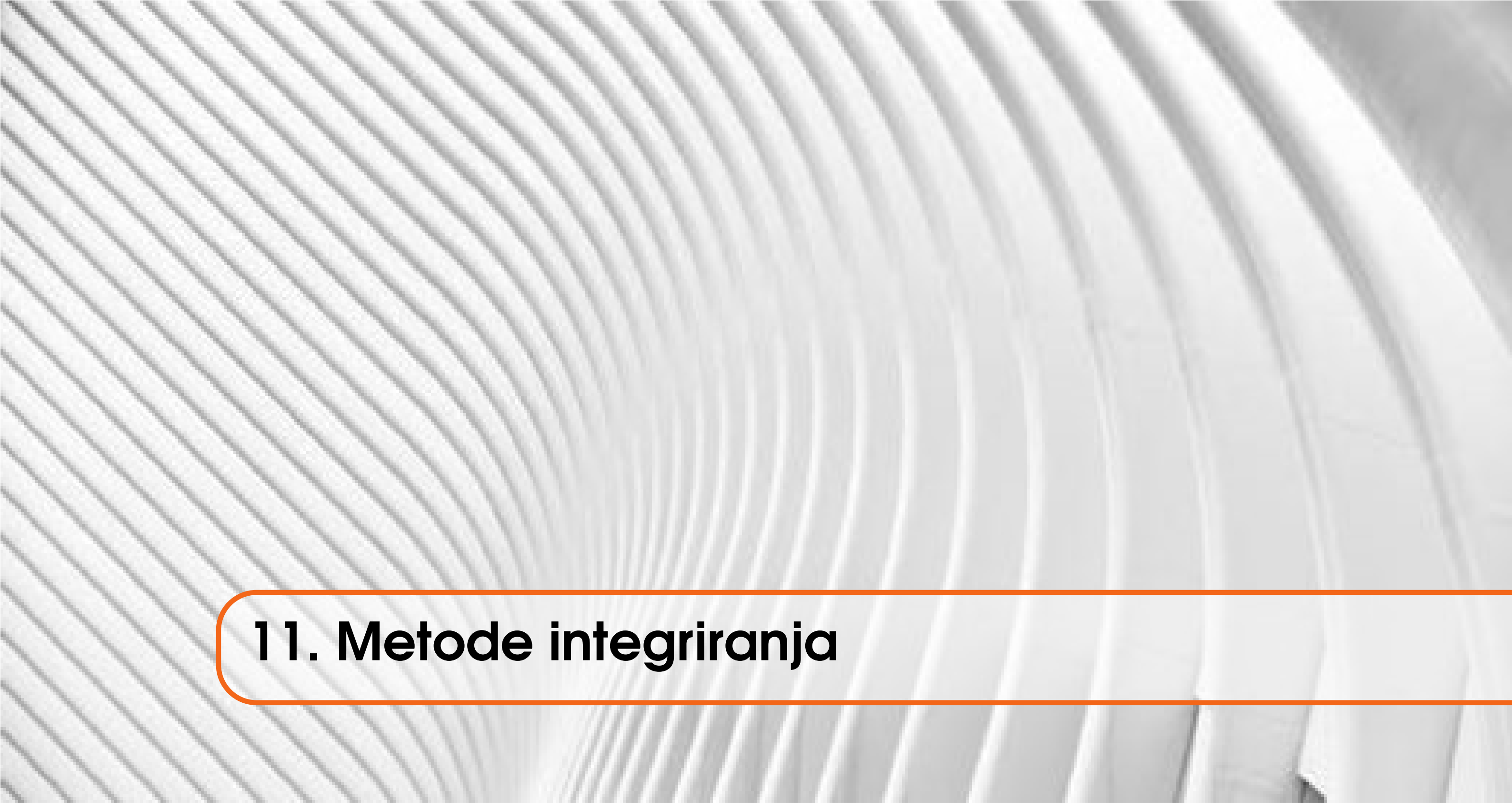
Matematička analiza 1 - Poglavlje 11

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 16. RUJNA 2021.
PUBLISHED BY FER
WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj



11. Metode integriranja

U ovom poglavlju ćemo se upoznati s raznim metodama integriranja koje ćemo usporedno pokazati na neodređenim i određenim integralima. Krenut ćemo s osnovnim metodama: metoda supstitucije (zamjene) i metoda parcijalne integracije. Na mnogo različitih primjera vidjet ćemo kada i kako odabrati i koristiti ove metode. Zatim ćemo se upoznati s integralima nekih najvažnijih klasa funkcija. Prvo ćemo vidjeti kako integrirati racionalne funkcije, odnosno funkcije s polinomom u brojniku i nazivniku. To su jedne od najosnovnijih elementarnih funkcija s kojima se susrećete još od prvog razreda srednje škole. Nakon njih ćemo se baviti integralima trigonometrijskih funkcija koji su od velike važnosti za elektrotehničku struku, posebice u analizi i obradi signala. Kratko ćemo se upoznati i s nekim integralima iracionalnih funkcija koji će se pojavljivati u primjeni. Tu ćemo posebnu pažnju posvetiti iracionalnim integralima koji se pojavljuju kod računanja površina vezanih uz osnovne krivulje drugog reda.

Odmah napominjemo da ipak ima mnogo funkcija, pa i veoma jednostavnih, kojima se integrali ne mogu prikazati kao kombinacije elementarnih funkcija pa kažemo da se takve funkcije ne daju elementarno integrirati. Neki od takvih integrala su:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \sin(x^2)\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Ključni pojmovi: metoda supstitucije, parcijalna integracija, racionalne funkcije, rastav na parcijalne razlomke, univerzalna trigonometrijska supstitucija, iracionalne funkcije

11.1 Metoda supstitucije

11.1.1 Supstitucija u neodređenom integralu

U praksi ćemo rijetko susresti integrale koji će se moći direktno integrirati, no ponekad će se dogoditi da se podintegralna funkcija veoma malo razlikuje od tablične, primjerice samo u argumentu:

$$\int e^{-2x}\,dx, \qquad \int \sin(4x+3)\,dx$$

Nameće se jednostavno rješenje ovog problema: zamjeniti argument koji nam stvara problem s novom varijablom te potom integrirati po uvedenoj novoj varijabli. U gornjim primjerima bismo napravili $-2x = t$ i $3x+1 = t$ te zatim integrirali po varijabli t. No pritom moramo vidjeti kako se u integralu promijeni diferencijal argumenta. To formalno izvodimo na sljedeći način.

■ **Primjer 11.1** Izračunajte (a) $\int e^{-2x}\,dx$ (b) $\int \sin(4x+3)\,dx$

$$(a)\quad \int e^{-2x}\,dx = \left|\begin{matrix} -2x = t \\ -2\,dx = dt \\ dx = -\frac{1}{2}\,dt \end{matrix}\right| = \int e^t\cdot(-\frac{1}{2}dt) = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$(b)\quad \int \sin(4x+3)\,dx = \left|\begin{matrix} 4x+3 = t \\ 4\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{4}\,dt \end{matrix}\right| = \int \sin t\cdot\frac{1}{4}\,dt = -\frac{1}{4}\cos t + C = -\frac{1}{4}\cos(4x+3) + C$$

Primijetite da je u posljednjem koraku potrebno vratiti uvedenu zamjenu na početnu varijablu! ■

Navedeni postupak ćemo iskazati i dokazati u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 11.1.1 — Metoda supstitucije u neodređenom integralu. Neka je f neprekinuta na I te $\varphi(t)$ neprekinuto diferencijabilna takva da je $\mathrm{Im}(\varphi) = I$. Tada, uz supstituciju $t = \varphi(x)$, vrijedi:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Dokaz. Neka je F primitivna funkcija od f, odnosno

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Deriviramo li taj izraz po x, dobivamo

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

odnosno $F(\varphi(x))$ je primitivna funkcija od $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ čime je teorem dokazan. ■

Napomena 11.1 Supstitucijom $t = \varphi(x)$ moramo promijeniti i diferencijal argumenta tako da s njim baratamo kao s diferencijalom funkcije:

$$\left|\begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{matrix}\right|$$

Dakle, metodu supstitucije koristimo da bismo prikladnom zamjenom varijable integriranja dobili jednostavniji integral koji se lakše rješava.

■ **Primjer 11.2**

$$\int \frac{dx}{2x-5} = \left|\begin{matrix} 2x-5 = t \\ 2\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}\,dt \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-5| + C$$

■

Prethodni primjeri nam pokazuju da općenito vrijedi sljedeće.

■ **Primjer 11.3** Neka je $\int f(x)dx = F(x) + C$. Tada:

$$\int f(ax+b)dx = \begin{vmatrix} ax+b=t \\ a\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

■

Dakle, integriramo li funkciju linearnog izraza od x, rezultat je ista primitivna funkcija od tog linearnog izraza, ali pomnožena s recipročnim koeficijentom uz x. Pogledajmo na nekoliko primjera kako to možemo primijeniti na rješavanje integrala.

■ **Primjer 11.4**

$$\int \cos(\frac{\pi}{2}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}x) + C$$

$$\int 3^{7-x}\,dx = -\frac{3^{7-x}}{\ln 3} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x+14)} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+14) + C$$

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$$

■

Vježba 11.1 Izračunajte integrale $\int \sin(\frac{2x+\pi}{3})\,dx$ i $\int \frac{3}{(1-x)^{14}}\,dx$.

U dosadašnjim primjerima smo supstituirali samo linearni izraz od x. Možemo naravno upotrebljavati i drugačije supstitucije pri čemu treba paziti na izračun diferencijala i da svojim odabirom dobijemo jednostavniji integral.

■ **Primjer 11.5**

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$$

■

■ **Primjer 11.6**

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

■

■ **Primjer 11.7**

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{vmatrix} \arcsin x = t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt \end{vmatrix} = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\arcsin^3 x + C$$

■

■ **Primjer 11.8**

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left| \begin{array}{c} e^x = t \\ e^x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C$$

■

■ **Primjer 11.9**

$$\int x e^{-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} -x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt \end{array} \right| = \int e^t \cdot (-\frac{1}{2}\,dt) = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

■

■ **Primjer 11.10**

$$\int x^2 \cos(2x^3+5)\,dx = \left| \begin{array}{c} 2x^3+5 = t \\ 6x^2\,dx = dt \\ x^2\,dx = \frac{1}{6}\,dt \end{array} \right| = \int \cos t \cdot \frac{1}{6}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\sin t + C = \frac{1}{6}\sin(2x^3+5) + C$$

■

■ **Primjer 11.11**

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{arctg} x = t, & x^2+1 = u \\ \frac{1}{x^2+1}\,dx = dt, & 2x\,dx = du \end{array} \right|$$

$$= \int t\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

■

Ukoliko uvođenjem supstitucije i računanjem diferencijala u integralu i dalje ostane varijabla x, potrebno ju je izraziti preko nove varijable iz uvedene zamjene.

■ **Primjer 11.12**

$$\int x\sqrt{3x-2}\,dx = \left| \begin{array}{c} 3x-2 = t \\ x = \frac{1}{3}(t+2) \\ dx = \frac{1}{3}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3}(t+2)\sqrt{t} \cdot \frac{1}{3}\,dt$$

$$= \frac{1}{9}\int (t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}})\,dt = \frac{1}{9}\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{2}{45}(3x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{27}(3x-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

■

■ **Primjer 11.13**

$$\int \frac{x^2}{(2x+5)^3}\,dx = \left| \begin{array}{c} 2x+5 = t \\ x = \frac{1}{2}(t-5) \\ dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{(\frac{1}{2}(t-5))^2}{t^3} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{8}\int \frac{t^2-10t+25}{t^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int (\frac{1}{t} - \frac{10}{t^2} + \frac{25}{t^3})\,dt = \frac{1}{8}\left(\ln|t| + 10t^{-1} + 25\frac{t^{-2}}{-2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{8}\ln|2x+5| + \frac{5}{4}\frac{1}{2x+5} - \frac{25}{16}\frac{1}{(2x+5)^2} + C$$

■

■ **Primjer 11.14**

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \begin{vmatrix} e^x+1=t \\ e^x = t-1 \\ e^x\,dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt = \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\,dt$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(e^x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

■

■ **Primjer 11.15** Izračunajte $\int \operatorname{tg} x\,dx$ i $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

Rješenje. S obzirom da nemamo tablične integrale od funkcija tangens i kotangens, prelazimo na funkcije sinus i kosinus:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{vmatrix}$$

$$= \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Na sličan način sami provjerite da vrijedi

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

Detaljnije o integriranju trigonometrijskih funkcija naučit ćemo u poglavlju 12.4. ■

Vježba 11.2 Izračunajte $\int \operatorname{th} x\,dx$, $\int \operatorname{cth} x\,dx$.

11.1.2 Supstitucija u određenom integralu

Na jednak način kao kod neodređenog integrala, uvodit ćemo supstitucije u određenom integralu, no pritom treba pripaziti na promjenu granica integracije. Naime, početne granice integracije a i b vrijede za integriranje po varijabli x pa supstitucijom $\varphi(x) = t$ prelaze u nove granice $\varphi(a)$ i $\varphi(b)$ koje integriramo po varijabli t. Točnije, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 11.1.2 — Metoda supstitucije u određenom integralu. Neka je $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ neprekinuta, a $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ neprekinuto diferencijabilna i $\varphi([a,b]) \subseteq [\alpha,\beta]$. Tada, uz supstituciju $t = \varphi(x)$, vrijedi:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Dokaz. Neka je F primitivna funkcija od f. Tada je

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

odnosno $F(\varphi(x))$ je primitivna funkcija od $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Onda slijedi

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

■

■ **Primjer 11.16**

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}} = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{12}$$

■

■ **Primjer 11.17**

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & e \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

■

■ **Primjer 11.18**

$$\int_1^2 x^3\sqrt{5-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} 5-x^2 = t \;\Rightarrow\; x^2 = 5-t \\ -2x\,dx = dt \;\Rightarrow\; x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 4 & 1 \end{array} \end{array} \right| = -\int_4^1 (5-t)\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 (5t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}})\,dt = \frac{1}{2}\left(5\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{208}{15} - \frac{44}{15}\right) = \frac{82}{15}$$

■

■ **Primjer 11.19**

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x+1} = t \;\Rightarrow\; x = t^2-1 \\ dx = 2t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline t & 1 & \sqrt{3} \end{array} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{(t^2+1)t}$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

■

■ **Primjer 11.20** Izračunajte $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} |\sin(2x)|\,dx$.

Rješenje. Period funkcije $f(x) = \sin(2x)$ je $T = \pi$ te je ona pozitivna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, a negativna na $\langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$. Stoga je potrebno podijeliti područje integracije na dva dijela kako slijedi:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} |\sin(2x)|\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (-\sin(2x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Primijetiti da tražena površina odgovara površini ispod jednog luka sinusoide $f(x) = \sin(2x)$ (nacrtajte njen graf!) pa smo traženi integral mogli izračunati i kao $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$. ■

■ **Primjer 11.21**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{4\sin^2 x + 4\sin x + 1}\, dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & -1 & 1 \end{array} \end{array} \right| = \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^2 + 4t + 1}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{(2t+1)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} |2t+1|\, dt = -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2t+1)\, dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (2t+1)\, dt$$

$$= -(t^2+t)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + (t^2+t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}.$$

■

Napomena 11.2 Integrale možemo rješavati i supstitucijom $x = \varphi(t)$ no pritom je potrebno da funkcija $\varphi(t)$ bude bijekcija na zadanom intervalu, odnosno mora postojati njen inverz φ^{-1}. Tada pišemo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \;\Rightarrow\; dx = \varphi'(t)\, dt \\ x = a \;\Rightarrow\; t_1 = \varphi^{-1}(a) \\ x = b \;\Rightarrow\; t_2 = \varphi^{-1}(b) \end{array} \right| = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Ovakav tip supstitucije koristit ćemo kod iracionalnih integrala u poglavlju 12.5.

11.2 Parcijalna integracija

11.2.1 Parcijalna integracija u neodređenom integralu

Pogledajmo sljedeća dva integrala

$$\int x e^x\, dx, \quad \int x^2 \sin x\, dx.$$

U oba slučaja je podintegralna funkcija umnožak dviju jednostavnih elementarnih funkcija, no ne možemo ih riješiti supstitucijom i dosadašnjim metodama. Ovakav tip integrala se veoma često pojavljuje u primjeni i susretat ćete se s njima na višim godinama studija, primjerice kod integralnih transformacija u rješavanju strujnih krugova ili obradi signala. U ovakvim slučajevima koristimo metodu parcijalne integracije koja se bazira na formuli za derivaciju umnoška.

Teorem 11.2.1 — Metoda parcijalne integracije. Neka su f i g diferencijabilne funkcije na $\langle a, b\rangle$. Tada na tom intervalu vrijedi

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$$

pod uvjetom da svi navedeni integrali postoje.

Dokaz. Pokazat ćemo da je desna strana primitivna funkcija od $f(x)g'(x)$:

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x),$$

čime je dokaz gotov. ■

Napomena 11.3 Označavajući $u = f(x)$, $dv = g'(x)\,dx$, formulu za parcijalnu integraciju možemo zapisati u lakše pamtljivom obliku

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

gdje je $du = f'(x)\,dx$, $v = \int dv = \int g'(x)\,dx$.

Nameću nam se dva osnovna pitanja.

---

1. Kada koristimo parcijalnu integraciju?
- kada je podintegralna funkcija umnožak polinoma i trigonometrijske ili eksponencijalne funkcije
- kada podintegralnu funkciju ne možemo direktno integrirati, ali možemo derivirati (npr. logaritamska ili arkus funkcije)

2. Kako odabrati u i dv?
- za u biramo funkciju koja se pojednostavljuje deriviranjem
- za dv biramo izraz koji se ne komplicira integriranjem

Riješimo sada primjere iz uvoda.

■ **Primjer 11.22** Izračunajte integral $\displaystyle\int x e^x\,dx$.

Rješenje. Prvo treba spretno odabrati u i dv. Primijetimo da izbor $u = x$ daje jednostavnu derivaciju $du = dx$, dok izbor $dv = x\,dx$ integriranjem daje $v = \frac{1}{2}x^2$, odnosno povećava složenost integrala. Što se tiče funkcije e^x, ona se deriviranjem i integriranjem ne mijenja pa neće zakomplicirati integral. Prema tome, parcijalnu integraciju provodimo na sljedeći način:

$$\int x e^x\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & dv = e^x\,dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}\right| = x e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Napomena 11.4 Prilikom parcijalne integracije kod računanja v možemo uzeti bilo koju primitivnu funkciju, odnosno u ovom primjeru $v = e^x + C$ pa je najprikladnije uzeti $C = 0$. U ostalim zadacima to nećemo više naglašavati nego se podrazumijeva.

■

Pri rješavanju parcijalnom integracijom može se dogoditi da novi integral na desnoj strani $\int v\,du$ moramo riješiti uvođenjem supstitucije ili čak ponovno parcijalnom integracijom, katkad i više puta.

■ **Primjer 11.23** Izračunajte integral $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x\,dx &= \left|\begin{array}{cc} u = x^2 & dv = \sin x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = -\cos x \end{array}\right| = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx \\
&= \left|\begin{array}{cc} u = 2x & dv = \cos x\,dx \\ du = 2\,dx & v = \sin x \end{array}\right| = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C
\end{aligned}$$

■

Vježba 11.3 Izračunajte integral $\int x^2 e^{-2x}\,dx$.

■ **Primjer 11.24** Izračunajte integral $\int x^2 \ln x\,dx$.

Rješenje. Za razliku od prethodnog primjera, u ovom slučaju je prikladniji izbor $u = \ln x$ s obzirom da integral funkcije $\ln x$ nije tablični i zakomplicirao bi postupak, dok njegova derivacija pojednostavljuje izraz.

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x\,dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^2\,dx \\ du = \frac{1}{x}\,dx & v = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

■

Vježba 11.4 Izračunajte integral $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

U prethodnom zadatku smo spomenuli da integral $\int \ln x\,dx$ nije tablični, no primijetite da do sada nismo izračunali ni integrale nekih drugih elementarnih funkcija, primjerice arkus i area funkcija. Upravo se parcijalna integracija koristi za računanje takvih integrala na način da uzimamo jedinicu kao faktor koji ćemo integrirati, odnosno $dv = 1\,dx$. Pritom je zgodno primijetiti da se te elementarne funkcije deriviranje pojednostavljuju (postaju racionalne ili iracionalne) pa su stoga spretan odabir za u.

■ **Primjer 11.25**

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}\,dx & v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

■

■ **Primjer 11.26**

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & v = x \end{array} \right| = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt \end{array} \right| = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\ &= x\arcsin x + \sqrt{t} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

■

Vježba 11.5 Sami za vježbu odredite integrale ostalih arkus funkcija, odnosno provjerite da vrijedi:

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{arcctg} x\,dx = x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Ponekad parcijalna integracija vodi na isti neodređeni integral s početka postupka, no s različitim koeficijentima. Vidjet ćemo u sljedećem primjeru da se tada traženi integral može izračunati kao rješenje linearne jednadžbe.

■ **Primjer 11.27** Izračunajte integral $\int e^x \sin x\,dx$.

$$\int e^x \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \sin x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$
$$= \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \cos x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = \sin x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Vratili smo se na početni integral koji ćemo prebaciti na lijevu stranu pa dobivamo:

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x,$$

odnosno nakon djeljenja s 2:

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Napomena 11.5 Kada su na obje strane neodređeni integrali, u njima su sadržane po volji odabrane konstante. Prebacimo li integralne izraze na istu stranu, moramo na drugu stranu staviti konstantu kojom je neodređeni integral karakteriziran.

■

Vježba 11.6 Pokažite sami za vježbu da općenito vrijedi

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

■ **Primjer 11.28** Izračunajte integral $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Rješenje. Ideja je sljedeća: prvo ćemo racionalizirati zadani korijen te zatim razdijeliti na dva integrala od kojih će jedan biti tablični, a drugi ćemo riješiti parcijalnom integracijom pazeći na spretni odabir u i dv.

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$= \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ du = dx & v = \sqrt{1+x^2} \end{vmatrix}$$

Pritom u izračunu parcijalne integracije za v koristimo standardnu supstituciju:

$$v = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \begin{vmatrix} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{1+x^2}$$

Stoga slijedi:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx$$
$$2\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2} \quad \backslash : 2$$
$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C.$$

U poglavlju 12.5 vidjet ćemo kako se ovakav tip integrala može riješiti i prikladnim supstitucijama. ■

11.2.2 Parcijalna integracija u određenom integralu

Na isti način provodimo parcijalnu integraciju u određenom integralu te kao i inače, nakon integriranja uvrštavamo granice po Newton-Leibnizovoj formuli. Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 11.2.2 — Metoda parcijalne integracije za određeni integral.
Neka su f i g neprekinuto diferencijabilne funkcije na $[a,b]$. Tada vrijedi:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

■ **Primjer 11.29**

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = e^{-x}\,dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$
$$= -xe^{-x}\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 = -(e^{-1}-0)-(e^{-1}-1) = 1-\frac{2}{e}$$

■

■ **Primjer 11.30**

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & dv = \frac{1}{x^2}\,dx \\ du = \frac{1}{x}\,dx & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -(\frac{1}{e}-0)-(\frac{1}{e}-1) = 1-\frac{2}{e}$$

■

■ **Primjer 11.31**

$$\int_0^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \left| \begin{array}{cc} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 0 & \sqrt{3} \end{array} \\ dx = 2t\,dt & \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} 2t\operatorname{arctg} t\,dt$$
$$= \left| \begin{array}{cc} u = \operatorname{arctg} t & dv = 2t\,dt \\ du = \frac{dt}{1+t^2} & v = t^2 \end{array} \right| = t^2\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$
$$= t^2\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} (1-\frac{1}{1+t^2})\,dt = t^2\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{3}} - (t-\operatorname{arctg} t)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$
$$= (3\cdot\frac{\pi}{3}-0)-(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-0) = \frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

■

■ **Primjer 11.32** Izračunajte $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$.

Rješenje. Područje integracije je potrebno podijeliti na dva dijela jer je funkcija $f(x) = \ln x$ negativna za $x \in \langle 0,1\rangle$, a pozitivna za $x > 1$. Stoga pišemo:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x)\,dx + \int_1^e \ln x\,dx$$

Vidjeli smo u Primjeru 12.25 da je $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$, pa slijedi

$$I = -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_1^e = 2-\frac{2}{e}.$$

■

11.3 Integrali racionalnih funkcija

Nakon što smo se upoznali s dvije temeljne metode integriranja, vidjet ćemo kako integrirati neke najvažnije klase funkcija. Krenut ćemo od racionalnih funkcija s kojima ste se susretali cijelo srednjoškolsko obrazovanje. To su elementarne funkcije s polinomom u brojniku i nazivniku, a u prethodnim poglavljima smo naučili kako ispitivati njihovo granično ponašanje i tok, odnosno detaljno smo proučavali crtanje njihovog kvalitativnog grafa. Sada ćemo vidjeti kako ih integrirati, no prvo ih formalno definirajmo.

Definicija 11.3.1 **Racionalna funkcija** $f(x)$ je funkcija oblika

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}, \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

gdje su P_n i Q_m polinomi stupnja n odnosno m. ■

Pritom razlikujemo dva slučaja:

- ako je stupanj brojnika strogo manji od stupnja nazivnika ($n < m$) kažemo da je $f(x)$ **prava** racionalna funkcija
- ako je stupanj brojnika veći ili jednak od stupnja nazivnika ($n \geq m$) kažemo da je $f(x)$ **neprava** racionalna funkcija

Neke prave racionalne funkcije možemo jednostavno integrirati odgovarajućom supstitucijom kao u sljedećem primjeru.

■ **Primjer 11.33** Izračunajte (a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

Rješenje. U integralu (a) dovoljno je primijetiti da je brojnik zapravo derivacija nazivnika pa samo supstituiramo nazivnik. U (b) je pak potrebno uvesti supstituciju $x^2 = t$ jer ćemo time eliminirati x iz brojnika i potom dobiti tablični integral.

$$(a) \quad \int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+3x+1 = t \\ (2x+3)\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+3x+1| + C$$

$$(b) \quad \int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + C$$

■

11.3.1 Nadopuna kvadratnog trinoma

Često ćemo se susretati s integralima koji imaju kvadratni trinom ax^2+bx+c u nazivniku, a da nisu riješivi direktnom supstitucijom. Općeniti pristup za rješavanje takvih integrala je nadopuna kvadratnog trinoma do potpunog kvadrata i zatim uvodimo supstituciju čime dobijemo tablični integral.

■ **Primjer 11.34**

$$\int \frac{dx}{4x^2+12x+9} = \int \frac{dx}{(2x+3)^2} = \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3} + C$$

■

■ **Primjer 11.35**

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

■

■ **Primjer 11.36** Izračunajte $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$.

Rješenje. Kao i u prethodnim primjerima, potrebno je prvo kvadratni trinom u nazivniku svesti na potpuni kvadrat. No ostaje varijabla x u brojniku koju ćemo izraziti iz supstitucije.

$$I = \int \frac{x\,dx}{(x+2)^2+1} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{(t-2)\,dt}{t^2+1} = \int \frac{t\,dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1}$$

Drugi integral je tablični, no u prvom je potrebno uvesti novu supstituciju

$$t^2+1=u, \quad t\,dt = \tfrac{1}{2}\,du.$$

Time smo dobili

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln|u| - 2\operatorname{arctg} t + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|(x+2)^2+1| - 2\operatorname{arctg}(x+2) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| - 2\operatorname{arctg}(x+2) + C. \end{aligned}$$

■

11.3.2 Dijeljenje i faktorizacija polinoma

U svim prethodnim primjerima smo integrirali prave racionalne funkcije. U slučaju $n \geq m$, odnosno kada je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak stupnju polinoma u nazivniku, potrebno je podijeliti polinome na način:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$$

gdje je $S_{n-m}(x)$ polinom stupnja $n-m$ dobiven kao rezultat djeljenja, a polinom $R(x)$ je ostatak pri dijeljenju, stupnja strogo manjeg od m. Drugim riječima, nepravu racionalnu funkciju dijeljenjem brojnika s nazivnikom svodimo na cijeli dio $S_{n-m}(x)$ i pravu racionalnu funkciju.

■ **Primjer 11.37** Podijelimo polinome x^3+x^2-4 i x^2-2x.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x^3+x^2-4}{x^2-2x} & = & (x^3+x^2-4):(x^2-2x) = x+3 \\ & & \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ & & \quad 3x^2 \; -4 \\ & & \quad \underline{\pm 3x^2 \mp 6x} \\ & & \qquad\quad 6x-4 \end{array}$$

Odnosno, to možemo zapisati kao:

$$\frac{x^3+3x^2-1}{x^2-2x} = x+3+\frac{6x-4}{x^2-2x}.$$

■

Vježba 11.7 Sami podijelite polinome $\dfrac{x^4-2x^2+x-5}{x^2+4}$ i $\dfrac{x^3-4x+3}{x+1}$.

S obzirom da je integriranje cijelog dijela elementarno, problem integriranja racionalne funkcije svodi se na integriranje pravog racionalnog razlomka. Pritom je prvi korak faktorizacija polinoma u nazivniku. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 11.3.1 — Faktorizacija polinoma.
Polinom $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ s realnim koeficijentima $a_1, \ldots, a_n$, možemo napisati kao produkt linearnih i kvadratnih faktora u obliku:

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{r} (x-x_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} (x^2+p_j x+q_j)^{l_j},$$

pri čemu:
- polinom ima linearan faktor $(x-x_i)^{k_i}$ ako je $x_i \in \mathbb{R}$ nultočka polinoma kratnosti k_i
- polinom ima kvadratni faktor $(x^2+p_j x+q_j)^{l_j}$, $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, ako ima konjugirano kompleksne nultočke kratnosti l_j

Također vrijedi da je suma kratnosti svih nultočaka jednaka stupnju polinoma n.

Napomena 11.6 Nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, gdje je vodeći koeficijent $a_n = 1$, su djeljitelji slobodnog člana što ćemo koristiti prilikom faktorizacije.

■ **Primjer 11.38** Faktorizirajte polinome:
(a) $x^6 - 1$
(b) $x^5 + 4x^3 + 3x$
(c) $x^3 - 3x^2 - 3x - 4$

(a) Koristimo razliku kvadrata pa potom razliku i zbroj kubova:

$$x^6 - 1 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

(b) Izlučimo x pa faktoriziramo bikvadratni član rastavom srednjeg člana:

$$x^5 + 4x^3 + 3x = x(x^4 + 3x^2 + x^2 + 3) = x(x^2+3)(x^2+1)$$

(c) Prvo je potrebno pronaći jednu nultočku koja je djeljitelj slobodnog člana (-4). Kandidati su $\pm 1, \pm 2, \pm 4$, a uvrštavanjem u polinom vidimo da je $x = 4$ nultočka. Zatim podijelimo početni polinom s $(x-4)$ čime dobijemo kvadratni polinom x^2+x+1 koji nema realne nultočke. Stoga imamo faktorizaciju:

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x^2+x+1)$$

■

Vježba 11.8 Faktorizirajte polinome a) $x^8 - 1$, b) $x^4 - 2x^2 + 4x$.

Dodatak

Prethodni teorem o faktorizaciji polinoma je posljedica nekoliko teorema od kojih je najvažniji tzv. **temeljni stavak algebre** (Gauss 1799.), koji kaže da svaki polinom barem prvog stupnja s kompleksnim koeficijentima ima barem jednu nultočku u $\mathbb{C}$:

$$f(x) = P_n(x) \;\Rightarrow\; \exists x_0 \in \mathbb{C} \;:\; P_n(x_0) = 0 \quad (n \geq 1)$$

Temeljni stavak omogućuje rastav svakog polinoma s kompleksnim koeficijentima na linearne faktore

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x-x_i)^{\alpha_i}$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n, \quad x_i \neq x_j$ za $i \neq j$.
Ako se ograničimo na polinome s realnim koeficijentima lako je pokazati da se kompleksne nultočke pojavljaju kao parovi kompleksno konjugiranih brojeva:

$$P_n(x_i) = 0 \Leftrightarrow P_n(\bar{x}_i) = 0.$$

To omogućuje da se izraz $(x - x_i)(x - \bar{x}_i)$ može prikazati kao trinom $x^2 + p_i x + q_i$ s realnim koeficijentima p_i, q_i i diskriminantom $D_i = p_i^2 - 4q_i < 0$. Koristeći taj rezultat i navedeni rastav $P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{\alpha_i}$ zaključujemo da vrijedi Teorem 12.3.1.

11.3.3 Rastav na parcijalne razlomke

Vratimo se problemu integriranja racionalnih funkcija. Nakon faktorizacije nazivnika provodimo postupak rastavljanja prave racionalne funkcije na manje (parcijalne) razlomke. Naime, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 11.3.2 — Rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke. Prava racionalna funkcija ima jednoznačno određen rastav na zbroj parcijalnih razlomaka čiji oblik i broj ovisi o faktorizaciji nazivnika:

- faktor $(x - a)^k$ daje parcijalne razlomke:

$$\frac{A_1}{x - a}, \ldots, \frac{A_k}{(x - a)^k}, \qquad A_i \in \mathbb{R}$$

- faktor $(x^2 + px + q)^k$ daje parcijalne razlomke:

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q}, \ldots, \frac{B_k x + C_k}{(x^2 + px + q)^k}, \qquad B_i, C_i \in \mathbb{R}.$$

Pogledajmo tvrdnju teorema na konkretnom primjeru.

■ Primjer 11.39

$$\frac{1}{(2x-1)^3(x^2+x+2)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{(2x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+2} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+2)^2}$$

■

Koeficijente A_i, B_i, C_i možemo odrediti na dva načina koje ćemo pokazati na sljedećim primjerima.

■ Primjer 11.40

$$\frac{6x-4}{x^2-2x} = \frac{6x-4}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \qquad \backslash \cdot x(x-2)$$

$$6x - 4 = A(x-2) + Bx \tag{11.1}$$

1. način: u jednadžbi (11.1) izjednačavamo koeficijente uz iste potencije varijable x. Time dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 6 &= A + B \\ -4 &= -2A \end{aligned}$$

čije rješenje je $A = 2$, $B = 4$.

2. način: U jednadžbu (11.1) uvrštavamo prikladno odabrane brojeve za x (npr. nultočke nazivnika):

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad -4 = -2A \quad \Rightarrow A = 2 \\ x = 2: &\quad 8 = 2B \quad \Rightarrow B = 4 \end{aligned}$$

Dakle, rastav zadane racionalne funkcije glasi:

$$\frac{6x-4}{x(x-2)} = \frac{2}{x} + \frac{4}{x-2}$$

■

Riješimo sada jedan složeniji primjer.

■ **Primjer 11.41**

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Množenjem izraza s nazivnikom $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ dobivamo

$$x^2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1) \tag{11.2}$$

1. način: Raspišemo prethodnu jednadžbu i tražimo koeficijente uz iste potencije od x:

$$x^2 = x^3(A+B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + (A-B-D)$$

Time dobivamo sustav

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-B+D &= 1 \\ A+B-C &= 0 \\ A-B-D &= 0 \end{aligned}$$

čije rješenje je $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = \frac{1}{2}$.

2. način: Uvrštavanjem prikladnih vrijednosti u (11.2) za x (primijeti da imamo samo dvije realne nultočke pa ostale vrijednosti biramo po volji):

$$\begin{aligned} x=1: &\quad 1 = 4A \quad \Rightarrow \quad A = \tfrac{1}{4} \\ x=-1: &\quad 1 = -4B \quad \Rightarrow \quad B = -\tfrac{1}{4} \\ x=0: &\quad 0 = A-B-D \quad \Rightarrow \quad D = \tfrac{1}{2} \\ x=2: &\quad 4 = 15A+5B+6C+3D \Rightarrow \quad C = 0 \end{aligned}$$

Prema tome, vrijedi sljedeći rastav:

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

■

Nakon rastava na parcijalne razlomke koristimo svojstvo da je integral zbroja jednak zbroju integrala pa se integracija racionalne funkcije svodi na integraciju njenih parcijalnih razlomaka. Primjerice, za racionalnu funkciju iz prethodnog primjera vrijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx &= \int \frac{1}{4(x-1)}\,dx - \int \frac{1}{4(x+1)}\,dx + \int \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

S obzirom na važnost racionalnih funkcija, ponovimo još jednom sve korake prilikom njihovog integriranja.

1. Ako je racionalna funkcija neprava (odnosno stupanj brojnika veći ili jednak od stupnja nazivnika), dijeljenjem polinoma je svodimo na zbroj polinoma i prave racionalne funkcije
2. Nazivnik prave racionalne funkcije faktoriziramo u obliku linearnih i kvadratnih faktora
3. Pravu racionalnu funkciju rastavimo na parcijalne razlomke (oblik i broj parcijalnih razlomaka ovisi o faktorima u faktorizaciji nazivnika)
4. Izračunamo nepoznate koeficijente A_i, B_i, C_i u rastavu na parcijalne razlomke
5. Dobivene parcijalne razlomke integriramo svaki posebno.

■ **Primjer 11.42** Izračunajte $\int \frac{x^3+x^2-4}{x^2-2x}\,dx$.

Rješenje. Slijedeći prethodno opisani postupak, prvo podijelimo polinome (jer je stupanj brojnika veći od stupnja nazivnika) te zatim pravu racionalnu funkciju rastavimo na parcijalne razlomke (vidi Primjer 12.37 i Primjer 12.40)

$$\int \frac{x^3+x^2-4}{x^2-2x}\,dx = \int \left(x+3+\frac{6x-4}{x^2-2x}\right) dx = \int \left(x+3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x-2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2+3x+2\ln|x|+4\ln|x-2|+C$$

■

■ **Primjer 11.43** Izračunajte $\int \frac{x^2+2}{x^3-3x+2}\,dx$.

Rješenje. Pod integralom je prava racionalna funkcija pa možemo krenuti s rastavom na parcijalne razlomke nakon faktorizacije polinoma u nazivniku. Djeljitelji slobodnog člana su $\pm1, \pm2$ od kojih je $x=1$ jedna nultočka. Djeljenjem polinoma slijedi

$$(x^3-3x+2):(x-1) = x^2+x-2,$$

a s obzirom da su nultočke dobivenog kvadratnog polinoma $x=1$ i $x=-2$, konačna faktorizacija nazivnika glasi

$$x^3-3x+2 = (x+2)(x-1)^2.$$

Sada slijedi rastav na parcijalne razlomke:

$$\frac{x^2+2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$
$$x^2+2 = A(x-1)^2+B(x+2)(x-1)+C(x+2)$$

Uvrštavanjem $x=1$ dobivamo $C=1$, a uvrštavanjem $x=-2$ dobije se $A=\frac{2}{3}$. Izjednačimo li sada koeficijente uz x^2 dobije se $A+B=1$ tj. $B=\frac{1}{3}$. Prema tome imamo

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$$
$$= \frac{2}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

■

■ **Primjer 11.44** Izračunajte $\int \frac{x^3+x-2}{x^3+x^2+x}\,dx$.

Rješenje. Podintegralna racionalna funkcija je naprava pa prvo dijelimo polinome:

$$\frac{x^3+x-2}{x^3+x^2+x} = 1+\frac{-x^2-2}{x^3+x^2+x}$$

Napomena 11.7 Primijetite da umjesto direktnog djeljenja polinoma, dodavanjem i oduzimanjem odgovarajućih članova u brojniku možemo lako svesti na pravu racionalnu funkciju:

$$\frac{x^3+x-2+x^2-x^2}{x^3+x^2+x} = \frac{x^3+x^2+x}{x^3+x^2+x} + \frac{-x^2-2}{x^3+2x^2+x}$$

Faktorizacijom nazivnika dobivamo kvadratni polinom bez realnih nultočki pa imamo sljedeći rastav na parcijalne razlomke:

$$\frac{-x^2-2}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$-x^2-2 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)x$$

Uvrštavanjem $x=0$ dobivamo $A=-2$, a izjednačavanjem koeficijenata uz x^2 imamo $A+B=-1$ tj. $B=1$. Slično, izjednačavanjem koeficijenata uz x dobivamo $C=2$.

Prema tome:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x-2}{x^3+x^2+x}\,dx &= \int \left(1-\frac{2}{x}+\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx = x-2\ln|x|+\int \frac{x+2}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \left|\begin{matrix} t=x+\frac{1}{2} \\ dt=dx \end{matrix}\right| = x-2\ln|x|+\int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt \\
&= x-2\ln|x|+\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt+\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} \\
&= x-2\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|t^2+\tfrac{3}{4}|+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C \\
&= x-2\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}$$

■

Vježba 11.9 Izračunajte integral $\int \frac{x^3}{x^2-4x+6}\,dx$.

Vježba 11.10 Pomoću rastava na parcijalne razlomke, izvedite tablični integral

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|dx+C, \quad a>0.$$

■ **Primjer 11.45** Izračunajte integral $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Rješenje. Primijetimo da se radi o pravoj racionalnoj funkciji koja nije dalje rastavljiva na parcijalne razlomke. U ovom slučaju dodavanjem i oduzimanjem odgovarajućih članova u brojniku svodimo na jednostavnije racionalne funkcije koje možemo dalje lako integrirati:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right)dx = \operatorname{arctg}x - \int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \left|\begin{matrix} u=x & dv=\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ du=dx & v=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} \end{matrix}\right| = \operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C.
\end{aligned}$$

■

11.4 Integrali trigonometrijskih funkcija

Integrali trigonometrijskih funkcija su veoma važni za elektrotehničku struku i pojavljuju se u raznim primjenama pa ćemo im se posebno posvetiti. Pogledajmo za početak sljedeći primjer.

■ **Primjer 11.46** Izračunajte integrale $\int \sin^2 x \cos x \, dx$ i $\int \sin^2 x \, dx$.

Rješenje. U prvom integralu prirodno slijedi supstitucija:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 \, dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

No u drugom primjeru ne možemo uvesti supstituciju. U takvom tipu integrala koristit ćemo trigonometrijsku relaciju polovičnog argumenta:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Tada imamo:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x) + C = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

■

Postupci iz prethodnog primjera se mogu poopćiti, odnosno možemo sistematizirati integriranje trigonometrijskih funkcija na sljedeći način:

- Ako je podintegralna funkcija neparna u sinusu, koristimo supstituciju $t = \cos x$, a ako je neparna u kosinusu, korisimo supstituciju $t = \sin x$
- Ukoliko je podintegralna funkcija parna u sinusu i kosinusu koristimo formule polovičnog argumenta
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$
- U slučaju umnoška sinusa i kosinusa s različitim argumentima, koristimo formule pretvorbe umnoška u zbroj
- U ostalim slučajevima možemo uvesti univerzalnu trigonometrijsku supstituciju $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$

■ **Primjer 11.47** Izračunajte $\int_0^\pi \sin^3 x \, dx$.

Rješenje. S obzirom da je funkcija neparna u sinusu, koristit ćemo supstituciju $t = \cos x$ na sljedeći način:

$$\int_0^\pi \sin^3 x \, dx = \int_0^\pi \sin^2 x \sin x \, dx = \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi \\ \hline t & 1 & -1 \end{array} \end{array} \right|$$

$$= -\int_1^{-1} (1 - t^2) \, dt = \int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt = (t - \frac{1}{3} t^3) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}.$$

■

■ **Primjer 11.48** Izračunajte $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$.

Rješenje. Podintegralna funkcija je neparna u kosinusu pa ćemo koristiti supstituciju $t = \sin x$, no pritom moramo prilagoditi brojnik.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \cos x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} \cdot \cos x\,dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix} \right|$$
$$= \int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$$

■

■ **Primjer 11.49** Izračunajte $\int \sin^4 x\,dx$.

Rješenje. U ovom slučaju uzastopno ćemo koristiti formule polovičnog argumenta.

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x \right) dx$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

■

Vježba 11.11 Izračunajte integrale:

(a) $\int \cos^4(2x)\,dx$ (b) $\int \sin^5 x\,dx$ (c) $\int_0^{\pi} \cos^3 x \sin^2 x\,dx$

■ **Primjer 11.50** Izračunajte $\int \sin 3x \cos x\,dx$.

Rješenje. Koristit ćemo trigonometrijsku formulu $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$:

$$\int \sin 3x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x) + C$$
$$= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

■

Vježba 11.12 Izračunajte integral $\int \sin 2x \sin 3x\,dx$.

11.4.1 Univerzalna trigonometrijska supstitucija

Jednostavne metode prikazane u prethodnim primjerima se uglavnom ne mogu primijeniti na sve integrale trigonometrijskih funkcija oblika

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

gdje je R racionalna funkcija. Primjerice, integrali oblika:

$$\int \frac{dx}{2+\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}, \quad \ldots$$

Tada koristimo supstituciju

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

koju zovemo **univerzalna trigonometrijska supstitucija**. Njome se ovakvi integrali svode na integrale racionalnih funkcija.

Napomena 11.8 S obzirom da je integriranje racionalnih funkcija često računski zahtjevno (visok stupnja polinoma u nazivniku, kompliciran rastav na parcijalne razlomke), ova supstitucija se izbjegava ako se može primijeniti neka jednostavnija metoda.

Izvedimo sada zamjene za sinus i kosinus prilikom uvođenja univerzalne supstitucije.

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \; t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Pritom smo koristili sljedeći trigonometrijski identitet:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 \;\Rightarrow\; \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

■ **Primjer 11.51** Izračunajte $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Rješenje. Primjenom univerzalne supstitucije i upravo izvedenih zamjena dobivamo

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2+2t}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C. \end{aligned}$$

■

■ **Primjer 11.52** Izračunajte $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+3}$.

Rješenje. Slično kao u prethodnom primjeru, uvođenjem univerzalne supstitucije slijedi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t^2+4t+4}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(t+1) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1) + C. \end{aligned}$$

■

■ **Primjer 11.53** Izračunajte $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Rješenje. Ovaj integral ćemo riješiti na dva načina.
1. način: univerzalnom supstitucijom lako dobijemo

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

2. način: budući je podintegralna funkcija neparna u sinusu, integral možemo riješiti i supstitucijom $t = \cos x$ nakon proširivanja brojnika i nazivnika sa $\sin x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right| \\ &= \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C\end{aligned}$$

Napomena 11.9 S obzirom da se dvije primitivne funkcije istog integranda razlikuju za konstantu, iz dobivenih rezultata zaključujemo da vrijedi jednakost

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + K.$$

Za vježbu pokažite da je $K = 0$.

■

Vježba 11.13 Sami riješite integral $\int \frac{dx}{\cos x}$ na dva načina: pomoću univerzalne supstitucije i pomoću supstitucije $t = \sin x$.

Napomena 11.10 Navedeni integral možemo lako riješiti i koristeći rezultat za $\int \frac{dx}{\sin x}$ i identitet $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ čime dobijemo:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Kao i u prethodnom primjeru, uvjerite se sami da se sve dobivene primitivne funkcije razlikuju za konstantu.

■ **Primjer 11.54** Izračunajte integral $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$.

Rješenje. Integral se može riješiti univerzalnom supstitucijom no to vodi na komplicirani integral racionalne funkcije. U ovom slučaju je puno spretnije koristiti neparnost funkcije u kosinusu pa uvesti supstituciju $t = \sin x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right| \\ &= \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} dt = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1-t^2} \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C\end{aligned}$$

■

■ **Primjer 11.55** Izračunajte integral $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$.

Rješenje. U ovom primjeru uvođenje univerzalne supstitucije također vodi na komplicirani integral racionalne funkcije. Funkcija nije neparna ni u sinusu ni u kosinusu pa ne možemo uvesti ni jednostavniju trigonometrijsku supstituciju. U ovakvim integralima u kojima je podintegralna funkcija racionalna i parna (u sinusu i kosinusu), najprikladnije je koristiti supstituciju $t = \mathrm{tg}\,x$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \left|\begin{array}{c} t=\mathrm{tg}\,x \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & -\frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \\ \hline t & -1 & 1\end{array}\right| = \int_{-1}^{1} t^4\,dt = \frac{1}{5}t^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

■

11.4.2 Integrali hiperboličkih funkcija

Hiperboličke funkcije se integriraju analognim metodama kao trigonometrijske funkcije koristeći osnovne identitete

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \quad \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}, \quad \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}$$

ili supstitucije $t = \mathrm{sh}\,x$ i $t = \mathrm{ch}\,x$. No ponekad je hiperboličke funkcije najspretnije integrirati prelaskom na eksponencijalnu funkciju koristeći njihove definicije.

■ **Primjer 11.56** Izračunajte $\displaystyle\int \mathrm{sh}^3 x\,dx$.

Rješenje.

1. način: podintegralna funkcija je neparna u sinus hiperboličkom pa ćemo, analogno trigonometrijskim integralima, koristiti supstituciju $t = \mathrm{ch}\,x$:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{sh}^3 x\,dx &= \int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{sh}\,x\,dx = \int (\mathrm{ch}^2 x - 1)\,\mathrm{sh}\,x\,dx = \left|\begin{array}{c} t=\mathrm{ch}\,x \\ dt=\mathrm{sh}\,x\,dx\end{array}\right| \\ &= \int (t^2-1)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{ch}\,x + C\end{aligned}$$

2. način: koristit ćemo definiciju sinus hiperboličkog preko eksponencijalne funkcije

$$\begin{aligned}\int \mathrm{sh}^3 x\,dx &= \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x})\,dx \\ &= \frac{1}{24}e^{3x} - \frac{3}{8}e^x - \frac{3}{8}e^{-x} + \frac{1}{24}e^{-3x} + C\end{aligned}$$

■

Vježba 11.14 Za vježbu sami riješite integral $\displaystyle\int \mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{sh}^2 x\,dx$ koristeći hiperboličke identitete i prelaskom na eksponencijalnu funkciju.

11.5 Integrali iracionalnih funkcija

Preostaje nam pokazati kako integrirati neke integrale iracionalnih funkcija. Najopćenitija metoda je odabir pogodne supstitucije kojom bismo eliminirali korijen u podintegralnoj funkciji. Pogledajmo to na sljedećim primjerima.

■ **Primjer 11.57** Izračunajte integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Rješenje. S obzirom da u integralu imamo drugi i treći korijen, pogodna supstitucija će biti $x = t^6$ kojom ćemo eliminirati oba korijena iz integrala:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} &= \left| \begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = \left| \begin{matrix} \text{dijeljenje} \\ \text{polinoma} \end{matrix} \right| \\ &= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1})\,dt = 6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C\end{aligned}$$

■

Općenito vrijedi sljedeće: ukoliko u podintegralnoj funkciji imamo korijene $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$, ..., uvodimo supstituciju $x = t^{NZV(p,q,\dots)}$ gdje je NZV najmanji zajednički višekratnik navedenih brojeva. Pritom pod korijenom smije biti i linearna ili čak i racionalna funkcija s linearnim brojnikom i nazivnikom.

■ **Primjer 11.58** Izračunajte $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

Rješenje. U integralu imamo drugi i četvrti korijen pa ćemo koristiti supstituciju $2x-1 = t^4$ kojom ćemo eliminirati oba korijena iz integrala:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} &= \left| \begin{matrix} 2x-1 = t^4 \\ 2\,dx = 4t^3\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t^3}{t^2-t}\,dt = 2\int \frac{t^2}{t-1}\,dt \\ &= 2\int (t+1+\frac{1}{t-1})\,dt = t^2 + 2t + 2\ln|t-1| + C \\ &= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln|\sqrt[4]{2x-1}-1| + C\end{aligned}$$

■

Logično se nameće pitanje što ako pod korijenom imamo kvadratnu funkciju? Podsjetimo se da kod integrala racionalnih funkcija kvadratni trinom nadopunjavamo do potpunog kvadrata. Na isti način integrale oblika $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ rješavamo svođenjem izraza pod korijenom na potpuni kvadrat čime dobijemo tablične integrale.

■ **Primjer 11.59**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}} = \ln|x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{7}{4}}+C$$

■

■ **Primjer 11.60**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \arcsin(x-1) + C$$

■

Vježba 11.15 Izračunajte integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

11.5.1 Trigonometrijske i hiperbolne supstitucije

Ponekad se u podintegralnoj funkciji pojavljuju korijeni iz kvadratne funkcije koji ne vode na tablične integrale. To se često događa u primjenama povezanih uz krivulje drugog reda (npr. računanje površine lika koji je na nekom dijelu omeđen kružnicom).

Tada uvodimo trigonometrijske i hiperbolne supstitucije pri čemu razlikujemo tri slučaja:

- $\sqrt{a^2-x^2} \quad \Rightarrow \quad x = a\sin t,\ a>0$, bijekcija za $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (tada $\cos t \geq 0$)
$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t| = a\cos t$$
- $\sqrt{a^2+x^2} \quad \Rightarrow \quad x = a\operatorname{sh} t,\ a>0$, bijekcija za $t \in \mathbb{R}$ ($\operatorname{ch} t \geq 0$)
$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\operatorname{sh}^2 t} = a\sqrt{1+\sin^2 t} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = a|\operatorname{ch} t| = a\operatorname{ch} t$$
- $\sqrt{x^2-a^2} \quad \Rightarrow \quad x = a\operatorname{ch} t,\ a>0$, bijekcija za $t \geq 0$ (tada $\operatorname{sh} t \geq 0$)
$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{ch}^2 t - a^2} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = a\sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = a|\operatorname{sh} t| = a\operatorname{sh} t$$

Napomena 11.11 Ovdje se radi o tipu supstitucije koju smo uveli u Napomeni 12.2, odnosno potrebno je obratiti pozornost na kojem intervalu je definiran inverz uvedenih funkcija. Zbog toga smo prilikom navođenja prikladne suptitucije naveli i interval na kojem je funkcija bijekcija.

■ **Primjer 11.61** Izračunajte $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Rješenje. Radi se o drugom slučaju pa slijedi:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \begin{vmatrix} x = \operatorname{sh} t \\ dx = \operatorname{ch} t\,dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} \cdot \operatorname{ch} t\,dt \\
&= \int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch}(2t)+1)\,dt = \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2t) + \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh} x) + \frac{1}{2}\operatorname{arsh} x + C.
\end{aligned}$$

Zadani integral smo već riješili u Primjeru 12.28 korištenjem parcijalne integracije čime smo dobili

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

Oba rješenja se naravno poklapaju, a do ovog oblika možemo doći korištenjem identiteta za hiperbolne funkcije i logaritamskog prikaza za funkciju area sinus hiperbolni, provjerite to sami za vježbu. ■

■ **Primjer 11.62** Izračunajte integral $\displaystyle\int \sqrt{3-x^2}\,dx$.

Rješenje. U ovom integralu imamo prvi slučaj:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{3-x^2}\,dx &= \begin{vmatrix} x = \sqrt{3}\sin t \\ dx = \sqrt{3}\cos t\,dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{3\cos^2 t} \cdot \sqrt{3}\cos t\,dt \\
&= 3\int \cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t + C \\
&= \frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{4}\sin(2\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}) + C.
\end{aligned}$$

Slično kao u prethodnom primjeru, korištenjem trigonometrijskih identiteta, rješenje možemo zapisati u obliku:

$$\int \sqrt{3-x^2}\,dx = \frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}x\sqrt{3-x^2} + C.$$

■

Vježba 11.16 Integral iz prethodnog primjera će nam jako biti bitan u primjeni jer se veže uz površinu kruga. Sami pokažite da općenito vrijedi

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

> **Napomena 11.12** Svi navedeni integrali mogu se rješavati pomoću parcijalne integracije koja vodi na početni integral, kao što je prikazano u Primjeru 12.28. Naravno, oba postupka vode na isto rješenje pa sami možete odabrati koji vam je draži.

■ **Primjer 11.63** Izračunajte $\int_1^2 x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Rješenje. Radi se o trećem slučaju:

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \left|\begin{array}{c} x=\operatorname{ch}t \\ dx=\operatorname{sh}t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 0 & \operatorname{arch}2 \end{array}\right| = \int_0^{\operatorname{arch}2} \operatorname{ch}^2 t\,\sqrt{\operatorname{sh}^2 t}\,\operatorname{sh}t\,dt$$

$$= \int_0^{\operatorname{arch}2} \operatorname{ch}^2 t\,\operatorname{sh}^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{arch}2} \operatorname{sh}^2(2t)\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\operatorname{arch}2} (\operatorname{ch}(4t)-1)\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{32}\operatorname{sh}(4t) - \frac{1}{8}t\right)\Big|_0^{\operatorname{arch}2} = \frac{1}{32}\operatorname{sh}(4\operatorname{arch}2) - \frac{1}{8}\operatorname{arch}2.$$

■

> **Napomena 11.13** Ukoliko u integralu imamo $\sqrt{ax^2+bx+c}$, tada prije uvođenja odgovarajuće supstitucije izraz pod korijenom svodimo na potpuni kvadrat.

■ **Primjer 11.64** Izračunajte $\int_0^3 \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

Rješenje. Nakon svođenja na potpuni kvadrat koristimo supstituciju iz prvog slučaja:

$$\int_0^3 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x-2=2\sin t \\ dx=2\cos t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{6} \end{array}\right|$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4\cos^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2t)\,dt = (2t+\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

■

Vježba 11.17 Izračunajte $\int \sqrt{x^2-x}\,dx$.

11.6 Pitanja za ponavljanje

1. Iskažite i dokažite teorem o supstituciji u određenom integralu.
2. Objasnite je li u sljedećem integralu ispravno provedena supstitucija?

$$\int_1^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \left| \begin{array}{c} x+1=t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 3 \\ \hline t & -\sqrt{2} & 2 \end{array} \end{array} \right| = \int_{-\sqrt{2}}^{2} (t^2-1)t\cdot 2t\,dt = \dots$$

3. Koristeći metodu supstitucije dokažite da vrijedi

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ parna} \\ 0, & f \text{ neparna.} \end{cases}$$

4. Dokažite metodu parcijalne integracije u neodređenom integralu.
5. Objasnite kako odabiremo u i dv u parcijalnoj integraciji.
6. Objasnite kako integriramo inverze trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija.
7. Zadana su tri integrala s eksponencijalnom funkcijom:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int xe^{-x^2}\,dx, \quad \int x^2e^{-x}\,dx$$

Koji od navedenih integrala se mogu elementarno integrirati? Koju metodu integracije biste iskoristili u tim integralima?

8. Definirajte pravu i nepravu racionalnu funkciju.
9. Objasnite postupak rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke.
10. Objasnite postupak integriranja neprave racionalne funkcije.
11. Zadana je racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)^2(x^2+2x+1)}$$

(a) Koliko ima parcijalnih razlomaka u rastavu?
(b) Koliko ima nepoznatih koeficijenata u rastavu?
(c) Koji od ta dva broja odgovara stupnju polinoma u nazivniku? Objasnite.

12. Ako polinom $P(x) = x^2+bx+c$ nema realnih nultočaka, kako rješavamo integral

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx$$

u ovisnosti o A i B? Kao pomoć, riješite integrale:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,dx, \quad \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx, \quad \int \frac{x+5}{x^2+4x+6}\,dx$$

13. Izvedite formule zamjene za univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.
14. Izračunajte integral $\int \sin x \cos x\,dx$ na četiri različita načina:
(a) koristeći supstituciju $\sin x = t$
(b) koristeći supstituciju $\cos x = t$
(c) koristeći trigonometrijski identitet za $\sin 2x$
(d) koristeći parcijalnu integraciju
Pokažite da se sve dobivene primitivne funkcije razlikuju za konstantu.
15. Za svaki od navedenih trigonometrijskih integrala navedite koju supstituciju ili metodu ćemo koristiti:

(a) $\int \sin^5 x\,dx$

(b) $\int \cos^6 x\,dx$

(c) $\int \cos x \sin^2 x\,dx$

(d) $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$

16. Neka su m i n različiti prirodni brojevi. Dokažite sljedeće tvrdnje:

(a) $\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0$

(b) $\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0$

17. Za svaki od navedenih iracionalnih integrala navedite koju supstituciju biste koristili:

(a) $\int \sqrt{5-x^2}\,dx$

(b) $\int \sqrt{2x^2+6}\,dx$

(c) $\int \sqrt{x^2-4x}\,dx$

(d) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

18. Objasnite zašto je kod uvođenja trigonometrijskih i hiperbolnih supstitucija u iracionalne integrale potrebno paziti na interval bijektivnosti uvedenih funkcija.

11.7 Zadaci za vježbu

Raznim metodama integracije izračunajte sljedeće neodređene i određene integrale.

1. $\int \sqrt[3]{6x-5}\,dx$
2. $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$
3. $\int x^3\left(\frac{1}{2}x^4+1\right)^7 dx$
4. $\int_{-1}^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$
5. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$
6. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}\,dx$
7. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$
8. $\int \frac{\sin x}{2+\cos^2 x}\,dx$
9. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
10. $\int (2x+1)e^{-2x}\,dx$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$
12. $\int_1^e x^2\ln x\,dx$
13. $\int e^x\sin(e^x+1)\,dx$
14. $\int \mathrm{ctg}(2x)\,dx$
15. $\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$
16. $\int x^2\cos^2 x\,dx$
17. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$
18. $\int_0^1 \ln(2x+1)\,dx$
19. $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx$
20. $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$
21. $\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$
22. $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$
23. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$
24. $\int \mathrm{tg}\,x\,\ln(\cos x)\,dx$
25. $\int_0^1 \mathrm{arcctg}\,x\,dx$
26. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin(2x)\,dx$

28. $\int e^{-x}\sin^2 x\,dx$

29. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

30. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

31. $\int_1^e (x^2-2x+3)\ln x\,dx$

32. $\int x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$

33. $\int \ln(\sin x)\cos x\,dx$

34. $\int \sin(\ln x)\,dx$

35. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$

36. $\int \frac{x-2}{x^2-2x-3}\,dx$

37. $\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

38. $\int \frac{3x}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$

39. $\int_1^2 \frac{9}{x^3-9x}\,dx$

40. $\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,dx$

41. $\int \frac{dx}{x^3+8}$

42. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

43. $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$

44. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$

45. $\int \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$

46. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

47. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$

48. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$

49. $\int \frac{dx}{3e^x+e^{-x}+2}$

50. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+2\sin x}\,dx$

51. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

52. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$

53. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x(5-3\cos x)}$

54. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

55. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\cos^2 x\,dx$

56. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

57. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x\cos x\,dx$

58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^6 x\,dx$

59. $\int \cos^3 x\,dx$

60. $\int \sin^4 x\,dx$

61. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

62. $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^4 x\,dx$

63. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^4 x}$

64. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$

65. $\int (\sin x+\cos 3x)^2\,dx$

66. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos(2x)\sin(3x)\,dx$

67. $\int \sin x\,\mathrm{ch}\,x\,dx$

68. $\int_1^8 \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

69. $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)(1+\sqrt{x})}$

70. $\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

71. $\int_0^{16} \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2}$
72. $\int_0^1 \frac{dx}{x-2\sqrt{x}+2}$
73. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\,dx$
74. $\int \frac{x}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$
75. $\int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$
76. $\int_{-1}^1 x\sqrt{\frac{4-x^2}{4+x^2}}\,dx$
77. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$
78. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2}\,dx$
79. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
80. $\int_0^1 x^2\sqrt{4x-x^2}\,dx$
81. $\int_1^2 x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$
82. $\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$
83. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{4-\cos^2 x}dx$
84. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{3\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx$

11.8 Rješenja

1. $\frac{1}{8}(6x-5)^{\frac{4}{3}}+C$
2. $\frac{52}{9}$
3. $\frac{1}{16}(\frac{1}{2}x^4+1)^8+C$
4. $\frac{1}{4}\ln 6$
5. $\frac{10}{3}$
6. $\frac{848}{105}$
7. $\frac{1}{4}\ln^4 x+C$
8. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{2}}+C$
9. $-\frac{1}{2}\arccos^2 x+C$
10. $-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$
11. $\frac{1}{4}$
12. $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}e^3$
13. $-\cos(e^x+1)+C$
14. $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+C$
15. $-\sin(\frac{1}{x})+C$
16. $\frac{1}{6}x^3+(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8})\sin 2x+\frac{x}{4}\cos 2x+C$
17. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$
18. $-1+\frac{3}{2}\ln 3$
19. 2π
20. $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$
21. $\frac{1}{2}$
22. $2xe^{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}+4e^{\sqrt{x}}+C$
23. $\frac{1}{2}$
24. $-\frac{1}{2}\ln^2(\cos x)+C$
25. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$
26. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+C$
27. 2
28. $-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{10}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)+C$
29. $-\frac{x}{\sin x}+\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C$
30. $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}+C$
31. $\frac{47}{18}-\frac{1}{2}e^2+\frac{2}{9}e^3$
32. $-\frac{1}{2}x^2+\ln|\cos x|+x\operatorname{tg}x+C$
33. $-\sin x+\sin x\ln|\sin x|+C$
34. $-\frac{1}{2}x(\cos(\ln x)-\sin(\ln x))+C$
35. $-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{9}\sqrt{3}$
36. $\frac{3}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|+C$
37. $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}\ln 4$
38. $\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2|+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$
39. $\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 4-3\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{32}$
40. $\frac{\pi}{9}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\ln 2$
41. $\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\ln|x^2-2x+4|+\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$
42. $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$
43. $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$
44. $\frac{\pi}{12}$
45. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$

46. $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$
47. $\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{5\pi}{18\sqrt{3}}-\frac{1}{3}$
48. $-x-e^{-x}+\ln|e^x+1|+C$
49. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3e^x+1}{\sqrt{2}}+C$
50. $\frac{1}{2}(\ln\frac{5}{2}-\ln\frac{1}{2}-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$
51. $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8})$
52. $\frac{1}{3}(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{3}-2)}$
53. $\frac{1}{4}\ln 3+\frac{3}{16}\ln\frac{5}{13}$
54. $2\sqrt{\sin x}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}+C$
55. $\frac{1}{3}$
56. $-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C$
57. $\frac{1}{16}$
58. $\frac{2}{63}$
59. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$
60. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$
61. $\frac{4}{3}$
62. $-\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{64}\operatorname{sh}4x+\frac{1}{192}\operatorname{sh}6x+C$
63. $\operatorname{th}x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x+C$
64. $\frac{8}{15}$
65. $x+\frac{1}{4}(2\cos 2x-\cos 4x-\sin 2x)+\frac{1}{12}\sin 6x+C$
66. $\frac{\pi}{16}-\frac{1}{12}$
67. $\frac{1}{2}\sin x\operatorname{sh}x-\frac{1}{2}\cos x\operatorname{ch}x+C$
68. $\frac{3}{2}\ln\frac{5}{2}$
69. $\frac{\pi}{3}+\ln(\sqrt{3}-1)$
70. $-\frac{409}{70}+3\ln 2+\frac{3\pi}{2}$
71. $12\ln 3-\frac{32}{3}$
72. $\frac{\pi}{2}-\ln 2$
73. $2-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
74. $-\sqrt{2+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$
75. $2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\ln\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$
76. 0
77. $(\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x^3})\sqrt{x^2+1}+C$
78. $\frac{7}{3}$
79. $\frac{\pi}{48}-\frac{\sqrt{3}}{64}$
80. $\frac{10\pi}{3}-\frac{23\sqrt{3}}{4}$
81. $\frac{7}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{8}\ln(2+\sqrt{3})$
82. $\frac{5\pi}{128}$
83. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
84. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$