Neuronske mreže: Asocijativna memorija

Prof. dr. sc. Sven Lončarić

Fakultet elektrotehnike i računarstva

https://www.fer.unizg.hr/predmet/neumre_c

Pregled predavanja

- Uvod
- Asocijativne memorije
- Korelacijska matrica kao asocijativna memorija
- Učenje korekcijom pogreške
- Pseudoinverzna matrica kao asocijativna memorija
- Diskusija
- Zadaci

Uvod

- U neurobiološkom kontekstu memorija predstavlja relativno trajnu neuronsku promjenu uzrokovanu interakcijom organizma s okolinom
- Bez takvih promjena ne može biti memorije
- Da bi memorija bila korisna mora biti dohvatljiva od strane nervnog sustava
- Memorija se “puni” procesom učenja
- Memorija se može podijeliti na:
  - kratkotrajnu (sadrži trenutno stanje okoline)
  - dugotrajnu (sadrži permanentno spremljeno znanje)

Uvod

- U ovom poglavlju govori se od distribuiranoj memoriji sličnoj mozgu koja radi pomoću asocijacija
- Asocijativna memorija je važni dio ljudske memorije
- Glavno svojstvo neke asocijativne memorije je da preslikava ulazne uzorke u izlazne uzorke neuronske aktivnosti

Uvod

- Za vrijeme učenja ulazni uzorak zvani ključ prezentira se memoriji koja ga transformira u zapamćeni uzorak
- Za vrijeme dohvata memoriji se prezentira ulaz koji može biti zašumljena ili nepotpuna verzija originalnog ključa
- Usprkos nesavršenosti ulaznog ključa asocijativna memorija daje na izlazu pripadni zapamćeni uzorak

Svojstva asocijativnih memorija

- Memorija je distribuirana
- Ulazni uzorak (ključ) i odziv (zapamćeni uzorak) su vektori
- Informacija je spremljena u memoriji pomoću velikog broja neurona
- Informacija sadržana u ključu određuje adresu uzorka u memoriji
- Memorija ima velik stupanj otpornosti na smetnje
- Moguće su interakcije uzoraka spremljenih u memoriji (inače bi memorija morala biti veoma velika) - mogućnost pogreške

Vrste asocijativnih memorija

- Autoasocijativna memorija:
  - vektor ključa je asociran sam sa sobom u memoriji
  - dimenzija ulaznog i izlaznog vektora je jednaka
- Heteroasocijativna memorija:
  - proizvoljni ulazni vektori (ključevi) su asocirani s proizvoljnim memoriranim vektorima
  - dimenzija ulaznog i izlaznog vektora može biti različita
- U oba slučaja zapamćeni uzorak se može dohvatiti iz memorije pomoću ulaznog vektora koji nije kompletan ili koji je zašumljena verzija originalnog ključa

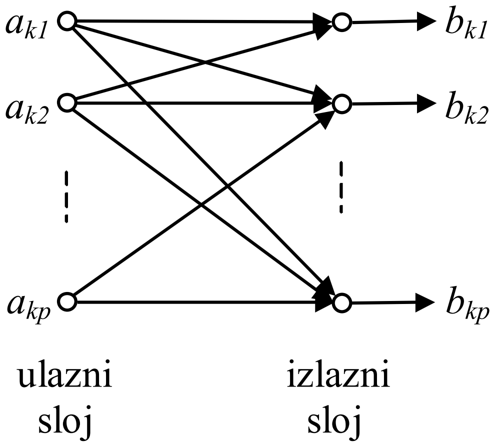
Vrste asocijativnih memorija

- Linearna asocijativna memorija:
  - neuroni rade u linearnom modu (linearna kombinacija)
  - neka su **a** i **b** ulaz i izlaz iz asocijativne memorije, onda je odnos ulaz izlaz opisan relacijom **b**=**Ma**, gdje je **M** memorijska matrica

- Nelinearna asocijativna memorija
  - odnos ulaz izlaz opisan je izrazom: **b**=ϕ(**M**,**a**)**a**, gdje je ϕ(.,.) nelinearna funkcija

Model asocijativne memorije

- Model linearne asocijativne memorije s umjetnim neuronima prikazan je na slici:



Memorijsko preslikavanje

- Pretpostavimo da imamo mrežu s jednim ulaznim slojem i jednim slojem od po p neurona koji su linearni
- Neka mreža za ulazni vektor $\mathbf{a}_k$ daje izlazni vektor $\mathbf{b}_k$
- Pretpostavimo da memorija pamti q parova ulaz-izlaz
- Možemo izraziti vezu ulaznog i izlaznog vektora izrazom

$$\mathbf{b}_k=\mathbf{W}(\mathrm{k})\mathbf{a}_k,\quad k=1,\ \ldots,\ q$$

gdje je $\mathbf{W}(\mathrm{k})$ matrica dimenzija $p \times p$ koja ovisi isključivo o $\mathbf{a}_k$ i $\mathbf{b}_k$

Memorijsko preslikavanje

- Za q parova ulaz-izlaz imamo matrice **W**(1), …, **W**(q)
- Nadalje, možemo formirati matricu dimenzija $p \times p$ koja predstavlja sumu matrica **W**(k):

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{q} \mathbf{W}(k)$$

- Matrica **M** definira povezanost ulaznog i izlaznog sloja mreže koja predstavlja asocijativnu memoriju

Memorijsko preslikavanje

- Memorijsku matricu M možemo formulirati i rekurzivnim izrazom:

  $$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{k\text{-}1} + \mathbf{W}(k), \quad k = 1, 2, \ldots, q$$

  gdje je $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$
- $\mathbf{M}_{k\text{-}1}$ je stara vrijednost matrice za prvih k-1 asocijacija
- $\mathbf{M}_k$ je obnovljena matrica koja uzima u obzir i k-tu asocijaciju
- Kako broj spremljenih asocijacija q raste utjecaj pojedinog novog para na cijelu memoriju se smanjuje

Korelacijska matrica

- Anderson, 1972
- Pretpostavimo da memorija ima matricu **M** koja opisuje zapamćene asocijacije $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$, gdje je k=1, 2, …, q
- Jedna procjena matrice **M** može se izračunati izrazom:

$$\hat{\mathbf{M}} = \sum_{k=1}^{q} \mathbf{b}_k \mathbf{a}_k^T$$

- Član $\mathbf{b}_k\mathbf{a}_k^T$ je vanjski produkt ulaznog vektora $\mathbf{a}_k$ i zapamćenog uzorka $\mathbf{b}_k$ koji je matrica dimenzija $p \times p$

Korelacijska matrica

- Ova procjena može se napisati i u slijedećoj formi:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q^T \end{bmatrix} = \mathbf{BA}^T$$

  gdje je $\mathbf{A}$=[$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ ... $\mathbf{a}_q$] i $\mathbf{B}$=[$\mathbf{b}_1$ $\mathbf{b}_2$ ... $\mathbf{b}_q$]
- **A** je matrica ulaznih uzoraka (ili matrica ključeva) dimenzija $p \times q$
- **B** je matrica zapamćenih uzoraka dimenzija $p \times q$

Dohvat iz memorije

- Zamislimo da na ulaz asocijativne memorije koja je zapamtila *q* uzoraka dovedemo uzorak $\mathbf{a}_j$
- Na izlazu memorije dobit ćemo odziv:

$$\mathbf{b} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^{q} \mathbf{b}_k \mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^{q} \left(\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_j\right)\mathbf{b}_k$$

- Nadalje izraz za odziv možemo pisati kao:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_j\right)\mathbf{b}_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{q} \left(\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_j\right)\mathbf{b}_k$$

Dohvat iz memorije

- Pretpostavimo da su ulazni uzorci (ključevi) normirani vektori: $\mathbf{a}_k^T\mathbf{a}_k=1$
- Tada možemo pisati da je:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_j + \mathbf{v}_j$$

gdje je:

$$\mathbf{v}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{q} \left(\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_j\right) \mathbf{b}_k$$

Interpretacija odziva memorije

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_j + \mathbf{v}_j$$

- Prvi pribrojnik iz gornjeg izraza predstavlja željeni odziv memorije na ulaz $\mathbf{a}_j$
- Drugi pribrojnik predstavlja “preslušavanje” između ključa $\mathbf{a}_j$ i ostalih ključeva spremljenih u memoriji
- Ako su ulazni uzorci statistički nezavisni onda drugi pribrojnik predstavlja Gaussov slučajni vektor (šum)
- Ovaj šum ograničava broj uzoraka koji mogu biti pouzdano zapamćeni

Interpretacija odziva memorije

$$\mathbf{v}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{q} \left(\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_j\right) \mathbf{b}_k$$

- Pretpostavimo da su ulazni vektori (ključevi) ortonormirani skup vektora odnosno da vrijedi:

$$\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

- Tada je šum $\mathbf{v}_j$ jednak nuli
- Broj linearno nezavisnih vektora dimenzije *p* jednak je *p*
- To znači da je kapacitet memorije jednak dimenziji vektora (u ovom slučaju *p*)

Diskusija

- Ukoliko skup ulaznih linearno nezavisnih vektora nije ortogonalan može se provesti Gram-Schmidt procedura za ortnormalizaciju skupa linearno nezavisnih vektora
- U praksi često ulazni uzorci nisu ortogonalni zbog čega opisana korelacijska matrica kao asocijativna memorija može dati pogrešan rezultat
- Nedostatak ovog jednostavnog pristupa je da memorija nema nikakav način korekcije vlastitih pogrešaka
- Za uklanjanje ovog nedostatka može se koristiti mehanizam za korekciju greške opisan u nastavku

Učenje korekcijom pogreške

- Neka je $\mathbf{M}(n)$ matrica naučena u koraku n
- Ulazni vektor $\mathbf{a}_k$ je doveden na ulaz memorije i daje odziv iznosa $\mathbf{M}(n)$ $\mathbf{a}_k$
- Možemo definirati vektor pogreške kao:

$$\mathbf{e}_k(n) = \mathbf{b}_k - \mathbf{M}(n)\,\mathbf{a}_k$$

  gdje je $\mathbf{b}_k$ odziv asociran s ulazom $\mathbf{a}_k$

- Vektor pogreške možemo koristiti za učenje zakonom:

(korekcija) = (brzina učenja) × (pogreška) × (ulaz)

Učenje korekcijom pogreške

- U ovom slučaju prethodni izraz se svodi na:

$$\Delta\mathbf{M}(n) = \eta\, \mathbf{e}_k(n)\, \mathbf{a}_k^T = \eta\, [\mathbf{b}_k - \mathbf{M}(n)\, \mathbf{a}_k]\, \mathbf{a}_k^T$$

- Korekcija $\Delta\mathbf{M}(n)$ se koristi za osvježavanje matrice **M** na slijedeći način:

$$\mathbf{M}(n+1) = \mathbf{M}(n) + \Delta\mathbf{M}(n)\ , \quad \mathbf{M}(0)=\mathbf{0}$$

- Konstantni pozitivni parametar η dovodi do stvaranja kratkotrajne memorije jer se bolje pamte zadnji uzorci nego uzorci koji su davno memorirani
- Zato se nekad parametar η smanjuje s vremenom (s n) da bi se približio nuli kad memorija nauči puno asocijacija

Pseudoinverzna memorija

- Korelacijska matrica predstavlja jedan tip linearne asocijativne memorije
- Postoji i drugi tip linearne asocijativne memorije koji minimizira pogrešku asocijativne memorije:

$$e = \left\| \mathbf{B} - \hat{\mathbf{M}}\mathbf{A} \right\|$$

  gdje je **A** matrica ključeva dimenzija *p*×*q,* a **B** matrica željenih izlaza dimenzija *p*×*q*
- Euklidska norma daje pogrešku asocijativne memorije

Pseudoinverzna memorija

- Iz linearne algebre je poznato da je pogreška *e* minimalna za:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{+}$$

  gdje je $\mathbf{A}^{+}$ pseudinverzna matrica matrice **A**
- Gornja jednadžba zove se pseudinverzno pravilo učenja, a pripadna memorija zove se pseudoinverzna memorija
- Dovoljan uvjet za perfektnu asocijaciju je da vrijedi:
- Tada vrijedi:

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{I} = \mathbf{B}$$

Diskusija

- Pseudinverzna memorija nije temeljena na neurobiološkim procesima za razliku od korelacijske memorije
- U nekim primjenama bolju otpornost na smetnje pokazuje korelacijska, a u nekim drugim primjenama bolje se ponaša pseudoinverzna asocijativna memorija

Zadaci

- Problem 3.1.
  - Modificirati izraze za korelacijsku memoriju pretpostavljajući različite dimenzije ulaznog i izlaznog vektora
- Problem 3.2.
  - Neka su ulazni vektori:

    $\mathbf{a}_1=[1\ 0\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{a}_2=[0\ 1\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{a}_3=[0\ 0\ 1\ 0]^T$

    a izlazni vektori:

    $\mathbf{b}_1=[5\ 1\ 0]^T$, $\mathbf{b}_2=[-2\ 1\ 6]^T$, $\mathbf{b}_3=[-2\ 4\ 3]^T$

    Treba izračunati memorijsku matricu **M** i pokazati da memorija točno pamti.