

Linearna algebra - 3. auditorne vježbe

1. Izračunajte determinantu matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & a \\ a & 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte determinantu matrice \mathbf{A} . Za koje vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $\det \mathbf{A} = 0$?

3. Neka su \mathbf{A} i \mathbf{B} kvadratne matrice reda 5 te neka je $\det \mathbf{A} = 2$ i $\det \mathbf{B} = 3$. Izračunajte

$$\det [(\mathbf{AB})^{-1}(5\mathbf{A})(\mathbf{BA})^{\top}].$$

4. Neka je n neparan broj i \mathbf{A} kvadratna matrica reda n za koju vrijedi $\mathbf{A}^{\top} = -\mathbf{A}$. Dokažite da \mathbf{A} nije invertibilna matrica.
5. Zadan je niz matrica koje na glavnoj dijagonali imaju trojke, neposredno ispod glavne dijagonale jedinice, neposredno iznad glavne dijagonale dvojke, a svugdje ostalo nule:

$$\mathbf{A}_1 = [3], \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \dots$$

Za $n \in \mathbb{N}$ označimo $D_n = \det \mathbf{A}_n$. Korištenjem kofaktorske formule za izračun determinante odredite a i b u rekurzivnoj formuli

$$D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}.$$

6. Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Riješite matričnu jednadžbu

$$(\mathbf{X} + \mathbf{A})^2 = [(\mathbf{X} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}^{-1}]^{-1} + \mathbf{B}.$$

7. Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riješite matričnu jednadžbu

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A} + 2\mathbf{I}.$$