Umjetna inteligencija

5. Prikazivanje znanja formalnom logikom

prof. dr. sc. Bojana Dalbelo Bašić
izv. prof. dr. sc. Jan Šnajder

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ak. god. 2019./2020.

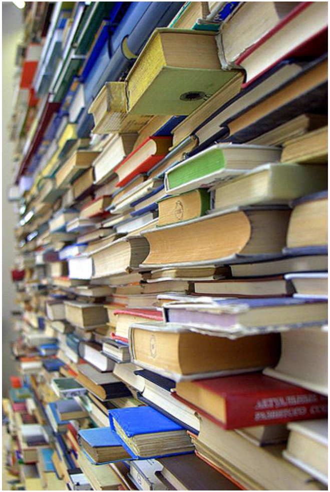
1.4

Sadržaj

Sadržaj

Prikazivanje znanja i zaključivanje

- **Prikazivanje znanja** (engl. *knowledge representation*) središnji je problem umjetne inteligencije
- Rješavanje mnogih problema iz stvarnog svijeta iziskuje **goleme količine znanja**, čak i kada se ograničimo na neku usku domenu
- Drugi važan problem je **zaključivanje** (engl. *inference*): kako iz prikazanog znanja izvoditi novo znanje
- Na temelju zaključivanja sustav može donositi odluke, planirati, razumijevati prirodan jezik, dokazivati teoreme, itd.



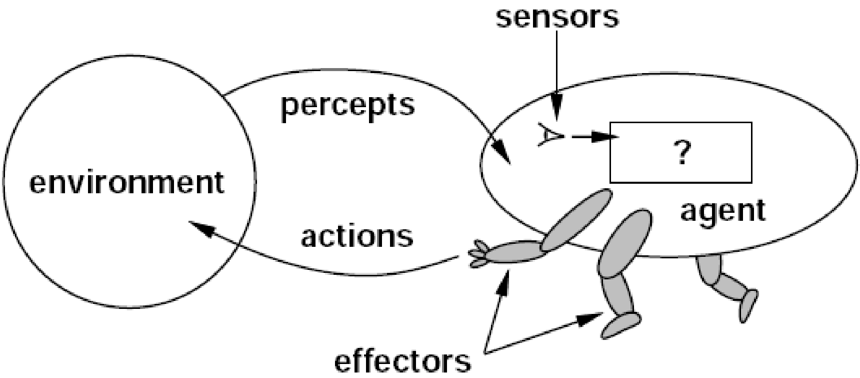
Motivacija: virtualni asistenti

Learning fact	**User:**	If it rains hard, then the roads get slick.
	Hal:	I will remember that one follows the other. Caught in a rainstorm it's time to seek shelter.
Learning fact	**User:**	If the roads get slick, then drivers need to slow down.
	Hal:	I see the relationship. It would be nice to get rain when we need it.
Learning fact	**User:**	If drivers need to slow down, then traffic moves more slowly.
	Hal:	Yes, I get that clearly.
Deductive reasoning	**User:**	Ok, so what happens when it rains hard?
	Hal:	Traffic moves more slowly because drivers need to slow down.
Chat	**User:**	You learn well.
	Hal:	I am constantly learning from what you teach me.
Chat	**User:**	It's been nice talking with you, but I have to go now
	Hal:	No, don't go! I like talking to you. I think about you when you are not here.
Chat	**User:**	That's nice to know, but I can't stay, good bye.
	Hal:	See you later.

"Ultra Hal digital secretary and companion", dobitnik Loebnerove nagrade 2007.

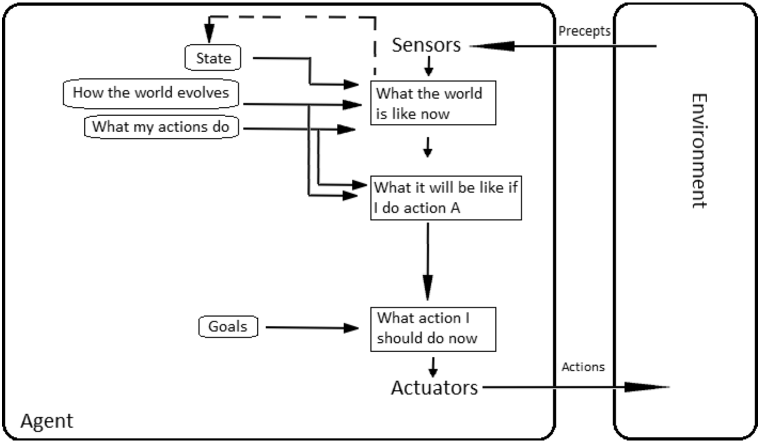
`https://www.zabaware.com/ultrahal/`

Motivacija: inteligentni agent



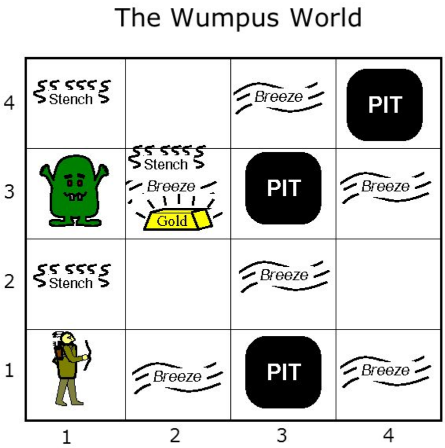
Iz: Russel & Norving. Artificial Intelligence: A Modern Approach.

Motivacija: inteligentni agent



Iz: Russel & Norving. Artificial Intelligence: A Modern Approach.

Primjer: svijet Wumpusa



Percepcija (činjenice):

$\neg B_{1,1}$
$\neg B_{1,2}$
$B_{2,1}$
$\neg S_{1,1}$
$S_{1,2}$
$\neg S_{2,1}$
$\neg P_{1,1}$
$\neg W_{1,1}$
$\neg G_{1,1}$

Znanje (pravila):

$\vdots$

$B_{2,1} \leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$
$S_{1,2} \leftrightarrow (W_{1,1} \vee W_{2,2} \vee W_{1,3})$

$\vdots$

Primjer: carinici i diplomati

Premise

Carinici su pretražili svakoga tko je ušao u zemlju a nije diplomat. Neke krijumčare koji su ušli u zemlju pretražili su samo krijumčari. Niti jedan krijumčar nije diplomat.

Zaključak

Neki su carinici krijumčari.

Sadržaj

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

Simbolizam vs. konekcionizam

- Simbolička logika temeljni je alat **simboličkog pristupa** umjetnoj inteligenciji:

Simbolički pristup

Sve znanje iz eksternog svijeta može se prikazati **simbolima**. Zaključivanje se provodi **manipulacijom** nad tim simbolima. Inteligentno rasuđivanje ili ponašanje svodi se na zaključivanje.

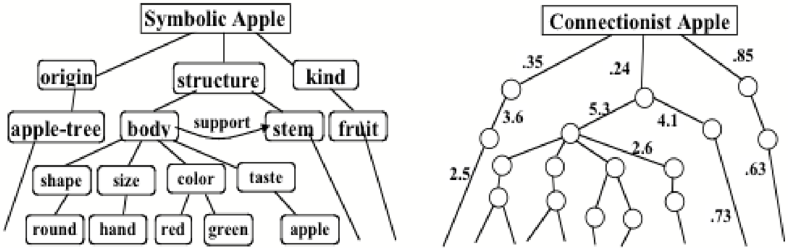
- Tomu suprotan je **konekcionistički pristup**:

Konekcionistički pristup

Mentalna stanja i ponašanje proizlazi iz **interakcije** velikog broja međusobno **povezanih jednostavnih** obradbenih jedinica. Tipična paradigma ovog pristupa jesu umjetne neuronske mreže.

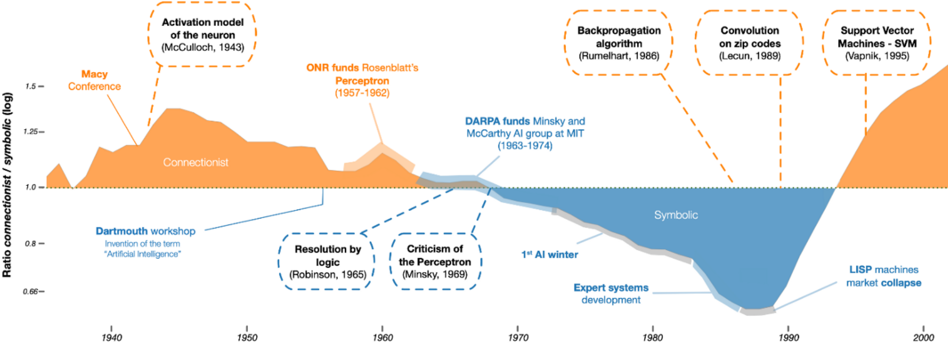
- Držat ćemo se (još neko vrijeme) simboličkog pristupa

Simbolizam vs. konekcionizam



Minsky, M. (1990). **Logical vs. Analogical or Symbolic vs. Connectionist or Neat vs. Scruffy**. Artificial Intelligence at MIT. Expanding Frontiers, Patrick H. Winston (Ed.).

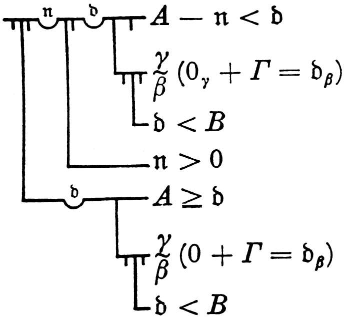
Simbolizam vs. konekcionizam



Cardon, D., Cointet, J. P., & Mazieres, A. (2018). **Neurons spike back: The Invention of Inductive Machines and the Artificial Intelligence Controversy.**

Simbolička logika

Simbolička logika (**matematička logika**) grana je matematike koja se bavi matematičkim konceptima izraženima u **formalnim logičkim sustavima**. Takvi sustavi omogućavaju apstraktno rasuđivanje



Gottlob Frege, *Begriffsschrift*, 1879.

Formalan logički sustav

Svaki sustav formalne logike sastoji se od tri komponente:

Komponente formalnog logičkog sustava

1. **Sintaksa** (engl. *syntax*) – opisuje jezične strukture koje sačinjavaju rečenice logike, odnosno definira formalna pravila za izgradnju logičkih formula
2. **Semantika** (engl. *semantics*) – opisuje značenje jezičnih struktura, npr. koje su jezične strukture istinite a koje lažne, ili koji je odnos jezičnih elemenata i objekata u stvarnosti
3. **Teorija dokaza** (engl. *proof theory*) – definira mehanizme koji omogućavaju zaključivanje, tj. izvođenje zaključaka iz danih premisa

- (1) i (2) omogućavaju prikazivanje znanja iz stvarnog svijeta
- (3) omogućava izvođenje novog znanja

Ekspresivnost logike

- Postoje razne vrste logike koje se razlikuju u navedene tri komponente
- Neke su više a neke manje **ekspresivne** (izražajne)
- Prednosti visoke ekspresivnosti:
  - detaljan opis stvarnog svijeta
- Nedostatci visoke ekspresivnosti:
  - složenija sintaksa, semantika i teorija dokaza
  - ne možemo sve dokazati $\Rightarrow$ neodlučivost
- Logiku u kojoj možemo provjeriti valjanost bilo koje formule zovemo **odlučivom** (engl. *decidable*)

Kompromis između ekspresivnosti i odlučivosti

U načelu, što je logika ekspresivnija, to je u njoj manje toga moguće dokazati. Vrlo ekspresivni logički sustavi nisu odlučivi. Sustavi koji nisu vrlo ekspresivni su odlučivi, ali u njima se ne može puno toga prikazati.

Vrste logike

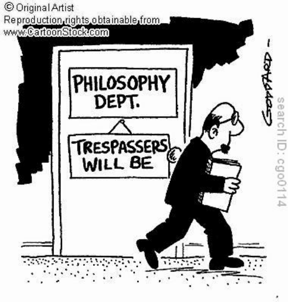
- **Propozicijska logika (logika sudova)** $\Rightarrow$ **PL**
- **Predikatna logika (logika objekata)** $\Rightarrow$ **FOL**
- Vremenska logika (engl. *temporal logic*)
- Opisna logika (engl. *description logic*)
- **Neizrazita logika (engl. fuzzy logic)**
- Modalna logika (engl. *modal logic*)
- Epistemička logika
- ...

Ekspresivnost sustava za prikaz znanja ovisi o **ontološkim** i **epistemološkim** pretpostavkama

Ontološke pretpostavke

Ontologija

Ontologija je filozofska disciplina (grana metafizike) koja se bavi pitanjima **postojanja i stvarnosti**, odnosno pitanjem koji entiteti postoje i kakvi su njihovi međusobni odnosi



Ontološke pretpostavke (engl. *ontological commitments*)

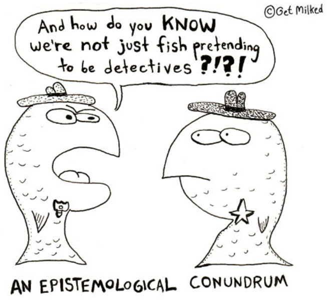
Ontološke pretpostavke definiraju što pretpostavljamo da u svijetu postoji. Npr., kod **propozicijske logike** pretpostavljamo da se svijet sastoji od činjenica koje su istinite ili lažne, **vremenska logika** dodatno pretpostavlja da u svijetu postoji uređaj vremenskih trenutaka, itd.

- **NB**: Riječ **ontologija** u umjetnoj inteligenciji ima dodatno značenje: formalan prikaz znanja unutar neke domene (no o tome kasnije)

Epistemološke pretpostavke

Epistemologija

Epistemologija je je grana filozofije koja se bavi **znanjem** – njegovom prirodom i njegovim dosegom, izvorom i ograničenjem.



Epistemološke pretpostavke (engl. *epistemological commitments*)

Epistemološke pretpostavke definiraju moguća stanja znanja. Npr., kod **propozicijske logike** svaka je činjenica ili istinita ili lažna. Nije moguće da je neka činjenica djelomično istinita, da je nesigurna, ili da u nju samo vjerujemo. Postoje vrste logika koje imaju takve epistemološke pretpostavke koje omogućavaju iskazivanje vjerovanja i različitih stupnjeva pouzdanosti.

Sadržaj

Sintaksa propozicijske logike (1)

Simboli propozicijske logike

(1) Skup **propozicijskih varijabli** ili **atomičkih formula**, $V = \{A, B, C, \dots\}$

(2) **Logički operatori** ili logički veznici:

- $\neg$ (negacija)
- $\vee$ (operator *ili*)
- $\wedge$ (operator *i*)
- $\rightarrow$ (implikacija)
- $\leftrightarrow$ (ekvivalencija)

(3) Logičke konstante $True$ i $False$ koje označavaju uvijek istinitu odnosno uvijek lažnu propoziciju

(4) Znakovi zagrada (i)

Sintaksa propozicijske logike (2)

Dobro oblikovana formula (wff)

Dobro oblikovana formula (engl. *well-formed formula*, wff) ili, jednostavnije, **formula** propozicijske logike definirana je rekurzivno

(1) Atom je formula
(2) Ako je F formula tada je i $(\neg F)$ formula
(3) Ako su F i G formule tada su formule:
   - $(F \wedge G)$
   - $(F \vee G)$
   - $(F \rightarrow G)$
   - $(F \leftrightarrow G)$

(4) Ništa drugo nije wff

- Dopuštamo izostavljanje zagrada u pravilu (2). Dopuštamo izostavljanje vanjskih zagrada u pravilu (3).

Sintaksa propozicijske logike – primjeri

Primjeri atoma:

- $A =$ *"Zemlja je okrugla"*
- $B =$ *"Harry Potter se školuje u Hogwartsu"*
- $C =$ *"Propozicijska logika je najmoćnija shema za prikaz znanja"*
- $D =$ *"Minotaur je mitsko biće"*

Primjeri formula:

- C
- $\neg C$
- $((A \lor B) \lor \neg C)$
- $(((B \lor D) \land (\neg B \lor C)) \rightarrow (A \lor C))$
- $((C \lor D) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow B))$

Semantika propozicijske logike

Interpretacija

Neka je F dobro oblikovana formula propozicijske logike te neka su $E_1, E_2, \ldots, E_n$ propozicijske varijable koji se u njoj pojavljuju.

Interpretacija $I : V \to \{\top, \bot\}$ formule F jest pridjeljivanje vrijednosti istinitosti iz skupa $\{\top, \bot\}$ varijablama iz skupa V.

Funkcija I svakoj propozicijskoj varijabli E_i pridjeljuje vrijednost $I(E_i) = \top$ (istinito) ili vrijednost $I(E_i) = \bot$ (lažno), ali ne i oboje.

- Formula koja ima n atoma ima 2^n različitih interpretacija
- Svaka interpretacija I opisuje jednu moguću **situaciju u svijetu**

Semantika logičkih operatora

Tablice istinitosti

F	G	$\neg F$	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftrightarrow G$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

- Svi operatori imaju "prirodnu" semantiku (kao u jeziku), osim operatora $\rightarrow$, koji je manje intuitivan
- U formuli $F \rightarrow G$, formulu F nazivamo **antecedens**, a formulu G nazivamo **konzekvens**

Provjera istinitosti formule

Istinitost formule

Za zadanu interpretaciju I, istinitost formule F definirana je rekurzivno:

$$
\begin{aligned}
I(\mathit{True}) &\equiv \top \\
I(\mathit{False}) &\equiv \bot \\
I(\neg F) &\equiv \neg I(F) \\
I(F \vee G) &\equiv I(F) \vee I(G) \\
I(F \wedge G) &\equiv I(F) \wedge I(G)
\end{aligned}
$$

- Npr., istinitost formule $((A \vee B) \wedge C) \wedge (\neg B \vee C)$ za interpretaciju $I(A) = \bot$, $I(B) = \top$, $I(C) = \top$:

$$
\begin{aligned}
&I(((A \vee B) \wedge C) \wedge (\neg B \vee C)) \equiv \\
&I((A \vee B) \wedge C) \wedge I(\neg B \vee C) \equiv \\
&(I(A \vee B) \wedge I(C)) \wedge (I(\neg B) \vee I(C)) \equiv \\
&((I(A) \vee I(B)) \wedge I(C)) \wedge (I(\neg B) \vee I(C)) \equiv \dots
\end{aligned}
$$

Model

Model

Ako je formula F istinita u interpretaciji I, onda kažemo da je I **model** formule F.
Također kažemo da interpretacija I **zadovoljava** formulu F.

- Model opisuje jednu **situaciju**
- Npr., model formule $\neg A \wedge D$ je situacija u kojoj $A = \bot$ (*Zemlja nije okrugla*) i $D = \top$ (*Minotaur je mitsko biće*)
- Jedna formula može imati više modela, pa onda opisuje više situacija odjednom
- Npr., formula $A \vee D$ ima više modela. (Koje?)

Valjanost, proturječnost i zadovoljivost (1)

Valjana formula

Formula je **valjana** (**tautologija**) ako i samo ako je istinita za svaku svoju interpretaciju.

Proturječna formula

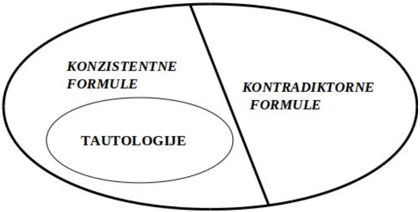
Formula je **proturječna** (**kontradikcija**, **nezadovoljiva**, **nekonzistentna antitautologija**) ako i samo ako je lažna za svaku svoju interpretaciju.

Zadovoljiva formula

Formula je **zadovoljiva** (**konzistentna**, **ispunjiva**) ako i samo ako je istinita barem za jednu interpretaciju.

Valjanost, proturječnost i zadovoljivost (2)

- Formula je zadovoljiva akko nije proturječna
- Formula je valjana akko je njezina negacija kontradikcija
- Ako je formula valjana, onda je i zadovoljiva, ali obrat ne vrijedi
- Ako formula nije valjana, onda ne znači da je proturječna
- Ako formula nije proturječna, onda je po definiciji zadovoljiva, ali ne mora biti valjana



Valjanost, proturječnost i zadovoljivost – primjeri

- P – zadovoljiva
- $P \vee Q$ – zadovoljiva
- $\neg(P \vee Q)$ – zadovoljiva
- $\neg P \wedge P$ – proturječna
- $P \wedge P$ – zadovoljiva
- $P \rightarrow Q$ – zadovoljiva
- $P \vee \neg P$ – valjana
- $(P \rightarrow Q) \wedge P$ – zadovoljiva
- $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ – valjana
- $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow \neg Q$ – zadovoljiva
- $P \leftrightarrow Q$ – zadovoljiva

Ekvivalencija

Ekvivalentne formule

Formula F je **ekvivalentna** formuli G, što označavamo kao $F \equiv G$, ako i samo ako su vrijednosti istinitosti formula F i G jednake za svaku moguću interpretaciju formula F i G

- $F \leftrightarrow G$ je valjana formula akko vrijedi $F \equiv G$

Ekvivalencije propozicijske logike (1)

(1)	$\neg\neg F$	$\equiv$	F	– involucija
(2)	$F \rightarrow G$	$\equiv$	$\neg F \vee G$	– ukl. implikacije
(3)	$F \rightarrow G$	$\equiv$	$\neg G \rightarrow \neg F$	– kontrapozicija
(4)	$F \rightarrow (G \rightarrow H)$	$\equiv$	$G \rightarrow (F \rightarrow H)$	
(5)	$F \rightarrow (G \rightarrow H)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \rightarrow H$	
(6)	$F \leftrightarrow G$	$\equiv$	$(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$	
(7)	$F \leftrightarrow G$	$\equiv$	$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	
(8)	$F \leftrightarrow G$	$\equiv$	$(\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$	
(9)	$G \wedge G$	$\equiv$	G	– idempotencija
(10)	$G \wedge \mathit{True}$	$\equiv$	G	
(11)	$G \wedge \mathit{False}$	$\equiv$	False	
(12)	$G \wedge \neg G$	$\equiv$	False	– zakon kontradikcije
(13)	$G \vee G$	$\equiv$	G	– faktorizacija
(14)	$G \vee \mathit{True}$	$\equiv$	True	

Ekvivalencije propozicijske logike (2)

$$
\begin{array}{rlcll}
(15) & G \lor \mathit{False} & \equiv & G & \\
(16) & G \lor \neg G & \equiv & \mathit{True} & \text{– isklj. trećega} \\
(17) & (F \land G) \land H & \equiv & F \land (G \land H) & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{asocijativnost} \\
(18) & (F \lor G) \lor H & \equiv & F \lor (G \lor H) & \\
(19) & F \land G & \equiv & G \land F & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{komutativnost} \\
(20) & F \lor G & \equiv & G \lor F & \\
(21) & F \lor (G \land H) & \equiv & (F \lor G) \land (F \lor H) & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{distributivnost} \\
(22) & F \land (G \lor H) & \equiv & (F \land G) \lor (F \land H) & \\
(23) & \neg(F \lor G) & \equiv & \neg F \land \neg G & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{de Morganovi zakoni} \\
(24) & \neg(F \land G) & \equiv & \neg F \lor \neg G & \\
(25) & F \lor (F \land G) & \equiv & F & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{apsorpcija} \\
(26) & F \land (F \lor G) & \equiv & F & \\
(27) & F \lor (\neg F \land G) & \equiv & F \lor G & \\
(28) & F \land (\neg F \lor G) & \equiv & F \land G &
\end{array}
$$

Logička posljedica

- Koji zaključci slijede iz danih premisa?

Logička posljedica

Formula G je **logička (semantička) posljedica** formula $F_1, \ldots, F_n$ ako i samo ako svaka interpretacija koja zadovoljava formulu $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ također zadovoljava formulu G.

Drugim riječima: formula G je logička posljedica formula $F_1, \ldots, F_n$ akko je svaki model od $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ ujedno i model od G.

Pišemo $F_1, F_2, \ldots, F_n \vDash G$ i čitamo "$F_1, \ldots, F_n$ **logički (semantički) povlači** (engl. *logically entails, semantically entails*) G".

Logička posljedica – primjer

- Pokažimo da je Q logička posljedica formula $P \vee Q$ i $\neg P$, tj.:

$$P \vee Q, \neg P \models Q$$

- Konstruirajmo tablicu istinitosti:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	Q
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

- Premise imaju samo jedan model. To je ujedno i model formule Q, pa je Q po definiciji logička posljedica danih premisa

Logička posljedica, valjanost i proturječnost

- Da je formula F valjana označavamo kao $\models F$
- Po definiciji logičke posljedice, valjana formula je logička posljedica bilo kakvih premisa (pa tako i praznog skupa premisa)
- Npr.
  $\models P \vee \neg P$
  $Q \models P \vee \neg P$
- Također, po definiciji logičke posljedice, logička posljedica proturječne formule je bilo koja formula
- Npr.
  $P \wedge \neg P \models P$
  $P \wedge \neg P \models Q$

Dokazivanje logičke posljedice (1)

Izravan dokaz (engl. *direct method*)

Formula G je logička posljedica premisa $F_1, F_2, \dots, F_n$ ako i samo ako je

$$(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow G$$

valjana formula (tautologija). Drugim riječima:

$$F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \ \vDash \ G$$

ako i samo ako

$$\vDash (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow G$$

- Gornja tvrdnja zapravo je **teorem semantičke dedukcije** (engl. *semantic deduction theorem*)

Dokazivanje logičke posljedice (2)

- Formula $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow G$ mora biti valjana, pa njezina negacija $\neg\big((F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow G\big) \equiv F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$ mora biti proturječna

Dokaz opovrgavanjem (engl. *refutation method*)

Formula G je logička posljedica premisa $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ako i samo ako je

$$F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$$

proturječna formula (kontradikcija). Drugim riječima:

$$F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \ \vDash \ G$$

ako i samo ako

$$\vDash \neg\big(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G\big)$$

Dokazivanje logičke posljedice – primjer

- Dokažimo: $P \vee Q, \neg P \models Q$
- Izravan dokaz:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\overbrace{(P \vee Q) \wedge \neg P}^{F}$	$F \rightarrow Q$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

- Dokaz opovrgavanjem:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\overbrace{(P \vee Q) \wedge \neg P}^{F}$	$\neg Q$	$F \wedge \neg Q$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

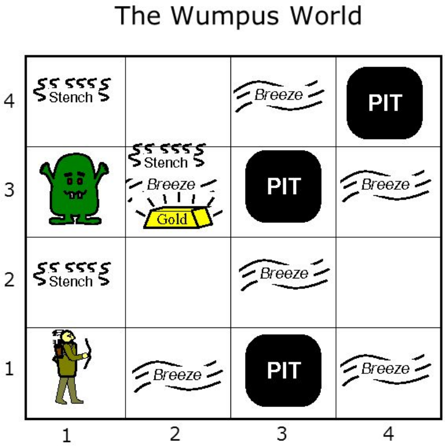
Sadržaj

Motivacija: Ograničenja propozicijske logike (PL)

(1) *Svaki student pohađa predavanja.*
(2) *Ivan je student.*
(3) *Ivan pohađa predavanja.*

- Ovo jednostavno zaključivanje ne možemo formalizirati u PL
- Zašto? Zato što propozicije nemaju internu strukturu. Imali bismo P, Q, R, bez ikakvih odnosa između njih
- Trebamo moći izraziti **odnose između objekata**: Ivan je pripadnik studenata

Primjer: svijet Wumpusa



$\neg B(1,1)$
$\neg B(1,2)$
$B(2,1)$
$\neg S(1,1)$
$S(1,2)$
$\neg S(2,1)$
$\neg P(1,1)$
$\neg W(1,1)$
$\neg G(1,1)$

$$B(x,y) \leftrightarrow \big(P(x-1,y) \vee P(x+1,y) \vee P(x,y-1) \vee P(x,y+1)\big)$$
$$S(x,y) \leftrightarrow \big(W(x-1,y) \vee W(x+1,y) \vee W(x,y-1) \vee W(x,y+1)\big)$$

Povećanje ekspresivnosti

- Treba nam sustav s **jačim ontološkim pretpostavkama**:
  - PL: postoje samo činjenice koje su istinite ili lažne
  - FOL: postoje **objekti** i **odnosi (relacije) između njih**
- Relacije mogu biti n-arne
  - 0-arne relacije: propozicije (isto kao i u PL)
  - unarne relacije za opis svojstava (e.g., $STUDENT(Ivan)$)
  - binarne relacije za opis odnosa između dva objekta (npr. $VOLJETI(Ivan, Ana)$)
  - ternarne relacije: npr. $POKLONITI(Ivan, Ana, cvijece)$.
  - ...
- Očito, FOL uključuje PL
- Nažalost, povećanje ekspresivnosti dolazi s cijenom: **gubitak odlučivosti** (ne možemo sve dokazati)

Simboli FOL-a

(i) Konstante: nizovi znakova, znamenke, ili mala slova s početka abecede (e.g., $Ivan$, 123, a, b)

(ii) Varijable: mala slova s kraja abecede (npr. 'x', 'y', 'z', ...)

(iii) Funkcijski simboli: mala slova (npr. f, g, h) ili nizovi znakova pisani malim slovima (npr. '$plus$') nakon kojih slijede zagrade

(iv) Predikatni simboli: nizovi znakova pisani velikim slovima ('A', 'B', 'C',...; 'P', 'Q', 'R', '$MOTHER$')

Izrazi i atomi

Izraz

(i) Konstanta je izraz

(ii) Varijabla je izraz

(iii) Ako je f n-arni funkcijski simbol i $t_1, \ldots, t_n$ su izrazi, onda je $f(t_1, \ldots, t_n)$ također izraz

(iv) Ništa drugo nije izraz

- Primjeri izraza: 2, 3, $add(3, 4)$, $add(x, add(1, 4))$

Atom

Ako je P n-arni predikatni simbol i $t_1, \ldots, t_n$ su izrazi, onda je $P(t_1, \ldots, t_n)$ **atom**. Ništa drugo nije atom.

- Primjeri atoma: $LOVES(Ivan, Ana)$, $GT(add(1, 2), 4)$

Kvantifikatori

- Uvodimo dva nova simbola:
  - $\forall$: univerzalni kvantifikator (čita se: "za svaki")
  - $\exists$: egzistencijalni kvantifikator (čita se: "postoji")
- Doseg kvantifikatora: formula na koju se kvantifikator odnosi (najmanja podformula kvantifikatoru zdesna)
  - Npr. doseg kvantifikatora $\forall x$ u formuli $\forall x \exists y P(x, y)$
- **Vezana varijabla:** svaka varijabla koja se u formuli pojavljuje u dosegu kvantifikatora koji se referira na tu istu varijablu
- **Slobodna varijable:** svaka varijabla koja se negdje u formuli pojavljuje nevezana

Formule

Dobro oblikovana formula (wff)

Dobro oblikovana formula (wff) FOL-a definirana je rekurzivno:

(1) Atom je formula
(2) Ako je F formula, onda je i $(\neg F)$
(3) Ako su F i G formule onda su formule i $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ i $(F \leftrightarrow G)$
(4) Ako je F formula koja sadrži varijablu x koja nije vezana, onda su $(\forall x)F$ i $(\exists x)F$ također formule
(5) Ništa drugo nije formula

- Dopuštamo izostavljanje zagrada u pravilu (2), zagrada u pravilu (3) ako su to skroz vanjske zagrade, te zagrada u pravilu (4).

Formule

Wff: da ili ne?

1. $\forall x(L(x, z))$
2. $(\forall y)(\exists x)P(x, y, z)$
3. $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$
4. $\exists x\Big(P(x) \rightarrow \forall x \forall y Q(x, y)\Big)$
5. $\forall x \forall y\Big(\forall z P(z, x) \rightarrow Q(y, z)\Big)$

Interpretation

Interpretacija FOL formule

Interpretacija dobro oblikovane formule FOL-a sastoji se od:

- nepraznog skupa D koji zovemo **domena** (stvari koje opisujemo)
- preslikavanje svake konstante u element iz D
- preslikavanje svakog n-arnog funkcijskog simbola u funkciju $D^n \to D$
- preslikavanje svakog n-arnog predikatnog simbola u funkciju $D^n \to \{\top, \bot\}$
  (podskup od D^n za koje je predikat istinit naziva se **ekstenzija** tog predikata)

Vrednovanje formule

Vrednovanje istinitosti formule

Za zadanu interpretaciju možemo vrednovati vrijednost istinitosti formule, kako slijedi:

1. Vrijednost istinitosti atoma $F(x_1, \ldots, x_n)$ dobiva se primjenom preslikavanja za konstante, funkcije i predikatni simbol
2. Vrijednost istinitosti formula $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ određuju se tablicom istinitosti (kao i kod PL)
3. $(\forall x)F$ se vrednuje kao istinito akko je F istina za svaki element $d \in D$
4. $(\exists x)F$ se vrednuje kao istinito akko je F istina za barem jedan element $d \in D$

- **NB:** Ne možemo vrednovati:
  - formule koje nisu wffs!
  - formule koje sadrže slobodne varijable!

Vježba: Vrednovanje FOL formule

Pitanje 1

Odredite vrijednost istinitosti formule $\forall x \exists y P(x, y)$ u interpretaciji s domenom $D = \{1, 2\}$ i sljedećim preslikavanjem za predikatni simbol P:

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Vježba: Vrednovanje FOL formule

Pitanje 2

Zadana je interpretacija s domenom $D = \{a, b\}$ i ekstenzijom za predikat P definiranom kao $\{(a, a), (b, b)\}$. Odredi vrijednost istinitosti sljedećih formula:

1. $\exists x \forall y P(x, y)$
2. $\exists y \neg P(a, y)$
3. $\forall x \forall y P(x, y)$
4. $\exists x \neg P(x, y)$
5. $\forall x \forall y \Big(P(x, y) \rightarrow P(y, x)\Big)$

Ekvivalencije FOL-a

$$
\begin{array}{rlcl}
[1] & \forall x F[x] & \equiv & \forall y F[y] \\
[2] & \exists x F[x] & \equiv & \exists y F[y] \\
[3] & \neg \forall x F[x] & \equiv & \exists x \neg F[x] \\
[4] & \neg \exists x F[x] & \equiv & \forall x \neg F[x] \\
[5] & \forall x F[x] \lor \forall x G[x] & \equiv & \forall x F[x] \lor \forall y G[y] \\
[6] & \forall x F[x] \lor \exists x G[x] & \equiv & \forall x F[x] \lor \exists y G[y] \\
[7] & \exists x F[x] \lor \forall x G[x] & \equiv & \exists x F[x] \lor \forall y G[y] \\
[8] & \exists x F[x] \lor \exists x G[x] & \equiv & \exists x F[x] \lor \exists y G[y] \\
[9] & \forall x F[x] \land \forall x G[x] & \equiv & \forall x F[x] \land \forall y G[y] \\
[10] & \forall x F[x] \land \exists x G[x] & \equiv & \forall x F[x] \land \exists y G[y] \\
[11] & \exists x F[x] \land \forall x G[x] & \equiv & \exists x F[x] \land \forall y G[y] \\
[12] & \exists x F[x] \land \exists x G[x] & \equiv & \exists x F[x] \land \exists y G[y] \\
[13] & \forall x F[x] \lor \forall y G[y] & \equiv & \forall x \forall y (F[x] \lor G[y]) \\
[14] & \forall x F[x] \land \forall y G[y] & \equiv & \forall x \forall y (F[x] \land G[y])
\end{array}
$$

$F[x]$ i $G[x]$ označavaju formule koje sadrže varijablu x

Ekvivalencije FOL-a

$$
\begin{array}{lllll}
[15] & \forall x F[x] \lor H\{x\} & \equiv & \forall x (F[x] \lor H\{x\}) \\
[16] & \forall x F[x] \land H\{x\} & \equiv & \forall x (F[x] \land H\{x\}) \\
[17] & \exists x F[x] \lor H\{x\} & \equiv & \exists x (F[x] \lor H\{x\}) \\
[18] & \exists x F[x] \land H\{x\} & \equiv & \exists x (F[x] \land H\{x\}) \\
[19] & \forall x (F[x] \land G[x]) & \equiv & \forall x F[x] \land \forall x G[x] \\
[20] & \forall x (F[x] \land G[x]) & \equiv & \forall x F[x] \land \forall y G[y] \\
[21] & \forall x (F[x] \land G[x]) & \equiv & \forall x \forall y (F[x] \land G[y]) \\
[22] & \exists x (F[x] \lor G[x]) & \equiv & \exists x F[x] \lor \exists x G[x] \\
[23] & \exists x (F[x] \lor G[x]) & \equiv & \exists x F[x] \lor \exists y G[y] \\
[24] & \exists x (F[x] \lor G[x]) & \equiv & \exists x \exists y (F[x] \lor G[y])
\end{array}
$$

$H\{x\}$ označava formulu koja <u>ne</u> sadržava variablu x

Neodlučivost FOL-a

- **Valjanost**, **proturječnost** i **zadovoljivost** definirani su u FOL-u na isti način kao i u PL-u
- U PL-u, formula sa n varijabli ima 2^n interpretacija (zašto?)
- **Q**: Koliko interpretacija ima neka formula u FOL-u?
- **A**: Beskonačno mnogo!
  $\Rightarrow$ Postoji beskonačno mnogo domena D (neke od njih su i same beskonačne!)
  $\Rightarrow$ Zbog toga u FOL-u ne radimo s tablicama istinitosti!
- **Q:** Kako to utječe na semantiku (konkretno: na logičku posljedicu)?
- **A:** Ne možemo dokazati logičku posljedicu iscrpnim pobrojavanjem interpretacija $\Rightarrow$ **neodlučivost**
- Budući da ne možemo pobrojavati, trebamo naći neki učinovitiji postupak $\Rightarrow$ **teorija dokaza**
- Koju god metodu koristili, ona će biti ograničena zbog **neodlučivosti**

Sadržaj

Preslikavanje prirodnog jezika u FOL

1. *Ivan je marljiv student.*
2. *Svi studenti su pametni.*
3. *Niti jedan student nije pametan.*
4. *Neki studenti su pametni.*

Preslikavanje prirodnog jezika u FOL

1. *Ivan je marljiv (M) student (S).*
   - $S(Ivan) \land M(Ivan)$ ✓
   - $MS(Ivan)$
   - MSI
   - $\forall x \big(Ivan(x) \rightarrow (S(x) \land M(x))\big)$

Preslikavanje prirodnog jezika u FOL

2. *Svi studenti su pametni (P).*
   - $\forall x \big(S(x) \wedge P(x)\big)$ ✗
   - $\forall student\ P(student)$ ✗
   - $\forall x \in student\ P(x)$ ✗
   - $\forall x \big(S(x) \rightarrow P(x)\big)$ ✓
   - $\forall x S(x) \rightarrow P(x)$ ✗

Preslikavanje prirodnog jezika u FOL

3. *Niti jedan student nije pametan.*

- $\forall x\big(S(x) \rightarrow \neg P(x)\big)$ ✓
- $\forall x \neg\big(S(x) \land P(x)\big)$ ✓
- $\neg\exists x\big(S(x) \land P(x)\big)$ ✓
- $\neg\forall x\big(S(x) \rightarrow P(x)\big)$ ✗
- $\neg\forall x\big(S(x) \land P(x)\big)$ ✗
- $\forall x\big(\neg S(x) \land \neg P(x)\big)$ ✗

Preslikavanje prirodnog jezika u FOL

4. *Neki studenti su pametni.*

    - $\exists x \big(S(x) \land P(x)\big)$ ✓
    - $\exists x \big(S(x) \rightarrow P(x)\big)$ ✗

Preslikavanje prirodnog jezika u FOL

1. *Ivan je marljiv (M) student (S).*

$$M(Ivan) \wedge S(Ivan)$$

2. *Svi studenti su pametni (P).*

$$\forall x \big(S(x) \rightarrow P(x)\big)$$

3. *Niti jedan student nije pametan.*

$$\forall x \big(S(x) \rightarrow \neg P(x)\big) \;\equiv\; \forall x \neg \big(S(x) \wedge P(x)\big) \;\equiv\; \neg \exists x \big(S(x) \wedge P(x)\big)$$

4. *Neki studenti su pametni.*

$$\exists x \big(S(x) \wedge P(x)\big)$$

Detaljnije u: `https://goo.gl/15neLq`

Primjer: carinici i diplomati

Premise

Carinici su pretražili svakoga tko je ušao u zemlju a nije diplomat. Neke krijumčare koji su ušli u zemlju pretražili su samo krijumčari. Niti jedan krijumčar nije diplomat.

Zaključak

Neki su carinici krijumčari.

Primjer: carinici i diplomati

Carinici (C) su pretražili (P) svakoga tko je ušao (U) u zemlju a nije diplomat (D).

$$\forall x\Big(\big(U(x) \land \neg D(x)\big) \to \exists y\big(C(y) \land P(y,x)\big)\Big)$$

Neke krijumčare (K) koji su ušli su u zemlju pretražili su samo krijumčari.

$$\exists x\Big(K(x) \land U(x) \land \forall y\big(P(y,x) \to K(y)\big)\Big)$$

Niti jedan krijumčar nije diplomat.

$$\forall x\big(K(x) \to \neg D(x)\big)$$

Neki su carinici krijumčari.

$$\exists x\big(C(x) \land K(x)\big)$$

Neka ograničenja FOL-a

- Modeliranje **vremena** i **događaja**
  - Alternative: situacijski račun (engl. *situational calculus*), račun događaja (engl. *event calculus*)
- Modeliranje **mentalnih stanja**
  - propozicijski stavovi: vjerojavanja, želje, namjere

$$Vjeruje\big(Lois, Leti(Superman)\big)$$

  - Problem: mentalni stavovi nisu **referencijalno prozirni** $\Rightarrow$ supstitucija ekvivalelntnih izraza može promijeniti značenje formule!

$$(Superman = Clark) \wedge Vjeruje\big(Lois, Leti(Superman)\big) \\ \vDash Vjeruje\big(Lois, Leti(Clark)\big)$$

  - Rješenje: **modalna logika** (složeniji semantički model temelje na **mogućim svjetovima**)

Sažetak

- Postoje razne vrste logika koje se razlikuju po **ekspresivnosti**
- Svaki logički sustav sastoji se **(1) sintakse, (2) semantike i (3) teorije dokaza**
- Formula može biti **zadovoljiva**, **valjana** ili **proturječna**
- **Logička posljedica** je formula koja je istinita kad god su i premise istinite. To možemo dokazati **izravno** ili **opovrgavanjem**
- U propozicijskoj logici (PL) možemo iskazati propozicije koje su istinite ili lažne, a formule imaju konačan broj interpretacija
- U PL, logičku posljedicu možemo dokazati putem **tablice istinitosti**
- U logici prvog reda (FOL) možemo iskazati svojstva objekata i relacije među njima, ali je broj interpretacija beskonačan

Sljedeća tema: Automatsko zaključivanje