Matematička analiza 1 - Poglavlje 4

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 15. RUJNA 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

4. Elementarne funkcije

U ovom poglavlju dajemo sažet i sustavan pregled tzv. elementarnih funkcija, koje su sve, izuzev hiperboličkih funkcija, obrađivane tijekom srednjoškolskog obrazovanja. Elementarne funkcije su realne funkcije realne varijable u koje ubrajamo polinome, racionalne funkcije, eksponencijalne funkcije, opće potencije, trigonometrijske i hiperboličke funkcije te njihove inverzne funkcije (logaritamske, arkus i area funkcije). U elementarne funkcije spadaju i funkcije dobivene zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem prethodno navedenih elementarnih funkcija. Također, elementarnim funkcijama smatramo i sve dobro definirane kompozicije prethodno navedenih elementarnih funkcija. Među elementarne funkcije međutim ne ubrajamo funkciju *apsolutna vrijednost* $|\cdot|$, kao ni funkciju predznaka *signum* sgn. Prije samog početka popisivanja elementarnih funkcija, promotrimo još nekoliko osnovnih svojstava realnih funkcija realne varijable, koja mogu imati elementarne, ali i neelementarne funkcije.

Ključni pojmovi: svojstva realnih funkcija: parnost, periodičnost, monotonost, prirodna domena, elementarne funkcije: polinomi, racionalne funkcije, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske i hiperboličke funkcije, transformacije grafova: translacija, skaliranje, zrcaljenje.

4.1 Osnovna svojstva realnih funkcija realne varijable

Kvalitativno poznavanje realnih funkcija realne varijable poput rasta ili pada, simetričnosti grafa, ponavljanja s određenim periodom, itd., od izuzetne je važnosti u primjenama, stoga u ovom zasebnom poglavlju proučavamo ta specifična svojstva.

4.1.1 Parnost

Definicija 4.1.1 Za funkciju $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je **parna** ako za sve $x \in D$ vrijedi

$$f(-x) = f(x),$$

odnosno, kažemo da je **neparna**, ako za sve $x \in D$ vrijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Primijetimo, da bi funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ bila parna ili neparna, domena D mora biti simetričan skup s obzirom na 0 (ishodište). Također je evidentno da postoje funkcije koje nisu ni parne ni neparne. Npr. eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ o kojoj će kasnije biti nešto više govora, nije niti parna niti neparna.

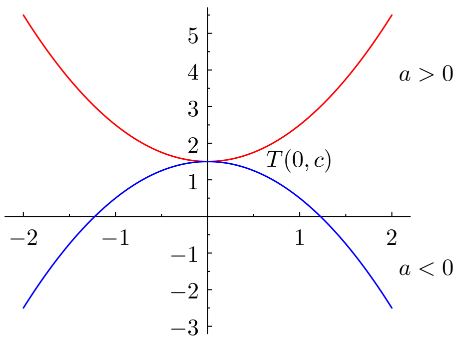
Primjer 4.1 Ispitajmo parnost sljedećih funkcija.

(a) Ispitajte parnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = ax^2 + c$, gdje su a, c dani realni brojevi.

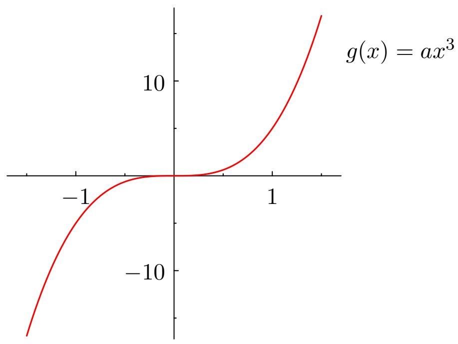
Za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ računamo, $f(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = f(x)$. Stoga je f parna neovisno o izboru koeficijenata a i c (vidi Sliku 4.1a).

(b) Ispitajte parnost funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $g(x) = ax^3$, gdje je $a > 0$ dani realni broj.

Opet za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ računamo, $g(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -g(x)$. Dakle, g je naparna neovisno o $a \in \mathbb{R}$ (vidi Sliku 4.1b).



(a) $f(x) = ax^2 + c$ – parna funkcija.



(b) $g(x) = ax^3$ – neparna funkcija.

Slika 4.1: Parnost funkcija.

Napomena 4.1 Graf parne funkcije simetričan je obzirom na os y (ordinatu), dok je graf neparne funkcije centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Vježba 4.1 Ispitajte parnost sljedećih funkcija:
(a) $x \mapsto |x|$ za sve $x \in \mathbb{R}$ (funkcija apsolutna vrijednost),
(b) $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$, gdje je $\operatorname{sgn}(x) = 1$ za $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ za $x < 0$ i $\operatorname{sgn}(x) = 0$ za $x = 0$ (funkcija predznaka).

4.1.2 Periodičnost

Definicija 4.1.2 Za funkciju $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je **periodička s periodom** T, ako postoji $T > 0$ takav da za sve $x \in D$ vrijedi

$$f(x+T) = f(x)\,. \tag{4.1}$$

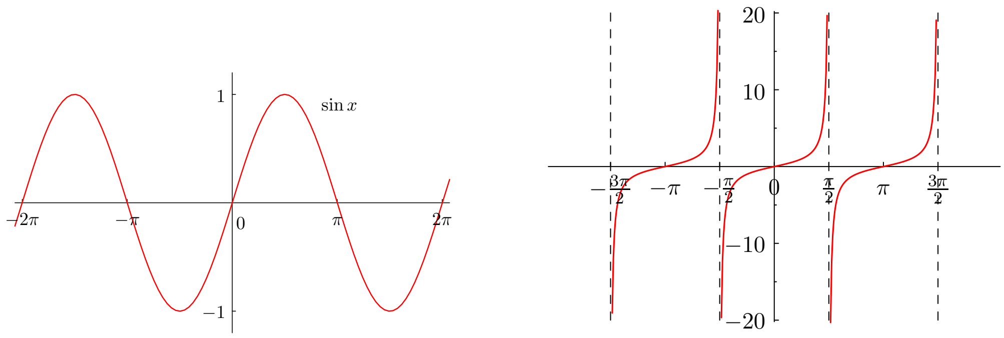
Najmanji T za koji vrijedi (4.1) nazivamo *temeljni period* (ako takav postoji). ■

Primijetimo da domena periodičke funkcije s periodom T nužno ima sljedeće svojstvo: ako je $x \in D$, onda je nužno i $x+T \in D$. Odatle slijedi da je domena periodičke funkcije neomeđen skup.

■ **Primjer 4.2** (a) Funkcija sinus, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o kojoj će više govora biti u odjeljku 5.4, periodička je s periodom $T = 2k\pi$, gdje $k \in \mathbb{N}$ označava proizvoljan prirodan broj. Temeljni period funkcije sinus je 2π.

(b) Funkcija tangens, $\operatorname{tg} : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, periodička je s periodom $T = n\pi$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan prirodan broj, dok je temeljni period funkcije tangens jednak π.

■



(a) sinus (b) tangens

Slika 4.2: Periodičke funkcije.

■ **Primjer 4.3** Odredite period funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x + 2)$.
Odredimo najprije skup D na kojem je funkcija f dobro definirana. Kako je $\operatorname{tg}(\pi x+2) = \dfrac{\sin(\pi x+2)}{\cos(\pi x+2)}$, nužno je $\cos(\pi x+2) \neq 0$. Odnosno, x-evi za koje je $\cos(\pi x+2) = 0$ ne mogu biti u domeni D funkcije f. Kako je $\cos(\pi x+2) = 0$ za sve $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi} + k$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$ proizvoljan, zaključujemo da je nužno $D \subseteq \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} + k\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Odredimo sada period T funkcije f. Računamo $f(x+T) = \operatorname{tg}(\pi(x+T)+2) = \operatorname{tg}(\pi x + 2 + \pi T)$. Zbog

periodičnosti funkcije tg s periodom $n\pi$, jednakost $\mathrm{tg}(\pi x+2+\pi T) = \mathrm{tg}(\pi x+2) = f(x)$ će vrijediti samo ako vrijedi $\pi T = n\pi$, odnosno $T = n$ za $n \in \mathbb{N}$. Stoga je temeljni period funkcije f jednak $T = 1$.

■

Vježba 4.2 Odredite temeljni period funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = 5\sin(2x+8)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

4.1.3 Monotonost

Za kvalitativno poznavanje funkcije od izuzetne je važnosti znati područje gdje ona raste ili pada. U tu svrhu najprije imamo sljedeću definiciju.

Definicija 4.1.3 Za funkciju $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je:

- **rastuća**, ako za sve $x_1,x_2 \in D$ vrijedi implikacija $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **padajuća**, ako za sve $x_1,x_2 \in D$ vrijedi implikacija $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **monotona**, ako je rastuća ili padajuća.

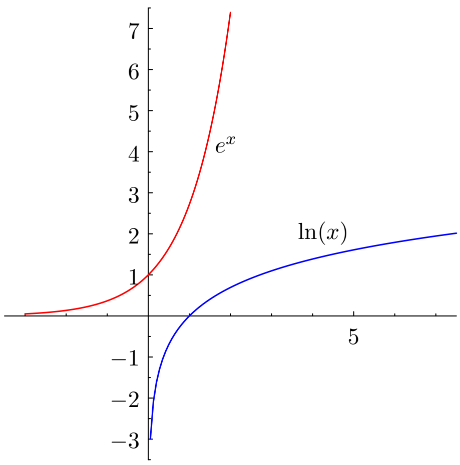
■

Ako su u gornjoj definiciji pri uspoređivanju funkcijskih vrijednosti zadovoljene stroge nejednakosti, npr. $\forall x_1,x_2 \in D,\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$, tada govorimo o strogo rastućim ili padajućim, odnosno strogo monotonim funkcijama.

■ **Primjer 4.4** Eksponencijalna i logaritamska funkcija s bazom e su (strogo) rastuće funkcije (vidi Sliku 4.3). ■

■ **Primjer 4.5** Funkcija $g(x) = 5x^3$ (vidi Sliku 4.1b) je (strogo) rastuća, dok je funkcija $h(x) = -3x^3$ (strogo) padajuća. ■

Većina funkcija nisu niti rastuće niti padajuće. Npr. kvadratna funkcija $f(x) = x^2$, zatim periodičke funkcije sinus i tangens, nisu ni rastuće ni padajuće na svojoj domeni. Međutim, postoje intervali $I \subset \mathbb{R}$ (područja) takvi da su restrikcije tih funkcija na I rastuće ili padajuće. Tako je na primjer kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ restringirana na $I = \langle 2,10\rangle$ strogo rastuća, dok je restrikcija iste funkcije na $I = \langle -\infty,-1\rangle$ strogo padajuća. Funkcije



Slika 4.3: Eksponencijalna i logaritamska funkcija.

s takvim svojstvima onda zovemo **po dijelovima monotone** funkcije (usp. Slika 4.5).

Vježba 4.3 Navedite neke intervale strogog rasta/pada funkcija $\sin(x)$ i $\mathrm{tg}(x)$.

Napomena 4.2 Ako je funkcija strogo monotona, onda je ona injekcija.
Dokaz tvrdnje: Neka je f strogo rastuća funkcija, onda se po definiciji strogog rasta različitim elementima domene ($x_1 < x_2$) pridružuju različiti elementi kodomene ($f(x_1) < f(x_2)$), tj. funkcija f je po definiciji injekcija. Analogno se vidi za slučaj da je f strogo padajuća funkcija.

O monotonosti kompozicije monotonih funkcija govori nam sljedeći teorem.

Teorem 4.1.1 Neka su $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realne funkcije takve da je $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ dobro definirana. Ako je:

(a) f rastuća i
  - (i) g rastuća, tada je $g \circ f$ rastuća,
  - (ii) g padajuća, tada je $g \circ f$ padajuća,

(b) f padajuća i
  - (i) g rastuća, tada je $g \circ f$ padajuća,
  - (ii) g padajuća, tada je $g \circ f$ rastuća.

Dokaz. Pokažimo slučaj (a.ii). Pretpostavimo da je funkcija f rastuća, a g padajuća. Neka su $x_1, x_2 \in D$ prizvoljni realni brojevi za koje vrijedi $x_1 < x_2$. Kako je f po pretpostavci rastuća, tada je $f(x_1) \leq f(x_2)$. Nadalje, jer je g padajuća, imamo $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$, tj. $(g \circ f)(x_1) \geq (g \circ f)(x_2)$. Dakle, za sve $x_1 < x_2$ slijedi $(g \circ f)(x_1) \geq (g \circ f)(x_2)$, odnosno $g \circ f$ je po definiciji padajuća funkcija. ■

Vježba 4.4 Dokažite ostale slučajeve iz Teorema 4.1.1.

Napomena 4.3 Analogna tvrdnja Teorema 4.1.1 vrijedi i za strogo monotone funkcije.

■ **Primjer 4.6** Ispitajte monotonost sljedećih funkcija:

(a) funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = e^{2x}$;
(b) funkcije $g : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$ zadane s $g(x) = -(\log_{\frac{1}{2}} x)^3$.

(a) Funkciju f možemo prikazati kao kompoziciju dviju funkcija, $f = f_2 \circ f_1$, gdje su $f_1(x) = 2x$ i $f_2(x) = e^x$. Kao su funkcije f_1 i f_2 (strogo) rastuće funkcije, prema Teoremu 4.1.1 (a.i) slijedi da i funkcija f (strogo) rastuća.

(b) Funkciju g možemo zapisati kao $g = g_2 \circ g_1$, gdje su $g_1(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ i $g_2(x) = -x^3$. Kako su g_1 i g_2 obje padajuće funkcije, to je prema Teoremu 4.1.1 (b.ii) funkcija g rastuća.

■

Vježba 4.5 Ispitajte monotonost funkcija zadanih s

(a) $f(x) = (1-x)^3$ za sve $x \in \mathbb{R}$,
(b) $g(x) = e^{-(1+x)^3}$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Prema Napomeni 4.2 slijedi, ako je strogo monotona funkcija surjekcija, onda je ona i bijekcija pa ima inverznu funkciju. Možemo li tada nešto zaključiti o ponašanju inverzne funkcije? O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 1 Neka su $D, K \subseteq \mathbb{R}$ i $f : D \to K$ bijekcija. Označimo njoj inverznu funkciju s $f^{-1} : K \to D$. Ako je:

(a) f strogo rastuća, tada je i f^{-1} strogo rastuća,

(b) f strogo padajuća, tada je i f^{-1} strogo padajuća.

Dokaz. Pokažimo tvrdnju pod (a). Pretpostavimo da je f strogo rastuća. Treba pokazati da tada za sve $y_1, y_2 \in K$ vrijedi implikacija

$$y_1 < y_2 \;\Rightarrow\; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) . \tag{4.2}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $y_1, y_2 \in K$ takvi da vrijedi $y_1 < y_2$ i $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Kako je po pretpostavci f rastuća, tada imamo $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, odnosno $y_1 \geq y_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $y_1 < y_2$. Dakle, tvrdnja (4.2) je istinita, odnosno f^{-1} je rastuća funkcija. ■

Vježba 4.6 Dokažite tvrdnju (b) iz prethodne propozicije.

4.1.4 Prirodna domena

Realne funkcije realne varijable, a pogotovo elementarne funkcije, najčešće se zadaju samo preko pravila pridruživanja, odnosno preko formule. Za domenu se tada uzima "najveći" podskup skupa realnih brojeva na kojem je pravilo pridruživanja (formula) dobro definirano, to je tzv. prirodna domena, dok se za kodomenu uzima skup $\mathbb{R}$.

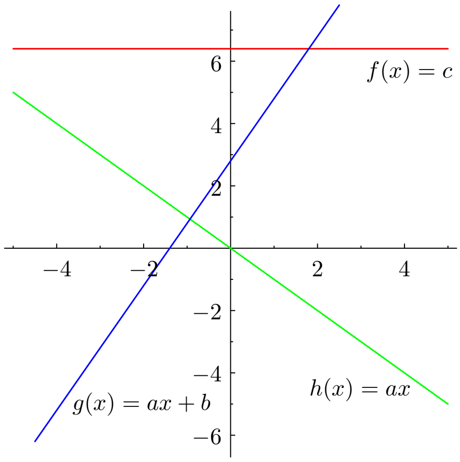
Definicija 4.1.4 **Prirodna domena** ili **prirodno područje definicije** funkcije f je najveći skup realnih brojeva na kojem je funkcija dobro definirana, odnosno najveći skup realnih brojeva na kojem pravilo pridruživanja $x \mapsto f(x)$ ima smisla. Prirodnu domenu funkcije f označavamo s $D(f)$. ■

■ **Primjer 4.7** Prirodna domena kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, jer je kvadriranje $x \mapsto x^2$ dobro definirano za sve $x \in \mathbb{R}$. Međutim, prirodna domena funkcije drugi korijen $x \mapsto \sqrt{x}$ je skup $[0, +\infty\rangle$, jer je drugi korijen inverzna funkcija kvadratne funkcije $f|_{[0,+\infty\rangle} : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$. ■

■ **Primjer 4.8** Prirodna domena funkcije $f(x) = \ln(x+1)$ je skup $\langle -1, +\infty\rangle \subset \mathbb{R}$, jer da bi pravilo pridruživanja bilo dobro definirano, nužno je $x + 1 > 0$. ■

Vježba 4.7 Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Problemom određivanja prirodne domene elementarnih funkcija detaljnije ćemo se baviti u odjeljku 4.6, nakon što napravimo pregled svih osnovnih elementarnih funkcija i njihovih prirodnih domena.



Slika 4.4: Konstantna funkcija f, afina funkcija g i linearna funkcija h.

4.2 Polinomi, racionalne i iracionalne funkcije

Pregled elementarnih funkcija počinjemo od najjednostavnijih funkcija, a to su polinomi i racionalne funkcije. Da bismo izračunali vrijednost polinoma ili racionalne funkcije u nekoj točki, dovoljno je poznavati zbrajanje i množenje realnih brojeva [1]. Iracionalne funkcije zatim dolaze kao inverzne funkcije restrikcija nekih polinoma.

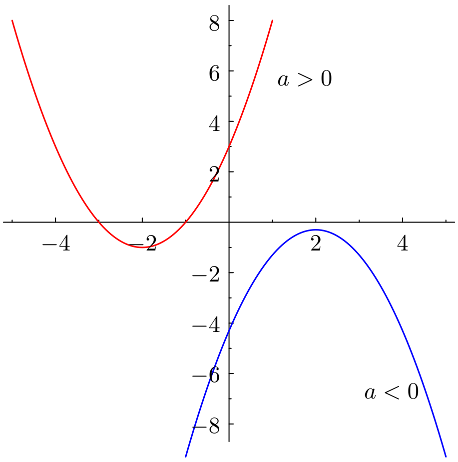
4.2.1 Polinomi

Funkciju $f : D \to K$ koja ima svojstvo $f(x_1) = f(x_2)$ za sve $x_1 \neq x_2 \in D$, bez obzira o kakvim se skupovima D i K radi, nazivamo konstantna funkcija ili kratko **konstanta**. U klasi realnih funkcija realne varijable ($D, K \subseteq \mathbb{R}$), konstantne funkcije dane su formulom $f(x) = c$, gdje je c neki realan broj. Preslikavanje $x \mapsto c$, očito je smisleno definirano za sve $x \in \mathbb{R}$ pa je prirodna domena konstantne funkcije cijeli $\mathbb{R}$, dok je slika jednočlani skup $\{c\}$. Konstantnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu s $f(x) = c$, pri čemu je $c \neq 0$, još nazivamo **polinom nultog stupnja**, jer očito možemo pisati $f(x) = cx^0$. Specijalno, konstantnu funkciju $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, nazivamo **nul-polinom**.

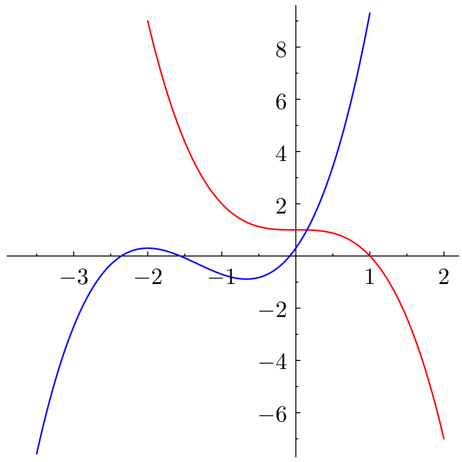
Polinom prvog stupnja ili **afina funkcija** zadana je formulom $f(x) = ax + b$ za sve $x \in \mathbb{R}$, gdje su koeficijenti $a \neq 0$ i b realni brojevi. Ako je koeficijent $a > 0$, funkcija f je strogo rastuća, dok je u slučaju $a < 0$ strogo padajuća. U slučaju kada je odsječak na y-osi $b = 0$, funkciju $f(x) = ax$ nazivamo **linearna funkcija**. Graf afine funkcije je pravac koji nije paralelan s osi x i stoga je slika svake afine funkcije očito cijeli $\mathbb{R}$.

Polinom drugog stupnja ili **kvadratna funkcija** zadana je formulom $f(x) = ax^2 + bx + c$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pri čemu su koeficijenti $a \neq 0$, b i c dani realni brojevi. Graf kvadratne funkcije je parabola, koja je ovisno o predznaku vodećeg koeficijenta a otvorena prema gore ($a > 0$) ili prema dolje ($a < 0$). Tjeme parabole ima koordinate $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$, odakle lako zaključimo da je slika kvadratne funkcije f u slučaju $a > 0$ jednaka $Im(f) =$

[1] Operaciju oduzimanja možemo prikazati pomoću zbrajanja i množenja s -1, dok je dijeljenje zapravo množenje s recipročnim brojem.



(a) Kvadratne funkcije.



(b) Kubne funkcije.

Slika 4.5: Polinomi 2. i 3. stupnja.

$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right\rangle$, dok je u slučaju $a<0$ jednaka $Im(f)=\left\langle-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ (vidi Sliku 4.5a). Kvadratna funkcija ima najviše dvije realne nultočke (računajući njihovu kratnost), a dane su formulom

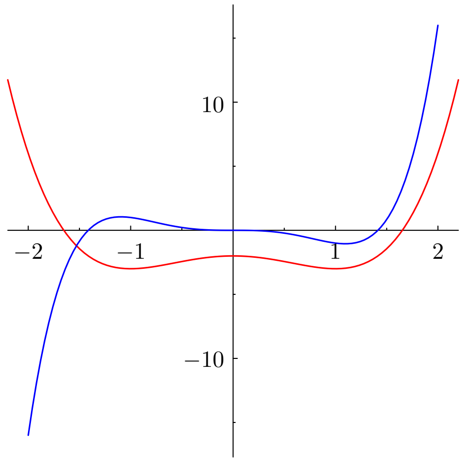
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4.3}$$

U skupu kompleksnih brojeva, kvadratna funkcija ima uvijek ima točno dvije nultočke. U slučaju $b^2-4ac<0$, nultočke x_1 i x_2 čine konjugirano-kompleksni par.

Polinom trećeg stupnja ili **kubna funkcija** zadana je formulom $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ za sve $x\in\mathbb{R}$, pri čemu su koeficijenti $a\neq 0$, b, c i d dani realni brojevi. Za razliku od kvadratne funkcije, slika kubne funkcije uvijek je cijeli skup $\mathbb{R}$ i svaka kubna funkcija ima barem jednu realnu nultočku (vidi Sliku 4.5b) — jednu realnu i dvije kompleksne (konjugirano-kompleksni par) ili sve tri realne (računajući njihovu kratnost). To je posljedica Osnovnog teorema algebre.

Polinom n-tog stupnja je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadana s $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, gdje su koeficijenti $a_n\neq 0$, a_{n-1}, …, a_1, a_0 dani realni brojevi. Za polinome neparnog stupnja lako se vidi da im je slika cijeli skup $\mathbb{R}$, dok za polinome parnog stupnja vrijedi $Im(f)=[m,+\infty\rangle$ ako je $a_n>0$, odnosno $Im(f)=\langle-\infty,M]$ ako je $a_n<0$, pri čemu m i M predstavljaju minimum, odnosno maksimum polinoma parnog stupnja (vidi Sliku 4.6). Metodu za računanje vrijednosti m i M naučit ćemo u poglavlju 10. Za razliku od polinoma 2. stupnja (pa i 4. stupnja), gdje se vrijednosti minimuma m, odnosno maksimuma M mogu izračunati po nekoj formuli u terminima koeficijenata polinoma, u slučaju polinoma 6. stupnja takva formula za m, odnosno M, više ne postoji. To je posljedica činjenice da ne postoji formula poput (4.3) za računanje nultočaka polinoma 5. stupnja (i višeg) u terminima koeficijenata polinoma. Tu tvrdnju je dokazao norveški matematičar Abel[2].

[2]Niels Henrik Abel (1802. - 1829.), norveški matematičar



Slika 4.6: Polinomi 4. i 5. stupnja.

4.2.2 Racionalne funkcije

Racionalna funkcija f zadana je pravilom pridruživanja oblika

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0},$$

gdje su P_n i Q_m polinomi s realnim koeficijentima stupnja n, odnosno m. Prirodna domena ovako definirane racionalne funkcije jednaka je

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{z_1, z_2, \ldots, z_k\},$$

gdje su $z_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, sve realne nultočke polinoma Q_m. Tih nultočaka može biti najviše m računajući pritom njihovu kratnost. Određivanje slike racionalne funkcije nešto je zahtjevniji postupak i za to nam trebaju nova znanja koja ćemo naučiti u poglavlju 10. Ako je stupanj polinoma u brojniku n manji od stupnja polinoma u nazivniku m, onda govorimo o *pravoj racionalnoj funkciji*. Inače, ako je $n \geq m$, polinom P_n možemo podijeliti polinomom Q_m pri čemu dobivamo

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, \tag{4.4}$$

gdje je rezultat dijeljenja polinom S_{n-m} stupnja $n - m$, a polinom $R(x)$ stupnja $< m$ predstavlja ostatak pri dijeljenju. Prikaz (4.4) je jedinstven.

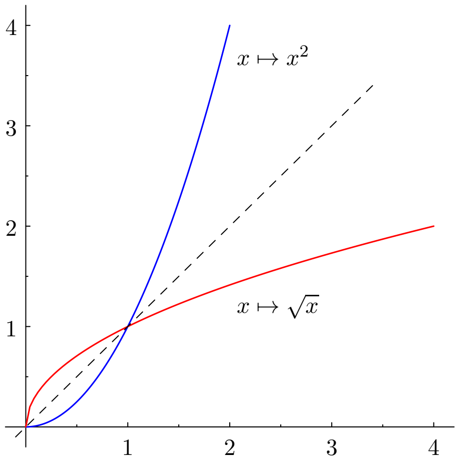
■ **Primjer 4.9** Racionalna funkcija dana je formulom

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 2x}.$$

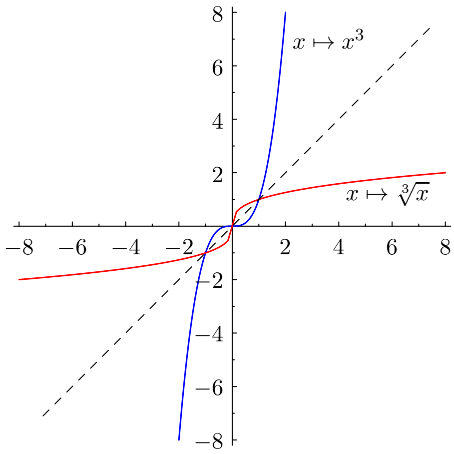
Prirodna domena te funkcije je $D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$. Kako je stupanj brojnika 3 veći od stupnja nazivnika 2, te polinome možemo podijeliti i dobivamo

$$\frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 2x} = x + 2 + \frac{5x + 1}{x^2 - 2x},$$

čime smo racionalnu funkciju $f(x)$ sveli na zbroj afine funkcije $x + 2$ (polinom 1. stupnja) i prave racionalne funkcije $\frac{5x+1}{x^2-2x}$. ■



(a) Funkcija drugi korijen.



(b) Funkcija treći korijen.

Slika 4.7: Iracionalne funkcije.

Vježba 4.8 Podijelite polinome:
(a) $3x^2+2x+1$ s polinomom x^2+x;
(b) x^3 s polinomom x^2+x+1.

4.2.3 Iracionalne funkcije

Funkcija **drugi (kvadratni) korijen**, u oznaci $x \mapsto \sqrt{x}$, definirana je kao inverzna funkcija kvadratne funkcije $f : [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ zadane s $f(x) = x^2$. Stoga su prirodna domena i slika drugog korijena jednake $[0,+\infty\rangle$ te za sve $x \geq 0$ vrijedi

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{i} \quad (\sqrt{x})^2 = x. \tag{4.5}$$

Napomena 4.4 Prva jednakost u (4.5) vrijedi isključivo za $x \geq 0$. Prisjetimo se, općenito za $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\sqrt{x^2} = |x|$. Može li druga jednakost u (4.5) vrijediti za $x \in \mathbb{R}$?

Funkcija **treći (kubni) korijen**, u oznaci $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, inverzna je funkcija kubne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Za razliku od kvadratne funkcije, kubna funkcija je bijekcija iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ pa su prirodna domena i slika trećeg korijena jednake $\mathbb{R}$. Za sve $x \in \mathbb{R}$ tada vrijedi

$$\sqrt[3]{x^3} = x \quad \text{i} \quad (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

Kao je $f(x) = x^3$ rastuća funkcija, to je prema Propoziciji 1 i funkcija treći korijen rastuća (vidi Sliku 4.7b).

Funkcija **n-ti korijen**, u oznaci $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ prirodan broj, definira se kao inverzna funkcija funkcije $f : D \to D$ zadane s $f(x) = x^n$. U slučaju kada je n paran, funkcija f je bijekcija (ima inverz) ako uzmemo $D = [0,+\infty\rangle$. U slučaju kada je n neparan, funkcija f je bijekcija na cijelom $\mathbb{R}$, odnosno $D = \mathbb{R}$. U oba slučaja, radi se o strogo rastućim funkcijama.

Općenito, **iracionalne funkcije** zadane su formulom koja sadrži neke korijene. Preciznije, iracionalne funkcije dobivaju su kao kompozicija n-tih korijena i polinoma ili racionalnih funkcija. Za domenu iracionalnih funkcija (ako nije drugačije navedeno) uzimamo prirodnu domenu, tj. najveći skup realnih brojeva na kojem je dana iracionalna formula dobro definirana. Navedimo neke primjere.

■ **Primjer 4.10** Primjeri iracionalnih funkcija:

$$\text{(a)}\ \ f(x) = \sqrt[5]{3+\sqrt[3]{x^2+1}}\,, \qquad \text{(b)}\ \ g(x) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x^2-2}}\,.$$

Odredimo prirodne domene ovih funkcija.

(a) Funkcija f zadana je preko neparnih korijena i polinoma, čije su prirodne domene $\mathbb{R}$. Stoga je $D(f)=\mathbb{R}$. (b) U definiciji funkcije g javlja se četvrti (parni) korijen i racionalna funkcija. Stoga imamo uvjete $x+1\geq 0$ i $x^2-2\neq 0$, odakle slijedi $D(g)=[-1,+\infty\rangle\setminus\{\sqrt{2}\}$.

■

Vježba 4.9 Zapišite iracionalne funkcije iz prethodnog primjera kao kampozicije korijena i polinoma, odnosno racionalnih funkcija.

Vježba 4.10 Odredite prirodnu domenu iracionalnih funkcija:

$$\text{(a)}\ \ f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{\sqrt[3]{1-2x-x^2}-1}\,, \qquad \text{(b)}\ \ g(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{1-x-x^2}}\,.$$

4.3 Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Sljedeći važan primjer elementarne funkcije je eksponencijalna funkcija koja je od izuzetne važnosti u brojnim primjenama: kamatni račun, biološki rast populacije, poluraspad elemenata, itd. Nadalje u ovom odjeljku navodimo i logaritamsku funkciju, kao inverznu funkciju eksponencijalne funkcije.

4.3.1 Eksponencijalna funkcija

S eksponencijalnim funkcijama susrećemo se od srednjoškolskih dana, znamo neka njihova svojstva i pravila za računanje. Međutim, rigorozna definicija eksponencijalne funkcije nije baš sasvim jednostavna. Kako biste izračunali npr. $3^{2.24017}$ ili 3^{π} (bez računala)? Djelomični odgovor na to pitanje nalazi se niže u tekstu. Za početak, krenimo s jednostavnim primjerom.

■ **Primjer 4.11 — Složeni kamatni račun.** U banci ste posudili svotu od G kuna (glavnica). Kamata na dug u obračunskoj jedinici vremena (dan, mjesec, godina,...) iznosi $K\%$, a ukupni dug po isteku obračunske jedinice vremena tada iznosi

$$G+\frac{K}{100}G = G\left(1+\frac{K}{100}\right) \quad \text{kuna}\,.$$

Kamate se po isteku obračunske jedinice vremena obračunavaju na ukupni dug, tj. nakon dvije obračunske jedinice vremena banci ste dužni iznos

$$G\left(1+\frac{K}{100}\right)+\frac{K}{100}G\left(1+\frac{K}{100}\right) = G\left(1+\frac{K}{100}\right)^2 \quad \text{kuna}\,,$$

odnosno nakon m obračunskih jedinica (npr. mjeseci) biti ćete dužni

$$G\left(1+\frac{K}{100}\right)^m \quad \text{kuna}. \tag{4.6}$$

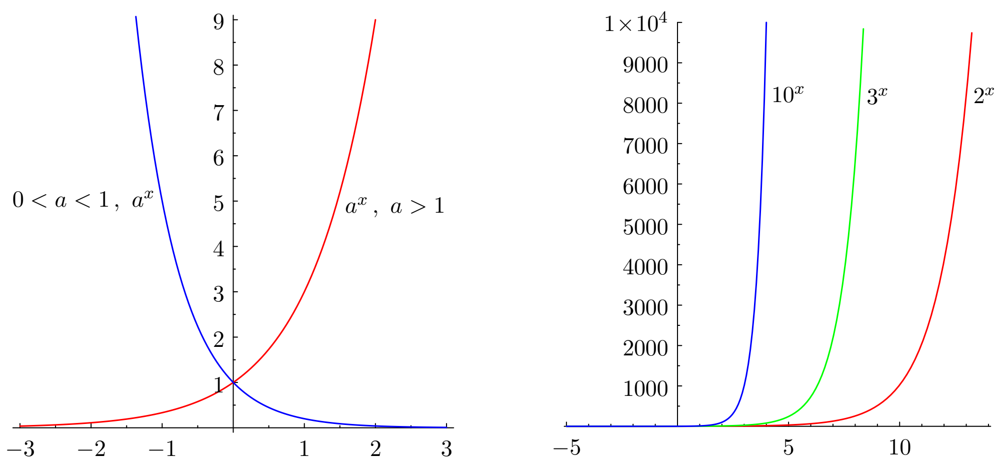
■

Uočimo u izrazu (4.6) da je baza $(1+\frac{K}{100})$ fiksna, a eksponent m varijabilan (on modelira proteklo vrijeme u obračunskim jedinicama). Kada je $m \in \mathbb{N}$ jasno nam je što predstavlja izraz oblika a^m. Tu je upravo $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ puta}}$ i to lako izračunamo. Međutim, postavlja se pitanje što predstavlja i kako izračunati izraz oblika a^x gdje je $a > 0$, a x realan broj? Broj a u izrazu a^x nazivamo **baza**, a x zovemo **eksponent** i on je ovdje promjenjiva veličina (varijabla). Za razliku od polinoma, npr. x^3, gdje je baza varijabilna, a eksponent fiksan, kod eksponencijalnih funkcija a^x te uloge su zamijenjene.

Eksponencijalna funkcija s bazom $a > 0$ $(a \neq 1)$, u oznaci a^x, definirana je na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, a slika joj je $\langle 0, +\infty\rangle$. Ovisno o bazi a funkcija je rastuća ili padajuća — za $0 < a < 1$ funkcija je padajuća, a za $a > 1$ rastuća (vidi Sliku 4.8a). Osnovna svojstva eksponecijalnih funkcija, poznata iz srednje škole, navodimo bez dokaza u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2 Neka su a, b dani pozitivni realni brojevi (baze), tada za sve realne brojeve x, y vrijedi:

- $a^0 = 1\,, a^1 = a\,,$
- $a^x a^y = a^{x+y}\,,$
- $(a^x)^y = a^{xy}\,,$
- $(a \cdot b)^x = a^x b^x\,,$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}\,,$
- $a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x.$



(a) Ovisno o bazi raste ili pada. (b) Brzina rasta ovisno o bazi.

Slika 4.8: Eksponencijalne funkcije.

Sljedeći dodatak sadrži vrlo sažet opis konstrukcije eksponencijalne funkcije od definicije na skupu prirodnih pa do proširenja na skup realnih brojeva. Od čitatelja se ne zahtijeva potpuno razumijevanje tog dijela teksta, već je uloga dodatka ocrtati jednu važnu matematičku paradigmu, koja nadilazi područje analize, a to je *generalizacija (proširenje)* nekog pojma na način da važna svojstva ostanu sačuvana.

Dodatak

Konstrukcija eksponencijalne funkcije. Krenimo od definicije na skupu prirodnih brojeva. Za pozitivan realan broj $a > 0$ (baza) i prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, **n-ta potencija broja** a definira se kao

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ puta}}.$$

Definiramo li nadalje $a^0 := 1$ i $a^n := \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$ za negativne cijele brojeve $n < 0$, dobivamo funkciju $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definiranu s $f_a(n) = a^n$. Ta funkcija zadovoljava sljedeća svojstva:

(a1) $f_a(n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
(a2) $f_a(m+n) = f_a(m) f_a(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$,
(a3) za $a > 1$, f_a je strogo rastuća, a za $0 < a < 1$, f_a je strogo padajuća na $\mathbb{Z}$.

Sljdeći korak je proširenje funkcije f_a sa skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ na skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, ali na način da svojstva (a1)–(a3) ostanu sačuvana, jer to su "lijepa" i važna svojstva funkcije f_a.

Za racionalni broj oblika $r = \dfrac{m}{n}$, gdje su $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, definiramo

$$f_a(r) \equiv a^r := \sqrt[n]{a^m}. \tag{4.7}$$

U ovom koraku najprije je potrebno je pokazati da definicija (4.7) ne ovisi o prikazu racionalnog broja, tj. ako je $r = \dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$, da tada vrijedi $\sqrt[n_1]{a^{m_1}} = \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$ i da proširena funkcija $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ zadovoljava svojstva (a1)–(a3) na skupu $\mathbb{Q}$. Na taj način realizirali smo proširenje eksponencijalne funkcije s bazom a sa skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ na skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Sjedeći korak je proširenje funkcije f_a na skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. To se može realizirati preko konvergentnih nizova, ali to nećemo izlagati na ovom mjestu. Konvergentnim nizovima bavit ćemo se kasnije u poglavlju 6. Dodatak završavamo teoremom koji govori o postojanju i jedinstvenosti eksponencijalne funkcije s bazom a na skupu realnih brojeva kao proširenju funkcije $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Zainteresirani čitatelj može naći dokaz u knjizi [4].

Teorem 4.3.1 Neka je $a > 0$, $a \neq 1$ realan broj. Postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

(a0) $f(r) = f_a(r)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, (f je proširenje od f_a)
(a1) $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
(a2) $f(x+y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
(a3) za $a > 1$, f je strogo rastuća, a za $0 < a < 1$, f je strogo padajuća na $\mathbb{R}$,
(a4) $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ je bijekcija.

Funkcija f je upravo eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$.

Među eksponencijalnim funkcijama svojom važnošću u primjenama posebno se ističe ona s bazom $e \approx 2.718281828$. Eksponenecijalna funkcija s bazom e još se naziva *prirodna eksponencijalna funkcija*, dok se broj e naziva Eulerov broj ili Napierova konstanta. Odakle posebnost ovog broja i zašto ga nazivamo prirodna baza? Broj e javlja se u modeliranju prirodnog rasta bioloških populacija, a mi ćemo u sljedećem dodatku pokazati kako se javlja u kontinuiranom ukamaćivanju te pokazati da je to iracionalan broj. Možda najznačajnija posebnost prirodne eksponencijalne funkcije jest činjenica da je to jedina funkcija koja je jednaka svojoj derivaciji, što ćemo naučiti kasnije u poglavlju 9.

Dodatak

Kontinuirano ukamaćivanje. U Primjeru 4.11 izračunali smo koliko iznosi dug banci nakon obračunskog razdoblja od jedne godine za posuđen iznos G po kamatnoj stopi od $K\%$. To je

$$G\left(1+\frac{K}{100}\right) \quad \text{kuna}.$$

Da samo prepolovili obračunsko razdoblje i primijenili kamatnu stopu od $K/2\,\%$ na svako od njih, na kraju godine banci bismo bili dužni

$$G\left(1+\frac{K}{2\cdot 100}\right)^2 \quad \text{kuna}.$$

Dijeljenjem godine na n obračunskih jedinica (npr. $n=12$) uz kamatnu stopu od $K/n\,\%$, na kraju godine banci ćemo dugovati

$$G\left(1+\frac{K}{n\cdot 100}\right)^n \quad \text{kuna}.$$

Radi jednostavnosti računa uzmimo sada $G=1$ kn i $K=100\%$. Označimo s $d(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ godišnji dug banci uz obračunavanje kamate n puta i promotrimo te vrijednosti (s točnošću prvih dviju decimala) za različite prirodne brojeve n:

n	1	2	3	4	10	20	100	1000
$d(n)$	2	2,25	2,37	2,44	2,59	2,65	2,70	2,71

Primijetimo da se za velike brojeve n vrijednost izraza $d(n)$ približava broju e. U Poglavlju 6, naučit ćemo da je broj e upravo granična vrijednost (limes) izraza $d(n)$ kada n "teži u beskonačnost", a primjenom takvog postupka ukamaćivanja dobivamo tzv. kontinuirano ukamaćivanje. Kontinuiranim ukamaćivanjem nakon godinu dana banci ćemo biti dužni e kuna.

Propozicija 3 Broj e je iracionalan.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj e racionalan. Tada je on oblika $e=m/n$, gdje su m i n prirodni brojevi. Budući da je $e\in\langle 2,3\rangle$ (pogledajte gornju tablicu s vrijednostima $d(n)$), zaključujemo da e nije prirodan broj i stoga je nužno $n\geq 2$. S druge strane vrijedi $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ (više govora o beskonačnim sumama biti će u kolegiju Matematička analiza 2), dobivamo jednakost $m/n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$. Množeći tu jednakost s $n!$, dobivamo

$$m(n-1)! = n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!},$$

odakle slijedi

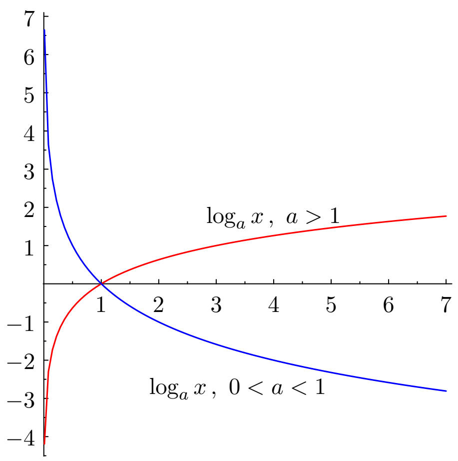
$$0 < m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$
$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Na samom početku imamo da je $m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ prirodan broj (primijetite da je $\frac{n!}{k!}$ prirodan broj za svaki $k = 0, 1, \dots, n$). S druge strane, on je sadržan u intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$, što je nemoguće. Ovom kontradikcijom dolazimo do zaključka da je broj e iracionalan. ■

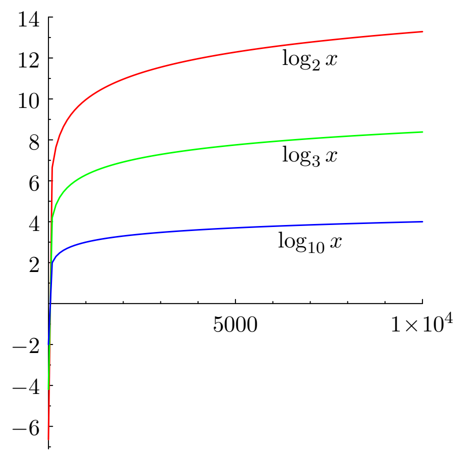
4.3.2 Logaritamska funkcija

Kako je eksponencijalna funkcija s bazom a bijekcija iz $\mathbb{R}$ u $\langle 0, +\infty \rangle$, prema Teoremu 3.1.1 postoji njoj inverzna funkcija koju nazivamo **logaritamska funkcija s bazom** a i označavamo ju s $\log_a x$. Prirodna domena logaritamske funkcije tada je skup $\langle 0, +\infty \rangle$, a slika skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Prema tome vrijede sljedeće jednakosti:

$$a^{\log_a x} = x, \quad \forall x \in \langle 0, +\infty \rangle \quad \text{i} \quad \log_a (a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



(a) Ovisno o bazi raste ili pada.

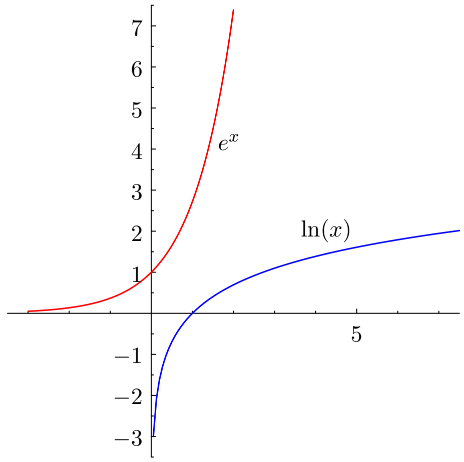


(b) Brzina rasta ovisno o bazi.

Slika 4.9: Logaritamske funkcije.

Vježba 4.11 U ovisnosti o bazi $a > 0$ ispitajte rast/pad logaritamske funkcije s bazom $a > 0$. (Uputa: Koristite svojstva eksponencijalne funkcije i Propoziciju 1.)

Bez dokaza navodimo propoziciju s popisom osnovnih svojstava logaritamskih funkcija.



Slika 4.10: Eksponencijalna i logaritamska funkcija.

Propozicija 4 — Svojstva logaritamske funkcije. Neka su a, b dani pozitivni realni brojevi, tada za sve pozitivne realne brojeve x, y vrijedi:

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
- $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$,
- $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$,
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Vježba 4.12 Usporedite ova svojstva sa svojstvima eksponencijalne funkcije iz Propozicije 2.

Već smo prethodno spomenuli prirodnu eksponencijalnu funkciju. Njezina inverzna funkcija naziva se **prirodni logaritam** i obično označava[3] s $\ln x$.

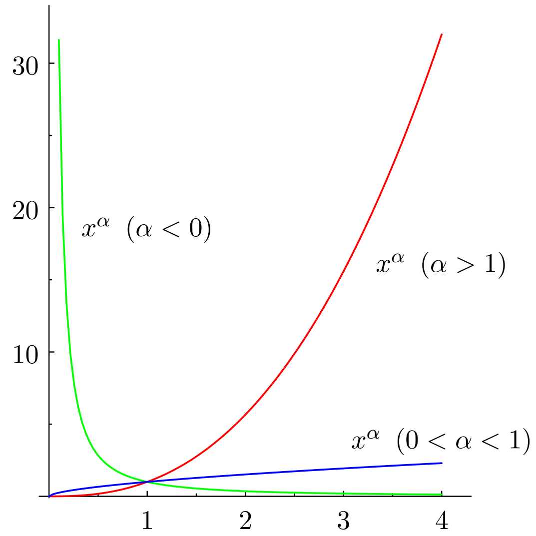
4.3.3 Opća potencija

Pomoću eksponencijalne i logaritamske funkcije definiramo i funkciju koju nazivamo opća potencija. **Opća potencija** s potencijom $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ je funkcija $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadana pravilom pridruživanja

$$f(x) = e^{\alpha \ln x}, \quad \forall x \in \langle 0, +\infty\rangle\,. \tag{4.8}$$

Korištenjem svojstava logaritamske i eksponencijalne funkcije formulu (4.8) možemo pisati $f(x) = e^{\alpha \ln x} = e^{\ln x^\alpha} = x^\alpha$ i u praksi obično pišemo $f(x) = x^\alpha$. Međutim, smisao izraza x^α je upravo definicija (4.8). Označimo s $f_1(x) = \alpha \ln x$ i $f_2(x) = e^x$, tada izraz (4.8) možemo pisati u obliku kompozicije $f = f_2 \circ f_1$. Kako su $f_1 : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ bijekcije, po Korolaru 3.1.2 zaključujemo da je i $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ bijekcija. Odredimo joj inverznu funkciju: za prizvoljni $y \in \langle 0, +\infty\rangle$ tražimo rješenje jednadžbe $y = x^\alpha$. Potenciranjem jednakosti s $1/\alpha$ dobivamo $x = y^{1/\alpha}$. Stoga je inverzna

[3] Oznaka ln dolazi od latinskog izraza *logarithmus naturali*.



Slika 4.11: Opće potencije x^α u ovisnosti o $\alpha \in \mathbb{R}$.

funkcija dana pravilom pridruživanja $f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$, odnosno inverzna funkcija je opća potencija s eksponentom $1/\alpha$.

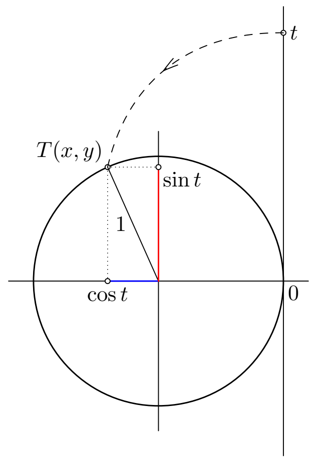
4.4 Trigonometrijske i ciklometrijske (arkus) funkcije

Početci trigonometrije (matematike trokuta) datiraju u antičkoj Grčkoj u 3. stoljeću prije Krista, a glavne primjene su u geometriji i astronomiji. Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus kakve danas poznajemo po prvi put se javljaju u indijskoj astronomiji u vrijeme Carstva Gupta (320. -554. g.), a ostale trigonometrijske funkcije zajedno s tablicama vrijednosti poznate su već u perzijskoj matematici do kraja 9. stoljeća. Daljnji razvoj trigonometrijskih funkcija dolazi s njihovim zapisom u obliku reda potencija (gradivo Matematičke analize 2). Primjene trigonometrijeskih funkcija su brojne, od tradicionalnih primjena u geodeziji i astronomiji zatim primjena u mehanici (harmonijski oscilator, gibanje krutih tijela), gdje se javljaju kao rješenja nekih diferencijalnih jednadžbi, do modernijih primjena u teoriji upravljanja te obradbi signala i obradbi slike korištenjem Fourierove transformacije i Fourierovih redova (gradivo Matematičke analize 3).

4.4.1 Sinus i kosinus

Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus geometrijski definiramo pomoću "namatanja" pravca na jediničnu kružnicu kako je ilustrirano na Slici 4.12, a detaljnije opisujemo u sljedećem tekstu. Neka je $\mathbb{S}$ kružnica polumjera $r = 1$ sa središtem u ishodištu Kartezijevog koordinatnog sustava. U točki $A = (1,0)$ položimo tangentu p na kružnicu. To je pravac koji je paralelan s y-osi i koordinatiziramo ga realnim brojevima tako da 0 smjestimo u točku dirališta A. Pravac p zatim možemo zamisliti kao konac ili žicu koju namatamo na kolut na način da polupravac $[0,+\infty\rangle$ namatamo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (pozitivan smjer), dok polupravac $\langle -\infty, 0]$ namatamo u smjeru kazaljke na satu (negativan smjer). Na taj način svakoj točki $P(t) \in p$ s koordinatom $t \in \mathbb{R}$, pridružimo točku $T(t) \in \mathbb{S}$

s koordinatama $(x(t), y(t))$, odnosno realizirali smo preslikavanje $E : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, takvo da $t \mapsto (x(t), y(t))$. To preslikavanje naziva se **eksponencijalno preslikavanje** pravca na kružnicu (detaljnije o konstrukciji trigonometrijskih funkcija možete naći u knjizi [6]).

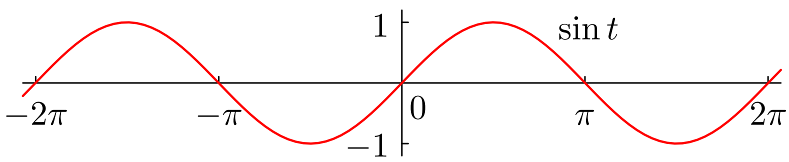


Slika 4.12: Trigonometrijska kružnica.

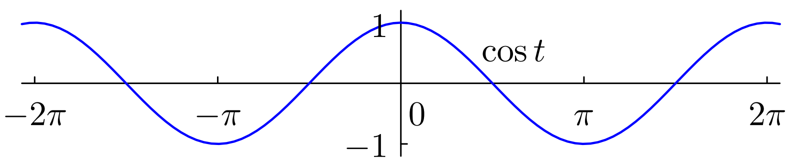
Funkcije **sinus**, u oznaci $\sin t$, i **kosinus**, u oznaci $\cos t$, sada se formalno definiraju kao ordinata, odnosno apscisa točke $E(t) = (x(t), y(t))$, tj.

$$\sin t := y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.9}$$

$$\cos t := x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$



(a) Funkcija sinus.



(b) Funkcija kosinus.

Slika 4.13: Grafovi trigonometrijskih funkcija.

Iz činjenice da točka $(x(t), y(t))$ leži na jediničnoj kružnici, Pitagorin poučak daje nam osnovni trigonometrijski identitet

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

a posljedica toga je da funkcije sinus i kosinus poprimaju vrijednosti unutar segmenta $[-1, 1]$. Preciznije, slike funkcija sinus i kosinus su $Im(\sin) = Im(\cos) = [-1, 1]$. Primijetimo da će se zbog opsega jedinične kružnice 2π svake dvije točke s pravca koje su međusobno udaljene za 2π preslikati u istu točku na kružnici, tj.

$$E(t+2\pi) = E(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Iz toga slijedi da su funkcije sinus i kosinus periodične s periodom 2π, koji je ujedno i temeljnji period. Nadalje, promotrimo u kojem su odnosu točke $E(t)$ i $E(-t)$ za proizvoljni $t \in \mathbb{R}$. One će zbog načina namatanja pravca biti simetrične s obzirom na x-os, prema tome će njihove apscise biti jednake, tj. $\cos(t) = \cos(-t)$, dok će im ordinate biti suprotnog predznaka, odnosno vrijedit će $\sin(t) = -\sin(-t)$. Time smo upravo pokazali da je kosinus parna, a sinus neparna funkcija.

Bez dokaza navodimo najvažnije trigonometrijske identitete za funkcije sinus i kosinus.

Propozicija 5 — Trigonometrijski identiteti. Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{4.11}$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{4.12}$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \tag{4.13}$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \tag{4.14}$$
$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \tag{4.15}$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \tag{4.16}$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)), \tag{4.17}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)). \tag{4.18}$$

Dokaz formula (4.11) i (4.12) može se naći na primjer u knjizi [6].

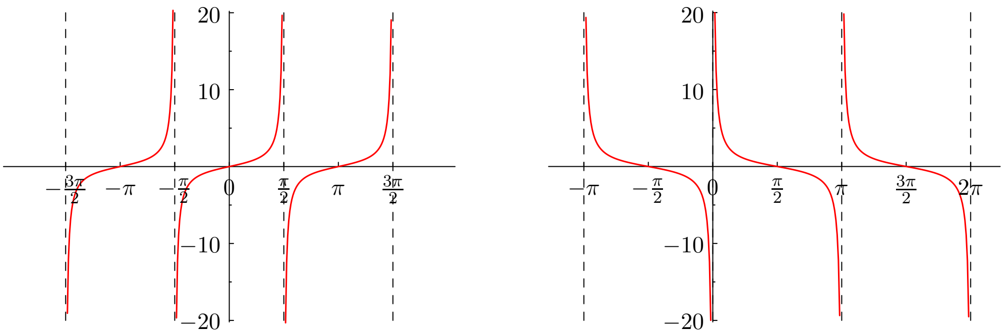
Vježba 4.13 Korištenjem formula (4.11) i (4.12) i svojstava trigonometrijskih funkcija pokažite i ostale trigonometrijske identitete (4.13) – (4.18).

Prethodna diskusija spada u tzv. geometrijsku teoriju trigonometrijskih funkcija, koja predstavlja prirodno proširenje trigonometrije pravokutnog trokuta poznate iz ranih srednjoškolskih dana. Međutim, slično kao i kod eksponencijalne funkcije, možemo se pitati kako zapravo izračunati npr. $\sin 1$? Jasno je da metoda namatanja konca duljine 1 na kolut polumjera 1 i zatim mjerenje ordinate točke na kolutu, neće biti prihvatljiva metoda jednog inženjera.

Dodatak

Trigonometrijske funkcije sin i cos, kao i eksponencijalna funkcija, mogu se računati preko redova potencija (beskonačnih suma), o koji će biti predmet studiranja u okviru kolegija Matematička analiza 2. Za trigonometrijske funkcije i eksponencijalnu funkciju imamo razvoj u redove potencija

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$



(a) Funkcija tangens (b) Funkcija kotangens.

Slika 4.14: Funkcije tangens i kotangens.

4.4.2 Tangens i kotangens

Trigonometrijske funkcije **tangens**, u oznaci $\operatorname{tg} x$ i **kotangens**, u oznaci $\operatorname{ctg} x$, definiraju se kao omjeri trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus. Preciznije, imamo definicije

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{4.19}$$

Prethodne formule, odnosno funkcije tangens i kotangens *nisu definirane* za one realne brojeve x za koje je $\cos x = 0$, odnosno $\sin x = 0$. Označimo s C_0 skup svih nultočaka funkcije kosinus. Tada je

$$C_0 = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\},$$

a prirodna domena funkcije tangens tada je $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \backslash C_0$. Označimo nadalje sa S_0 skup svih nultočaka funkcije sinus. Tada je

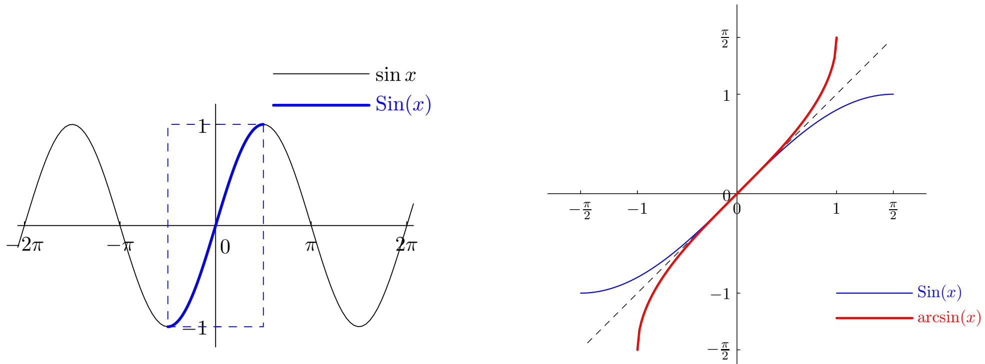
$$S_0 = \{ k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \},$$

a prirodna domena funkcije kotangens je tada $D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \backslash S_0$. Slika obiju funkcija tangens i kotangens jednaka je $\mathbb{R}$.

Vježba 4.14 Korištenjem svojstava funkcija sinus i kosinus pokažite da su funkcije tangens i kotangens neparne i periodičke s temeljnim periodom $T = \pi$.

4.4.3 Ciklometrijske (arkus) funkcije

Trigonometrijske funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens su periodične i kao takve nisu injekcije, stoga ne mogu biti niti bijekcije, odnosno ne mogu imati inverznu funkciju. Međutim, sve one su po dijelovima (po područjima) strogo monotone, stoga će nam restrikcija na jedno od tih područja stroge monotonosti osigurati injektivnost, dok ćemo uzimanjem slike za kodomenu osigurati surjektivnost.



(a) Restrikcija funkcije $\sin x$ na interval $[-\pi/2, \pi/2]$.

(b) Funkcija $\arcsin(x)$.

Slika 4.15: Funkcija arkus sinus.

Arkus sinus

Ako funkciju sinus restringiramo na segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na kojem je ona strogo rastuća i označimo tu restrikciju sa $\text{Sin}(x) := \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$, tada je ta funkcija $\text{Sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ bijekcija (vidi Sliku 4.15(a)). Njezin inverz $\text{Sin}^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nazivamo **arkus sinus** i u daljnjem označavamo s $\arcsin(x)$. Dakle,

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

odnosno, domena funkcije arkus sinus je segment $[-1, 1]$, dok je slika $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Po definiciji inverzne funkcije vrijede sljedeće jednakosti

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{i} \quad \sin(\arcsin y) = y, \quad \forall y \in [-1, 1].$$

Kako je funkcija $\text{Sin}(x)$ strogo rastuća na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, slijedi da je i njena inverzna funkcija, $\arcsin(x)$, strogo rastuća na svojoj domeni (vidi Sliku 4.15(b)).

Vježba 4.15 Korištenjem eksponencijalnog namatanja pravca na jediničnu kružnicu pokažite da je funkcija arkus sinus neparna.

Arkus kosinus

Funkcija kosinus strogo je padajuća na segmentu $[0, \pi]$ pa je njezina restrikcija na taj segment, funkcija $\text{Cos} : [0, \pi] \to [-1, 1]$, definirana s $\text{Cos}(x) := \cos|_{[0,\pi]}(x)$ za sve $x \in [0, \pi]$, bijekcija (vidi Sliku 4.16(a)). Inverznu funkciju funkcije $\text{Cos}(x)$, nazivamo **arkus kosinus** i u daljnjem označavamo s $\arccos(x)$. Prema tome,

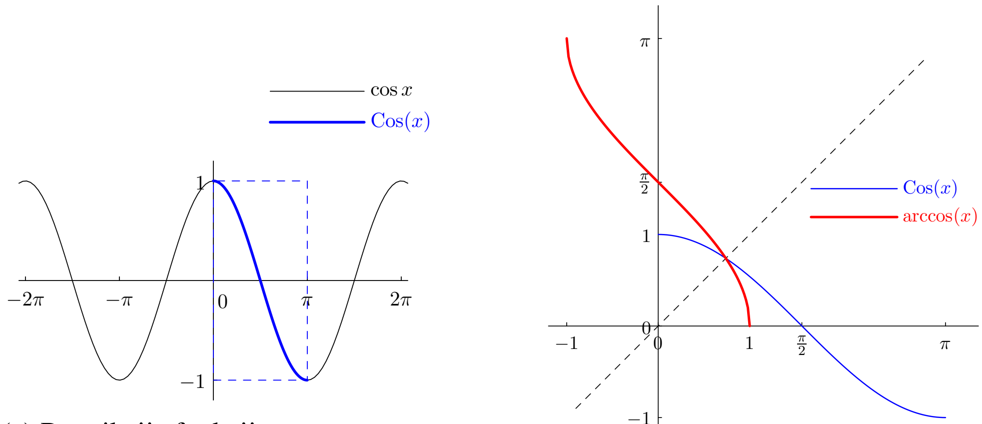
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

odnosno, domena funkcije arkus kosinus je segment $[-1, 1]$, dok je slika segment $[0, \pi]$. Po definiciji inverzne funkcije vrijede sljedeće jednakosti

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \text{i} \quad \cos(\arccos y) = y, \quad \forall y \in [-1, 1].$$

Kako je funkcija $\text{Cos}(x)$ strogo padajuća na $[0, \pi]$, slijedi da je i njena inverzna funkcija, $\arccos(x)$, strogo padajuća na $[-1, 1]$ (vidi Sliku 4.16(b)).

Napomena 4.5 Za područje restrikcije funkcije kosinus na kojem je ona strogo monotona, mogli smo uzeti i neki drugi segment, npr. $[-\pi, 0]$, gdje je kosinus strogo rastuća. Tim izborom područja restrikcije dobili bismo drugačiju funkciju arkus kosinus, koja bi se razlikovala od gornje u kodomeni, ali i pravilu pridruživanja. Analogna diskusija vrijedi i za funkciju sinus, kao i tangens i kotangens, što nam tek slijedi.



(a) Restrikcija funkcije $\cos x$ na interval $[0, \pi]$.

(b) Funkcija $\arccos(x)$.

Slika 4.16: Funkcija arkus kosinus.

Arkus tangens

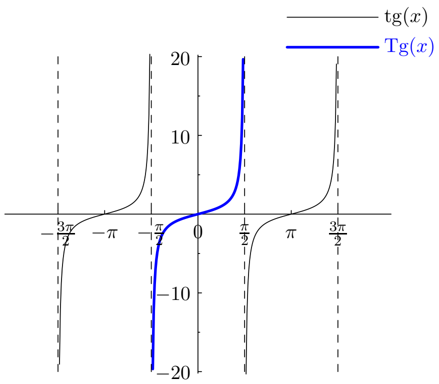
Promotrimo funkciju tangens, ona također nije injekcija, ali je strogo rastuća po intervalima oblika $\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Označimo s $\mathrm{Tg} := \mathrm{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ restrikciju funkcije tangens na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, tada je $\mathrm{Tg} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$ bijekcija (vidi Sliku 4.17(a)). Njezinu inverznu funkciju nazivamo **arkus tangens** i u daljnjem označavamo s $\mathrm{arctg}(x)$. Preciznije,

$$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

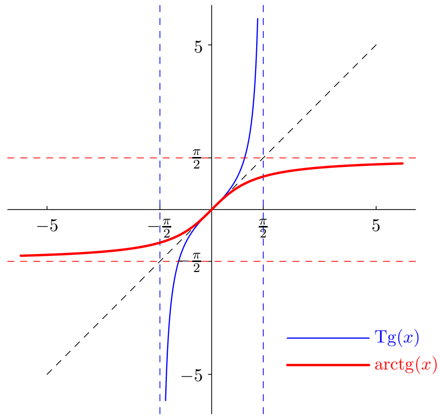
odnosno, domena funkcije $\mathrm{arctg}(x)$ je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, dok je slika otvoreni interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Opet po definiciji inverzne funkcije vrijede sljedeće jednakosti

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x, \quad \forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \text{i} \quad \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, y) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nazivaju se asimptote funkcije tangens, preciznije vertikalne asimptote. Funkcija arkus tangens također ima asimptote, to su horizontalni pravci $y = -\frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2}$. Detaljnije ćemo se asimptotama funkcija baviti u Poglavlju 7.



(a) Restrikcija funkcije $\mathrm{tg}(x)$ na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$.



(b) Funkcija $\mathrm{arctg}(x)$.

Slika 4.17: Funkcija arkus tangens.

Vježba 4.16 Pokažite da je arkus tangens neparna i strogo rastuća funkcija.

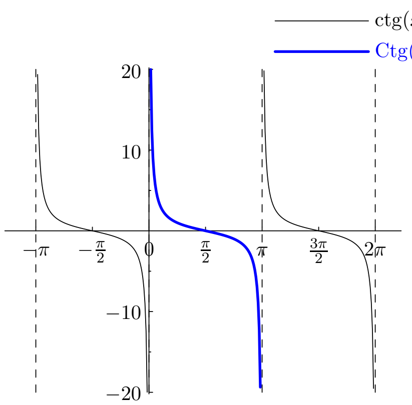
Arkus kotangens

Kao posljednju u ovom nizu promatramo inverznu funkciju funkcije kotangens. Ona je strogo padajuća na intervalima na kojima je definirana, dakle $\langle k\pi, \pi + k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Specijalno uzmimo interval $\langle 0, \pi\rangle$ i označimo s $\mathrm{Ctg} := \mathrm{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}$ restrikciju funkcije kotangens na interval $\langle 0, \pi\rangle$ (vidi Sliku 4.18(a)). Funkcija $\mathrm{Ctg} : \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}$ je bijekcija, a njezinu inverznu funkciju nazivamo **arkus kotangens** i u daljnjem označavamo s $\mathrm{arcctg}(x)$. Stoga

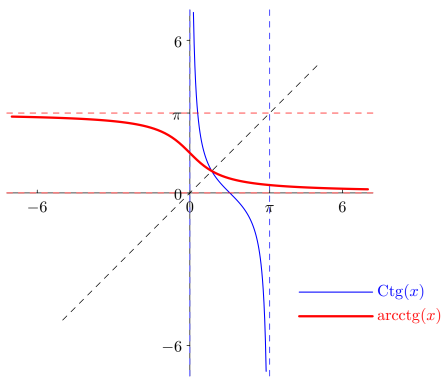
$$\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi\rangle\,,$$

odnosno domena funkcije arkus kotangens je skup $\mathbb{R}$, dok je slika otvoreni interval $\langle 0, \pi\rangle$. Po definiciji inverzne funkcije vrijede sljedeće jednakosti

$$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x\,, \quad \forall x \in \langle 0, \pi\rangle \quad \text{i} \quad \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, y) = y\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}\,.$$



(a) Restrikcija funkcije $\mathrm{ctg}(x)$ na interval $\langle 0, \pi\rangle$.



(b) Funkcija $\mathrm{arcctg}(x)$.

Slika 4.18: Funkcija arkus kotangens.

Vježba 4.17 Pokažite da je funkcija arkus kotangens strogo padajuća.

4.5 Hiperboličke i area funkcije

Hiperboličke funkcije javljaju se prilikom računanja kuteva i udaljenosti u hiperboličkoj geometriji. Također imaju brojne primjene u fizici i mehanici, gdje se javljaju ako rješenja nekih diferencijalnih jednadžbi. Možda najznačajniji primjer hiperboličkih funkcija u mehanici jest oblik visećeg lanca učvršćenog na oba kraja (na jednakoj visini), koji odgovara grafu funkcije kosinus hiperbolički. Često se iz tog razloga graf funkcije kosinus hiperbolički naziva lančanica. Mnogi lukovi i svodovi u arhitekturi imaju upravo oblik uvrnute lančanice. Kosinus hiperbolički ima još jedno zanimljivo svojstvo: površina ispod grafa funkcije kosinus hiperbolički na nekom segmentu jednaka je duljini luka tog grafa nad istim segmentom.

4.5.1 Hiperboličke funkcije

Hiperboličke ili hiperbolne funkcije, **sinus hiperbolički** sh i **kosinus hiperbolički** ch, definiraju se preko eksponencijalne funkcije formulama

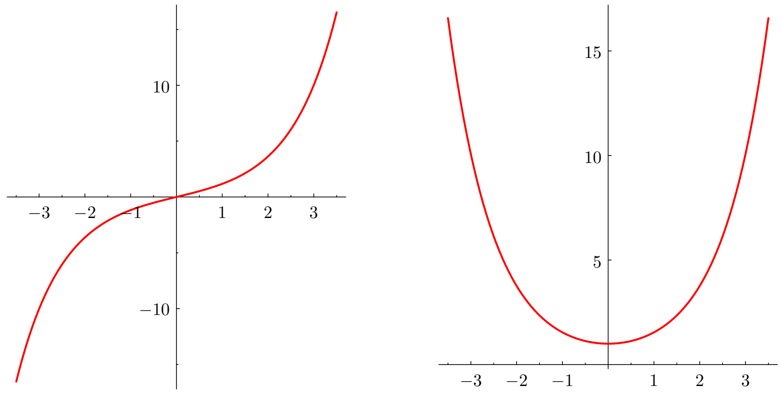
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Iako imena sugeriraju to, direktna veza s trigonometrijskim funkcijama nije očita iz prethodnih formula. Toj diskusiji vratit ćemo se nešto kasnije. Korištenjem već prethodno stečenog znanja i iskustva, čitatlj se lako može uvjeriti da je sinus hiperbolički neparna i strogo rastuća funkcija na cijeloj svojoj domeni te joj je slika $Im(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}$. S druge strane, kosinus hiperbolički je očito parna funkcija i stoga je samo po dijelovima monotona. Korištenjem tzv. geometrijsko-aritmetičke nejednakosti, koja kaže da za sve pozitivne realne brojeve a, b vrijedi $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, lako se uvjerimo da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $1 = \sqrt{e^x e^{-x}} \leq \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$, odnosno $Im(\operatorname{ch}) \subseteq [1, +\infty\rangle$. No, zapravo vrijedi jednakost, tj. slika kosinusa hipeboličkog je $Im(\operatorname{ch}) = [1, +\infty\rangle$.

Sličnost hiperboličkih funkcija s trigonometrijskima očituje se kroz brojna slična svojstva. Direktnim računom preko formula (4.20) lako se provjeri jednakost

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Odatle naime i naziv, *hiperboličke*. Za razliku od trigonometrijskih funkcija, gdje točke $(\cos t, \sin t)$ leže na jediničnoj kružnici $x^2 + y^2 = 1$, točke $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ leže na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$. Ostala svojstva (adicijske formule, formule dvostrukog i polovičnog argumenta) navodimo bez dokaza u sljedećoj propoziciji.



(a) Sinus hiperbolički. (b) Kosinus hipebolički.

Slika 4.19: Hiperboličke funkcije sinus i kosinus.

Propozicija 6 Za sve realne brojeve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y\,,\\
&\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y\,,\\
&\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\,, \quad \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x\,,\\
&\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2x) - 1)\,, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2x) + 1)\,.
\end{aligned}
$$

Vježba 4.18 Usporedite identitete iz prethodne propozicije s trigonometrijskim identitetima iz Propozicije 5.

Dodatak

Još ljepša veza između trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija vidi se kroz proširenje tih funkcija na skup kompleksnih brojeva. Pokazuje se da za kompleksne trigonometrijske funkcije sinus i kosinus vrijede formule

$$
\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,, \tag{4.21}
$$

dok za kompleksne hiperboličke funkcije ostaju formule (4.20) s kompleksnim argumentima umjesto realnim.

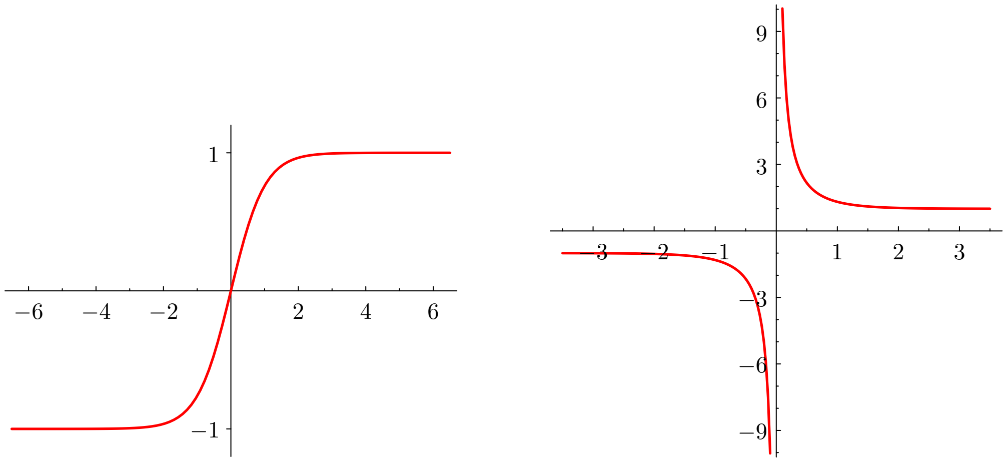
Analogno trigonometrijskim funkcijama tangens i kotangens, funkcije **tangens hiperbolički** i **kotangens hiperbolički** definiraju se redom formulama

$$
\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\,. \tag{4.22}
$$

Iz definicija je očito da su domene tih funkcija redom $D(\operatorname{th}) = \mathbb{R}$ i $D(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Uočimo nadalje da $\operatorname{th} x$ možemo pisati u oblicima

$$
\operatorname{th} x = -1 + \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} > -1 \quad \text{i} \quad \operatorname{th} x = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.
$$

Iz tih formula zaključujemo da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $-1 < \operatorname{th} x < 1$, tj. $Im(\operatorname{th}) \subseteq \langle -1, 1 \rangle$. Međutim, vrijedi više, $Im(\operatorname{th}) = \langle -1, 1 \rangle$. Slično za kotangens hiperbolički možemo zaključiti da vrijedi $Im(\operatorname{cth}) = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.



(a) Tangens hiperbolički. (b) Kotangens hiperbolički.

Slika 4.20: Hiperboličke funkcije tangens i kotangens.

4.5.2 Area funkcije

Kako je sinus hiperbilički $\mathrm{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija (jer je jednaka zbroju dviju strogo rastućih funkcija), ona je bijekcija pa ima inverznu funkciju, u oznaci $\mathrm{arsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, koju nazivamo **area sinus**. Izvedimo sada formulu (pravilo pridruživanja) za $\mathrm{arsh}(x)$. Za proizvoljan $y\in\mathbb{R}$ rješavamo jednadžbu

$$y=\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

odakle, supstitucijom $t=e^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2-2yt-1=0.$$

Dva rješenja te jednadžbe su $t_1=y-\sqrt{y^2+1}$ i $t_2=y+\sqrt{y^2+1}$. Kako je $t_1<0$ za sve $y\in\mathbb{R}$, taj slučaj nije moguć. Ostaje nam onda drugi slučaj $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$, odakle slijedi

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

Stoga je pravilo pridruživanja za funkciju area sinus dano formulom

$$\mathrm{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vježba 4.19 Dokažite da je arsh strogo rastuća i neparna funkcija.

Funkcija kosinus hiperbolički $\mathrm{ch}:\mathbb{R}\to[1,+\infty\rangle$ nije bijekcija, jer nije injekcija. Međutim, njena restrikcija $\mathrm{Ch}:=\mathrm{ch}|_{[0,+\infty\rangle}:[0,+\infty\rangle\to[1,+\infty\rangle$ na poluinterval $[0,+\infty\rangle$ jest bijekcija pa ima inverznu funkciju koju nazivamo **area kosinus** i u daljnjem označavamo s $\mathrm{arch}(x)$. Stoga

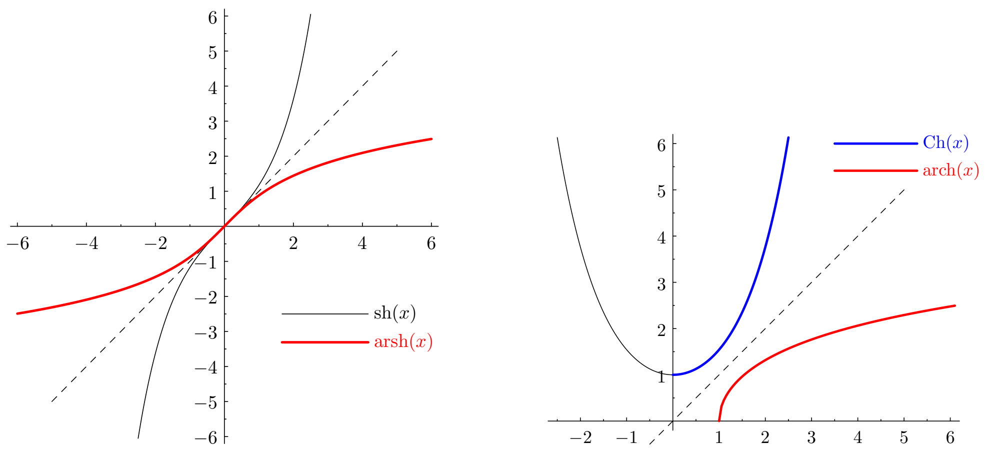
$$\mathrm{arch}: [1,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle\,,$$

a po definiciji inverzne funkcije vrijede jednakosti

$$\mathrm{arch}(\mathrm{ch}\,x) = x\,, \quad \forall x \in [0,+\infty\rangle\,, \quad \text{i} \quad \mathrm{ch}(\mathrm{arch}\,x) = x\,, \quad \forall x \in [1,+\infty\rangle\,.$$

Vježba 4.20 Pokažite da je funkcija area kosinus dana formulom

$$\mathrm{arch}\,x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,, \quad \forall x \in [1,+\infty\rangle\,.$$



(a) Area sinus.

(b) Area kosinus.

Slika 4.21: Area funkcije sinus i kosinus.

Funkcija tangens hiperbolički $\mathrm{th}: \mathbb{R} \to \langle -1,1\rangle$ je bijekcija pa ima inverznu funkciju $\mathrm{th}^{-1}: \langle -1,1\rangle \to \mathbb{R}$ koju nazivamo **area tangens** i u daljnjem označavamo s $\mathrm{arth}(x)$.

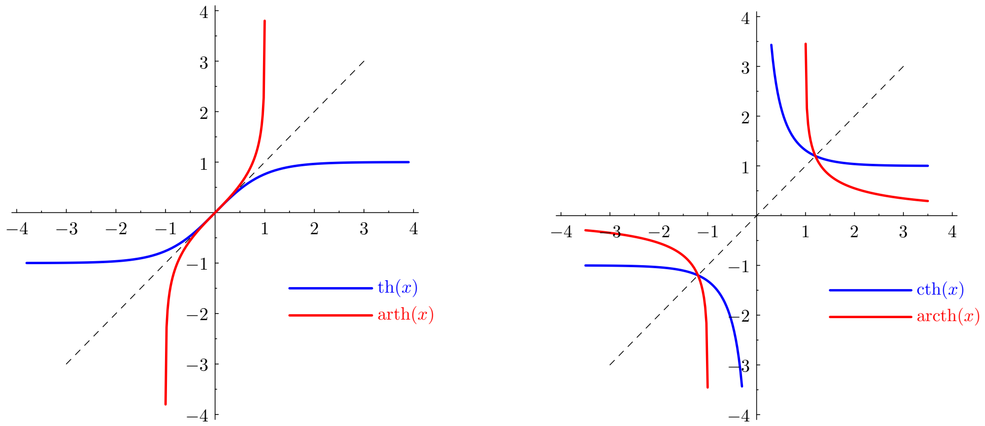
Vježba 4.21 Pokažite da je funkcija area tangens dana formulom

$$\mathrm{arth}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,, \quad \forall x \in \langle -1,1\rangle\,.$$

Konačno, funkcija kotangens hiperbolički $\mathrm{cth}: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$ je bijekcija, a njenu inverznu funkciju $\mathrm{arcth}: \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nazivamo **area kotangens**.

Vježba 4.22 Pokažite da je area kotangens dana formulom

$$\mathrm{arcth}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\,, \quad \forall x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle\,.$$



(a) Area tangens. (b) Area kotangens.

Slika 4.22: Area funkcije tangens i kotangens.

4.6 Riješeni primjeri

U ovom odjeljku kroz nekoliko riješenih primjera ilustriramo primjenu prethodno obrađenog teorijskog materijala.

■ **Primjer 4.12** Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija zadanih pravilom pridruživanja:

(a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 4x - 6}$,

(b) $f(x) = \sqrt{1 - |x^2 - 3|}$,

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - 2}}$.

■

Rješenje.

(a) Funkcija drugi korijen definirana je za nenegativne brojeve, stoga imamo uvjet $x^3 - x^2 - 4x - 6 \geq 0$. Faktorizacijom polinoma $x^3 - x^2 - 4x - 6 = (x-3)(x^2+2x+2)$ taj uvjet postaje

$$(x-3)(x^2+2x+2) \geq 0\,. \tag{4.23}$$

Kako je $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, to uvjet (4.23) postaje ekvivalentan uvjetu $x \geq 3$. Stoga je prirodna domena funkcije f jednaka $D(f) = [3, +\infty\rangle$.

(b) Zbog funkcije drugi korijen imamo uvjet $1 - |x^2 - 3| \geq 0$, tj. $|x^2 - 3| \leq 1$. Prema definiciji apsolutne vrijednosti

$$|x^2 - 3| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x^2 - 3 \leq 1\,.$$

Razlikujemo dvije nejednakosti, koje moraju istovremeno biti zadovoljene. Prva je $-1 \leq x^2 - 3$, tj. $x^2 - 2 \geq 0$, koja je zadovoljena za sve $x \in \langle -\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty\rangle$. Druga je $x^2 - 3 \leq 1$, odnosno $x^2 - 4 \leq 0$, koja je zadovoljena za sve $x \in [-2, 2]$. Obje nejednakosti zadovoljene su na presjeku skupova

$$\Big(\langle -\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty\rangle\Big) \cap [-2, 2] = [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]\,.$$

Stoga je $D(f) = [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$.

(c) Logaritamska funkcija definirana je na skupu pozitivnih realnih brojeva, stoga imamo uvjet $x-2>0$, odnosno $x>2$. Nadalje, uvjet funkcije drugi korijen daje nam $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-2 \geq 0$. Međutim, kako je taj izraz u nazivniku, nužno je $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \neq 2$, iz čega zaključujemo da mora vrijediti

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > 2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Kako je $\log_{\frac{1}{2}}$ padajuća funkcija, posljednja nejednakost ekvivalentna je s $x-2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$, odnosno $x < \frac{9}{4}$. Oba uvjeta $x>2$ i $x<\frac{9}{4}$ moraju biti zadovoljeni, stoga je $D(f) = \langle 2, \frac{9}{4}\rangle$.

■

■ **Primjer 4.13** Zadana je funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = \sqrt{2x+5}$.

(a) Odredite prirodnu domenu i sliku funkcije.

(b) Ako postoji, odredite f^{-1} te $D(f^{-1})$ i $Im(f^{-1})$.

■

Rješenje.

(a) Prirodna domena funkcije f određena je uvjetom funkcije drugi korijen: $2x+5 \geq 0$, odnosno $D(f) = [-\frac{5}{2}, +\infty\rangle$. Odredimo sada sliku funkcije. Očito je $f(x) \geq 0$ za sve $x \in D(f)$, iz čega slijedi $Im(f) \subseteq [0, +\infty\rangle$. S druge strane, uzmimo proizvoljni $y \in [0, +\infty\rangle$ i tražimo rješenje jednadžbe

$$y = f(x) = \sqrt{2x+5}$$

u skupu $D(f)$. Kvadriranjem dobivamo $x = \frac{1}{2}(y^2-5)$. Odavde vidimo da je za proizvoljni $y \in [0, +\infty\rangle$, rješenje $x \geq -\frac{5}{2}$, odnosno $x \in D(f)$. Stoga je $[0, +\infty\rangle \subseteq Im(f)$. Kako imamo obje inkluzije, zaključujemo $Im(f) = [0, +\infty\rangle$.

(b) Pokažimo da je funkcija $f : [-\frac{5}{2}, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ bijekcija. Funkcija f je po definiciji surjekcija, jer joj je kodomena $[0, +\infty\rangle$ jednaka slici (vidi (a)). Pokažimo da je f injekcija. Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$ za neke $x_1, x_2 \in D(f)$, tj.

$$\sqrt{2x_1+5} = \sqrt{2x_2+5}.$$

Zbog injektivnosti funkcije drugi korijen zaključujemo $2x_1+5 = 2x_2+5$, odakle nužno slijedi $x_1 = x_2$, odnosno f je injekcija.
Pravilo pridruživanja za inverznu funkciju $f^{-1} : [0, +\infty\rangle \to [-\frac{5}{2}, +\infty\rangle$ tražimo rješavanjem jednadžbe $y = f(x)$. Preciznije, za svaki $y \in [0, +\infty\rangle$ trebamo naći jedinstveni $x \in [-\frac{5}{2}, +\infty\rangle$, koji zadovoljava $y = f(x)$. Tada će preslikavanje $y \mapsto x$ biti upravo f^{-1}, odnosno bit će $f^{-1}(y) = x$. Računamo

$$y = \sqrt{2x+5} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2x+5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(y^2-5)$$

i vidimo da za svaki $y \in [0, +\infty\rangle$ postoji jedinstveni $x = \frac{1}{2}(y^2-5) \in [-\frac{5}{2}, +\infty\rangle$, koji zadovoljava jednadžbu $y = f(x)$. Stoga je $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y^2-5)$.

Napomena. Domenu inverzne funkcije ne određujemo iz uvjeta na pravilo pridruživanja, kao u slučaju određivanja prirodne domene, nego je $D(f^{-1}) = Im(f)$, a $Im(f^{-1}) = D(f)$.

■

■ **Primjer 4.14** Zadana je funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = \sqrt{3\arccos x - \pi}$.
(a) Pokažite da je f strogo padajuća.
(b) Odredite joj prirodnu domenu i sliku.
(c) Ako postoji, odredite f^{-1}.

■

Rješenje.

(a) Funkciju f možemo prikazati kao kompoziciju triju funkcija $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, gdje su redom $f_1(x) = \arccos x$, $f_2(x) = 3x - \pi$ i $f_3(x) = \sqrt{x}$. Kako je f_1 strogo padajuća, a f_2 i f_3 su strogo rastuće, prema Teoremu 4.1.1 zaključujemo da je f strogo padajuća.
(b) Domena funkcije arccos je $[-1,1]$. Zbog funkcije drugi korijen imamo uvjet $3\arccos x - \pi \geq 0$, odnosno $\arccos x \geq \frac{\pi}{3}$. Kako je $\cos|_{[0,\pi]}$ padajuća funkcija, slijedi

$$\cos(\arccos x) \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}.$$

Stoga je $D(f) = [-1, \frac{1}{2}]$. Odredimo sada sliku funkcije f. Znamo da je $Im(\arccos) = [0,\pi]$, a zbog uvjeta na prirodnu domenu, $\arccos x \geq \frac{\pi}{3}$, imamo

$$\pi \geq \arccos x \geq \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\pi \geq 3\arccos x \geq \pi \quad \Rightarrow \quad 2\pi \geq 3\arccos x - \pi \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{2\pi} \geq \sqrt{3\arccos x - \pi} \geq 0.$$

Time smo zaključili $f(x) \in [0, \sqrt{2\pi}]$ za sve $x \in D(f)$, tj. $Im(f) \subseteq [0, \sqrt{2\pi}]$. Ostaje još pokazati $[0, \sqrt{2\pi}] \subseteq Im(f)$. Uzmimo proizvoljni $y \in [0, \sqrt{2\pi}]$ i rješavamo jednadžbu $y = \sqrt{3\arccos x - \pi}$. Kvadriranjem dobivamo $\arccos x = \frac{1}{3}(y^2 + \pi)$, odakle slijedi

$$x = \cos\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{\pi}{3}\right).$$

Prema dobivenoj formuli, za $y \in [0, \sqrt{2\pi}]$ očito je $x \in [-1, \frac{1}{2}] = D(f)$. Time smo pokazali drugu inkluziju i zaključujemo $Im(f) = [0, \sqrt{2\pi}]$.
Napomena. Do slike funkcije f mogli smo i na "jednostavniji" način. Kako je f padajuća cijeloj domeni i neprekidna (svojstvo svih elementarnih funkcija koje ćemo naučiti kasnije), tada je $Im(f) = f([-1, \frac{1}{2}]) = [f(\frac{1}{2}), f(-1)] = [0, \sqrt{2\pi}]$.
(c) Najprije pokažimo da je funkcija $f : [-1, \frac{1}{2}] \to [0, \sqrt{2\pi}]$ je bijekcija. Kako je kodomena $[0, \sqrt{2\pi}] = Im(f)$, po definiciji je f surjekcija, a kako je strogo padajuća, zaključujemo da je injekcija. Pravilo pridruživanja inverzne funkcije određujemo rješavanjem jednadžbe $y = f(x)$ kao i u (b) dijelu zadatka. Uvjerimo se da je za svaki $y \in [0, \sqrt{2\pi}]$ pripadni $x = \cos\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{\pi}{3}\right)$, jedinstveno rješenje jednadžbe $y = f(x)$ u skupu $[-1, \frac{1}{2}]$. Time je dobro definirano

$$f^{-1}(y) = \cos\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{\pi}{3}\right).$$

■

■ **Primjer 4.15** Riješite jednadžbe:
(a) $\cos(2\arccos x) = 2x$,
(b) $\operatorname{ch}(\ln x) = \frac{5}{2}x$.

■

Rješenje.

(a) Uočimo najprije dva uvjeta na rješenje jednadžbe:
- x mora biti u domeni funkcije arkus kosinus, tj. $x \in [-1,1]$;
- $2x$ mora biti u slici funkcije kosinus, tj. $2x \in [-1,1]$.

Stoga se rješenje nužno nalazi u segmentu $[-1/2, 1/2]$. Primijenimo formulu dvostrukog kuta za funkciju kosinus: $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada polazna jednadžba prelazi u

$$2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x,$$

odakle slijedi $2x^2 - 1 = 2x$. Dobivena kvadratna jednadžba ima dva realna rješenja $x_1 = (1-\sqrt{3})/2$ i $x_2 = (1+\sqrt{3})/2$, od koji je samo $x_1 \in [-1/2, 1/2]$. Stoga je jedino rješenje jednadžbe

$$x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Uočimo opet dva uvjeta na rješenje jednadžbe:
- x mora biti u domeni logaritamske funkcije, tj. $x > 0$;
- $5x/2$ mora biti u slici funkcije kosinus hiperbolički, tj. $5x/2 \geq 1$.

Ta dva uvjeta impliciraju $x \geq 2/5$. Raspišimo nadalje po definiciji lijevu stranu jednadžbe

$$\operatorname{ch}(\ln x) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln x} + e^{-\ln x}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2}x.$$

Odatle nakon sređivanja slijedi kvadratna jednadžba $4x^2 - 1 = 0$. Jedino pozitivno rješenje ove jednadžbe, koje zadovoljava gornji uvjet, je $x = \frac{1}{2}$.

■

■ **Primjer 4.16** Funkcija $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ zadana je formulom $f(x) = \dfrac{1}{2-\sin x}$.
(a) Pokažite da je f injekcija.
(b) Pokažite da je f strogo rastuća.
(c) Odredite $f([0, \pi/3\rangle)$.
(d) Za funkciju $f : [-\pi/2, \pi/2] \to Im(f)$ odredite, ako postoji, f^{-1} i $D(f^{-1})$.

■

Rješenje.

(a) Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$ za neke $x_1, x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, tj.

$$\frac{1}{2-\sin x_1} = \frac{1}{2-\sin x_2}.$$

Zbog injektivnosti funkcije $z \mapsto \frac{1}{z}$, slijedi $2 - \sin x_1 = 2 - \sin x_2$, odakle slijedi $\sin x_1 = \sin x_2$. Kako je funkcija sinus injekcija na $[-\pi/2, \pi/2]$, zaključujemo $x_1 = x_2$. Prema tome, funkcija f je injekcija.

(b) Funkciju f možemo prikazati kao kompoziciju triju funkcija: $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, gdje su $f_1(x) = \sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$, $f_2(x) = 2 - x$ i $f_3(x) = \frac{1}{x}$. Kako je f_1 strogo rastuća, a f_2, f_3 su strogo padajuće, slijedi da je f strog rastuća.

(c) Obzirom na to da je f strogo rastuća, sliku intervala $[0, \pi/3\rangle$, lako odredimo direktnim izračunavanjem $f([0,\pi/3\rangle) = [f(0), f(\pi/3)\rangle = [1/2, 2/(4-\sqrt{3})\rangle$.

(d) Sliku funkcije f tada dobijemo direktnim uvrštavanjem

$$Im(f) = f\Big(\Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]\Big) = \Big[f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})\Big] = \Big[\frac{1}{3}, 1\Big].$$

Kako je f strogo rastuća, ona je injekcija pa je funkcija $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [1/3, 1]$ bijekcija. Pravilo pridruživanja za inverznu funkciju $f^{-1} : [1/3, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ tražimo rješavanjem jednadžbe

$$y = \frac{1}{2 - \sin x}$$

za proizvoljni $y \in [1/3, 1]$. Direktnim računom slijedi $\sin x = 2 - \frac{1}{y}$, odakle je

$$x = \arcsin\Big(2 - \frac{1}{y}\Big) =: f^{-1}(y).$$

■

4.7 Transformacije grafova funkcija

4.7.1 Translacija

Ako graf realne funkcije realne varijable $f : D \to \mathbb{R}$ translatiramo (pomaknemo) za fiksnu vrijednost $c \in \mathbb{R}$ po x-osi, dobivamo graf funkcije $g : D + c \to \mathbb{R}$, čije je pravilo pridruživanja dano s

$$g(x+c) = f(x), \quad \text{za sve } x \in D. \tag{4.24}$$

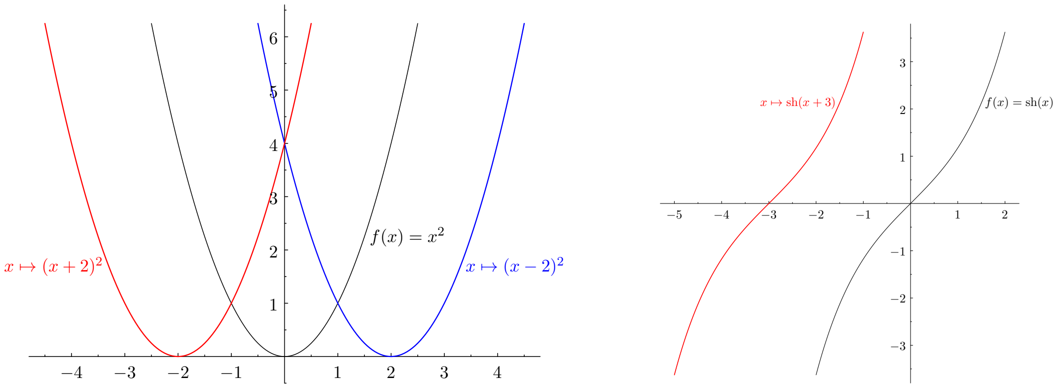
Skup $D + c$ označava *translatiranu domenu* (translaciju skupa D za iznos $c \in \mathbb{R}$), odnosno

$$D + c = \{x + c,\ x \in D\}.$$

Na primjer, translacija skupa $\langle 0, 2\rangle$ za isnos -1 je skup $\langle -1, 1\rangle$, odnosno simbolički možemo pisati $\langle 0, 2\rangle - 1 = \langle -1, 1\rangle$. Pravilo pridruživanja nove (translatirane) funkcije g uobičajeno je ipak pisati u terminima nove varijable $z = x + c$. Stoga jednakost (4.24) prelazi u

$$g(z) = f(z - c), \quad \text{za sve } z \in D + c. \tag{4.25}$$

Funkcija g, odnosno pripadni graf Γ_g, dobiveni su **horizontalnom translacijom** (translacijom po x-osi) funkcije f, odnosno pripadnog grafa Γ_f. U daljnjem tekstu, a to je pravilo i u svakoj literaturi, ispuštamo detaljno označavanje translatirane funkcije s g i njezine varijable sa z. Naprosto, horizontalnu translaciju funkcije f za isnos c označavamo s $x \mapsto f(x-c)$, gdje x sada označava prethodno označenu varijablu z. Primijetimo na Slici 4.23, ako je $c > 0$, graf translatirane funkcije $x \mapsto f(x-c)$ dobiven je translacijom polazne funkcije f u desno za iznos c. Ako je pak $c < 0$, onda graf translatirane funkcije $x \mapsto f(x-c)$ dobivamo translacijom polazne funkcije f u lijevo za iznos $|c|$.

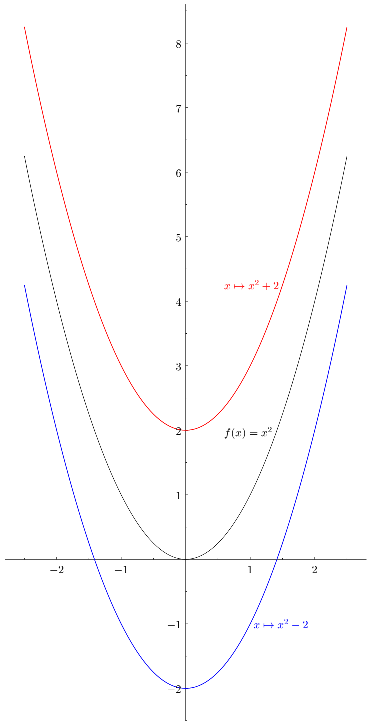


(a) Funkcija $x \mapsto (x-2)^2$ dobivena je horizontalnom translacijom funkcije $f(x) = x^2$ za 2 u desno, dok je $x \mapsto (x+2)^2$ dobivena horizontalnom translacijom za 2 u lijevo.

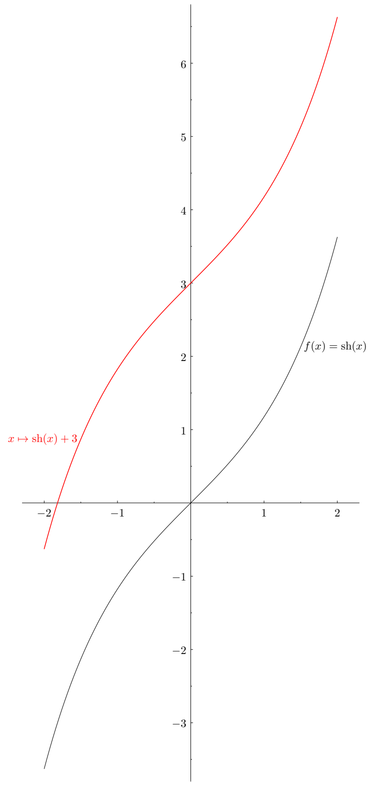
(b) Funkcija $x \mapsto \mathrm{sh}(x+3)$ dobivena je horizontalnom translacijom funkcije sinus hiperbolički za 3 u lijevo.

Slika 4.23: Horizontalne translacije funkcija, odnosno njihovih grafova.

Za razliku od horizontalne translacije koja se realizira kroz pomak u argumentu funkcije f (vidi 4.25), vertikalna translacija, odnosno translacija po y-osi, dobiva se kao pomak u području vrijednosti. Preciznije, **vertikalna translacija** funkcije f za iznos $c \in \mathbb{R}$ je funkcija u oznaci $x \mapsto f(x) + c$, a smisao oznake je samoobjašnjavajući. Napomenimo još očite činjenice: ako je $c > 0$, graf vertikalno translatirane funkcije $x \mapsto f(x) + c$ dobiven je translacijom polazne funkcije f prema gore za iznos c, a ako je $c < 0$, onda graf funkcije $x \mapsto f(x) + c$ dobivamo translacijom polazne funkcije f prema dolje za iznos $|c|$ (vidi Sliku 4.24).



(a) Funkcija $x \mapsto x^2 - 2$ dobivena je vertikalnom translacijom funkcije $f(x) = x^2$ za 2 prema dolje, dok je $x \mapsto x^2 + 2$ dobivena vertikalnom translacijom za 2 prema gore.



(b) Funkcija $x \mapsto \mathrm{sh}(x) + 3$ dobivena je vertikalnom translacijom funkcije sinus hiperbolički za 3 prema gore.

Slika 4.24: Vertikalne translacije funkcija, odnosno njihovih grafova.

Proizvoljna translacija funkcije f, odnosno njezinog grafa Γ_f, dobiva se kombinacijom horizontalne i vertikalne translacije. Ako funkciju f najprije horizontalno translatiramo za c, a zatim dobivenu funkciju vertikalno translatiramo za d, konačno dobivamo funkciju $x \mapsto f(x-c)+d$. Primijetite da translacije međusobno komutiraju, tj. da smo najprije realizirali vertikalnu translaciju za d, a zatim horizontalnu za c, dobili bismo istu funkciju $x \mapsto f(x-c)+d$.

4.7.2 Skaliranje

U prethodnom odjeljku vidimo da su translacije transformacije funkcija u kojima transformiramo argument (horizontalna) ili vrijednost funkcije (vertikalna) *pribrajanjem* određenog fiksnog realnog broja. Za razliku od toga u ovom odjeljku bavimo se skaliranjima. To su transformacije funkcija u kojima argument i/ili vrijednost funkcije transformiramo na način da ih *množimo* nekim zadanim realnom brojem. Pa krenimo redom.

Horizontalno skaliranje (skaliranje u smjeru x-osi) funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ s koeficijentom $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ daje funkciju $g : c \cdot D \to \mathbb{R}$, čije je pravilo pridruživanja dano formulom

$$g(cx) = f(x)\,, \quad \text{za sve } x \in D\,. \tag{4.26}$$

Ovdje $c \cdot D$ označava skaliranu domenu, odnosno $c \cdot D = \{cx\,,\ x \in D\}$. Na primjer, $-2 \cdot \langle -1, 0\rangle = \langle 0, 2\rangle$. Uvedemo li opet novu varijablu $z = cx$, jednakost (4.26) prelazi u

$$g(z) = f(z/c)\,, \quad \text{za sve } z \in c \cdot D\,. \tag{4.27}$$

U daljnjem tekstu, horizontalno skaliranu funkciju f s koeficijentom $c \neq 0$ jednostavno označavamo s $x \mapsto f(x/c)$, gdje x sada označava novu varijablu z. Ponekad se za funkciju $x \mapsto f(cx)$ kaže da je dobivena horizontalnim skaliranjem s koeficijentom $c \neq 0$, i ta definicija se može naći u literaturi. Te dvije definicije su korespodentne zbog korespodencije između c i c^{-1} za $c \neq 0$, ali mi uzimamo prvu zbog intuitivnosti sljedećeg nazivlja:

- skaliranje s koeficijentom $c > 1$ nazivamo *dilatacija* (rastezanje) — primijetite da se tada domena funkcije i graf *rastežu* (vidi Sliku 4.25(a));
- skaliranje s koeficijentom $0 < c < 1$ nazivamo *kontrakcija* (stezanje) — domena funkcije i graf tada se *stežu* (vidi Sliku 4.25(b)).

Ako je $c = -1$, tada je graf skalirane funkcije $x \mapsto f(-x)$ zrcalno simetričan grafu polazne funkcije f s obzirom na y-os (vidi Sliku 4.25(c)). Općenito će graf skalirane funkcije $x \mapsto f(x/c)$ za $c < 0$ biti zrcalno simetričan grafu polazne funkcije f s obzirom na y-os, a ovisno o tome je li $|c| > 1$ ili $|c| < 1$ uz zrcaljenje imamo još i dilataciju, odnosno kontrakciju (vidi Sliku 4.25(d)).

Vertikalno skaliranje (skaliranje u smjeru y-osi) funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ s koeficijentom $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ je funkcija $x \mapsto cf(x)$ kojoj je domena ista kao i polaznoj funkciji f, a vrijednosti se mijenjaju množenjem s koeficijentom $c \neq 0$. Iz definicije je odmah jasno:

- ako je $c > 1$, graf funkcije $x \mapsto cf(x)$ *rasteže* se u vertikalnom smjeru, odnosno amplituda mu je veća (vidi Sliku 4.26(a));
- ako je $0 < c < 1$, graf funkcije $x \mapsto cf(x)$ *steže* (sabija) se u vertikalnom smjeru, odnosno amplituda mu je manja (vidi Sliku 4.26(b)).

Nadalje, ako je $c = -1$, graf funkcije $x \mapsto -f(x)$ zrcalno je simetričan grafu polazne funkcije f s obzirom na x-os i općenito za $c < 0$ će graf funkcije $x \mapsto -f(x)$ biti zrcalno simetričan grafu funkcije f s obzirom na x-os, uz dodatno rastezanje ili stezanje ovisno o $|c|$ (vidi Slike 4.26(c) i (d)).

Općenito skaliranje funkcije f možemo realizirati kao kombinaciju horizontalnog i vertikalnog skaliranja. Time dobivamo funkcije oblika $x \mapsto df(cx)$ za $c, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

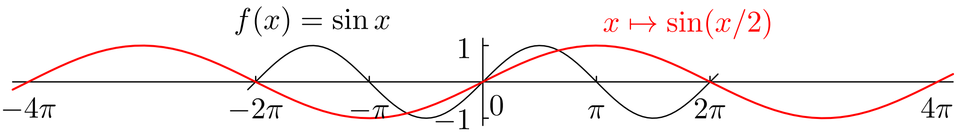
Kombinacijom translacija i skaliranja funkciju f možemo transformirati u funkcije oblika $x \mapsto af(bx - c) + d$, gdje su a, b, c, d realni brojevi pri čemu su $a, b \neq 0$. Ovakve transformacije funkcije, odnosno grafa funkcije, nazivaju se *linearnim transformacijama*. Primjer jedne linearne transformacije je općenita funkcija sinus, čiji graf nazivamo općenita sinusoida.

■ **Primjer 4.17 — Općeniti sinus.** Općenita funkcija sinus zadana je formulom

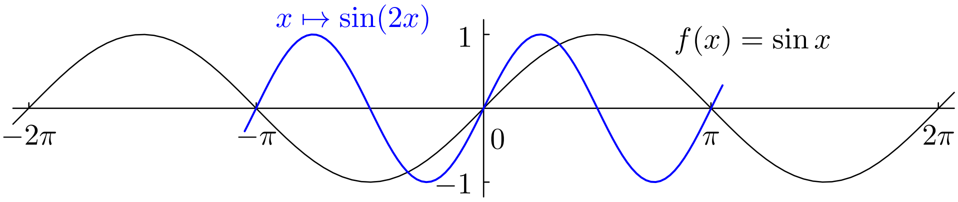
$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

gdje je $|A|$ amplituda, odnosno vrijedi $-|A| \leq f(x) \leq |A|$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Broj $\omega \neq 0$ naziva se kutna frekvencija, i pomoću njega lako odredimo temeljni period $T = 2\pi/\omega$. Zapišimo sada

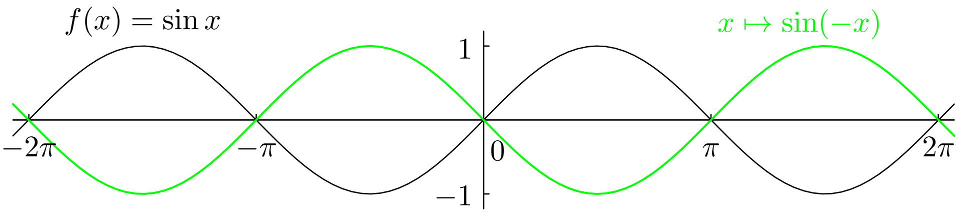
$$A\sin(\omega x + \varphi) = A\sin\left(\omega(x + \frac{\varphi}{\omega})\right) = A\sin\left(\omega(x - \varphi_0)\right)\,,$$



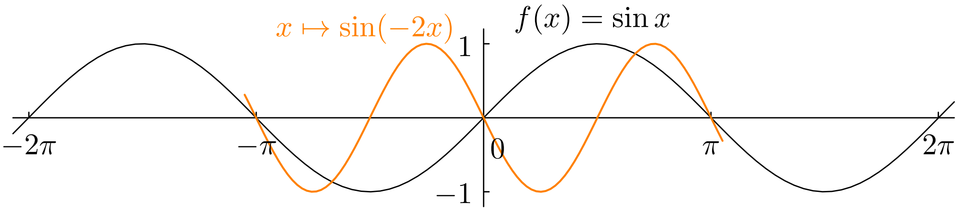
(a) Dilatacija. Funkcija $x \mapsto \sin(x/2)$ dobivena je horizontalnim skaliranjem funkcije $f(x) = \sin x$ s koeficijentom $c = 2$.



(b) Kontrakcija. Funkcija $x \mapsto \sin(2x)$ dobivena je horizontalnim skaliranjem funkcije $f(x) = \sin x$ s koeficijentom $c = 1/2$.

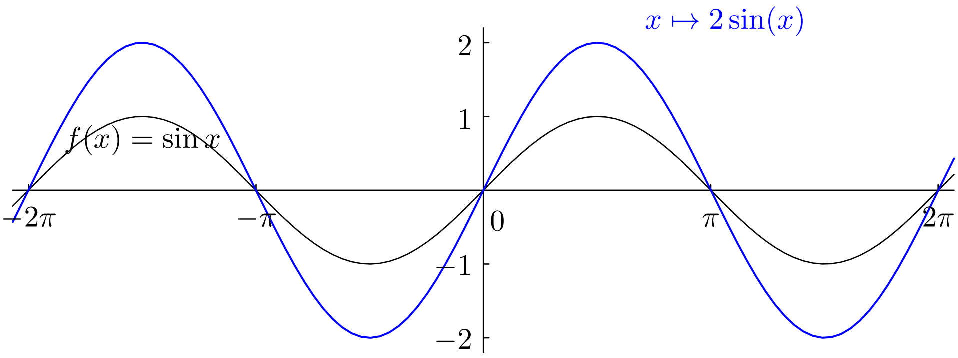


(c) Zrcaljenje s obzirom na y-os. Funkcija $x \mapsto \sin(-x)$ dobivena je horizontalnim skaliranjem funkcije $f(x) = \sin x$ s koeficijentom $c = -1$.

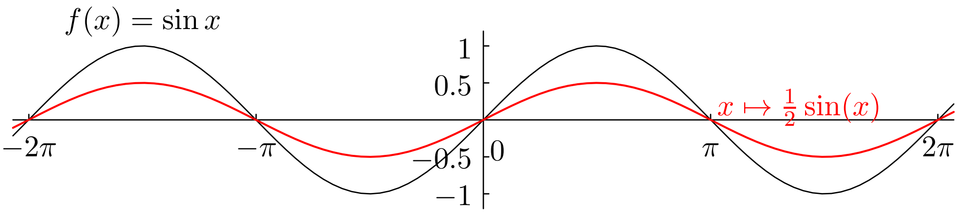


(d) Zrcaljenjes obzirom na y-os i kontrakcija. Funkcija $x \mapsto \sin(-2x)$ dobivena je horizontalnim skaliranjem funkcije $f(x) = \sin x$ s koeficijentom $c = -1/2$.

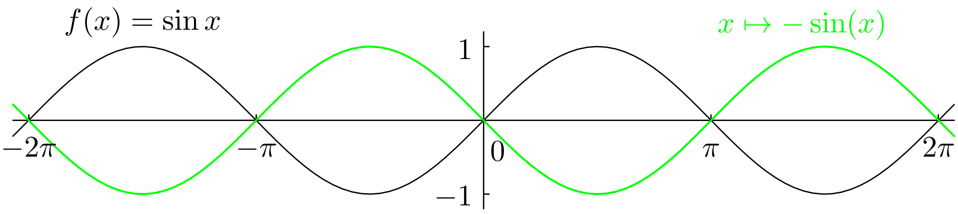
Slika 4.25: Horizontalna skaliranja funkcija, odnosno njihovih grafova.



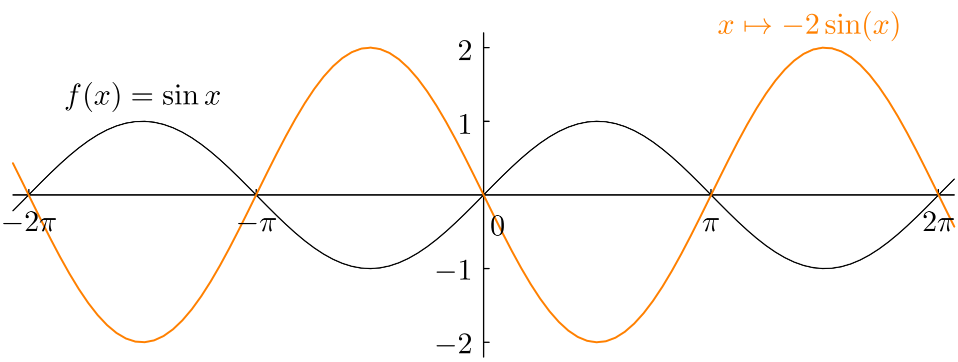
(a) Funkcija $x \mapsto 2\sin x$ dobivena je vertikalnim skaliranjem funkcije $f(x) = \sin x$ s koeficijentom $c = 2$.



(b) Funkcija $x \mapsto \frac{1}{2}\sin x$ dobivena je vertikalnim skaliranjem funkcije $f(x) = \sin x$ s koeficijentom $c = 1/2$.

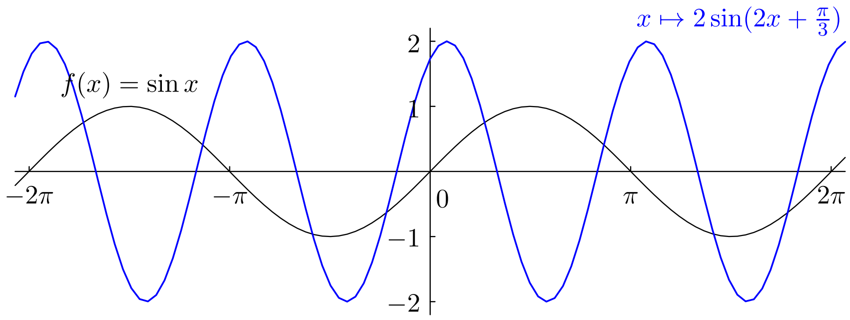


(c) Funkcija $x \mapsto -\sin x$ dobivena je vertikalnim skaliranjem funkcije $f(x) = \sin x$ s koeficijentom $c = -1$.



(d) Funkcija $x \mapsto -2\sin x$ dobivena je vertikalnim skaliranjem funkcije $f(x) = \sin x$ s koeficijentom $c = -2$.

Slika 4.26: Vertikalna skaliranja funkcija, odnosno njihovih grafova.



Slika 4.27: Općeniti sinus $x \mapsto 2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

gdje je $\varphi_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ i naziva se fazni pomak. Odavde je jasno koje elementarne transformacije funkcije sinus vode do općenitog sinusa, odnosno sinusoide. Najprije horizontalno translatiramo funkciju sinus za φ_0 a zatim redom skaliramo horizontalno s ω i vertikalno s A. ∎

∎ **Primjer 4.18** Neka je funkcija f zadana s $f(x) = A\cos(bx+c)+d$. Odredite koeficijente $A, b > 0$ i $c, d \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi: $Im(f) = [0,4]$, f je periodička s temeljnim periodom 4π i f je parna funkcija.

Iz uvjeta $Im(f) = [0,4]$ imamo $0 \le A\cos(bx+c)+d \le 4$, što je ekvivalentno s $-\frac{d}{A} \le \cos(bx+c) \le \frac{4}{A} - \frac{d}{A}$. Kako je $Im(\cos) = [-1,1]$, zaključujemo da nužno vrijedi $-d/A = -1$ i $4/A - d/A = 1$, odakle slijedi $A = d = 2$. Iz uvjeta periodičnosti $f(x+4\pi) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ slijedi $\cos(bx+c+4b\pi) = \cos(bx+c)$, odakle zbog periodičnosti funkcije $\cos(x)$ s periodom 2π slijedi $b = 1/2$. Iz uvjeta parnosti $f(-x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ slijedi $\cos(-x/2+c) = \cos(x/2+c)$. Primjenom adicijskih formula dobivamo $2\sin(x/2)\sin c = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, odakle nužno slijedi $\sin c = 0$, odnosno $c = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uzmimo npr. $c = 0$, tada je $f(x) = 2\cos(x/2)+2$.

∎

4.7.3 Zrcaljenje

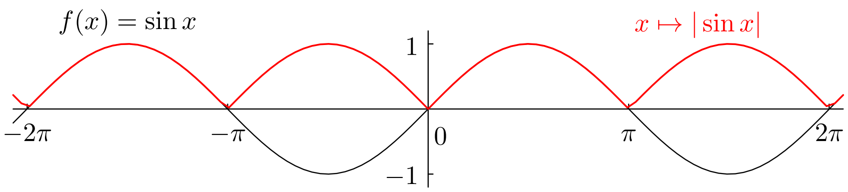
Već smo u prethodnom odjeljku vidjeli da je da su neka zrcaljenja grafova funkcija realizirana kao specijalni slučajevi skaliranja. Zrcalno simetrični graf grafu funkcije f s obzirom na x-os dobivamo vertikalnim skaliranjem s koeficijentom $c = -1$, dok zrcalno simetrični graf grafu funkcije f s obzirom na y-os dobivamo horizontalnim skaliranjem s istim koeficijentom $c = -1$ (vidi Slike 4.26(c) i 4.25(c)). Od ostalih zrcaljenja, ističemo još *zrcaljenje s obzirom na pravac $y = x$* i djelovanje funkcije *apsolutne vrijednosti*.

Bilo koji skup točaka u ravnini možemo zrcaliti s obzirom na pravac $y = x$ pa tako i graf proizvoljne realne funkcije realne varijable $f : D \to \mathbb{R}$. Međutim, ako f ima inverznu funkciju f^{-1}, tj. f je bijekcija, onda iz Poglavlja 3 znamo da je graf inverzne funkcije $\Gamma_{f^{-1}}$ zrcalno simetričan grafu Γ_f s obzirom na pravac $y = x$.

Kompozicijom funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ s funkcijom apsolutne vrijednosti dobivamo funkciju $x \mapsto |f(x)|$ definiranu s

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0, \\ -f(x), & f(x) \le 0. \end{cases}$$

Graf funkcije $x \mapsto |f(x)|$ dobivamo tako da dijelove grafa funkcije f koji se nalaze ispod



Slika 4.28: Apsolutna vrijednost funkcije sinus.

x-osi zrcalimo s obzirom na x-os u gornju poluravninu (vidi Sliku 4.28).

4.8 Zadatci za vježbu

1. Odredite prirodnu domenu sljedećih elementarnih funkcija zadanih formulom:
   (a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2-\sqrt{x^2-3x}}$,
   (b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-x+6}}$,
   (c) $h(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2-1)}$,
   (d) $k(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
2. Odredite sliku sljedećih elementarnih funkcija:
   (a) $f(x) = 1 - 2\cdot 3^{5x-6}$,
   (b) $g(x) = \log_2(x^2+4)$,
   (c) $h(x) = 2 - \operatorname{ch}(x+1)$,
   (d) $k(x) = \sqrt{1-\ln x}$.
3. Odredite prirodnu domenu i sliku sljedećih elementarnih funkcija:
   (a) $f(x) = \sqrt{\ln\dfrac{1}{|x-2|}}$,
   (b) $g(x) = \ln(e-\sqrt{x})$,
   (c) $h(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$,
   (d) $k(x) = \operatorname{arcctg}(1-x) + \pi$.
4. Jesu li funkcije zadane formulom na prirodnoj domeni injekcije?
   (a) $f(x) = \ln(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x)$,
   (b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-\ln x^2}}$,

(c) $h(x) = \sqrt{\ln \frac{1}{|x+1|}}$,

(d) $k(x) = \pi + 2\,\mathrm{arth}(5-x)$.

Ako jesu, odredite im sliku i inverz. Ako nisu, nađite neku restrikciju koja jest injekcija.

5. Riješite jednadžbe:

(a) $4\,\mathrm{sh}(\ln x) = x$,

(b) $\sin(2\arcsin x) = x$.

6. (a) Ako graf funkcije $f(x) = 2x^2 + 1$ translatiramo za 1 u desno i za 2 prema dolje, te dobiveni graf potom zrcalimo s obzirom na os x, kako glasi formula funkcije $g(x)$ kojoj je to graf?

(b) Ako graf funkcije $f(x) = 2^x + 1$ zrcalimo s obzirom na ishodište, kako glasi formula funkcije $g(x)$ kojoj je to graf?

(c) Ako graf funkcije $f(x) = \arccos(x-1) + 1$ zrcalimo s obzirom na pravac $y = -x$, kako glasi formula funkcije $g(x)$ kojoj je to graf?

7. Funkcija f zadana je s $f(x) = A\sin(bx+c) + d$. Odredite koeficijente $A, b > 0$ i $c, d \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi
(a) $Im(f) = [0,6]$,
(b) f je periodička s temeljnim periodom π,
(c) f je parna.

Rješenja zadataka

1. (a) $D(f) = (\langle -\infty, 0] \setminus \{-1\}) \cup ([3, +\infty\rangle \setminus \{4\})$
   (b) $D(g) = [0, +\infty\rangle$
   (c) $D(h) = \Big(\langle -\infty, -1\rangle \setminus \{-\sqrt{2}\}\Big) \cup \Big(\langle 1, +\infty\rangle \setminus \{\sqrt{2}\}\Big)$
   (d) $D(k) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$
2. (a) $Im(f) = \langle -\infty, 1\rangle$
   (b) $Im(g) = [2, +\infty\rangle$
   (c) $Im(h) = \langle -\infty, 1]$
   (d) $Im(k) = [0, +\infty\rangle$
3. (a) $D(f) = [1, 3] \setminus \{2\}$, $Im(f) = [0, +\infty\rangle$
   (b) $D(g) = [0, e^2\rangle$, $Im(g) = \langle -\infty, 1]$
   (c) $D(h) = \langle -\infty, -3] \cup [-1, +\infty\rangle$; $Im(h) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$
   (d) $D(k) = \mathbb{R}$
4. (a) $D(f) = \langle 0, 1]$, f je injekcija, $Im(f) = \langle -\infty, \ln(\frac{\pi}{2})]$, inverzna funkcija $f^{-1} : \langle -\infty, \ln(\frac{\pi}{2})] \to \langle 0, 1]$ zadana je s $f^{-1}(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - e^x)$
   (b) g nije injekcija, npr. restrikcija $g|_{\langle 0,e\rangle} : \langle 0, e\rangle \to \mathbb{R}$ jest injekcija
   (c) h nije injekcija, npr. restrikcija $h|_{\langle -1,0]} : \langle -1, 0] \to \mathbb{R}$ jest injekcija
   (d) $D(k) = \langle 4, 6\rangle$, k je injekcija, $Im(k) = \mathbb{R}$, inverzna funkcija $k^{-1} : \mathbb{R} \to \langle 4, 6\rangle$ zadana je s $k^{-1}(x) = 5 - \operatorname{th}(\frac{x-\pi}{2})$
5. (a) $x = \sqrt{2}$
   (b) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. (a) $g(x) = -2(x-1)^2 + 1$
   (b) $g(x) = -2^{-x} - 1$
   (c) $g(x) = -\cos(x+1) - 1$, za $x \in [-\pi - 1, -1]$
7. $f(x) = 3\sin(2x + \pi/2) + 3$

4.9 Literatura

[1] A. Aglić Aljinović, I. Brnetić, V. Ćepulić, N. Elezović, Lj. Marangunić, M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović. Matematika 1. Element, Zagreb, 2013.

[2] B. Guljaš. Matematička analiza I & II - skripta s predavanja. Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, 2015.

[3] S. Kurepa. Matematička analiza 1. Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[4] S. Kurepa. Matematička analiza 2. Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[5] B. Pavković, D. Veljan. Elementarna matematika 1. Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.

[6] B. Pavković, D. Veljan. Elementarna matematika 2. Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.