Matematička analiza 1 - Poglavlje 13

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 17. RUJNA 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

13. Primjena integralnog računa

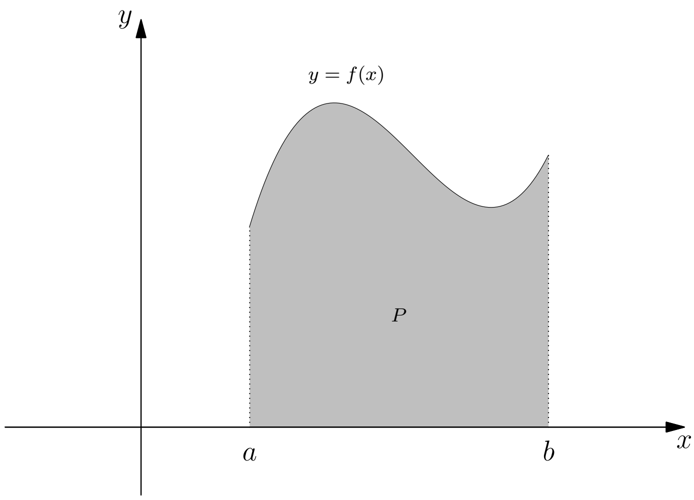
Osnovne primjene integrala spominjali smo i u prethodnim poglavljima. Sada ćemo se detaljnije fokusirati na primjene, ali ćemo se ukratko osvrnuti i na primjene u fizici.

Na početku napominjemo da smo neke slike preuzeli iz [1].

13.1 Izračunavanje površine ravninskog lika

13.1.1 Izračunavanje površine lika u pravokutnim koordinatama

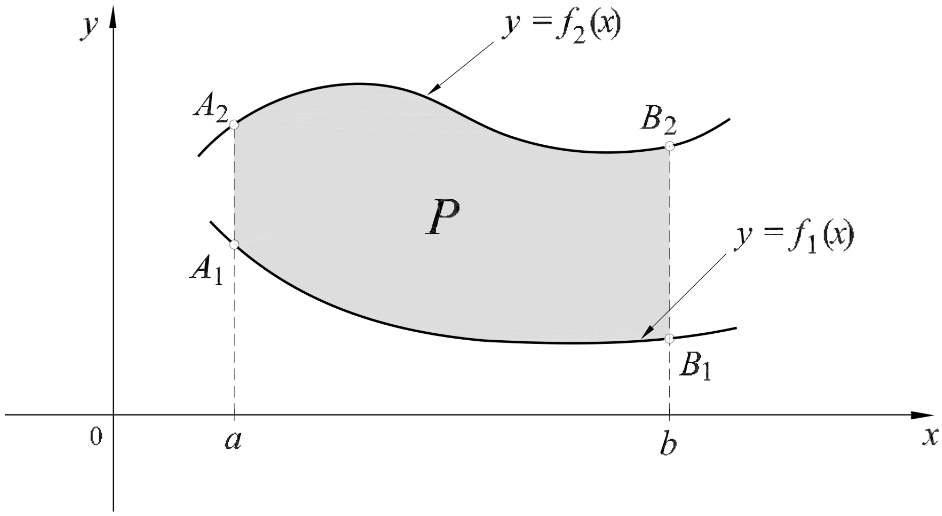
Motivirajući uvođenje određenog integrala smo naučili da integral $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu lika omeđenog krivuljom $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$ te pravcima $x = a$, $x = b$ i osi x. (vidi Sliku 13.1).



Slika 13.1

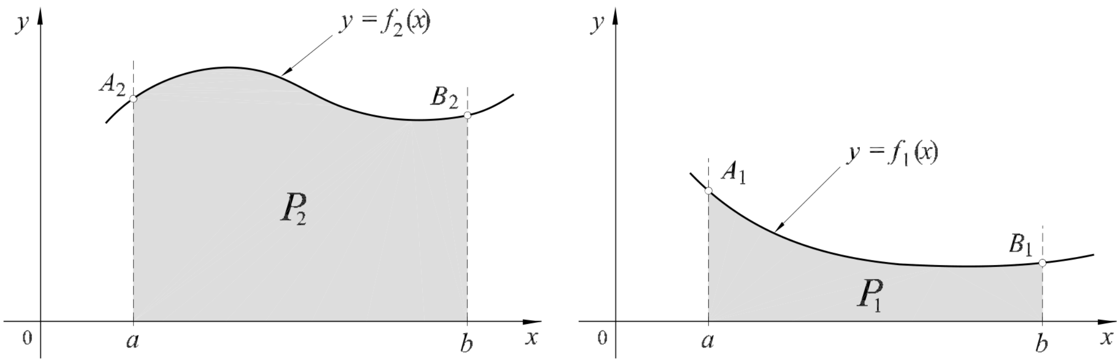
Jednako vrijedi i ako su $x = a$ i $x = b$ nul-točke funkcije f.

Promotrimo sada općenitiji slučaj (vidi Sliku 13.2). Sada je lik omeđen krivuljama $y = f_1(x)$,



Slika 13.2

$y = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ za $x \in [a,b]$, te pravcima $x = a$ i $x = b$ (posebice, krivulje $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ mogu se sjeći u točkama s apscisama a i b). Površina P tog lika jednaka je razlici površina P_2 i P_1, pri čemu je P_2 površina lika ispod krivulje $y = f_2(x)$ nad intervalom $[a,b]$, dok je P_1 površina lika ispod krivulje $y = f_1(x)$ nad istim intervalom (vidi Sliku 13.3).



Slika 13.3

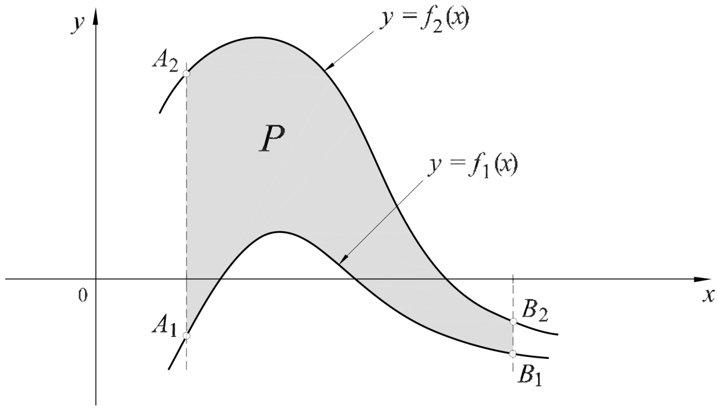
Zato je

$$P = P_2 - P_1 = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \tag{13.1}$$

Uočimo da formula (13.1) vrijedi u općem slučaju, tj. funkcije f_1 i f_2 ne moraju nužno biti pozitivne na $[a,b]$. Naime, uvijek je moguće lik translatirati u smjeru osi y tako da se postigne pozitivnost obje translatirane funkcije, a površina ne ovisi o translaciji. Primjerice, formula (13.1) vrijedi i za lik prikazan na Slici 13.4.

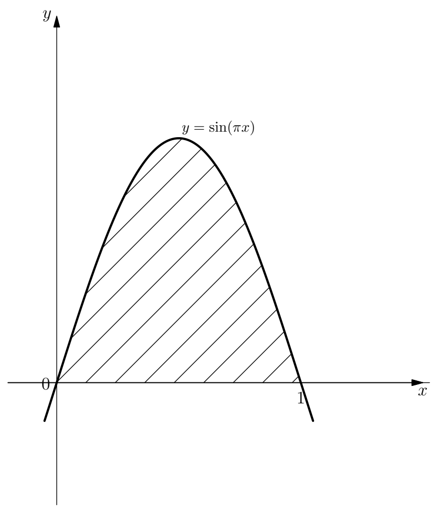
Općenito, svaki ravninski lik možemo prikazati kao uniju likova poput onih na Slici 13.4, pa ukupnu površinu računamo kao zbroj površina tih likova.

Sada ćemo navesti veći broj riješenih primjera izračunavanja površine takvih likova pomoću integrala.



Slika 13.4

■ **Primjer 13.1** Izračunajmo površinu lika omeđenog poluvalom sinusoide $y = \sin(\pi x)$ i osi x.



Slika 13.5

Rješenje. Uzmimo poluval sinusoide $y = \sin(\pi x)$ za $x \in [0,1]$, kao što je to prikazano na Slici 13.5. Površina lika na slici je onda

$$P = \int_0^1 y(x)\,dx,$$

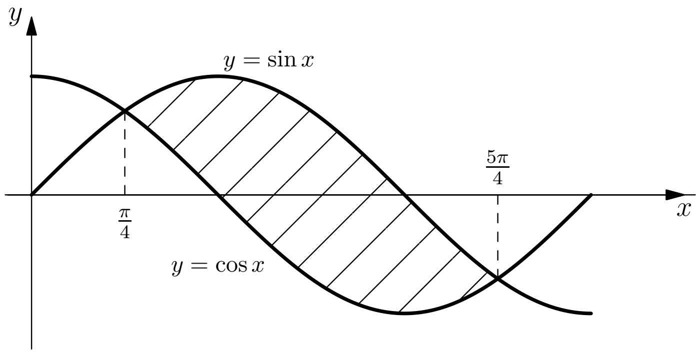
pri čemu je $y(x) = \sin(\pi x)$. Dakle, imamo

$$P = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

■

■ **Primjer 13.2** Izračunajmo površinu lika prikazanog na Slici 13.6 omeđenog krivuljama $y = \sin x$ i $y = \cos x$ između dvije susjedne točke presjeka.

Rješenje. Najprije uočimo kako je ovaj zadatak dobro zadan, tj. uočimo da su svi likovi koje omeđuju krivulje $y = \sin x$ i $y = \cos x$ između dvije susjedne točke presjeka međusobno sukladni. Zato odaberimo jedan konkretni takav lik, i to lik omeđen krivuljama $y = \sin x$ i $y = \cos x$, za $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.



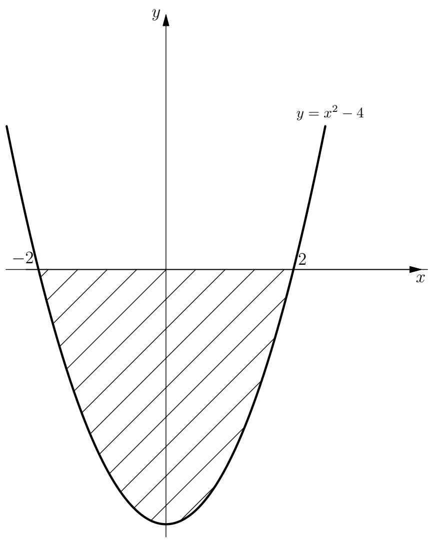
Slika 13.6

Prema (13.1), površina tog lika je dana s

$$P = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \big(\sin x - \cos x\big)\, dx = \big(-\cos x - \sin x\big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

■

■ **Primjer 13.3** Izračunajmo površinu lika omeđenog parabolom $y = x^2 - 4$ i osi x.



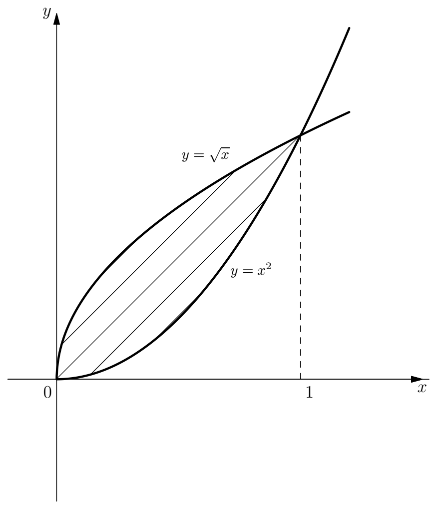
Slika 13.7

Rješenje. 1. način rješavanja. Lik čiju površinu računamo prikazan je na Slici 13.7. Parabola $y = x^2 - 4$ s nultočkama -2 i 2 se nalazi ispod osi x na intervalu $[-2, 2]$, pa je površina lika na slici, po formuli (13.1), uz $f_2(x) = 0$ i $f_1(x) = x^2 - 4$:

$$P = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 2\int_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx$$
$$= 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} = 2\cdot(8 - \frac{8}{3}) = \frac{32}{3}.$$

2. način rješavanja. Do istog rezultata smo mogli doći i tako da smo lik zrcalili s obzirom na os x (dobiveni lik bi bio sukladan polaznom i imao istu površinu) i izračunali površinu tog lika $P = \int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = \frac{32}{3}$. ■

■ **Primjer 13.4** Izračunajmo površinu lika omeđenog krivuljama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.



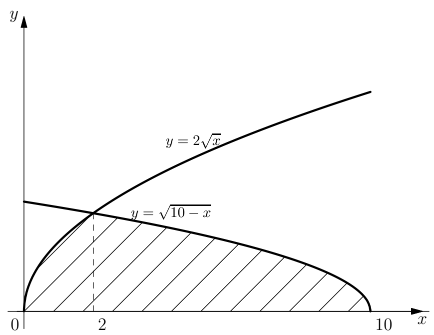
Slika 13.8

Rješenje. Lik čiju površinu računamo prikazan je na Slici 13.8. Apscise točaka presjeka zadanih krivulja su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Površina P traženog lika, prema formuli (13.1), jednaka je:

$$P = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

■

■ **Primjer 13.5** Izračunajmo površinu lika omeđenog krivuljama $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{10-x}$ i osi x, prikazanog na Slici 13.9.



Slika 13.9

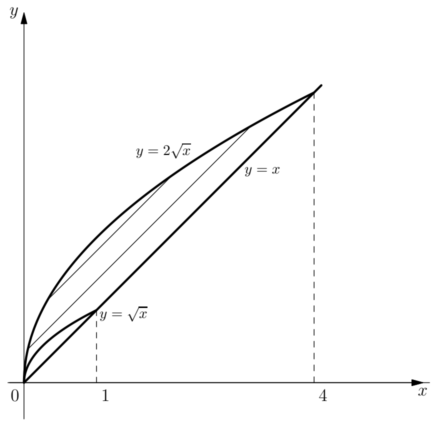
Rješenje. Krivulja $y = 2\sqrt{x}$ ima nultočku 0, krivulja $y = \sqrt{10-x}$ ima nultočku 10, a krivulje se sijeku u točki $x = 2$. Dakle, površina P traženog lika jednaka je zbroju površina P_1 i P_2, pri čemu je P_1 površina ispod krivulje $y = 2\sqrt{x}$ nad intervalom $[0,2]$, dok je P_2 površina ispod krivulje

$y=\sqrt{10-x}$ nad intervalom $[2,10]$.

$$P=P_1+P_2=\int_0^2 2\sqrt{x}\,dx+\int_2^{10}\sqrt{10-x}\,dx=2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2-\frac{(10-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^{10}$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{8}+\frac{2}{3}\cdot 8\sqrt{8}=\frac{40}{3}\sqrt{2}.$$

■

■ **Primjer 13.6** Izračunajmo površinu P lika omeđenog krivuljama $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ i $y=x$, prikazanog na slici 13.10.



Slika 13.10

Rješenje. Pravac $y=x$ siječe krivulju $y=\sqrt{x}$ u točki s apscisom $x_1=1$ i krivulju $y=2\sqrt{x}$ u točki s apscisom $x_2=4$. Površinu lika P računat ćemo kao zbroj površina P_1 i P_2 na Slici 13.10.

Dakle imamo:

$$P=\int_0^1(2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx+\int_1^4(2\sqrt{x}-x)\,dx$$
$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1+2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4=\frac{5}{2}.$$

■

■ **Primjer 13.7** Izračunajmo površinu P lika omeđenog parabolom $y^2=x$ i pravcem $y=x-6$, prikazanog na Slici 13.11.

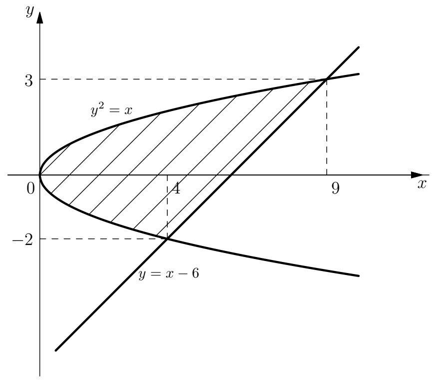
Rješenje. Pravac i parabola sijeku se u točkama $A(-2,4)$ i $B(3,9)$.

1. način rješavanja. U ovom je slučaju jednostavnije izračunati površinu P uzmemo li za varijablu integracije varijablu y. Dakle je P površina između pravca $x=y+6$ i parabole $x=y^2$ za $y\in[-2,3]$.

$$P=\int_{-2}^3\left((y+6)-y^2\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}+6y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^3$$
$$=\frac{9}{2}+18-9-2+12-\frac{8}{3}=\frac{157}{6}.$$

2. način rješavanja. U slučaju da za varijablu integracije uzmemo varijablu x, lik čiju površinu računamo bismo morali podijeliti na dva dijela:

$$P=2\int_0^4\sqrt{x}\,dx+\int_4^9\left(\sqrt{x}-(x-6)\right)dx=\ldots=\frac{157}{6}.$$



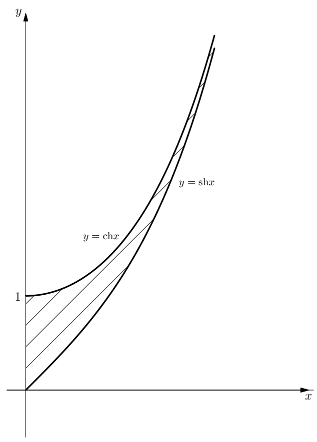
Slika 13.11

■

Vježba 13.1 Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = \text{arcsinx}$, $y = \text{arccosx}$ i osi x.

Napomena 13.1 Uočite kako je zadatak jednostavnije riješiti tako da se za varijablu integracije uzme varijabla y i to zato, jer je integriranje jednostavnije.

■ **Primjer 13.8** Lik P je zadan nejednadžbama $y \geq \text{shx}$, $y \leq \text{chx}$ i $x \geq 0$.



Slika 13.12

Lik P nije omeđen, ali bi, sukladno uvedenim pojmovima u poglavlju "Nepravi integrali", njegova površina mogla biti konačna. (vidi Sliku 13.12)Računamo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (\text{chx} - \text{shx})\, \text{dx} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.\end{aligned}$$

Tako možemo reći da je površina P konačna i iznosi 1. ■

■ **Primjer 13.9** Prisjetimo se da smo već ranije izračunali da je $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$. To znači da možemo reći kako je površina lika između te krivulje i osi x jednaka π.

■

Vježba 13.2 Navedimo još jedan primjer neomeđenog lika konačne površine. Skicirajte krivulju $y = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$ i pokažite da površina lika između te krivulje iznosi 4.

13.1.2 Izračunavanje površine lika omeđenog krivuljom zadanom parametarskim jednadžbama

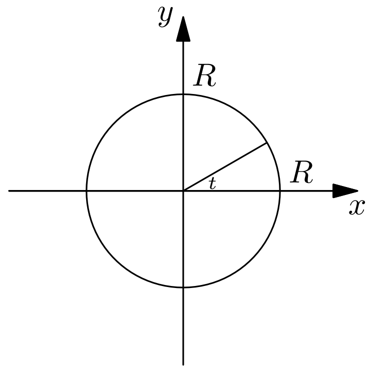
Skup svih točaka (x,y) za koje vrijedi da je

$$x = x(t)$$
$$y = y(t), t \in I$$

je *parametarski zadana krivulja*.

Ovakvim zadavanjem i varijabla x i varijabla y su funkcije varijable t koju nazivamo parametar. Specijalno, ako je parametar varijabla x, dobivamo krivulju $y = y(x)$.

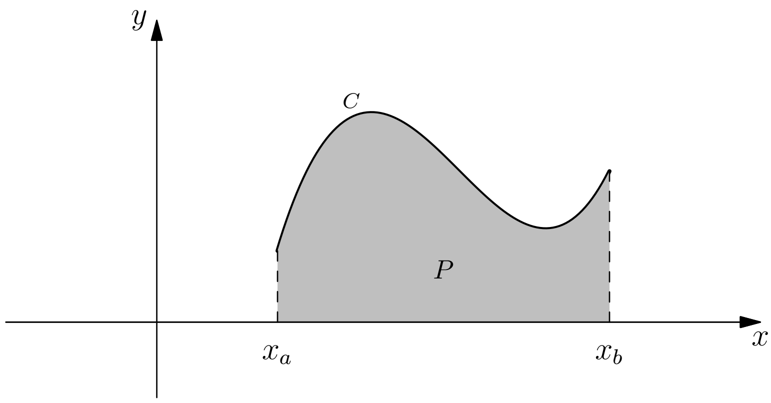
■ **Primjer 13.10** Krivulja $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi\rangle$ jest kružnica polumjera R sa središtem u ishodištu (Slika 13.13).



Slika 13.13

U ovom slučaju parametar t predstavlja kut koji radij vektor točke (x,y) zatvara s pozitivnom poluosi x. ■

Zamislimo da je s $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$ dana krivulja C, da je $x_a = x(a)$ i $x_b = x(b)$ te da je $x_a < x_b$. Zamislimo da je slikom 13.14 dana krivulja C:



Slika 13.14

Površina lika omeđenog krivuljom C, pravcima $x = x_a$ i $x = x_b$ i osi x jednaka

$$P = \int_{x_a}^{x_b} y(x)dx$$

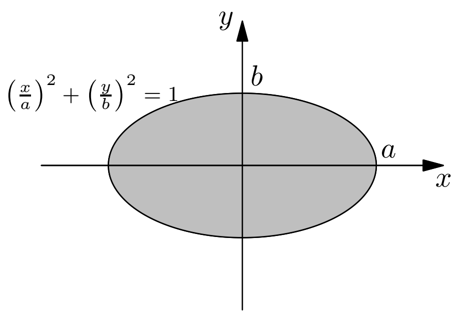
i prijelazom na integraciju po varijabli t, dobivamo

$$P = \int_{x_a}^{x_b} y dx = \int_a^b y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Primjedba. U slučaju da smo imali $x_b < x_a$, imali bismo $P = \int_{x_b}^{x_a} y dx = \int_b^a y(t)\dot{x}(t)dt$.

Promotrimo sljedeći primjer:

■ **Primjer 13.11** Izračunajmo površinu elipse s poluosima a i b prikazane na slici 13.15.



Slika 13.15

Rješenje. (1. način rješavanja) Označimo s P_1 dio lika sa slike koji se nalazi u prvom kvadrantu. Zbog simetrije lika s obzirom na obje koordinatne osi, ukupna tražena površina P iznosi $4P_1$. Dakle,

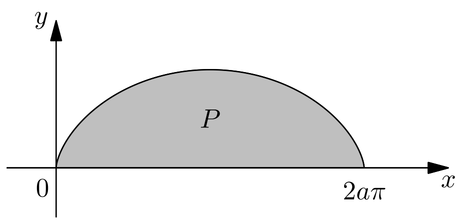
$$\begin{aligned} P = 4P_1 &= 4\int_0^a b \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx = |x = a\sin t| \\ &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = ab\pi. \end{aligned}$$

(2. način rješavanja) Jednostavnije je ipak koristiti parametarske jednadžbe elipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Tako najprije imamo $P = 4\int_0^a y(x)\, dx$, a pri prijelazu na integriranje po varijabli t, valja paziti i na promjenu granica integracije. Tako za $x_1 = 0$ imamo $t_1 = \frac{\pi}{2}$, a za $x_2 = a$ imamo $t_2 = 0$ te zato imamo:

$$\begin{aligned} P &= 4\int_0^a y dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)\cdot x'(t)\, dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t \cdot (-a)\sin t\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt \\ &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt = 4ab\cdot\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi. \end{aligned}$$

■

■ **Primjer 13.12** Izračunajmo površinu P lika omeđenog jednim svodom cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, prikazanoj na slici 13.16.



Slika 13.16

Rješenje. Vrijedi
$$P = \int_0^{2a\pi} y(x)\,dx.$$
Prijelazom na integriranje po varijabli t dobivamo
$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt = a^2\cdot\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt \\
&= a^2\cdot\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt = a^2\cdot\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt \\
&= a^2\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos(2t)}{2}\right)dt = a^2\left(\frac{3t}{2}-2\sin t+\frac{\sin(2t)}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi.
\end{aligned}$$
■

13.1.3 Izračunavanje površine lika u polarnim koordinatama

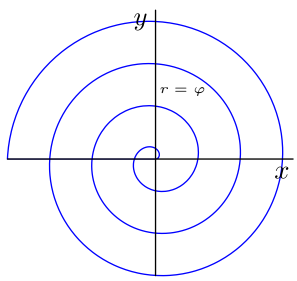
U poglavlju o kompleksnim brojevima za kompleksni broj $z = x+yi$ smo uveli oznake r za modul kompleksnog broja i φ za kut između pozitivne poluosi x i radij-vektora točke (x,y). Pritom vrijedi $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$.

Općenitije, jednadžbama
$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi
\end{aligned}$$
se uvode polarne koordinate (r,φ).

Tada je jednadžbom $r = r(\varphi)$ dana krivulja u polarnim koordinatama (krivulju crtamo u x O y pravokutnom koordinatnom sustavu).

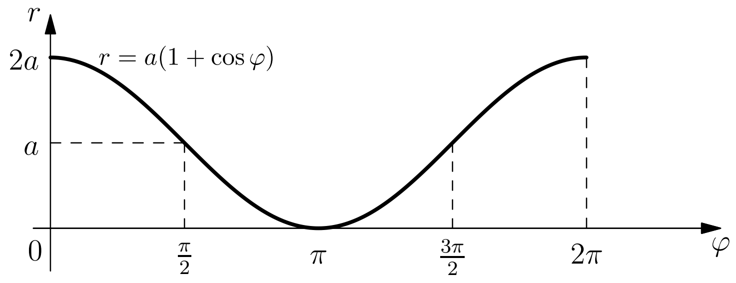
Skicirajmo neke krivulje u polarnim koordinatama. Radi jednostavnosti, promatrat ćemo samo one krivulje za koje je $r(\varphi) \geq 0$.

■ **Primjer 13.13** Neka je zadana krivulja $r = a\varphi$, $a > 0$, $\varphi \geq 0$. S obzirom da je $a\varphi \geq 0$ imamo $r \geq 0$, prilikom crtanja u x O y koordinatnom sustavu vodimo računa o geometrijskoj interpretaciji varijabli r i φ (r je udaljenost točke od ishodišta, a φ kut koji radij-vektor te točke zatvara s pozitivnom poluosi x). U r O φ sustavu graf je polupravac iz ishodišta. Za početak uočimo da za $\varphi = 0$ je $r = 0$ što odgovara točki ishodišta $(x,y) = (0,0)$. S porastom varijable φ linearno raste r, tj. linearno raste udaljenost od ishodišta. Pritom, za $\varphi \in [0,2\pi]$ "obiđe puni krug" i za $\varphi = 2\pi$ ponovo imamo točku na pozitivnoj poluosi x, ali sada udaljenu od ishodišta za $2a\pi$. Nastavimo na isti način i dobit ćemo spiralu kao na slici:



Slika 13.17: Arhimedova spirala

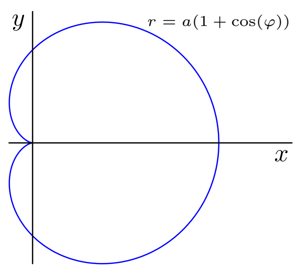
Tu spiralu nazivamo *Arhimedova spirala.* ■



Slika 13.18

■ **Primjer 13.14** Neka je zadana krivulja $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$. Opet je $a(1+\cos\varphi) \geq 0$. Nacrtajmo najprije tu krivulju u r O φ sustavu (Slika 13.18):

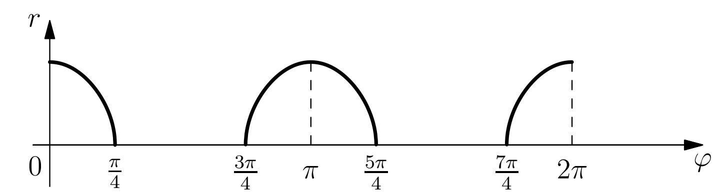
Opet koristimo geometrijsku interpretaciju varijabli r i φ. Tako za $\varphi = 0$ dobivamo $r = a > 0$ čime dobivamo točku $(x,y) = (2a,0)$. Potom, dok φ raste od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$, r pada te se krivulja približava ishodištu, i to prema formuli $r = a(1+\cos\varphi)$, a za $\varphi = \pi$ je $r = 0$ što predstavlja ishodište. Dok φ raste od $\varphi = \pi$ do $\varphi = 2\pi$, r raste, a krivulja je očito simetrična s obzirom na os x. S obzirom da je r kao funkcija varijable φ periodična s temeljnim periodom 2π time je krivulja u potpunosti nacrtana (vidi Sliku 13.19).
Tu krivulju nazivamo *kardioda* (grč. kardia=srce), jer krivulja ima oblik srca. ■



Slika 13.19

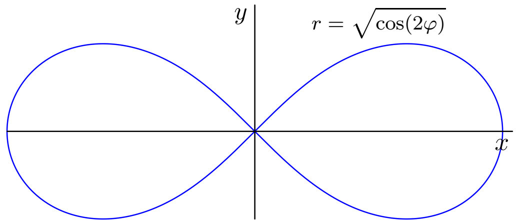
Vježba 13.3 Skicirajte krivulju $r = a(1+\sin\varphi)$ i usporedite s kardioidom iz prethodnog primjera. Kojom transformacijom možemo prevesti jednu krivulju u drugu i zašto? Je li prirodnu i tu krivulju nazvati kardioidom? Potom pokušajte skicirati krivulje $r = a(1-\cos\varphi)$ i $r = a(1-\sin\varphi)$ bez postupnog crtanja i obrazložite postupak.

■ **Primjer 13.15** Skicirajmo krivulju $r^2 = \cos(2\varphi)$. Najprije, skiciramo $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$ u r O φ koordinatnom sustavu (Slika 13.20),



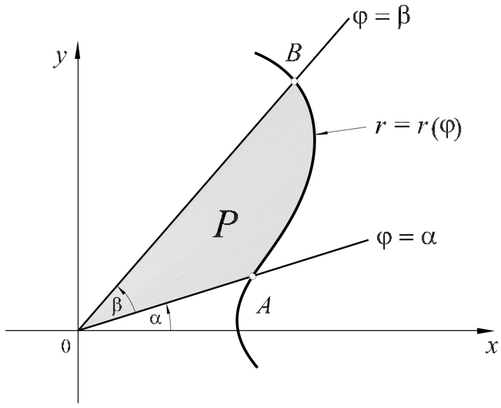
Slika 13.20

a potom, slično kao u prethodnim primjerima, crtamo u pravokutnom xOy koordinatnom sustavu. Tu krivulju, prikazanu na slici 13.21 nazivamo *Bernoullijeva lemniskata*. ■



Slika 13.21

Naš je sljedeći cilj izračunati površinu ravninskog lika omeđenog krivuljom zadanom u polarnim koordinatama. Najprije izračunajmo površinu lika omeđenog krivuljom $r = r(\varphi)$ i polupravcima $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$, tzv. sektora (vidi Sliku 13.22.). Zadani skup sada, umjesto pravokutnicima,

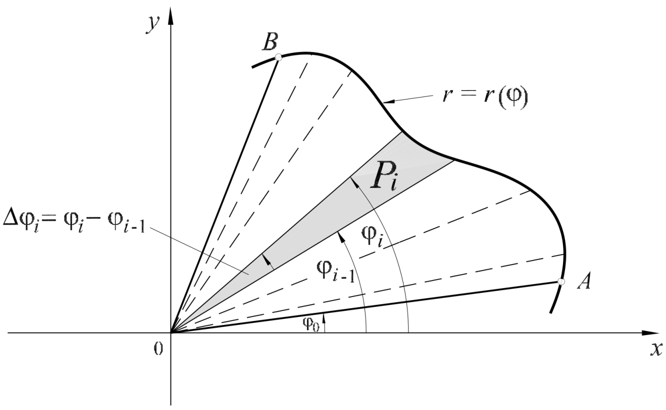


Slika 13.22

"iscrpljujemo" kružnim isječcima. Podijelimo interval $[\alpha, \beta]$ na n dijelova (vidi Sliku 13.23.), tako da je:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

Aproksimirajmo površinu svakog od dobivenih dijelova površinom P_i kružnog isječka polumjera $r(\varphi_i)$ i kuta $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$.



Slika 13.23

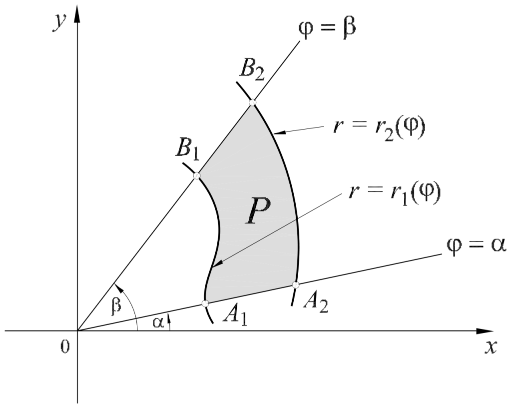
Tada je površina lika P približno jednaka zbroju n površina odgovarajućih kružnih isječaka, tj.

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} P_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r^2(\varphi_i) \Delta\varphi_i.$$

Graničnim prijelazom $n \to \infty$ dobivamo:

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Općenitije, neka je lik omeđen krivuljama $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$, te polupravcima $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ (Slika 13.24.). Površina zadanog lika dana je izrazom:



Slika 13.24

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right)d\varphi. \tag{13.2}$$

Sada ćemo navesti veći broj riješenih primjera izračunavanja površine likova omeđenih likovima zadanima jednadžbama u polarnim koordinatama.

■ **Primjer 13.16** Izračunajmo površinu P lika omeđenog krivuljom $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$.
Rješenje. Radi se o kardioidi prikazanoj na Slici 13.19. Koristeći formulu $P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$, sada imamo

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right)d\varphi \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos(2\varphi))\right)d\varphi \\
&= \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{2}.
\end{aligned}$$

■

■ **Primjer 13.17** Izračunajmo površinu P lika omeđenog krivuljom $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.
Rješenje. Ovu nam krivulju nije jednostavno niti skicirati. Zato ćemo izvršiti prijelaz na polarne koordinate:

$$r^4 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

tj.

$$r^2 = \cos(2\varphi).$$

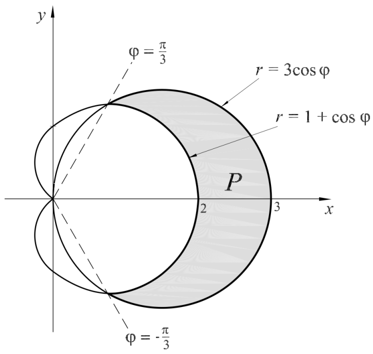
Radi se o Bernoullijevoj lemniskati prikazanoj na Slici 13.21.

Označimo sada s P_1 dio lika sa slike koji se nalazi u prvom kvadrantu. Zbog simetrije lika s obzirom na obje koordinatne osi, ukupna tražena površina P iznosi $4P_1$. Koristeći formulu $P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$, sada imamo

$$P = 4P_1 = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\varphi)\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\varphi)\,d\varphi = \sin(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

■

■ **Primjer 13.18** Izračunajmo površinu P lika koji se nalazi unutar kružnice $r = 3\cos\varphi$ (uvjerite se sami da se zaista radi o kružnici!), a izvan krivulje $r = 1+\cos\varphi$ (kardioida).



Slika 13.25

Rješenje. Rješavanjem jednadžbe $3\cos\varphi = 1+\cos\varphi$, tj. $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, zaključujemo da se kružnica i kardioida sijeku u točkama za koje je $\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$ i $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ (Slika 13.25). Označimo s P' dio lika sa slike koji se nalazi u prvom kvadrantu. Zbog simetrije lika s obzirom na os x, ukupna tražena površina P iznosi $2P'$. Ploştinu P' računamo prema formuli 13.2:

$$P = 2P' = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left((3\cos\varphi)^2-(1+\cos\varphi)^2\right)d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(8\cos^2\varphi-1-2\cos\varphi)\,d\varphi$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(4+4\cos(2\varphi)-1-2\cos\varphi)\,d\varphi = (3\varphi-2\sin\varphi+2\sin(2\varphi))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi.$$

■

■ **Primjer 13.19** Izračunajmo površinu P lika koji se nalazi unutar kružnice $r = 3\cos\varphi$ i unutar kardioide $r = 1+\cos\varphi$.

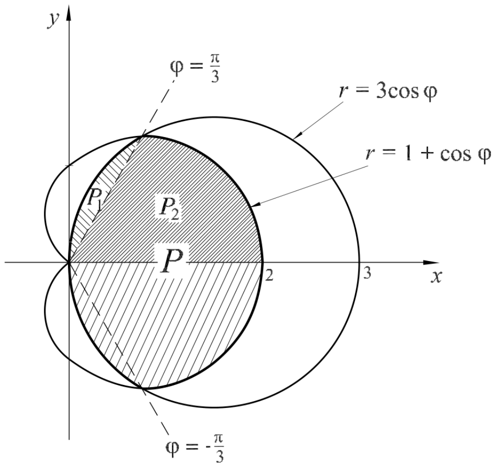
Rješenje. Označimo li s P' dio lika sa Slike 13.26 koji se nalazi u prvom kvadrantu, ukupna tražena površina P iznosi $2P'$. Pritom površinu P' računamo kao zbroj površina P_1 i P_2 sa slike. Dakle, imamo:

$$P = 2P' = 2(P_1+P_2) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\varphi)^2\,d\varphi\right)$$

Lakim računom dobivamo $P = \frac{5\pi}{4}$. ■

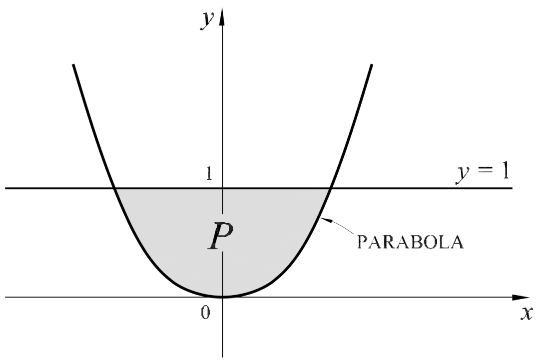
13.1.4 Zadatci za vježbu

1. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = x^4-2$ i pravcem $y = 2$. Nacrtajte sliku!
2. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = x^2$ i pravcima $y = 4$ i $y = 0$. Nacrtajte sliku!
3. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{4-x}$ i $y = \sqrt{4-4x}$ i osi x. Nacrtajte sliku!



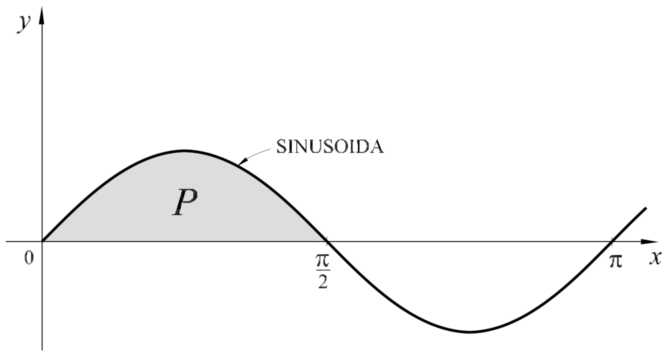
Slika 13.26

4. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = \frac{x^2}{2}$ i $y = \frac{1}{x^2+1}$. Nacrtajte sliku!
5. Nađite jednadžbu parabole s tjemenom u ishodištu (vidi Sliku 13.27) tako da površina lika P iznosi 1.



Slika 13.27

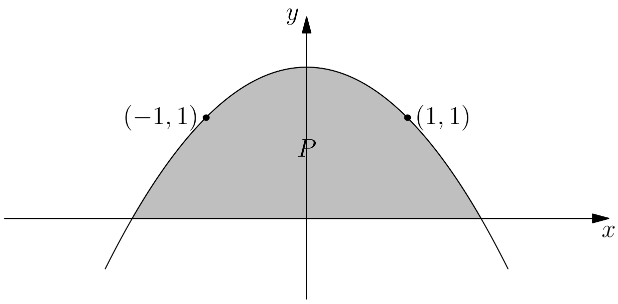
6. Nađite jednadžbu sinusoide (Slika 13.28) tako da površina lika P iznosi 3.



Slika 13.28

7. Izračunajte površinu P lika omeđenog parabolom $y^2 = 2x$ i normalom na parabolu koja s osi x zatvara kut od 45^o. Nacrtajte sliku!
8. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{6-2x}$ i osi x. Nacrtajte sliku!

9. Izračunajte površinu P lika omeđenog krivuljom $y = x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}$ i osi x.
10. Izračunajte površinu P lika omeđenog dijelom krivulje $y = x \cdot \sqrt{3-x^4}$ za $x \geq 0$ i osi x.
11. Izračunajte površinu lika određenog nejednadžbama $x^2+y^2 \leq 2y$ i $y \leq 2-2x^2$. Nacrtajte sliku!
12. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = \frac{4x^2}{x^2+3}$ i pravcem $y = 1$. Nacrtajte sliku!
13. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = \frac{3\sqrt{x}}{x+2}$ i pravcem $y = 1$. Nacrtajte sliku!
14. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = \ln x$, $y = \ln(6-2x)$ i osi x. Nacrtajte sliku!
15. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = \operatorname{sh} x$, $y = \frac{1}{2}e^{x-1}$ i osi y.
16. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolama $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ i pravcem $y = x$.
17. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = \ln(x^2 + \frac{3}{4}e^2)$ i pravcem $y = 2$.
18. Izračunajte površinu lika određenog nejednadžbama $y \leq \frac{1}{x^4+4x^2+3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
19. Nađite jednadžbu parabole (Slika 13.29.) tako da površina lika bude minimalna i izračunajte tu površinu.



Slika 13.29

20. Izračunajmo površinu P lika omeđenog astroidom $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Nacrtajte sliku!
21. Izračunajte površinu P lika omeđenog krivuljom $r = 1 + \sin\varphi$.
22. Izračunajte površinu P lika omeđenog krivuljom $r = \sqrt{2\sin(2\varphi)}$ i $r = 1$.
23. Izračunajte površinu lika koji se nalazi unutar kružnice $r = 5\cos\varphi$, a izvan krivulje $r = 2+\cos\varphi$.
24. Izračunajte površinu lika određenog nejednadžbama $r \leq |\sin(2\varphi)|$ i $r^2 \leq \frac{3}{2}\cos(2\varphi)$.

Rješenja zadataka za vježbu

1. $\frac{32\sqrt{2}}{5}$, **2.** $\frac{28}{3}$, **3.** 4 **4.** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$, **5.** $y = \frac{16}{9}x^2$, **6.** $y = 3\sin(2x)$, **7.** $\frac{16}{3}$, **8.** $4-2\sqrt{2}$, **9.** π, **10.** $\frac{3\pi}{8}$, **11.** $\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$, **12.** $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3} - 6$, **13.** $3 - 6\sqrt{2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, **14.** $\frac{3}{2}\left(\ln 4 - 1\right)$, **15.** $\frac{2e-1}{2e} - \sqrt{\frac{e-1}{e}}$, **16.** $\frac{1}{2}$, **17.** $2e\left(1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right)$, **18.** $\frac{(\sqrt{3}-1)\cdot\pi}{4\sqrt{3}}$ **19.** $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$; $P_{min} = 2\sqrt{3}$. **20.** $\frac{3a^2\pi}{8}$, **21.** $\frac{3\pi}{2}$, **22.** $\frac{\pi}{6} + 1$, **23.** $\frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}$, **24.** $\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{8}$.

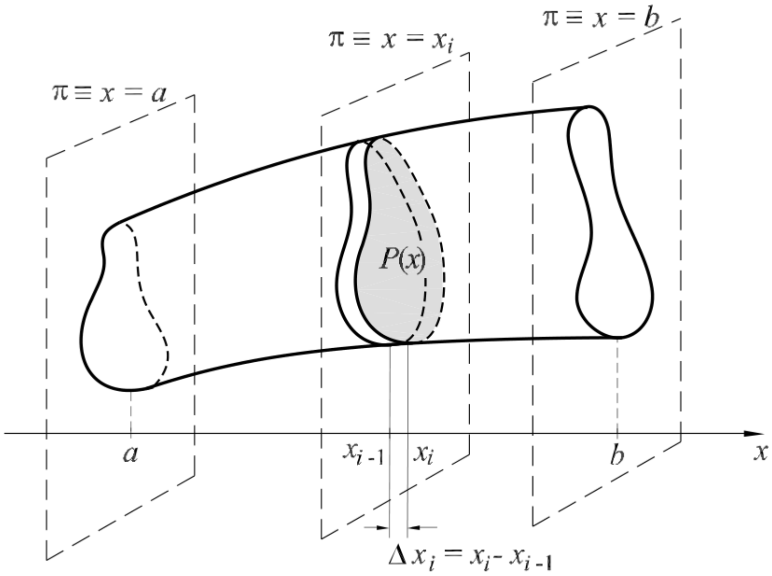
13.2 Izračunavanje volumena (obujma) tijela

Pokazat ćemo sada kako pomoću određenog integrala možemo računati volumene nekih tijela, ponajprije rotacijskih. U općem slučaju, volumen tijela računat ćemo pomoću dvostrukih ili trostrukih integrala o čemu će biti riječi u kolegiju Matematička analiza 2.

Neka je poznata površina lika $P = P(x)$ koja nastaje u presjeku promatranog tijela ravninom okomitom na os x u točki s apscisom x (Slika 13.30.). Želimo izračunati volumen promatranog tijela ako varijabla x poprima vrijednosti iz intervala $[a, b]$.

Podijelimo interval $[a,b]$ na n dijelova tako da je:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Slika 13.30

Aproksimiramo li volumen svakog tako dobivenog dijela volumenom V_i valjka površine baze $P(x_i)$ i visine $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, traženi volumen tijela je približno jednak zbroju n volumena odgovarajućih valjaka, tj.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\Delta x_i.$$

Graničnim prijelazom $n \to \infty$ dobivamo:

$$V = \int_a^b P(x)\,dx. \tag{13.3}$$

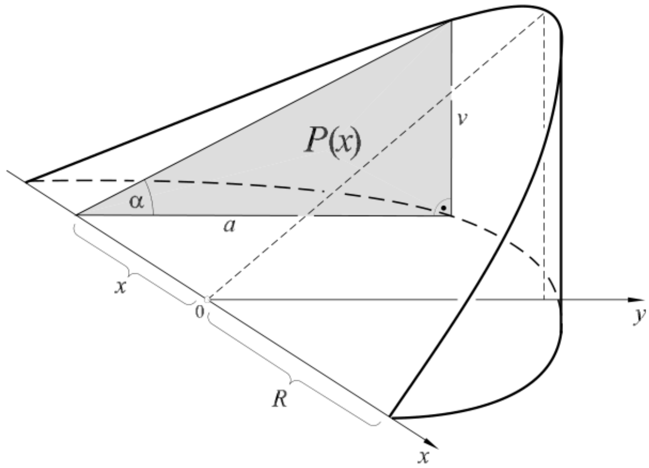
Primjenu formule (13.3) ilustrirajmo sljedećim primjerom.

■ **Primjer 13.20** Izračunajmo volumen dijela valjka polumjera baze R presječenog ravninom koja prolazi kroz promjer baze i nagnuta je prema bazi za kut α (vidi Sliku 13.31.):
Rješenje. Postavimo os x tako da prolazi promjerom baze, a ishodište postavimo na polovici promjera. Uz tako odabranu koordinatizaciju, poprečni presjek promatranog tijela ravninom okomitom na os x je pravokutni trokut čije katete imaju duljine $a = \sqrt{R^2 - x^2}$ i $v = \sqrt{R^2 - x^2}\ \mathrm{tg}\alpha$ (vidi Sliku 13.31.): Prema formuli (13.3) sada imamo:

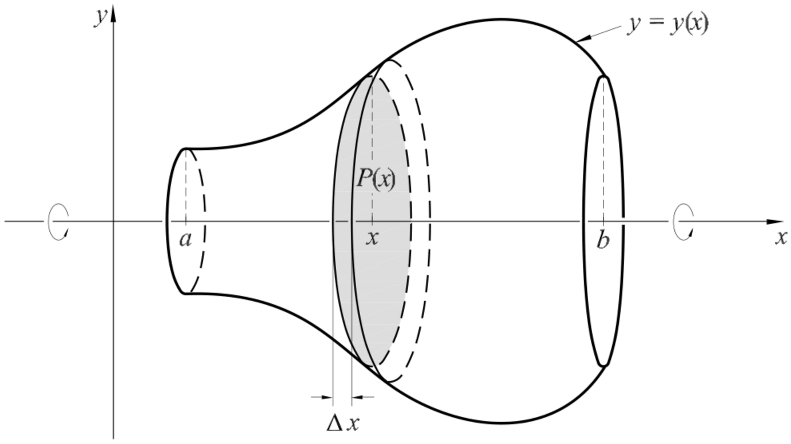
$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} P(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\ \mathrm{tg}\alpha}{2}\,dx \\ &= 2\int_0^R \frac{R^2-x^2}{2}\ \mathrm{tg}\alpha\,dx = \mathrm{tg}\alpha\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{2R^3}{3}\mathrm{tg}\alpha. \end{aligned}$$

■

Promotrimo posebice slučaj *rotacijskog tijela*. Postavimo os x kao os vrtnje, tj. promotrimo tijelo koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = y(x)$, te pravcima $x = a$, $x = b$ i osi x oko



Slika 13.31



Slika 13.32

osi x (vidi Sliku 13.32). U ovom je slučaju poprečni presjek ravninom okomitom na os x krug polumjera $y(x)$ pa je njegova površina $P(x)$ jednaka $y^2(x)\pi$. Tako iz formule (13.3) slijedi formula za volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = y(x)$ te pravcima $x = a$, $x = b$ i osi x oko osi x:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx. \tag{13.4}$$

Promotrimo i slučaj vrtnje istog lika oko osi y (Slika 13.33.):

Podijelimo interval $[a,b]$ na n dijelova tako da je

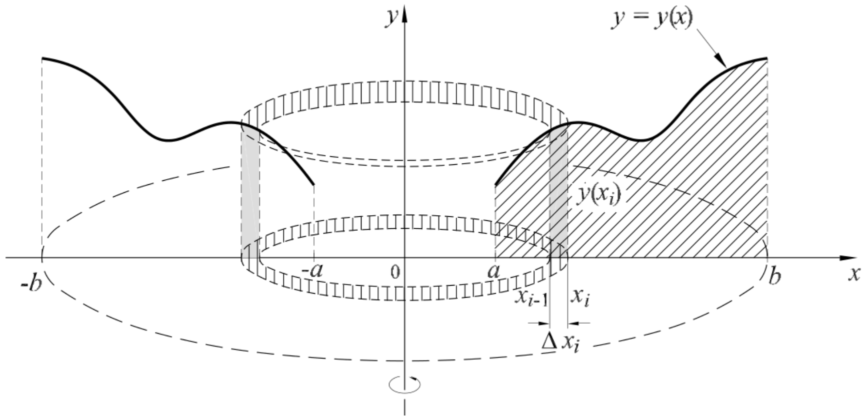
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

i aproksimirajmo volumen koji nastaje rotacijom svakog tako dobivenog dijela volumenom V_i koji je razlika volumena dvaju valjaka s polumjerima x_i, dotično x_{i-1} i visinama $y(x_i)$. Dakle,

$$V_i = x_i^2 \pi y(x_i) - x_{i-1}^2 \pi y(x_i) = (x_i^2 - x_{i-1}^2)\pi y(x_i).$$

Traženi volumen tijela je približno jednak zbroju volumena n opisanih tankih "prstenastih tijela", tj.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) y(x_i),$$



Slika 13.33

odnosno

$$V \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2} y(x_i)\Delta x_i,$$

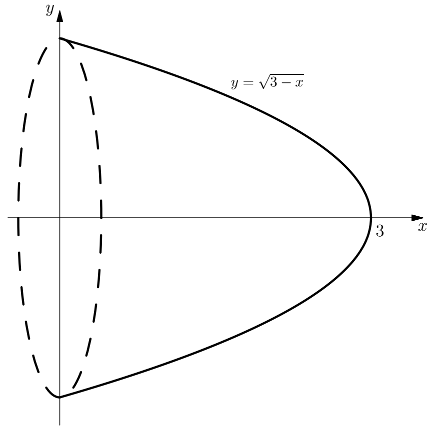
uz oznaku $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Kako je točka $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ polovište intervala $[x_{i-1}, x_i]$, graničnim prijelazom kad $n \to \infty$ dobivamo:

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)\, dx. \tag{13.5}$$

Time smo izveli dvije formule ((13.4),(13.5)) za volumen rotacijskog tijela. Valja naglasiti da se radi o dvije bitno različite formule, jer su položaji likova koji rotiraju u odnosu na os rotacije različiti. Riješit ćemo sada i nekoliko primjera.

■ **Primjer 13.21** Izračunajmo volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y^2 = 3 - x$ i osi y oko osi x. (Slika 13.34)



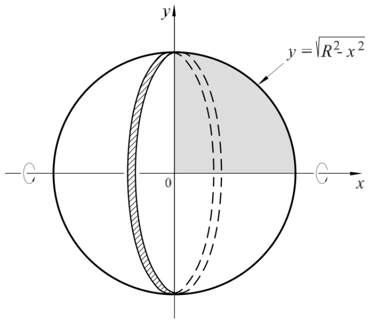
Slika 13.34

Rješenje. Promotrimo dio lika u prvom kvadrantu i zavrtimo ga oko osi x. Pri tome ćemo dobiti isto rotacijsko tijelo kao u sluccaju da smo cijeli lik rotirali oko osi x. Prema formuli (13.4) imamo:

$$V = \pi \int_0^3 y^2(x)\, dx = \pi \int_0^3 (\sqrt{3-x})^2\, dx = \pi \int_0^3 (3-x)\, dx = \pi\Big(3x - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_0^3 = \frac{9\pi}{2}.$$

■

■ **Primjer 13.22** Izvedimo formulu za volumen kugle polumjera R.
Rješenje. Kuglu polumjera R dobivamo vrtnjom polukruga $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ oko osi x (Slika 13.35).



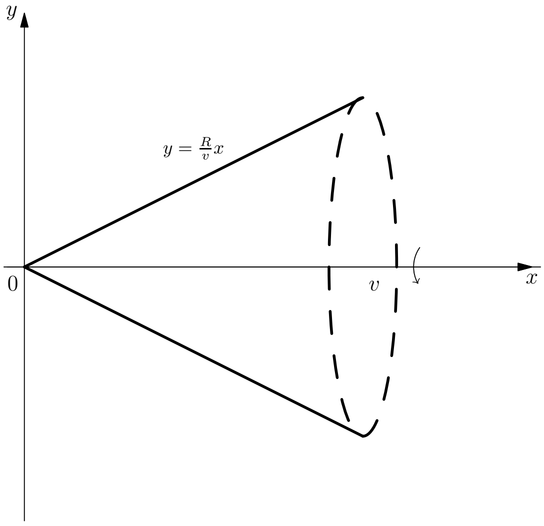
Slika 13.35

Dakle, imamo

$$V = \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 \pi \, dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx$$
$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^R = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

■

■ **Primjer 13.23** Izvedimo formulu za volumen stošca polumjera baze R i visine v.
Rješenje. Stožac se može dobiti vrtnjom lika omeđenog pravcima $y = \frac{R}{v}x$, $x = v$ i osi x oko osi x (Slika **??**).



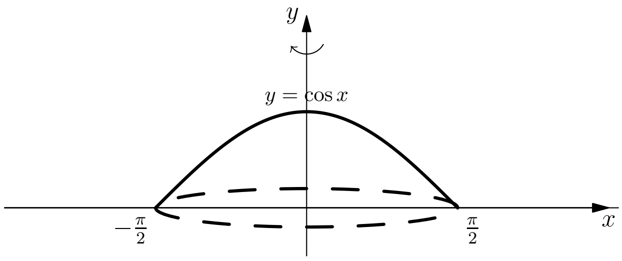
Slika 13.36

Prema formuli (13.4) imamo:

$$V = \pi \int_0^v y^2(x)\, dx = \pi \int_0^v \left(\frac{R}{v}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{v^2} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^v = \frac{R^2 \pi v}{3}.$$

■

■ **Primjer 13.24** Izračunajmo volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog dijelom krivulje $y = \cos x$ za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i osi x oko osi y (Slika 13.37).



Slika 13.37

Rješenje. Promotrimo dio lika u prvom kvadrantu i zavrtimo ga oko osi y. Tako ćemo dobiti isto rotacijsko tijelo kao u slučaju da smo cijeli lik rotirali oko osi y. Koristit ćemo formulu (13.5):

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy(x)\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$$

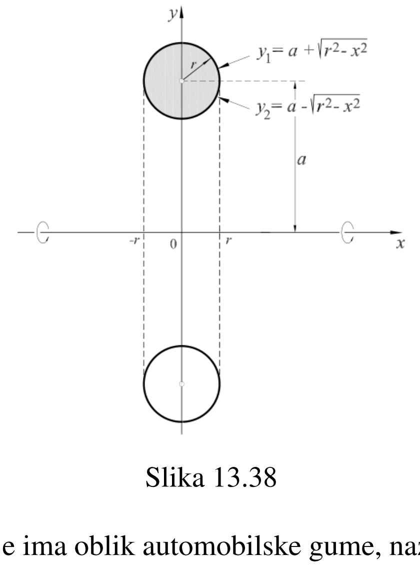
Integral rješavamo metodom parcijalne integracije:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u}\,d(\underbrace{\sin x}_{v}) =$$

$$= 2\pi\Big(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx\Big) = 2\pi\Big(\frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big) = \pi^2 - 2\pi.$$

■

■ **Primjer 13.25** Izračunajmo volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krugom $x^2 + (y - a)^2 = r^2$, $r < a$ oko osi x (Slika 13.38.).

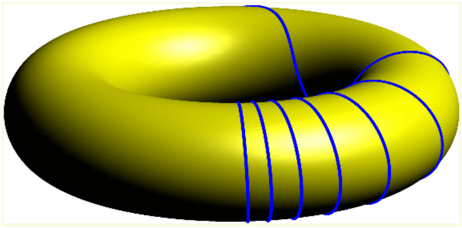


Slika 13.38

Tijelo dobiveno rotacijom, koje ima oblik automobilske gume, nazivamo **torus**. Volumen torusa računat ćemo prema formuli (13.4), i to kao razliku volumena tijela koje nastaje vrtnjom lika ispod gornje polukružnice i onog koje nastaje vrtnjom lika ispod doljnje polukružnice. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} y_2^2\,dx - \pi \int_{-r}^{r} y_1^2\,dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} \Big((a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\Big)\,dx \\ &= 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2ar^2\pi^2. \end{aligned}$$

■



Slika 13.39: *Izvor: http://asymptote.sourceforge.net/gallery/animations/*

Zadnji integral možemo geometrijski interpretirati kao površine polukruga polumjera r, dakle njegova vrijednost je $\frac{r^2\pi}{2}$.

Vježba 13.4 Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = \arccos x$ i koordinatnim osima oko osi y. Zadatak riješite na dva načina; primjenom formule (13.4) (tako da varijabla integracije bude y) i primjenom formule (13.5).

Vježba 13.5 Kako glasi formula za volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = y(x)$, te pravcima $x = a$, $x = b$, $a < b$ i osi x oko pravca $x = a$?

13.2.1 Zadatci za vježbu

1. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = 1 - x^2$ i osi x oko osi x. Nacrtajte sliku!
2. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = 1 - x^2$ i osi x oko osi y. Nacrtajte sliku!
3. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = x^4$ i $y = 1$ oko osi y. Nacrtajte sliku!
4. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog dijelom krivulje $y = \sin x$ za $x \in [0, \pi]$ i osi x oko osi x. Nacrtajte sliku!
5. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = \arccos x$ i koordinatnim osima oko osi y. Nacrtajte sliku!
6. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog dijelom krivulje $y = \cos^2 x$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i osi x oko osi x. Nacrtajte sliku!
7. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog dijelom krivulje $y = \cos x$ između točaka $A(\frac{-\pi}{3}, \frac{1}{2})$ i $B(\frac{-\pi}{3}, \frac{1}{2})$ i dužinom $\overline{AB}$ oko osi y . Nacrtajte sliku!
8. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = e^x$, $y = 1$ i $x = -1$ oko pravca $x = -1$. Nacrtajte sliku!

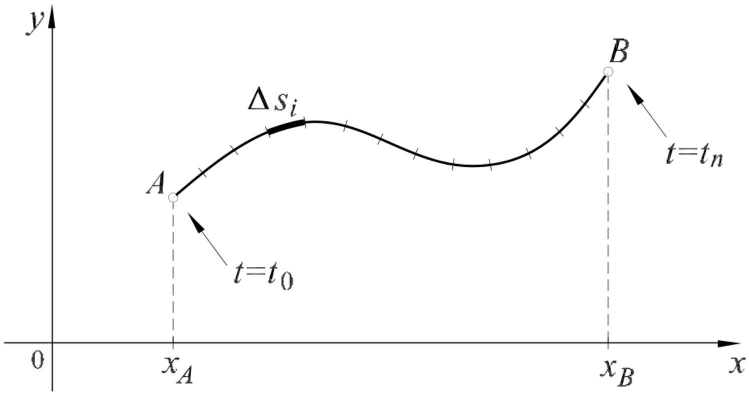
Rješenja zadataka za vježbu

1. $\frac{16\pi}{15}$, **2.** $\frac{\pi}{2}$, **3.** $\frac{2\pi}{3}$ **4.** $\frac{\pi^2}{2}$, **5.** $y = \frac{\pi^2}{4}$, **6.** $\frac{3\pi^2}{16}$, **7.** $\frac{6\pi^2\sqrt{3}-18\pi-\pi^3}{18}$, **8.** $\pi \cdot \left(1 - \frac{2}{e}\right)$.

13.3 Izračunavanje duljine luka ravninske krivulje

Neka je krivulja $\mathscr{C}$ zadana parametarskim jednadžbama: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$, pri čemu funkcije $x(t)$ i $y(t)$ imaju neprekinute derivacije na $[a,b]$.
Podijelimo interval $[a,b]$ na n dijelova tako da je:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$



Slika 13.40

Prema Lagrangeovom stavku srednje vrijednosti diferencijalnog računa slijedi da, za svaki $i = 1,...,n$, postoje ξ_i i η_i takvi da vrijedi

$$\Delta x_i = \dot{x}(\xi_i)\Delta t_i$$

$$\Delta y_i = \dot{y}(\eta_i)\Delta t_i$$

pri čemu je $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$, $\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1})$ i $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Za približnu duljinu luka s dobivamo

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2}\,\Delta t_i$$

Prijelazom na limes ($\Delta t \to 0$) dobivamo:

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt. \tag{13.6}$$

Pri tome koristimo oznaku $ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$ i veličinu ds nazivamo **diferencijal luka krivulje**.

Posebice, ako je krivulja zadana eksplicitnom jednadžbom $y = y(x)$, $x \in [x_A, x_B]$, ulogu parametra t preuzima varijabla x. Pri tom je x_A apscisa točke kojoj odgovara vrijednost parametra $t = a$, a x_B apscisa točke kojoj odgovara vrijednost parametra $t = b$. Sada vrijedi:

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx,$$

Duljinu luka krivulje sada računamo prema formuli:

$$s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx. \tag{13.7}$$

Ako je pak krivulja dana svojom jednadžbom u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_A, \varphi_B]$, tada ulogu parametra t preuzima varijabla φ, tj.:

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$$

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Sada računamo:

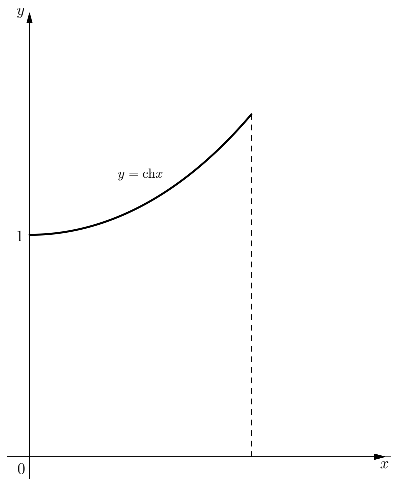
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\, d\varphi = \sqrt{((r(\varphi)\cos\varphi)')^2 + ((r(\varphi)\sin\varphi)')^2}\, d\varphi \\ &= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}\, d\varphi \\ &= \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$s = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi. \tag{13.8}$$

Sada ćemo riješiti nekoliko primjera.

■ **Primjer 13.26** Izračunajmo duljinu luka dijela lančanice $y = \operatorname{ch} x$ od $x = 0$ do $x = 1$, prikazane da Slici 13.41



Slika 13.41

Rješenje. Vrijedi $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \operatorname{ch} x\, dx$.

Sada je, prema (13.7),

$$s = \int_0^1 \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \frac{e^2 - 1}{2e}.$$

■

Jedan zadatak vezan uz duljinu luka lančanice ostavljamo čitatelju za samostalni rad

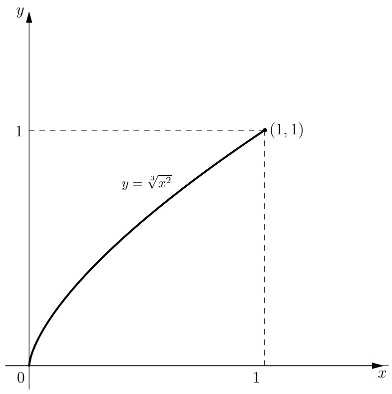
Vježba 13.6 Luk "Gateway Arch" u St. Louisu prikazan na Slici 13.42 je konstruiran prema formuli:

$$y = 211.49 - 20.96 \operatorname{ch}(0.03291765x)$$

za centralnu krivulju luka, gdje se x i y mjere u metrima i $|x| \leq 91.2$. Postavite intergral za duljinu luka te, koristeći neki program, izračunajte duljinu luka.

■ **Primjer 13.27** Izračunajmo duljinu luka krivulje $y^3 = x^2$ od $x = 0$ do $x = 1$, prikazanog na Slici 13.43.

Slika 13.42: *Izvor slike: Wikipedia*



Slika 13.43

Rješenje. Uzmemo li za parametar x imamo:

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + ((x^{\frac{2}{3}})')^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}}}\, dx,$$

što nije pogodno za integriranje. Ali, uzmemo li za parametar varijablu y, slijedi

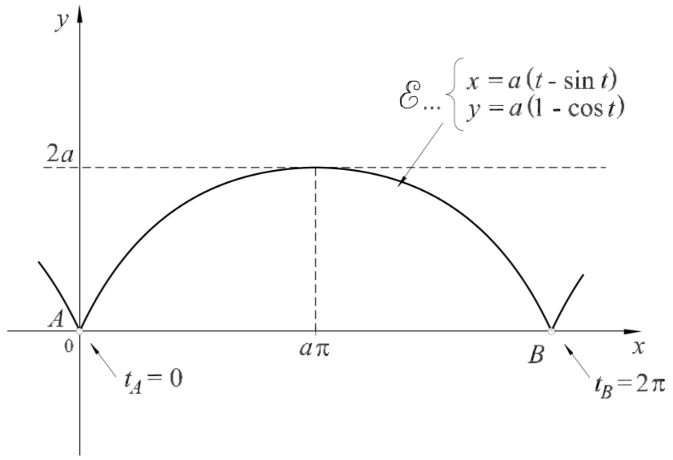
$$ds = \sqrt{1 + x'(y)^2}\, dy = \sqrt{1 + ((y^{\frac{3}{2}})')^2}\, dy = \sqrt{1 + \frac{9}{4} y}\, dy,$$

pa je onda

$$s = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4} y\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{4}{9} \frac{\left(1 + \frac{9}{4} y\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right).$$

■

■ **Primjer 13.28** Izračunajmo duljinu luka krivulje $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (prvi svod cikloide, Slika 13.44.).



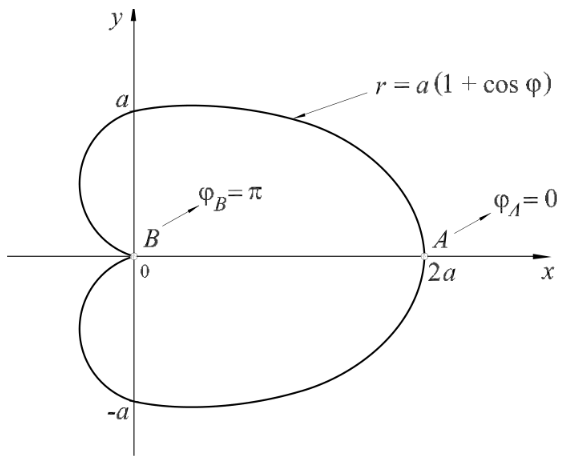
Slika 13.44

Prema (8) imamo:

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos t}\, dt \\
&= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
&= 2a\left(-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} = 4a(1+1) = 8a.
\end{aligned}
$$

■

■ **Primjer 13.29** Izračunajmo duljinu luka kardioide $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ (Slika 13.45).



Slika 13.45

Sada imamo:

$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \\
&= a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi = 2a\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi.
\end{aligned}
$$

Zbog simetrije lika s obzirom na polarnu os, slijedi da je duljina luka kardioide, jednaka

$$s = 2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 2\cdot 2a\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 8a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

■

13.3.1 Zadatci za vježbu

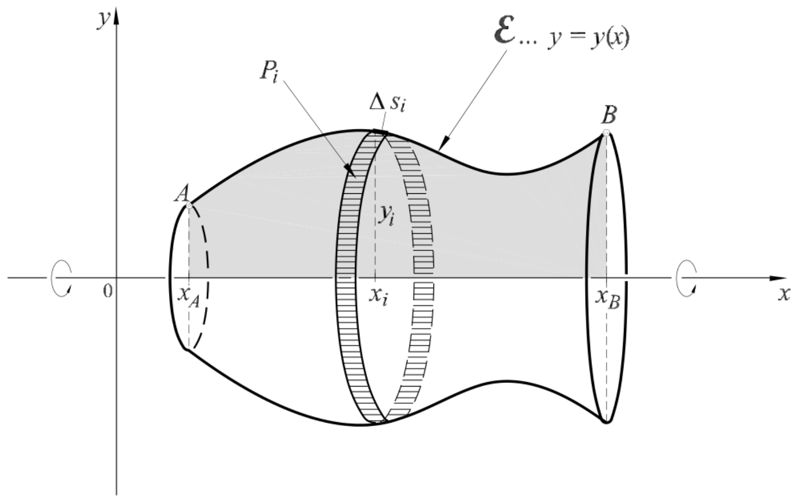
1. Izračunajte duljinu luka parabole $y = \frac{x^2}{2}$ od točke $(0,0)$ do točke $(2,2)$. Nacrtajte sliku!
2. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = 4\sqrt[4]{x}^5$ od $x = 0$ do $x = 1$.
3. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln x$ od točke $x = \sqrt{3}$ do točke $x = \sqrt{8}$.
4. Izračunajte duljinu luka astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Nacrtajte sliku!
5. Izračunajte duljinu luka krivulje $r = a\varphi$ za $\varphi \in [0, 2\pi]$. (prvi zavoj Arhimedove spirale). Nacrtajte sliku!
6. Izračunajte duljinu luka dijela krivulje $r = e^{\varphi}$ za $\varphi \in [0, 2\pi]$. Nacrtajte sliku!

Rješenja zadataka za vježbu

1. $\frac{1}{2}(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}))$, **2.** $\frac{4}{5^5}\cdot 26^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3\cdot 5^4}\cdot 26^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3\cdot 5^5}$, **3.** $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$,
4. $6a$ **5.** $\frac{a}{2}(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})$, **6.** $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

13.4 Izračunavanje oplošja rotacijske plohe

Neka ploha nastaje vrtnjom krivulje $\mathscr{C} \ldots y = y(x), x \in [x_A, x_B]$ oko osi x. Podijelimo krivulju na n dijelova i na svakom od njih aproksimirajmo oplošje plohe oplošjem P_i odgovarajućeg krnjeg stošca. Aproksimativno je $P_i \approx 2\pi y_i \cdot \Delta s_i$ (Slika 13.46).



Slika 13.46

Graničnim prijelazom $n \to \infty$ dobivamo formulu za oplošje rotacijske plohe:

$$S = 2\pi\int_{x=x_A}^{x=x_B} y ds,$$

pri čemu je ds diferencijal luka krivulje $\mathscr{C}$.

Dakle, ako je krivulja $\mathscr{C}$ dana parametarskim jednadžbama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_A, t_B]$, tada imamo:

$$S = 2\pi \int_{t_A}^{t_B} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt. \tag{13.9}$$

Ako je krivulja dana eksplicitnom jednadžbom $y = y(x), x \in [x_A, x_B]$, tada je

$$S = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx. \tag{13.10}$$

Riješit ćemo i nekoliko primjera.

■ **Primjer 13.30** Izvedimo formulu za površinu plašta stošca polumjera baze R i visine v prikazanog na Slici 13.36.

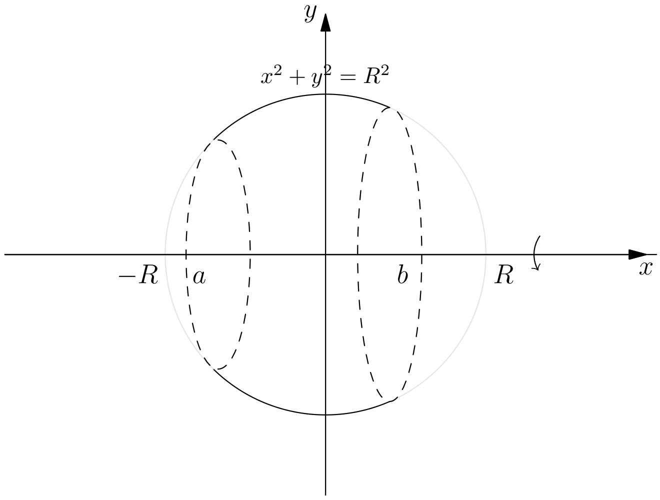
Rješenje. Stožac dobivamo vrtnjom pravca $y = \frac{R}{v}x$, $x \in [0, v]$ oko osi x (Slika13.36).

Prema formuli (13.10) dobivamo

$$S = 2\pi \int_0^v y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = 2\pi \int_0^v \frac{R}{v}x\sqrt{1 + \frac{R^2}{v^2}}\, dx$$
$$= 2\pi \frac{R}{v}\sqrt{1 + \frac{R^2}{v^2}} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^v = \pi R v\sqrt{1 + \frac{R^2}{v^2}} = R\pi\sqrt{v^2 + R^2}.$$

■

■ **Primjer 13.31** Izračunajmo površinu kuglinog sloja, tj. izračunajmo oplošje plohe koje nastaje vrtnjom dijela kružnice $x^2 + y^2 = R^2$ za koju je $x \in [a, b]$, $-R \le a \le b \le R$ oko osi x (Slika 13.47)



Slika 13.47

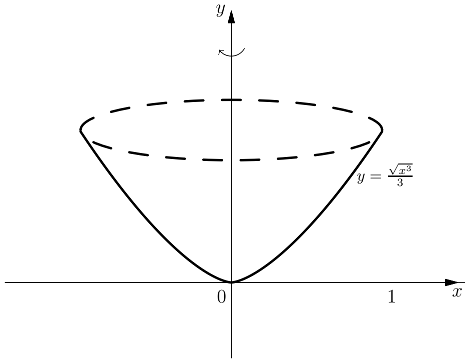
Rješenje. Vrijedi

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx.$$

Ploštinu kuglinog sloja sada računamo po formuli (13.10):

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R(b - a).$$

Posebice, za $b - a = 2R$ dobivamo oplošje sfere $S = 4\pi R^2$. ■



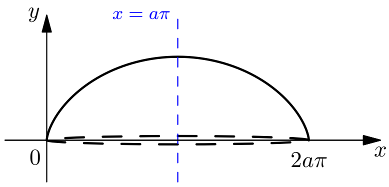
Slika 13.48

■ **Primjer 13.32** Izračunajmo površinu plohe koja nastaje vrtnjom dijela krivulje $y = \frac{\sqrt{x^3}}{3}$ od $x = 0$ do $x = 1$ oko osi y (vidi Sliku 13.48).
Rješenje. Primijenimo opet formulu (13.10) (uz zamijenjene uloge x i y):

$$S = 2\pi \int_{x=0}^{x=1} x ds = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + \frac{x}{4}}\,dx.$$

Integriranjem lagano dobijemo $S = 2\pi\left(\frac{64}{15} - \frac{5\sqrt{5}}{3}\right)$. ■

■ **Primjer 13.33** Izračunajmo površinu plohe koja nastaje vrtnjom krivulje $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (prvi svod cikloide), oko osi simetrije krivulje (vidi Sliku 13.49).



Slika 13.49

Rješenje. Os simetrije krivulje je očevidno pravac $x = a\pi$. Os rotacije nije ni jedna od koordinatnih osi, već je ona translatirana za πa u odnosu na os x.

Stoga površinu tražene plohe računamo po formuli (9):

$$S = 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} (x(t) - a\pi)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$$

ili

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} (a\pi - x(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$$

Odatle imamo

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} (a\pi - at + a\sin t)2a\sin\frac{t}{2}\,dt,$$

te, nakon integriranja, konačno $S = (8\pi^2 - \frac{32}{3}\pi)a^2$. ■

Vježba 13.7 Možete li naći funkciju f takvu da je da rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = f(x)$ i $x = a$ za neki pozitivni a i osi x oko osi x dobijete rotacijsko tijelo konačnog volumena i beskonačne površine?

13.4.1 Zadatci za vježbu

1. Izračunajte površinu plohe koja nastaje vrtnjom dijela krivulje $y = \frac{x^3}{3}$ od $x = 0$ do $x = 1$ oko osi x. Nacrtajte sliku!
2. Izračunajte površinu plohe koja nastaje vrtnjom dijela krivulje $y = \frac{x^3}{3}$ od $x = 0$ do $x = 1$ oko osi y. Nacrtajte sliku!
3. Izračunajte površinu plohe koja nastaje vrtnjom dijela krivulje $y = \operatorname{ch} x$ od $x = 0$ do $x = 1$ oko osi y. Nacrtajte sliku!
4. Izračunati površinu plohe koja nastaje vrtnjom astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ oko osi x. Nacrtajte sliku!

Rješenja zadataka za vježbu

1. $\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$, **2.** $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$, **3.** $2\pi(1-e^{-1})$ **4.** $\frac{12\pi a^2}{5}$.

13.5 Primjene u fizici

Brojne primjene u fizici predstavljale su motivaciju za uvođenje pojma određenog integrala.

Navedimo jednu takvu primjenu.

Ako se tijelo giba duž $x-$osi od točke $x = a$ do $x = b$ i neka u točki x na tijelo djeluje sila $F(x)$, zanima nas izvršeni rad.

Ako je sila F konstantna, onda je rad jednak umnošku sile F i prijeđenog puta s, tj. vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Ako se tijelo giba duž $x-$osi od točke $x = a$ do $x = b$ i neka u točki x na tijelo djeluje sila $F(x)$. U slučaju kad sila F nije konstantna, postupamo na sljedeći način: podijelimo interval $[a,b]$ na n dijelova tako da je:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Neka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Tada rad W_i koji se izvrši prilikom pomicanja tijela od točke $x = x_{i-1}$ do $x = x_i$ aproksimiramo s

$$W_i \approx F(x_i)\Delta x_i,$$

a cjelokupni rad koji se izvrši prilikom pomicanja tijela od točke $x = a$ do $x = b$ aproksimiramo s

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x_i.$$

Graničnim prijelazom $n \to \infty$ dobivamo

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

čime je dan rad W.

Izračunavanje rada sile tek je jedan od brojnih primjera primjene integrala u fizici. Na tom smo primjeru objasnili kako se radi o o posve istovjetnom konceptu kao u slučaju izračunavanja površine lika, duljine luka krivulje ili izračunavanja volumena rotacijskih tijela i oplošja rotacijskih ploha.

Geometrijski, rad W sile $F = F(x)$, $F(x) \geq 0$ od točke $x = a$ do $x = b$, $a < b$ jest jednak površini lika omeđenog krivuljom $y = F(x)$, pravcima $x = a$, $x = b$ i osi x.

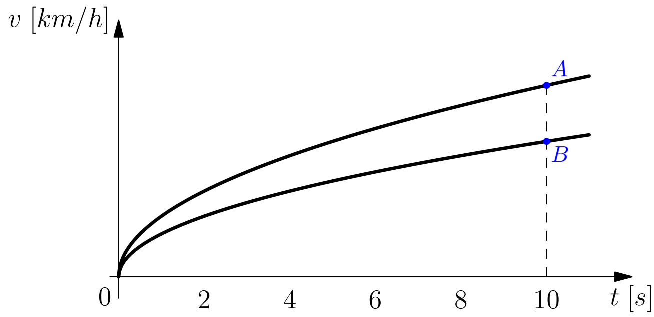
Primjerice, na posve isti način računamo pređeni put s nekog tijela koje se giba brzinom $v = v(t)$ od trenutka $t = t_1$ do $t = t_2$ kao

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt,$$

a geometrijski put jest površina ispod grafa funkcije brzine, iznad osi t i između pravaca $t = t_1$ i $t = t_2$.

Vježba 13.8 Kada je točkasto tijelo smješteno na udaljenosti x metara od ishodišta, na njega djeluje sila $F(x) = e^{-x}\,N$. Koliki je rad te sile potreban da bi se tijelo pomaknulo od točke $x = 0$ m do $x = 1$m? (odgovor: $\approx 0.632J$)

Vježba 13.9 Na $v - t$ grafu su prikazane brzine automobila A i B koji kreću istog trenutka i voze se istom cestom. Što predstavlja površina među krivuljama na $v - t$ grafu prikazanom na Slici 13.50?



Slika 13.50

Vježba 13.10 Na $v - t$ grafu na Slici 13.51 su prikazane brzine automobila A i B koji kreću istog trenutka i voze se istom cestom.
a) Koje je značenje površine obojane plavo?
b) Ako su površine obojane plavo i crveno jednake, u kojem se trenutku automobili sreću na cesti?

Vježba 13.11 Neka je brzina rasta populacije približno dana s $b(t) = 2200e^{0.024t}$ ljudi po godini, a stopa umiranja populacije približno dana s $d(t) = 1460e^{0.018t}$ ljudi po godini. Odredite površinu između navedenih krivulja za $t \in [0, 10]$. Što predstavlja ta površina (zaokružena na cijeli broj)?

13.6 Rješavanje diferencijalnih jednadžbi metodom separacije varijabli

Najjednostavniji tip diferencijalne jednadžbe prvog reda je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama oblika:

$$f(y)dy = g(x)dx.$$

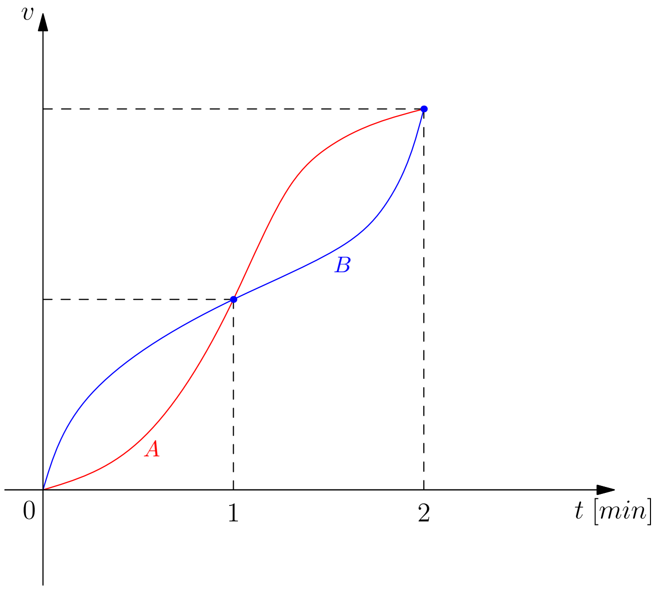
Ona se rješava tako da integriramo lijevu i desnu stranu te dobijemo

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

odnosno

$$F(y) = G(x) + C$$

gdje su F i G pripadne primitivne funkcije. Time smo dobili opće rješenje koje je zadano u obliku familije rješenja. Ukoliko nam je zadan i početni uvjet možemo izračunati konstantu C. Sada ćemo pogledati jedan primjer.



Slika 13.51

■ **Primjer 13.34** Zadana je diferencijalna jednadžba

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2+1}.$$

Odredite ono rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 3$.

Rješenje. Separiramo varijable tako da sve s y ide na lijevu stranu, a sve s y na desnu stranu jednakosti. Dobivamo

$$(y^2+1)dy = xdx.$$

Integriramo

$$\int (y^2+1)dy = \int xdx$$

te dobivamo

$$\frac{1}{3}y^3 + y = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Uvrstimo $x = 0$ i $y = 3$ i dobijemo da je $9+3 = 0+C$ odnosno $C = 12$. Dakle, tražemo rješenje je

$$\frac{1}{3}y^3 + y = \frac{1}{2}x^2 + 12.$$

■

■ **Primjer 13.35** Zadan je strujni krug koji se sastoji od otpornika otpora 12Ω, zavojnice sa $L = 4H$ i baterije s konstantnim naponom od $60V$. Ako se strujni krug zatvori u trenutku $t = 0$, odredite jakost struje $I(t)$ koje je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$

Odredite graničnu vrijednost struje.

Rješenje. U jednadžbu ubacimo $L = 4$, $R = 12$ i $E(t) = 60$ te dobivamo

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60$$

odnosno

$$\frac{dI}{15-3I} = dt.$$

Integriramo te dobivamo

$$-\frac{1}{3}\ln(|15-3I|) = t + C.$$

Sređivanjem slijedi da je

$$I(t) = 5 - \frac{1}{3}Ae^{-3t}.$$

Uvrstimo $I = 0$ i $t = 0$ i dobijemo da je $A = 15$. Dakle, tražemo rješenje je

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}.$$

Sada je

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 5.$$

■

Ovakvi tipovi problema rješavat će se u kolegijima Fizika 1 i Matematička analiza 2.

13.7 Pitanja za ponavljanje gradiva

1. Koristeći geometrijsku interpretaciju integrala, izračunajte

a) $\int_0^1 (\sqrt{2-x^2} - x)\,dx$,

b) $\int_0^4 \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

2. Prijelazom na polarne koordinate izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $(x^2+y^2)^2 = 8xy$.

3. Izračunajte volumen tijela koje nastaje vrtnjom elipse s poluosima duljina a i b, $a > b$ oko:

a) dulje osi elipse,

b) kraće osi elipse.

4. Kako glasi formula za volumen tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog krivuljom $y = y(x)$, pravcima $x = x_1$, $x = x_2$, i osi x oko pravca $x = a$, ako je

a) $a < x_1 < x_2$?

b) $x_1 < x_2 < a$?

5. Telefonska žica koja visi po krivulji $y = c + a\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ između dvaju stupova udaljenih $10m$ ima duljinu $10.2m$. Ako najniža točka žice mora biti $4m$ iznad zemlje, na kojoj visini telefonska žica treba biti zakačena za stup?

6. Vrtnjom neke krivulje oko pravca dobivamo rotacijsku plohu čije je oplošje $2\pi\int_0^1 (1-x)\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx$. Koja je to krivulja i koji pravac je os rotacije? Izračunajte to oplošje!

13.8 Literatura

[1] A. Aglić Aljinović, I. Brnetić, V.Ćepulić, N. Elezović, Lj. Marangunić, M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović. Matematika 1. Element, Zagreb, 2013.

[2] B.P.Demidovič: Zbirka riješenih zadataka za tehničke fakultete, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 1998.

[3] P.Javor: Matematička analiza 1, Element, Zagreb 2003.