onda postojati vlastite vrijednosti simetrične matrice? Odgovor je više no potvrdan:

Teorem 7. Ako je $\mathbf{A}$ simetrična, onda su sve njezine vlastite vrijednosti realne.

Dokaz. Pretpostavimo da je λ vlastita vrijednost, $\mathbf{x}$ odgovarajući vlastiti vektor. Za trenutak ćemo pretpostaviti (opreznosti radi!) da računamo s kompleksnim skalarima. Iz relacije $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ slijedi:

$$\langle\mathbf{Ax}\,|\,\mathbf{x}\rangle = \langle\lambda\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle = \lambda\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle.$$

S druge strane, početni je skalarni umnožak jednak, zbog simetričnosti matrice $\mathbf{A}$, svojstva skalarnoga umnoška (7) i relacije (15):

$$\langle\mathbf{Ax}\,|\,\mathbf{x}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{Ax}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\lambda\mathbf{x}\rangle = \overline{\lambda}\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle.$$

Usporedbom obaju rezultata zaključujemo da mora vrijediti $\lambda = \overline{\lambda}$, vlastita je vrijednost λ realna! ◄

— ◆ —

Simetrična matrica ima realne vlastite vektore. Čim je vlastita vrijednost realna, realan je i vlastiti vektor, homogeni sustav s realnom singularnom matricom uvijek ima realno rješenje, budući da pri njegovu računanju primjenjujemo samo algebarske operacije s realnim brojevima.

— ◆ —

Pokazali smo da su vlastiti vektori koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima međusobno linearno nezavisni. Za simetrične matrice ponovo vrijedi mnogo više:

Teorem 8. Ako je $\mathbf{A}$ simetrična, tad su vlastiti vektori koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima međusobno okomiti.

Dokaz. Neka su $\mathbf{x}_j$ i $\mathbf{x}_k$ vlastiti vektori koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima λ_j i λ_k. Tad imamo, zbog svojstva simetričnosti

$$\langle\mathbf{A}\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_k\rangle = \langle\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{A}\mathbf{x}_k\rangle.$$

To su vlastiti vektori, pa iz gornje relacije slijedi

$$\langle\lambda_j\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_k\rangle = \langle\mathbf{x}_j\,|\,\lambda_k\mathbf{x}_k\rangle.$$

Broj λ_k je realan, možemo ga izlučiti ispred skalarnoga umnoška. Gornja relacija daje

$$(\lambda_j - \lambda_k)\langle\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_k\rangle = 0.$$

Po pretpostavci je $\lambda_j \neq \lambda_k$, pa mora biti $\langle\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_k\rangle = 0$, čime je teorem dokazan. ◄

— ◆ —

Cilj nam je dokazati da je svaka simetrična matrica slična dijagonalnoj. U tu svrhu, nužno je i dovoljno pokazati da postoji baza koju čine vlastiti vektori matrice. Gornji je teorem velik korak na tome putu. Međutim, težak problem je odgovoriti na pitanje: što se događa s onim vlastitim vektorima koji odgovaraju istoj vlastitoj vrijednosti.

Postavit ćemo ovo pitanje preciznije:

- Ako je $\mathbf{A}$ simetrična matrica i λ njezina vlastita vrijednost kratnosti veće od 1, kolika je dimenzija odgovarajućega vlastitog potprostora?

Nagoviješteni odgovor: jednaka kratnosti vlastite vrijednosti — nije jednostavno dokazati. Dokazat ćemo da ako neka vlastita vrijednost ima kratnost veću od 1, recimo k, tad odgovarajući vlastiti potprostor mora biti k-dimenzionalan! Unutar njega možemo (recimo, Gramm-Schmidtovim postupkom) pronaći k međusobno okomitih vektora. To znači da će postojati ortonormirana baza koju čine vlastiti vektori matrice.

Dokaz ove tvrdnje odložit ćemo za trenutak. Pri toga, upoznajmo se sa svojstvima matrice prijelaza između dviju ortonormiranih baza.

10.4. Ortogonalne matrice

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica. Pokazat ćemo u nastavku da postoji ortogonalna baza koju čine njezini vlastiti vektori. Učinimo još mali dodatni napor i ortonormirajmo ih. Vidjet ćemo da će nam se trud isplatiti. Neka je $\mathbf{S}$ matrica čiji su stupci ortonormirani vektori.

Neka je $\mathbf{A}$ matrica nekog operatora $A : \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ u standardnoj, ortonormiranoj bazi $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ prostora $\mathbf{R}^n$. Ako je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, pokazat ćemo da postoji baza koju sačinjavaju njezini vlastiti vektori, koji su k tome ortogonalni. Možemo ih normirati, pa ćemo dobiti bazu $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$.

Označimo matricu prijelaza iz prve baze u drugu sa $\mathbf{S}$. Njezini su stupci vektori $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$.

Ortogonalna matrica

Za matricu $\mathbf{S}$ kažemo da je **ortogonalna** ako su njezini stupci ortonormirani vektori.

Budući da vrijedi

$$A(\mathbf{v}_k) = \lambda_k\mathbf{v}_k,$$

matrica operatora A u bazi vlastitih vektora bit će dijagonalna. Pri tom znamo da će vrijediti

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

U ovoj relaciji je važno znati da *ne moramo računati inverz matrice* $\mathbf{S}$. Naime, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 9. Ako je $\mathbf{S}$ ortogonalna, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^\top$.

Dokaz. Da dokažemo ovo svojstvo, pogledajmo umnožak $\mathbf{S}^\top\mathbf{S}$. Element ovoga umnoška na mjestu (i,j) jednak je skalarnom umnošku i-toga retka matrice $\mathbf{S}^\top$ i j-toga stupca matrice $\mathbf{S}$, odnosno, skalarnom umnošku i-tog i j-tog stupca matrice $\mathbf{S}$. Po pretpostavci, taj je umnožak jednak δ_{ij}, što dokazuje teorem. ◄

Pomniji pogled na ovaj teorem pokazuje da vrijedi i obrat: $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^\top$ ako i samo ako je $\mathbf{S}$ ortogonalna. No, promijenimo li poredak matrica u gornjem umnošku, dobivamo $\mathbf{SS}^\top = \mathbf{I}$. Zaključujemo da su i retci matrice $\mathbf{S}$ ortonormirani! Ovaj je rezultat potpuno neočekivan: slažući n međusobno ortonormiranih vektora u stupce jedne matrice, njezini retci također moraju biti ortonormirani!

— ◆ —

Kolika je determinanta ortogonalne matrice? Relacija $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^\top$, u usporedbi s izrazom za inverznu matricu s pomoću determinante i adjunkte, sugerira valjanost sljedećega teorema

Teorem 10. Ako je $\mathbf{S}$ ortogonalna, njezina je determinanta jednaka 1 ili -1.

Dokaz. Vrijedi $\mathbf{SS}^\top = \mathbf{I}$, pa po Binet-Cauchyjevom teoremu dobivamo $\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{S}^\top) = 1$. Međutim, determinanta se ne mijenja transponiranjem, stoga je $[\det(\mathbf{S})]^2 = 1$ i odavde slijedi tvrdnja.

Primjer 3. Odredimo sve ortogonalne matrice drugoga reda.

► Neka je $\mathbf{S} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ortogonalna matrica. Što se može reći o njezinim elementima? Ova matrica zadovoljava jednakost $\mathbf{SS}^\top = \mathbf{I}$, dakle

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Odavde slijedi

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \qquad ac + bd = 0.$$

Nadalje, vrijedi $\det(\mathbf{S}) = ad - bc = \pm1$. Promotrimo sad dva moguća slučaja

1. slučaj. $\det(\mathbf{S}) = 1$.

Četiri su jednadžbe koje zadovoljavaju koeficijenti: $a^2+b^2 = 1$, $c^2+d^2 = 1$, $ac+bd = 0$ i $ad-bc = 1$. Sjetimo li se da su i stupci matrice ortonormirani, možemo dopisati još tri(!): $a^2+c^2 = 1$, $b^2+d^2 = 1$, $ab+cd = 0$. Dakako, mnoge među njima su zavisne.

Rješenje ovoga sustava može se zapisati u obliku: $d = a$, $c = -b$, $b^2 = 1 - a^2$. Dakle, matrica ima oblik

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}a & -c\\ c & a\end{bmatrix}$$

pri čemu je $|a| \leqslant 1$ i $c^2 = 1 - a^2$. No, to znači da postoji kut φ takav da je $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$ i matrica ima oblik

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Dakle, ortogonalne matrice drugoga reda, s pozitivnom determinantom predstavljaju matricu rotacije za kut φ.

2. slučaj. Ako je $\det(\mathbf{S}) = -1$, tad sličnim razmatranjem dolazimo do formule

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Ova matrica opisuje simetriju s obzirom na pravac koji s realnom osi zatvara kut $\varphi/2$. ◄

— ◆ —

Ortogonalne matrice čuvaju normu. Naime, za ortogonalnu matricu $\mathbf{S}$ i bilo koji vektor $\mathbf{x}$ vrijedi

$$\|\mathbf{Sx}\|^2 = \langle\mathbf{Sx}\,|\,\mathbf{Sx}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{S}^\top\mathbf{Sx}\rangle = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2.$$

10.5. Dijagonalizacija simetrične matrice

Dokažimo sad prije najavljeni teorem.

Teorem 11. Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ posjeduje točno n realnih vlastitih vrijednosti (brojeći njihovu višestrukost) i n međusobno okomitih vlastitih vektora. Stoga je ona slična dijagonalnoj matrici. Dakle, postoji ortogonalna matrica $\mathbf{S}$ i realni brojevi $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tako da je

$$\mathbf{S}^\top\mathbf{AS} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Dokaz. Označimo s $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ kanonsku bazu prostora $\mathbf{R}^n$. Izaberimo normirani jedinični vektor $\mathbf{v}_1$ koji odgovara vlastitoj vrijednosti λ_1. Nadopunimo ga (Gramm-Schmidtovim postupkom) do ortonormirane baze vektorima $\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n$. Matrica $\mathbf{S}_1 = [\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n]$ je ortogonalna matrica. Stavimo sad $\mathbf{A}_1 = \mathbf{S}_1^\top\mathbf{AS}_1$. Imamo

$$\mathbf{A}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{S}_1^\top\mathbf{A}(\mathbf{S}_1\mathbf{e}_1) = \mathbf{S}_1^\top\mathbf{Av}_1 = \mathbf{S}_1^\top(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1.$$

Ovaj je vektor prvi stupac matrice $\mathbf{A}_1$. Primijetimo nadalje da je $\mathbf{A}_1$ simetrična matrica: $\mathbf{A}_1^\top = (\mathbf{S}_1^\top\mathbf{AS}_1)^\top = \mathbf{S}_1^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{S}_1^{\top\top} = \mathbf{S}_1^\top\mathbf{AS}_1$. Zato je i njezin prvi redak istoga oblika. Dakle, imamo

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{S}_1^\top\mathbf{AS}_1 = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n}\\ \vdots & & & \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn}\end{bmatrix} \tag{16}$$

Sad nastavljamo dokaz matematičkom indukcijom. Ako je $n = 2$, ova je matrica već dijagonalna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve realne simetrične matrice reda $n-1$. Tad se realna simetrična matrica $\mathbf{B}$ reda $n-1$ koja se pojavljuje u (16) može dijagonalizirati. To znači da postoji ortogonalna matrica $\mathbf{S}_2$ takva da je

$$\mathbf{S}_2^\top\mathbf{BS}_2 = \begin{bmatrix}\lambda_2 & \ldots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

sad zaključujemo da je i matrica $\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{bmatrix}$ ortogonalna, jer su joj stupci očigledno ortonormirani. Umnožak dviju ortogonalnih matrica je ortogonalna matrica, zato je i matrica

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{bmatrix}$$

ortogonalna. Za nju vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^\top\mathbf{AS} &= \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^\top\end{bmatrix}\mathbf{S}_1^\top\mathbf{AS}_1\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^\top\mathbf{BS}_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Time je teorem dokazan. ◄

Evo još jedne interesantne posljedice ovoga teorema.

Teorem 12. Za svaku simetričnu matricu postoji ortonormirana baza $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ u $\mathbf{R}^n$ takva da je

$$\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{e}_i\rangle\,\mathbf{e}_i.$$

Dokaz. Riječ je o bazi koju čine normirani vlastiti vektori te matrice. U toj bazi (zapravo u bilo kojoj ortonormiranoj) vektor $\mathbf{x}$ ima prikaz

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{e}_i\rangle\,\mathbf{e}_i$$

i budući da su vektori vlastiti za matricu $\mathbf{A}$, to vrijedi

$$\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n}\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{e}_i\rangle\,\mathbf{Ae}_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{e}_i\rangle\,\mathbf{e}_i.$$

Primjer 4. Svedimo na dijagonalnu formu matricu

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

► Njen je karakteristični polinom

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

i matrica ima dvije različite vlastite vrijednosti, $\lambda_1 = 4$ i (dvostruku) $\lambda_2 = 1$.

Vlastiti vektor koji odgovara vrijednosti $\lambda_1 = 4$ dobivamo iz sustava

$$\left.\begin{aligned}2x - y - z &= 0\\ -x + 2y - z &= 0\\ -x - y + 2z &= 0\end{aligned}\right\} \implies x = y = z, \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Vlastitoj vrijednosti $\lambda_2 = 1$ odgovara dvodimenzionalni vlastiti potprostor. Rješavanjem sustava dobivamo

$$\left.\begin{aligned}-x - y - z &= 0\\ -x - y - z &= 0\\ -x - y - z &= 0\end{aligned}\right\} \implies x = -y - z$$

te se opće rješenje može napisati u obliku

$$\mathbf{e} = \beta\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Svaki vektor ovoga oblika je vlastiti, sa vlastitom vrijednošću 1.

Primijetimo da pri tom vrijedi $\mathbf{e}_1\mathbf{e} = 0$, vektor $\mathbf{e}_1$ okomit je na svaki vektor iz toga potprostora. Da bismo odredili bazu koju čine međusobno okomiti vektori, moramo odrediti dva okomita vektora iz toga potprostora. To nisu vektori $\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ koji razapinju ovaj potprostor!

Za vektor $\mathbf{e}_2$ možemo uzeti bilo koji vektor iz tog potprostora. Recimo

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Vektore $\mathbf{e}_3$ potražimo u obliku

$$\mathbf{e}_3 = \beta\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},$$

pri čemu ćemo koeficijente odrediti tako da on bude okomit na $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \beta + \gamma + \beta = 0 \implies \gamma = -2\beta.$$

Dakle,

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}.$$

Dakako da ovo nije jedini mogući izbor vektora. Krenuvši od bilo kojega drugoga vektora $\mathbf{e}_2$ iz ovoga potprostora, možemo odrediti njemu okomit $\mathbf{e}_3$.

S ovim izborom postupamo dalje na sljedeći način. Načinimo ortonormiranu bazu $\widehat{e}_1,\widehat{e}_2,\widehat{e}_3$:

$$\widehat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \qquad \widehat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \qquad \widehat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}.$$

Tad je matrica $\mathbf{S}$ prijelaza iz stare u novu bazu definirana na način

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{-2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

ortogonalna, i za nju vrijedi

$$\mathbf{S}^\top\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{S} = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$ ◄

[1] engl. *scalar product*, njem. *Skalarprodukt (inneres Produkt)*, franc. produit scalaire, rus. скалярное произведение, srp. *skalarni proizvod*.