3. Fourierova transformacija

Sadržaj poglavlja

3.1. Fourierov integral

Svaku 'dovoljno dobru' periodičnu funkciju možemo razviti u red po trigonometrijskim funkcijama, kojemu frekvencije čine niz, diskretan skup koji se sastoji od osnovne frekfencije ω_0 i svih njezinih cjelobrojnih višekratnika. Kažemo da periodična funkcija ima diskretan spektar.

Ako f nije periodična funkcija, mi je možemo na svakom konačnom intervalu razviti u Fourierov red, međutim, van tog intervala Fourierov red se periodički ponavlja i neće predstavljati danu funkciju. Pri tom će se, povećanjem intervala na kojem funkciju razvijamo u Fourierov red, smanjivati osnovna frekvencija ω_0, pošto vrijedi $\omega_0 = 2\pi/T$. Želimo li neperiodičnu funkciju $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ prikazati na čitavom $\mathbf{R}$ kao sumu harmoničkih titraja, morat ćemo to učiniti pomoću kontinuirano mnogo harmonika kojima se frekvencije neprekidno mijenjaju od 0 do ∞.

Izvedimo najprije formalni prijelaz sa konačnog na beskonačni interval.

Neka $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na svakom konačnom intervalu. Za svaki $L>0$, čim je x točka neprekidnosti, vrijedi

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),\quad -L<x<L,$$

a koeficijenti se računaju formulama

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.\\ a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{L}\,\mathrm{d}\xi.\\ b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\qquad(1)$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{L}\,\mathrm{d}\xi\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}\,\mathrm{d}\xi\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\\ &=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{L}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Pustimo da $L\to\infty$. Ako je ispunjeno $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi<\infty$, prvi član će težiti ka nuli. Stavimo nadalje

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{L},\qquad \Delta\lambda_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n=\frac{\pi}{L}.$$

Tada ćemo imati

$$\begin{aligned} f(x)&=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-L}^{L}f(\xi)\cos\lambda_n(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

Ova se formula naziva **Fourierova integralna formula**, a integral s desne strane **Fourierov integral**.

Teorem 1. Fourierov integral

Ako je $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, tada postoji njezin Fourierov integral i vrijedi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi=\begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x,\\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & \text{ako je } x \text{ točka prekida za } f.\end{cases}\qquad(2)$$

3.1.1. Sinusni i kosinusni spektar

Pretpostavimo da funkcija f zadovoljava uvjete ovog teorema. Označimo

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x,\\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{ako je } f \text{ prekinuta u } x.\end{cases}$$

Tad za svaki x vrijedi, prema (2):

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\big[\cos\lambda x\cos\lambda\xi+\sin\lambda x\sin\lambda\xi\big]\,\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\bigg[\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\Big)\cos\lambda x\\ &\qquad+\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\Big)\sin\lambda x\bigg]d\lambda,\end{aligned}$$

tj,

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\big[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\big]\,d\lambda.\qquad(3)$$

Fourierov integral i spektar

Integral

$$\tilde{f}(x):=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\Big)d\lambda\qquad(4)$$

naziva se **Fourierov integral** funkcije f. Funkcije $\lambda\mapsto A(\lambda)$, $\lambda\mapsto B(\lambda)$ nazivaju se **kosinusni**, odnosno **sinusni spektar** od f i računaju se formulama

$$A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x,\qquad(5)$$

$$B(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x,\qquad(6)$$

pri čemu smo varijablu integracije ξ preimenovali u x.

Kažemo da smo funkciju f rastavili na harmonična titranja čije su frekvencije svi pozitivni brojevi $0<\lambda<\infty$.

Ako funkcija f zadovoljava uvjet

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\qquad \text{za svaki } x,$$

tj, ako u točkama prekida ima vrijednost jednaku aritmetičkoj sredini limesa s desne i s lijeve strane, tada (4) vrijedi za svaki x — funkcija se podudara sa svojim Fourierovim integralom.

Kosinusni i sinusni spektar određuju **amplitudni spektar** $\mathrm{am}(\lambda)$ funkcije f,

$$\mathrm{am}(\lambda):=\sqrt{A(\lambda)^2+B(\lambda)^2}.\qquad(7)$$

Parna funkcija nema sinusnog spektra, tj. $B(\lambda)=0$, neparna funkcija nema kosinusnog spektra, tj. $A(\lambda)=0$:

f parna:

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda,\\ A(\lambda)&=2\int_0^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi,\\ \mathrm{am}(\lambda)&=|A(\lambda)|.\end{aligned}\qquad(8)$$

f neparna:

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda,\\ B(\lambda)&=2\int_0^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi,\\ \mathrm{am}(\lambda)&=|B(\lambda)|.\end{aligned}\qquad(9)$$

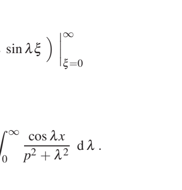
Primjer 1.

Prikaži pomoću Fourierovog integrala funkciju

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=0\ ,\ x=1,\\ 0, & x<0\ \text{ ili }\ x>1.\end{cases}$$

► Funkcija f je apsolutno integrabilna i po dijelovima glatka, s dvije točke prekida prvog reda: $x=0$ i $x=1$. Također, vrijedi $\tilde{f}=f$ i stoga će se f podudarati sa svojim Fourierovim integralom. Po formuli (2) imamo

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_0^1 1\cdot\cos\lambda(\xi-x)\,\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda(\xi-x)}{\lambda}\bigg|_0^1\,\mathrm{d}\lambda\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda(1-x)+\sin\lambda x}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\ ◄\end{aligned}$$



Sl. 3.1.

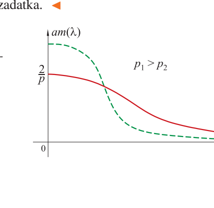
Primjer 2.

Parna funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zadana je na intervalu $\langle 0,\infty\rangle$ formulom

$$f(x)=e^{-px},\qquad(p>0)$$

(slika 3.2). Prikaži je u obliku Fourierovog integrala. Odredi i skiciraj njezin amplitudni spektar. Dokaži da je

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda}{1+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda=\frac{\pi}{2e}.$$



Sl. 3.2.

► Vrijedi $B(\lambda)=0$, jer je f parna.

$$\begin{aligned} A(\lambda)&=2\int_0^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &=2\int_0^{\infty}e^{-p\xi}\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &=2\,\frac{e^{-p\xi}}{p^2+\lambda^2}\Big(-p\cos\lambda\xi+\lambda\sin\lambda\xi\Big)\bigg|_{\xi=0}^{\infty}\\ &=2p\,\frac{1}{p^2+\lambda^2}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2p}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{p^2+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

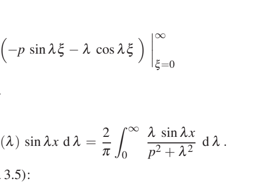
Amplitudni spektar je

$$\mathrm{am}(\lambda)=|A(\lambda)|=2p\,\frac{1}{p^2+\lambda^2},\qquad 0<\lambda<\infty.$$

(slika 3.3). Iz prikaza funkcije preko Fourierovog integrala, za $p=1$ i $x=1$ dobivamo

$$f(1)=e^{-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda}{1+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda$$

i odavde slijedi tvrdnja zadatka. ◄



Sl. 3.3. Spektar parne funkcije iz ovog primjera. Crtkanom je linijom označen (normirani) spektar za vrijednost parametra $p_2<p_1$. Vidimo da 'rastezanje' funkcije odgovara porast amplituda u dijelu spektra s malim frekvencijama λ.

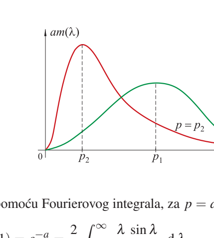
Primjer 3.

Neparna funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zadana je na intervalu $(0,\infty)$ formulom

$$f(x)=e^{-px},\qquad(p>0)$$

(slika 3.4) Prikaži je u obliku Fourierovog integrala. Odredi i skiciraj njezin amplitudni spektar. Dokaži da je

$$\int_0^{\infty}\frac{\lambda\sin\lambda}{a^2+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$



Sl. 3.4.

► Funkcija f je neparna te je $A(\lambda)=0$.

$$B(\lambda)=2\int_0^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=2\int_0^{\infty}e^{-p\xi}\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=\ldots$$

(iz tablica integrala)

$$\begin{aligned}&=2\,\frac{e^{-p\xi}}{p^2+\lambda^2}\Big(-p\sin\lambda\xi-\lambda\cos\lambda\xi\Big)\bigg|_{\xi=0}^{\infty}\\ &=2\,\frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}.\end{aligned}$$

Zato,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{p^2+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

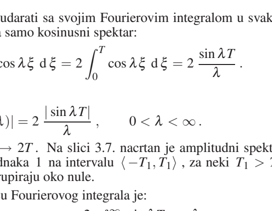
Amplitudni spektar je (slika 3.5):

$$\mathrm{am}(\lambda)=|B(\lambda)|=2\,\frac{\lambda}{p^2+\lambda^2},\qquad 0<\lambda<\infty.$$

Posebno, za $\lambda=p$ dobivamo

$$\mathrm{am}(p)=\frac{1}{p}.$$

Uvjeri se deriviranjem da je ovo maksimum funkcije $\mathrm{am}(\lambda)$. Dakle, ako je $p_2<p_1$, tada se maksimum amplitude postiže na nižoj frekvenciji i ima veću vrijednost.



Sl. 3.5. Spektar prigušene eksponencijalne funkcije, s neparnim proširenjem na $\mathbf{R}$. Slabije prigušenje odgovara koncentraciji spektra na manje vrijednosti λ.

Iz prikaza funkcije pomoću Fourierovog integrala, za $p=a$ i $x=1$ dobivamo

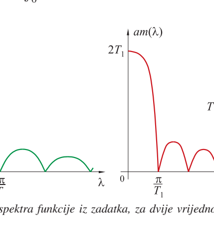
$$f(1)=e^{-a}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\sin\lambda}{a^2+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda,$$

odakle slijedi tražena formula. ◄

Primjer 4.

Pomoću Fourierovog integrala prikažimo i odredimo amplitudni spektar funkcije zadane slikom 3.6. Odredi zatim vrijednost integrala

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du.$$



Sl. 3.6.

► Funkcija f će se podudarati sa svojim Fourierovim integralom u svakoj točki. Ona je parna, zato ima samo kosinusni spektar:

$$A(\lambda)=2\int_0^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=2\int_0^{T}\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=2\,\frac{\sin\lambda T}{\lambda}.$$

Amplitudni spektar iznosi

$$\mathrm{am}(\lambda)=|A(\lambda)|=2\,\frac{|\sin\lambda T|}{\lambda},\qquad 0<\lambda<\infty.$$

Za $\lambda\to 0$ vrijedi $\mathrm{am}(\lambda)\to 2T$. Na slici 3.7. nacrtan je amplitudni spektar za sličnu funkciju koja je jednaka 1 na intervalu $\langle -T_1,T_1\rangle$, za neki $T_1>T$. Primijeti da se frekvencije grupiraju oko nule.

Prikaz funkcije f pomoću Fourierovog integrala je:

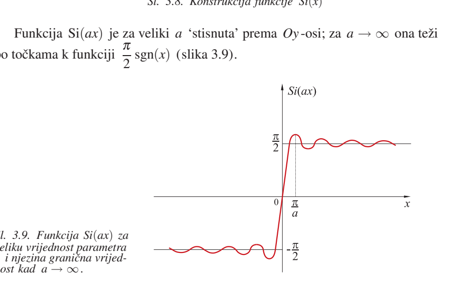
$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda T\cos\lambda x}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Specijalno, za $x=0$

$$f(0)=1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda T}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda T)}{\lambda T}\,d(\lambda T)$$

te je

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}.\ ◄$$



Sl. 3.7. Prikaz spektra funkcije iz zadatka, za dvije vrijednosti konstante T.

3.1.2. Funkcija sinus integralni

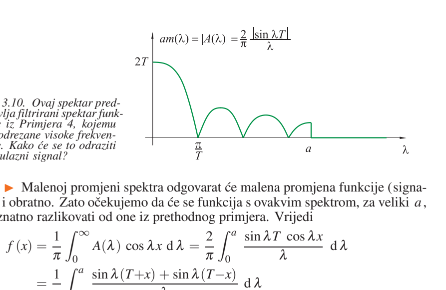
Funkcija **sinus integralni** definira se formulom

$$\mathrm{Si}(x):=\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

To je neparna funkcija. Dobivena je računanjem površine ispod funkcije $\frac{\sin u}{u}$, pa ta funkcija raste kad god je sinus pozitivan, a pada tamo gdje je sinus negativan. Apscise njezinog maksimuma su $x_{\max}=(2n+1)\pi$, a apscise minimuma $x_{\min}=2n\pi$.

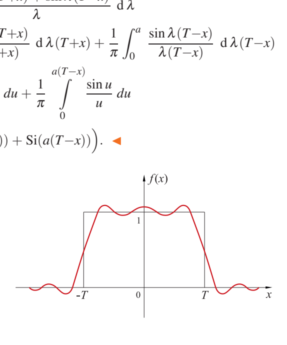
Nadalje, vrijedi

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}.$$



Sl. 3.8. Konstrukcija funkcije $\mathrm{Si}(x)$

Funkcija $\mathrm{Si}(ax)$ je za veliki a 'stisnuta' prema Oy-osi; za $a\to\infty$ ona teži po točkama k funkciji $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x)$ (slika 3.9).



Sl. 3.9. Funkcija $\mathrm{Si}(ax)$ za veliku vrijednost parametra a i njezina granična vrijednost kad $a\to\infty$.

Primjer 5.

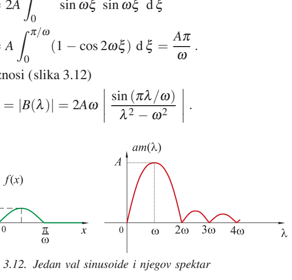
Odredi funkciju f koja ima samo kosinusni spektar oblika:

$$A(\lambda)=2\,\frac{\sin\lambda T}{\lambda},\qquad 0<\lambda<a.$$

Sl. 3.10. Ovaj spektar predstavlja filtrirani spektar funkcije iz Primjera 4, kojemu su odrezane visoke frekvencije. Kako će se to odraziti na ulazni signal?

► Malenoj promjeni spektra odgovarat će malena promjena funkcije (signala) i obratno. Zato očekujemo da će se funkcija s ovakvim spektrom, za veliki a, neznatno razlikovati od one iz prethodnog primjera. Vrijedi

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\frac{\sin\lambda T\cos\lambda x}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{a}\frac{\sin\lambda(T+x)+\sin\lambda(T-x)}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{a}\frac{\sin\lambda(T+x)}{\lambda(T+x)}\,\mathrm{d}\lambda(T+x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{a}\frac{\sin\lambda(T-x)}{\lambda(T-x)}\,\mathrm{d}\lambda(T-x)\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{a(T+x)}\frac{\sin u}{u}\,du+\frac{1}{\pi}\int_0^{a(T-x)}\frac{\sin u}{u}\,du\\ &=\frac{1}{\pi}\Big(\mathrm{Si}(a(T+x))+\mathrm{Si}(a(T-x))\Big).\ ◄\end{aligned}$$



Sl. 3.11. Rekonstrukcija signala na temelju modificiranog spektra.

Primjer 6.

Odredi i skiciraj spektar funkcije f koja se sastoji od jednog vala sinusoide:

$$f(x)=\begin{cases}A\sin\omega x, & |x|\leqslant\pi/\omega,\\ 0, & |x|>\pi/\omega.\end{cases}$$

(slika 3.12). Što se događa sa spektrom ako se uzme n valova ($n>1$)?

► Funkcija je neparna, zato je $A(\lambda)=0$ i

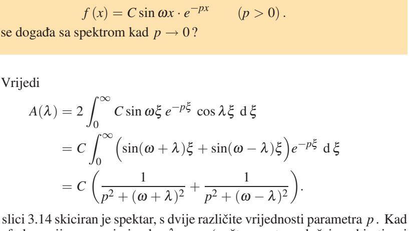
$$\begin{aligned} B(\lambda)&=2A\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega\xi\,\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &=A\int_0^{\pi/\omega}\Big(\cos(\lambda-\omega)\xi-\cos(\lambda+\omega)\xi\Big)\,\mathrm{d}\xi\\ &=A\left(\frac{\sin(\pi\lambda/\omega-\pi)}{\lambda-\omega}-\frac{\sin(\pi\lambda/\omega+\pi)}{\lambda+\omega}\right)\\ &=A\left(-\frac{\sin(\pi\lambda/\omega)}{\lambda-\omega}+\frac{\sin(\pi\lambda/\omega)}{\lambda+\omega}\right)\\ &=-2A\,\frac{\omega}{\lambda^2-\omega^2}\,\sin\Big(\pi\frac{\lambda}{\omega}\Big).\end{aligned}$$

pri čemu račun vrijedi za $\lambda\neq\omega$. Za $\lambda=\omega$ graničnim prijelazom $\lambda\to\omega$ ili pak direktno dobivamo:

$$\begin{aligned} B(\omega)&=2A\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega\xi\,\sin\omega\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &=A\int_0^{\pi/\omega}(1-\cos 2\omega\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{A\pi}{\omega}.\end{aligned}$$

Zato amplitudni spektar iznosi (slika 3.12)

$$\mathrm{am}(\lambda)=|B(\lambda)|=2A\omega\left|\frac{\sin(\pi\lambda/\omega)}{\lambda^2-\omega^2}\right|.$$



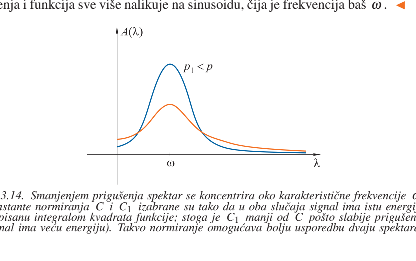
Sl. 3.12. Jedan val sinusoide i njegov spektar

Vrijedi $\mathrm{am}(\omega)=A\pi/\omega$. Maksimalna amplituda je neznatno veća od ove vrijednosti (provjeri!).

Ako se f sastoji od n valova sinusoide, tada se na isti način dobiva

$$\mathrm{am}(\lambda)=2A\omega\left|\frac{\sin(n\pi\lambda/\omega)}{\lambda^2-\omega^2}\right|.$$

Sada je $\mathrm{am}(\omega)=nA\pi/\omega$. Primjećujemo da se frekvencije grupiraju oko vrijednosti $\lambda=\omega$, kad $n\to\infty$. Na slici 3.13 nacrtan je amplitudni spektar za $n=3$. ◄



Sl. 3.13. n valova sinusoide i pripadni spektar. Povećanjem broja valova funkcija postaje sve sličnija periodičnoj funkciji. Kao posljedica toga, njezin se spektar koncentrira oko osnovne frekvencije ω. Da li se može učiniti granični prijelaz $n\to\infty$?

Primjer 7.

Odredi i skiciraj spektar parne funkcije f, koja na intervalu $(0,\infty)$ ima jednadžbu prigušene sinusoide:

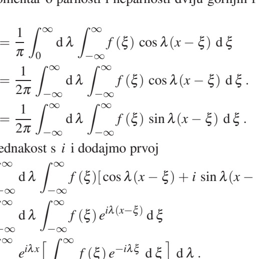
$$f(x)=C\sin\omega x\cdot e^{-px}\qquad(p>0).$$

Što se događa sa spektrom kad $p\to 0$?

► Vrijedi

$$\begin{aligned} A(\lambda)&=2\int_0^{\infty}C\sin\omega\xi\,e^{-p\xi}\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &=C\int_0^{\infty}\Big(\sin(\omega+\lambda)\xi+\sin(\omega-\lambda)\xi\Big)e^{-p\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &=C\left(\frac{1}{p^2+(\omega+\lambda)^2}+\frac{1}{p^2+(\omega-\lambda)^2}\right).\end{aligned}$$

Na slici 3.14 skiciran je spektar, s dvije različite vrijednosti parametra p. Kad $p\to 0$, frekvencije se grupiraju oko $\lambda=\omega$ (pošto se u tom slučaju gubi utjecaj prigušenja i funkcija sve više nalikuje na sinusoidu, čija je frekvencija baš ω. ◄



Sl. 3.14. Smanjenjem prigušenja spektar se koncentrira oko karakteristične frekvencije ω. Konstante normiranja C i C_1 izabrane su tako da u oba slučaja signal ima istu energiju (opisanu integralom kvadrata funkcije; stoga je C_1 manji od C pošto slabije prigušeni signal ima veću energiju). Takvo normiranje omogućava bolju usporedbu dvaju spektara.

3.2. Fourierova transformacija

Neka je $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ po dijelovima glatka, neprekinuta i apsolutno integrabilna funkcija. Fourierov integral možemo napisati u kompleksnom obliku. Primijetimo najprije da je funkcija

$$\lambda\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

parna, a funkcija

$$\lambda\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

neparna. Ovdje valja napomenuti da smo do sada promatrali isključivo pozitivne frekvencije $\lambda>0$, no u nastavku će nam biti korisno dopustiti da je $\lambda\in\mathbf{R}$ pa ima smisla gornji komentar o parnosti i neparnosti dviju gornjih funkcija. Zato vrijedi

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi.\\ 0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Pomnožimo drugu jednakost s i i dodajmo prvoj

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)[\cos\lambda(x-\xi)+i\sin\lambda(x-\xi)]\,\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi\Big]\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Označimo funkciju unutar zagrade s $\hat{f}(\lambda)$.

3.2.1. Fourierova transformacija

Fourierova transformacija

Funkcija $\hat{f}(\lambda)$ definirana s

$$\hat{f}(\lambda)=\mathscr{F}\{f(x)\}:=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)\,\mathrm{d}x\qquad(10)$$

naziva se **Fourierov transformat** (ili **spektar**) funkcije f. Obrnuta veza dana je formulom

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\hat{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.\qquad(11)$$

Preslikavanje $\mathscr{F}$ koje funkciji f pridružuje funkciju $\hat{f}$ naziva se **Fourierova transformacija**, pišemo $\mathscr{F}\{f(x)\}=\hat{f}(\lambda)$.

Inverzno preslikavanje koje funkciji $\hat{f}$ pridružuje funkciju f naziva se **inverzna Fourierova transformacija**, pišemo $\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\}=f(x)$.

Napomena. Uočite da smo u izrazu (10) zamijenili ime varijable po kojoj se integrira i prešli sa ξ na x.

Funkcija f ne mora biti neprekinuta. Dovoljno je da je po dijelovima glatka i apsolutno integrabilna tada direktno iz gornjeg računa i Teorema 1 iz Poglavlja 3.1 dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 2. Postojanje Fourierove transformacije

Ako je $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, tada postoji njezin Fourierov transformat $\mathscr{F}\{f(x)\}=\hat{f}(\lambda)$ te vrijedi sljedeća formula inverzije:

$$\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\}=\begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x,\\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & \text{ako je } x \text{ točka prekida za } f.\end{cases}$$

Izvedimo vezu između funkcije $\hat{f}$ i funkcija A i B definiranih s (5) i (6). Imamo

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x-i\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\\ &=A(\lambda)-iB(\lambda).\end{aligned}$$

Ako $\hat{f}$ zapišemo u trigonometrijskom obliku,

$$\hat{f}(\lambda)=|\hat{f}(\lambda)|\,e^{i\arg\hat{f}(\lambda)}=:\mathrm{am}(\lambda)\,e^{i\varphi(\lambda)},$$

tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathrm{am}(\lambda)&=|\hat{f}(\lambda)|=|A(\lambda)-iB(\lambda)|=\sqrt{A^2(\lambda)+B^2(\lambda)},\\ \varphi(\lambda)&=\arg\hat{f}(\lambda)=\mathrm{arc\,tg}\frac{-B(\lambda)}{A(\lambda)}=-\mathrm{arc\,tg}\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}.\end{aligned}$$

Funkcije $\mathrm{am}(\lambda)$ odnosno $\varphi(\lambda)$ zovemo **amplitudni**, odnosno **fazni spektar** od f. One daju zakon raspodjela amplituda i faznih kutova, u ovisnosti o frekvenciji λ.

Primjer 8.

Neka su $A,\omega>0$ dvije fiksirane konstante. Izračunajte Fourierov transformat jednog vala sinusoide

$$f(x)=\begin{cases}A\sin\omega x, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{\omega},\\ 0, & \text{inače},\end{cases}$$

te odredite i skicirajte njezin amplitudni i fazni spektar.

► Računamo

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}e^{-i\lambda x}A\sin\omega x\,\mathrm{d}x\\ &=A\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x\\ &=A\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\underbrace{\cos\lambda x\sin\omega x}_{\text{neparna funkcija}}\,\mathrm{d}x-iA\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\underbrace{\sin\lambda x\sin\omega x}_{\text{parna funkcija}}\,\mathrm{d}x\\ &=-2iA\int_0^{\pi/\omega}\sin\lambda x\sin\omega x\,\mathrm{d}x\\ &=-iA\int_0^{\pi/\omega}\Big(\cos(\lambda-\omega)x-\cos(\lambda+\omega)x\Big)\,\mathrm{d}x\\ &=-iA\left(\frac{\sin(\lambda-\omega)x}{\lambda-\omega}-\frac{\sin(\lambda+\omega)x}{\lambda+\omega}\right)\bigg|_0^{\pi/\omega}=iA\frac{2\omega}{\lambda^2-\omega^2}\sin\frac{\pi\lambda}{\omega}.\end{aligned}$$

Gornji račun vrijedi samo ako je $\lambda\neq\pm\omega$. Direktnim računom možemo provjeriti da je

$$\hat{f}(\omega)=-iA\frac{\pi}{\omega}\qquad\text{i}\qquad\hat{f}(-\omega)=iA\frac{\pi}{\omega}.$$

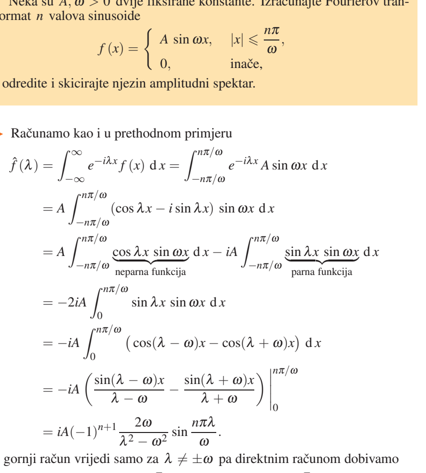
Sada direktno čitamo amplitudni spektar

$$\mathrm{am}(\lambda)=|\hat{f}(\lambda)|=\begin{cases}2A\omega\left|\frac{\sin(\pi\lambda/\omega)}{\lambda^2-\omega^2}\right|, & \text{za } \lambda\neq\pm\omega,\\ \frac{A\pi}{\omega}, & \text{za } \lambda=\pm\omega.\end{cases}$$

Fazni spektar također lako iščitavamo iz $\hat{f}(\lambda)$. Budući da je $\hat{f}(\lambda)$ čisto imaginaran broj za svaki λ to je kompleksna faza uvijek jednaka $\pm\frac{\pi}{2}$ ovisno o predznaku $\mathrm{Im}\hat{f}(\lambda)$, ili je 0 ukoliko je $\hat{f}(\lambda)=0$. Možemo pisati

$$\varphi(\lambda)=\arg\hat{f}(\lambda)=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\hat{f}(\lambda)).$$

Na slici 3.15 je nacrtan graf funkcije f i njezin amplitudni i fazni spektar. ◄



Sl. 3.15. Funkcija f iz Primjera 8 (uz $A=3$ i $\omega=2$) i njezin amplitudni i fazni spektar. Uočite da su izraženi vrhovi u amplitudnom spektru upravo oko vrijednosti $\lambda=\pm\omega=\pm2$.

Napomena. Uočite da smo gornje rješenje mogli i direktno iščitati iz Primjera 6 u Poglavlju 2.1. Tamo smo izračunali kosinusni i sinusni spektar ove funkcije $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ te smo samo mogli zapisati da je $\hat{f}(\lambda)=A(\lambda)-iB(\lambda)$. Tamo smo također izračunali i skicirali i amplitudni spektar.

Primjer 9.

Neka su $A,\omega>0$ dvije fiksirane konstante. Izračunajte Fourierov transformat n valova sinusoide

$$f(x)=\begin{cases}A\sin\omega x, & |x|\leqslant\dfrac{n\pi}{\omega},\\ 0, & \text{inače},\end{cases}$$

te odredite i skicirajte njezin amplitudni spektar.

► Računamo kao i u prethodnom primjeru

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega}e^{-i\lambda x}A\sin\omega x\,\mathrm{d}x\\ &=A\int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega}(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x\\ &=A\int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega}\underbrace{\cos\lambda x\sin\omega x}_{\text{neparna funkcija}}\,\mathrm{d}x-iA\int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega}\underbrace{\sin\lambda x\sin\omega x}_{\text{parna funkcija}}\,\mathrm{d}x\\ &=-2iA\int_0^{n\pi/\omega}\sin\lambda x\sin\omega x\,\mathrm{d}x\\ &=-iA\int_0^{n\pi/\omega}\Big(\cos(\lambda-\omega)x-\cos(\lambda+\omega)x\Big)\,\mathrm{d}x\\ &=-iA\left(\frac{\sin(\lambda-\omega)x}{\lambda-\omega}-\frac{\sin(\lambda+\omega)x}{\lambda+\omega}\right)\bigg|_0^{n\pi/\omega}\\ &=iA(-1)^{n+1}\frac{2\omega}{\lambda^2-\omega^2}\sin\frac{n\pi\lambda}{\omega}.\end{aligned}$$

Opet gornji račun vrijedi samo za $\lambda\neq\pm\omega$ pa direktnim računom dobivamo

$$\hat{f}(\omega)=-iA\frac{n\pi}{\omega}\qquad\text{i}\qquad\hat{f}(-\omega)=iA\frac{n\pi}{\omega}.$$

Amplitudni spektar je stoga

$$\mathrm{am}(\lambda)=|\hat{f}(\lambda)|=\begin{cases}2A\omega\left|\frac{\sin(n\pi\lambda/\omega)}{\lambda^2-\omega^2}\right|, & \text{za } \lambda\neq\pm\omega,\\ A\frac{n\pi}{\omega}, & \text{za } \lambda=\pm\omega.\end{cases}$$

Na slici 3.16 je graf funkcije f i njezin amplitudni i fazni spektar. ◄

Već iz gornjih primjera uočavamo da što funkcija ima izraženiju periodičku komponentu kutne frekvencije ω (odnosno perioda $2\pi/\omega$) to se izraženiji vrh javlja u amplitudnom spektru upravo za $\lambda=\pm\omega$. Zato možemo reći da Fourierova transformacija prebacuje funkciju iz prostorne u frekvencijsku domenu.

Često se promatra Fourierova transformacija vremenski ovisnih signala. U tom slučaju uobičajenije je koristiti varijablu t umjesto x. Kaže se da Fourierova transformacija prebacuje signal $f(t)$ iz vremenske u frekvencijsku domenu $\hat{f}(\lambda)$.

⋆ ⋆ ⋆

Napomena. Uočite da smo se u definiciji Fourierove transformacije mogli odlučiti i za drugačiji izbor konstanti.

Da bi sama transformacija i njezin inverz imali iste normalizacijske konstante, često se Fourierova transformacija definira kao

$$\mathscr{F}_{\mathrm{sim}}\{f(x)\}=\tilde{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

U tom slučaju je inverzna transformacija dana s

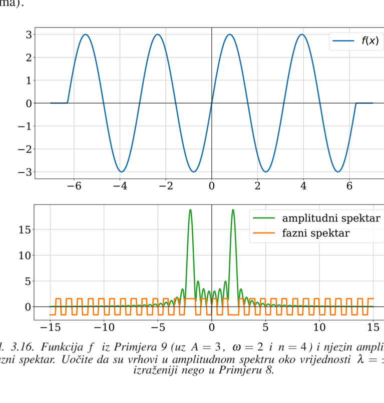
$$\mathscr{F}_{\mathrm{sim}}^{-1}\{\tilde{f}(\lambda)\}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\tilde{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Često se susreće i verzija

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\mathrm{alt}}\{f(x)\}&=\check{f}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\lambda x}f(x)\,\mathrm{d}x,\\ \mathscr{F}_{\mathrm{alt}}^{-1}\{\check{f}(\lambda)\}&=f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\lambda x}\check{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

U različitoj literaturi, a i različiti programski jezici koriste različite verzije Fourierove transformacije i pripadne inverzne transformacije. Stoga uvijek treba provjeriti koji izbor konstanti je korišten u konkretnoj situaciji. Mi ćemo se u nastavku pridržavati formula (10) i (11).

Fourierova transformacija je vrlo važan aparat u različitim područjima teorijske i primijenjene znanosti (u fizici, teoriji brojeva, kombinatorici, obradi signala, teoriji vjerojatnosti, statistici, kriptografiji, akustici, oceanografiji, optici i drugima).



Sl. 3.16. Funkcija f iz Primjera 9 (uz $A=3$, $\omega=2$ i $n=4$) i njezin amplitudni i fazni spektar. Uočite da su vrhovi u amplitudnom spektru oko vrijednosti $\lambda=\pm2$ još izraženiji nego u Primjeru 8.

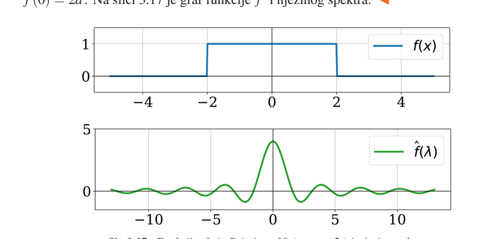
3.2.2. Primjeri Fourierove transformacije

Izračunajmo Fourierove transformate još nekoliko funkcija.

Primjer 10.

Izračunajte i skicirajte Fourierov transformat funkcije
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$
pri čemu je $a > 0$.

► Računamo
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^{a} (\cos\lambda x - i\sin\lambda x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x - i\int_{-a}^{a}\sin\lambda x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right)\Bigg|_{-a}^{a} + i\left(\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{2\sin a\lambda}{\lambda}, \quad \text{za } \lambda \neq 0.\end{aligned}$$
Puštanjem limesa $\lambda \to 0$ u gornjem izrazu ili direktnim računom dobije se $\hat{f}(0) = 2a$. Na slici 3.17 je graf funkcije f i njezinog spektra. ◄



Sl. 3.17. Funkcija f iz Primjera 10 (uz $a = 2$) i njezin spektar.

Primjer 11.

Izračunajte Fourierov transformat takozvane *gate* funkcije
$$g_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$
pri čemu je $a < b$.

► Računamo
$$\begin{aligned}\hat{g}_{[a,b]}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} g_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{a}^{b} (\cos\lambda x - i\sin\lambda x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x - i\int_{a}^{b}\sin\lambda x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right)\Bigg|_{a}^{b} + i\left(\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\right)\Bigg|_{a}^{b} = \frac{\sin b\lambda - \sin a\lambda}{\lambda} + i\frac{\cos b\lambda - \cos a\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$
Mogli bismo i direktno pisati
$$\hat{g}_{[a,b]}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} g_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\Bigg|_{a}^{b} = \frac{e^{-ia\lambda} - e^{-ib\lambda}}{i\lambda},$$
pri čemu smo prešutno koristili integraciju kompleksne eksponencijalne funkcije o kojoj ćete više čuti u drugom dijelu ovog kolegija. Uvjerite se da su dobivena dva izraza jednaka
$$\frac{e^{-ia\lambda} - e^{-ib\lambda}}{i\lambda} = \frac{\sin b\lambda - \sin a\lambda}{\lambda} + i\frac{\cos b\lambda - \cos a\lambda}{\lambda},$$
tako što ćete kompleksne eksponencijale zapisati u trigonometrijskom obliku.

Gornji izrazi nisu definirani za $\lambda = 0$ pa direktnim računom dobivamo $\hat{g}_{[a,b]}(0) = b - a$. ◄

Napomena. Uočite da je funkcija iz Primjera 10 zapravo $g_{[-a,a]}$. Korisna će nam biti i Heavisideova *step funkcija* $u(x)$ definirana kao
$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
Uočite da gate funkciju $g_{[a,b]}(x)$ možemo zapisati kao $u(x-a) - u(x-b)$.

Primjer 12.

Izračunajte Fourierov transformat funkcije
$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$
Kraće možemo pisati $f(x) = (1 - |x|)\, g_{[-1,1]}(x)$.

► Računamo
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} e^{-i\lambda x}(1 - |x|)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \underbrace{(1-|x|)\cos\lambda x}_{\text{parna funkcija}}\,\mathrm{d}x - i\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-|x|)\sin\lambda x}_{\text{neparna funkcija}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{1}(1-|x|)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}(1-x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x \\ &= \ldots = 2\left(\frac{(1-x)\sin\lambda x}{\lambda} - \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2 - 2\cos\lambda}{\lambda^2}, \quad \text{za } \lambda \neq 0.\end{aligned}$$
Direktnim računom se dobije $\hat{f}(0) = 1$. ◄

Primjer 13.

Izračunajte Fourierov transformat funkcije
$$f(x) = e^{-ax}u(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$
pri čemu je $a > 0$.

► Računamo
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} e^{(-a-i\lambda)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{(-a-i\lambda)x}}{-a-i\lambda}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+i\lambda} - \lim_{x\to\infty}\frac{e^{(-a-i\lambda)x}}{a+i\lambda} = \frac{1}{a+i\lambda},\end{aligned}$$
pri čemu smo koristili činjenicu da je $\lim_{x\to\infty} e^{cx} = 0$ za sve kompleksne brojeve $c \in \mathbf{C}$ za koje je $\operatorname{Re} c < 0$. Naime, stavimo li $c = a + ib$, gdje je $a = \operatorname{Re} c < 0$ i $b = \operatorname{Im} c$, onda vrijedi
$$\lim_{x\to\infty}|e^{cx}| = \lim_{x\to\infty}|e^{ax+ibx}| = \lim_{x\to\infty}|e^{ax}||e^{ibx}| = \lim_{x\to\infty}|e^{ax}| = \lim_{x\to\infty}e^{ax} = 0$$
iz čega slijedi traženi limes. ◄

Primjer 14.

Odredite funkciju $f(x)$ čiji je Fourierov transformat funkcija
$$\hat{f}(\lambda) = \pi(1 - |\lambda|)\, g_{[-1,1]}(\lambda).$$

► Po formuli za inverznu Fourierovu transformaciju imamo
$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left\{\pi(1-|\lambda|)\,g_{[-1,1]}(\lambda)\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\,\pi(1-|\lambda|)\,g_{[-1,1]}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\lambda x}(1-|\lambda|)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\cos\lambda x + i\sin\lambda x)(1-|\lambda|)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{0}^{1}\cos\lambda x\,(1-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \ldots = \frac{1-\cos x}{x^2}\end{aligned}$$
Ovime smo ujedno dobili formulu
$$\mathscr{F}\left\{\frac{1-\cos x}{x^2}\right\} = \pi(1-|\lambda|)\,g_{[-1,1]}(\lambda).$$ ◄

3.3. Svojstva Fourierove transformacije

3.3.1. Linearnost Fourierove transformacije

Direktno iz definicije čitamo sljedeće svojstvo Fourierove transformacije.

Linearnost Fourierove transformacije

Neka su f i g po dijelovima glatke i apsolutno integrabilne funkcije i neka su $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Vrijedi
$$\mathscr{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha\mathscr{F}\{f(x)\} + \beta\mathscr{F}\{g(x)\}. \tag{12}$$

Primjer 15.

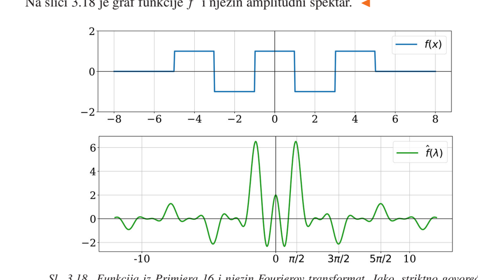
Odredite $\mathscr{F}\left\{2e^{-x}u(x) - 5g_{[-1,1]}(x)\right\}$.

► Računamo
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{2e^{-x}u(x) - 5g_{[-1,1]}(x)\right\} &= 2\mathscr{F}\{e^{-x}u(x)\} - 5\mathscr{F}\left\{g_{[-1,1]}(x)\right\} \\ &= 2\frac{1}{1+i\lambda} - 5\frac{2\sin\lambda}{\lambda} = \frac{2\lambda - 10(1+i\lambda)\sin\lambda}{\lambda(1+i\lambda)},\end{aligned}$$
pri čemu smo koristili transformate izračunate u primjerima 10 i 13. Još trebamo izračunati transformat u $\lambda = 0$ koji dobivamo računajući limes
$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{2\lambda - 10(1+i\lambda)\sin\lambda}{\lambda(1+i\lambda)} \overset{L'H}{=} \lim_{\lambda\to 0}\frac{2 - 10(1+i\lambda)\cos\lambda - 10i\sin\lambda}{1+2i\lambda} = -8.$$
◄

Primjer 16.

Odredite
$$\hat{f}(\lambda) = \mathscr{F}\left\{g_{[-5,-3]}(x) - g_{[-3,-1]}(x) + g_{[-1,1]}(x) - g_{[1,3]}(x) + g_{[3,5]}(x)\right\}$$
te skicirajte $\hat{f}$.

► Koristeći transformat iz Primjera 11 računamo
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) =& \mathscr{F}\left\{g_{[-5,-3]}(x)\right\} - \mathscr{F}\left\{g_{[-3,-1]}(x)\right\} + \mathscr{F}\left\{g_{[-1,1]}(x)\right\} \\ & - \mathscr{F}\left\{g_{[1,3]}(x)\right\} + \mathscr{F}\left\{g_{[3,5]}(x)\right\} \\ =& \frac{e^{5i\lambda} - e^{3i\lambda}}{i\lambda} - \frac{e^{3i\lambda} - e^{i\lambda}}{i\lambda} + \frac{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}{i\lambda} - \frac{e^{-i\lambda} - e^{-3i\lambda}}{i\lambda} + \frac{e^{-3i\lambda} - e^{-5i\lambda}}{i\lambda} \\ =& \frac{e^{5i\lambda} - 2e^{3i\lambda} + 2e^{i\lambda} - 2e^{-i\lambda} + 2e^{-3i\lambda} - e^{-5i\lambda}}{i\lambda} \\ =& \frac{(e^{5i\lambda} - e^{-5i\lambda}) - 2(e^{3i\lambda} - e^{-3i\lambda}) + 2(e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})}{i\lambda} \\ =& \frac{2i\sin 5\lambda - 4i\sin 3\lambda + 4i\sin\lambda}{i\lambda} = \frac{2\sin 5\lambda - 4\sin 3\lambda + 4\sin\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$
Dodatno još računamo
$$\hat{f}(0) = \lim_{\lambda\to 0}\hat{f}(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{2\sin 5\lambda - 4\sin 3\lambda + 4\sin\lambda}{\lambda} = 2.$$
Na slici 3.18 je graf funkcije f i njezin amplitudni spektar. ◄



Sl. 3.18. Funkcija iz Primjera 16 i njezin Fourierov transformat. Iako, striktno govoreći, funkcija f nije periodična, ipak na intervalu $[-5, 5]$ uočavamo periodičnu pravilnost s periodom 4. Uočite da su izraženi vrhovi u spektru upravo oko kutnih frekvencija $\lambda = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ kojima odgovaraju periodičke komponente s periodima $\frac{2\pi}{\lambda} = 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \ldots$. Uočite da su to sve zapravo viši harmonici osnovne frekvencije perioda duljine 4.

Općenito je Fourierov transformat funkcije f kompleksna funkcija realne varijable $\hat{f}(\lambda)$. No ukoliko je f parna, odnosno neparna funkcija, onda iz definicije možemo lagano iščitati i sljedeće svojstvo.

Teorem 3. Fourierov transformat (ne)parne funkcije

Ako je f *parna funkcija*, onda je $\hat{f}(\lambda)$ *realna (i parna) funkcija*.
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\cos(\lambda x)f(x)}_{\text{parna funkcija}}\,\mathrm{d}x - i\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\sin(\lambda x)f(x)}_{\text{neparna funkcija}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{\infty}\cos(\lambda x)f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty}\cos(-\lambda x)f(x)\,\mathrm{d}x = \hat{f}(-\lambda)\end{aligned}$$
Slično, ako je f *neparna funkcija*, onda je $\hat{f}(\lambda)$ *čisto imaginarna (i neparna) funkcija*.
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\cos(\lambda x)f(x)}_{\text{neparna funkcija}}\,\mathrm{d}x - i\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\sin(\lambda x)f(x)}_{\text{parna funkcija}}\,\mathrm{d}x \\ &= -2i\int_{0}^{\infty}\sin(\lambda x)f(x)\,\mathrm{d}x = -\left(-2i\int_{0}^{\infty}\sin(-\lambda x)f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\hat{f}(-\lambda)\end{aligned}$$

Napomena. Prođite ponovno kroz primjere 8, 9 i 16 te se uvjerite da je gornje svojstvo ispunjeno.

3.3.2. Pomak u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

Neka je $f(x)$ funkcija čiji Fourierov transformat označimo s $\hat{f}(\lambda)$. Promotrimo kako skaliranje za faktor $a > 0$ po osi x utječe na Fourierov transformat te funkcije. Računamo
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f(ax)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(ax)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = ax \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\lambda}{a}t} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right).\end{aligned}$$
Sličnim računom (napravite ga!) može se pokazati da za $a < 0$ vrijedi formula $\mathscr{F}\{f(ax)\} = -\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ pa možemo obje formule objediniti u jednu i pisati
$$\mathscr{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right), \quad \text{za sve } a \neq 0.$$

Pogledajmo sada kako pomak za $a \in \mathbf{R}$ po x osi utječe na transformat. Računamo
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f(x-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x-a)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x - a \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{bmatrix} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(t+a)} f(t)\,\mathrm{d}t = e^{-i\lambda a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-i\lambda a}\hat{f}(\lambda).\end{aligned}$$

Konačno, pogledajmo koji utjecaj ima množenje funkcije f s takozvanim fazorom $e^{i\omega x}$.
$$\mathscr{F}\{e^{i\omega x}f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}e^{i\omega x}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda-\omega)x}f(x)\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\lambda - \omega).$$

Sve ove činjenice možemo sakupiti u sljedeći teorem.

Teorem 4. Teorem o pomaku

Ako Fourierov transformat funkcije $f(x)$ označimo s $\hat{f}(\lambda)$, onda vrijede sljedeće formule:
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f(ax)\} &= \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right), && \text{za sve } a \neq 0, \\ \mathscr{F}\{f(x-a)\} &= e^{-i\lambda a}\hat{f}(\lambda), && \text{za sve } a \in \mathbf{R}, \\ \mathscr{F}\{e^{i\omega x}f(x)\} &= \hat{f}(\lambda - \omega), && \text{za sve } \omega \in \mathbf{R}.\end{aligned} \tag{13}$$

Napomena. Iz prve formule za $a = -1$ direktno dobivamo identitet
$$\mathscr{F}\{f(-x)\} = \hat{f}(-\lambda).$$

Primjer 17.

Izračunajte Fourierov transformat funkcije
$$f(x) = e^{-ax}u(x-b) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geqslant b, \\ 0, & x < b, \end{cases}$$
pri čemu je $a > 0$ i $b \in \mathbf{R}$.

► Već smo u Primjeru 13 izračunali $\mathscr{F}\{e^{-ax}u(x)\} = \frac{1}{a+i\lambda}$ pa sad možemo pisati
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{e^{-ax}u(x-b)\} &= \mathscr{F}\left\{e^{-ab}e^{-a(x-b)}u(x-b)\right\} \\ &= e^{-ab}\mathscr{F}\left\{e^{-a(x-b)}u(x-b)\right\} \\ &= e^{-ab}e^{-i\lambda b}\frac{1}{a+i\lambda} = e^{-b(a+i\lambda)}\frac{1}{a+i\lambda}.\end{aligned}$$ ◄

Primjer 18.

Odredite $\mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\right\}$.

► Mogli bismo ovo i direktno izračunati (napravite to!), no moguće je postupiti i na sljedeći način. Uočimo prvo da je
$$e^{-|x|} = e^{-x}u(x) + e^{x}u(-x) = f(x) + f(-x)$$
gdje smo stavili $f(x) = e^{-x}u(x)$. (**N.B.** Gornja jednakost zapravo ne vrijedi za $x = 0$ no vrijednost u jednoj točki neće promijeniti iznos Fourierovog integrala pa je donji račun i dalje valjan. Obično se kaže da gornja jednakost vrijedi *skoro svuda*.) Sada računamo:
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\right\} &= \mathscr{F}\{f(x) + f(-x)\} = \mathscr{F}\{f(x)\} + \mathscr{F}\{f(-x)\} \\ &= \hat{f}(\lambda) + \hat{f}(-\lambda) = \frac{1}{1+i\lambda} + \frac{1}{1-i\lambda} = \frac{2}{1+\lambda^2},\end{aligned}$$
pri čemu smo koristili činjenicu da je $\mathscr{F}\{e^{-x}u(x)\} = \frac{1}{1+i\lambda}$. ◄

Primjer 19.

Neka je $a > 0$. Izračunajte Fourierov transformat funkcije
$$f(x) = \begin{cases} a - |x|, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

► Uočite da možemo pisati
$$f(x) = (a - |x|)\,g_{[-a,a]}(x) = a\left(1 - \left|\frac{x}{a}\right|\right)g_{[-1,1]}\left(\frac{x}{a}\right) = a\,h\left(\frac{x}{a}\right)$$
gdje je $h(x) = (1 - |x|)\,g_{[-1,1]}(x)$ pa vrijedi
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \mathscr{F}\left\{a\,h\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = a\mathscr{F}\left\{h\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = a\cdot|a|\,\hat{h}(a\lambda) \\ &= a^2\frac{2 - 2\cos a\lambda}{(a\lambda)^2} = \frac{2 - 2\cos a\lambda}{\lambda^2},\end{aligned}$$
pri čemu smo $\hat{h}(\lambda) = \frac{2 - 2\cos\lambda}{\lambda^2}$, ($\hat{h}(0) = 1$) već izračunali u Primjeru 12. Još dodatno računamo $\hat{f}(0) = a^2\,\hat{h}(a\cdot 0) = a^2\hat{h}(0) = a^2$. ◄

3.3.3. Fourierov transformat derivacije

Neka je $f(x)$ diferencijabilna (pa i neprekinuta) funkcija sa svojstvom
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$
i takva da je $f'(x)$ apsolutno integrabilna. Računamo:
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = e^{-i\lambda x} & \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -i\lambda e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x & v = f(x) \end{bmatrix} \\ &= \left(e^{-i\lambda x}f(x)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= i\lambda\mathscr{F}\{f(x)\},\end{aligned}$$
pri čemu smo iskoristili činjenicu da je
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left|e^{-i\lambda x}f(x)\right| = \lim_{x\to\pm\infty}|f(x)| = 0.$$
Dakle dobivamo

Teorem 5. Fourierov transformat derivacije

Za diferencijabilnu funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sa svojstvom
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$
i čija je derivacija f' apsolutno integrabilna vrijedi formula
$$\mathscr{F}\{f'(x)\} = i\lambda\mathscr{F}\{f(x)\}. \tag{14}$$
Induktivno, za n puta diferencijabilnu funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ čije su derivacije $f^{(r)}(x)$ za $r = 1, 2, \ldots, n$ apsolutno integrabilne i zadovoljavaju Dirichletove uvjete, te ukoliko vrijedi
$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(r)}(x) = 0, \quad \text{za sve } r = 0, 1, \ldots, n-1,$$
onda je
$$\mathscr{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (i\lambda)^n\mathscr{F}\{f(x)\}. \tag{15}$$

Napomena. Može se pokazati da ovaj teorem vrijedi i ukoliko funkcija f nema derivaciju u konačno točaka domene, no tada je apsolutno neizostavan uvjet da f mora biti neprekinuta na čitavom $\mathbf{R}$.

Primjer 20.

Odredimo Fourierov transformat funkcije
$$f(x) = g_{[-1,0]}(x) - g_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x < 0, \\ -1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

► Uočimo da, ako stavimo $h(x) = (1 - |x|)g_{[-1,1]}(x)$, vrijedi $f(x) = h'(x)$. Budući da već znamo $\hat{h}(\lambda) = \frac{2 - 2\cos\lambda}{\lambda^2}$, onda mora vrijediti
$$\hat{f}(\lambda) = \mathscr{F}\{h'(x)\} = i\lambda\mathscr{F}\{h(x)\} = i\lambda\frac{2 - 2\cos\lambda}{\lambda^2} = i\frac{2 - 2\cos\lambda}{\lambda}, \quad (\hat{f}(0) = 0).$$
Naravno da smo to mogli dobiti i direktno, ili preko transformata 'gate' funkcije, ili na neki treći način. ◄

3.3.4. Derivacija Fourierovog transformata

Krenimo od neprekinute i apsolutno integrabilne funkcije $f(x)$. Ukoliko njezin Fourierov transformat $\mathscr{F}\{f(x)\}$ označimo s $\hat{f}(\lambda)$ možemo pisati
$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Pretpostavimo li dodatno i da je funkcija $xf(x)$ također apsolutno integrabilna dobivamo da je $\hat{f}(\lambda)$ diferencijabilna funkcija čiju derivaciju možemo računati kao:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-i\lambda x}f(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}xf(x)\,\mathrm{d}x = -i\mathscr{F}\{xf(x)\}.\end{aligned}$$
Pomnožimo li sada obje strane jednakosti s i dobivamo

Teorem 6. Derivacija Fourierovog transformata

Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekinuta i apsolutno integrabilna funkcija takva da je i funkcija $xf(x)$ apsolutno integrabilna. Tada je Fourierov transformat $\hat{f}(\lambda) = \mathscr{F}\{f(x)\}$ funkcije $f(x)$ diferencijabilna funkcija i vrijedi:
$$\mathscr{F}\{xf(x)\} = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda). \tag{16}$$
Ako pretpostavimo da je $x^nf(x)$ apsolutno integrabilna funkcija, onda induktivno dobivamo da je Fourierov transformat $\hat{f}(\lambda)$ neprekinute funkcije $f(x)$ n puta diferencijabilna funkcija te vrijedi:
$$\mathscr{F}\{x^nf(x)\} = i^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\hat{f}(\lambda). \tag{17}$$

Primjer 21.

Koristeći prethodni teorem odredimo Fourierov transformat funkcije $f(x) = xe^{-|x|}$.

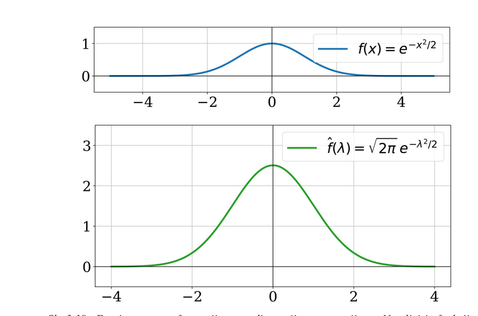
► Prisjetimo se Primjera 18 u kojem smo izračunali $\mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{2}{1+\lambda^2}$. Uvjeti gornjeg teorema su ispunjeni pa vrijedi
$$\mathscr{F}\left\{xe^{-|x|}\right\} = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{2}{1+\lambda^2} = -i\frac{4\lambda}{(1+\lambda^2)^2}.$$ ◄

Primjer 22.

Koristeći prethodna dva teorema odredit ćemo $\mathscr{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}x^2}\right\}$.

► Označimo
$$\hat{f}(\lambda) = \mathscr{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}x^2}\right\}.$$
Uočimo da $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ispunjava uvjete Teorema 5 pa vrijedi
$$\mathscr{F}\{f'(x)\} = \mathscr{F}\left\{-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right\} = \mathscr{F}\{-xf(x)\} = i\lambda\hat{f}(\lambda)$$
iz čega slijedi
$$\mathscr{F}\{xf(x)\} = -i\lambda\hat{f}(\lambda).$$
Lako se provjerava da je $xf(x)$ apsolutno integrabilna pa primjenom Teorema 6 dobivamo da je
$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda) = -i\lambda\hat{f}(\lambda),$$
odnosno
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda) = -\lambda\hat{f}(\lambda).$$
Dobili smo diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama. Opće rješenje te jednadžbe je
$$\hat{f}(\lambda) = Ce^{-\frac{1}{2}\lambda^2},$$
pri čemu je $C \in \mathbf{R}$ neodređena konstanta. Preostaje odrediti tu konstantu. Po definiciji mora vrijediti
$$\hat{f}(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$
Prisjetimo se da smo ovaj integral naučili računati još na Matematičkoj analizi 2. Dobili smo dakle sljedeći rezultat
$$\mathscr{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}x^2}\right\} = \sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}.$$

Funkcije oblika $f(x) = ae^{-(x-b)^2/(2c^2)}$, za neke realne $a, b \in \mathbf{R}$ i $c > 0$ nazivamo gausijanima (*engl.* Gaussian). Ono što lako slijedi iz gornjeg primjera jest da je Fourierov transformat gausijana opet neki gausijan. Na slici 3.19 je prikazan gausijan $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ i njegov Fourierov transformat. ◄



Sl. 3.19. Fourierova transformacija prevodi gausijane u gausijane. Na slici je funkcija iz Primjera 22 i njezin spektar.

Primjer 23.

Koristeći prethodni primjer i Teorem 4 izračunajte Fourierov transformat gausijana $\mathscr{F}\left\{ae^{-(x-b)^2/(2c^2)}\right\}$.

► Stavimo $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ i $g(x) = ae^{-(x-b)^2/(2c^2)}$ te uočimo da vrijedi
$$g(x) = af\left(\frac{x-b}{c}\right).$$
Sada iz Teorema o pomaku imamo
$$\begin{aligned}\hat{g}(\lambda) &= \mathscr{F}\{g(x)\} = a\mathscr{F}\left\{f\left(\frac{x-b}{c}\right)\right\} \\ &= ae^{-i\lambda b}\mathscr{F}\left\{f\left(\frac{x}{c}\right)\right\} = ae^{-i\lambda b}c\hat{f}(c\lambda)\end{aligned}$$
odnosno
$$\begin{aligned}\hat{g}(\lambda) &= ac\sqrt{2\pi}e^{-i\lambda b}e^{-c^2\lambda^2/2} \\ &= ac\sqrt{2\pi}e^{-b^2/(2c^2)}e^{-(\lambda+ib/c^2)^2/(2/c^2)} \\ &= \tilde{a}e^{-(\lambda-\tilde{b})^2/(2\tilde{c}^2)},\end{aligned}$$
pri čemu je $\tilde{a} = ac\sqrt{2\pi}e^{-b^2/(2c^2)}$, $\tilde{b} = -ib/c^2$ i $\tilde{c} = 1/c$. ◄

3.3.5. Konvolucija

Još smo u Poglavlju 1.5 uveli operaciju konvolucije funkcija, a zatim u Poglavlju 1.6 uvidjeli njezinu korist pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi. U ovom poglavlju nam je cilj proučiti konvoluciju još jednom, ali ovaj put sa gledišta Fourierove transformacije. Prisjetimo se prvo definicije. Konvolucija je operacija koja dvjema funkcijama $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ i $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ pridružuje treću funkciju $f*g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definiranu s:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Napomena. Kao što je već bilo rečeno, direktno se iz formule može pokazati da je konvolucija *komutativna* operacija: $f*g=g*f$; te da je *asocijativna*: $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Prisjetimo se da je korist konvolucije u poglavlju o Laplaceovoj transformaciji proizlazila iz činjenice da je konvoluciji funkcija u gornjem području odgovarao umnožak njihovih slika u donjem području. Sljedeći teorem kaže da analogni rezultat vrijedi i za Fourierovu transformaciju. Dokaz je gotovo pa identičan dokazu Teorema 13 iz Poglavlja 1.5.

Teorem 7. Slika konvolucije

Neka su f i g po dijelovima glatke, omeđene i apsolutno integrabilne funkcije s pripadnim Fourierovim transformatima $\hat{f}$ i $\hat{g}$. Tada je i funkcija $f*g$ apsolutno integrabilna i vrijedi

$$\mathscr{F}\{(f*g)(x)\}=\widehat{(f*g)}(\lambda)=\hat{f}(\lambda)\cdot\hat{g}(\lambda). \tag{18}$$

Dokaz. Činjenicu da je funkcija $f*g$ apsolutno integrabilna nećemo dokazivati. Njezin dokaz je donekle sličan računu koji ćemo provesti, no oslanja se snažniju verziju teorema o zamjeni redoslijeda integracije, takozvani Fubini-Tonellijev teorem. Taj isti teorem nam je zapravo potreban i za opravdanje zamjene redoslijeda integracije u donjem računu.

Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{(f*g)(x)\}&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}(f*g)(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ \text{redoslijeda}\\ \text{integracije}\end{bmatrix}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x-t)}\,g(x-t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}u=x-t\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\end{bmatrix}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u}\,g(u)\,\mathrm{d}u\\
&=\hat{f}(\lambda)\cdot\hat{g}(\lambda).
\end{aligned}$$

Primjer 24.

Izračunajte funkciju $f*f$ ako je $f=g_{[-a,a]}$ za neki $a>0$. Čemu je jednako $\mathscr{F}\{(f*f)(x)\}$? Izračunajte prvo direktno, a zatim i koristeći Teorem 7.

► Izračunajmo prvo $f*f$:

$$\begin{aligned}
(f*f)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} g_{[-a,a]}(t)\,g_{[-a,a]}(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_{-a}^{a} g_{[-a,a]}(x-t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-a}^{a} g_{[-a+x,a+x]}(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x\leqslant -2a,\\ \int_{-a}^{a+x}1\,\mathrm{d}t, & -2a\leqslant x\leqslant 0,\\ \int_{-a+x}^{a}1\,\mathrm{d}t, & 0\leqslant x\leqslant 2a,\\ 0, & x\geqslant 2a\end{cases}\\
&=\begin{cases}0, & x\leqslant -2a,\\ 2a+x, & -2a\leqslant x\leqslant 0,\\ 2a-x, & 0\leqslant x\leqslant 2a,\\ 0, & x\geqslant 2a\end{cases}=(2a-|x|)g_{[-2a,2a]}(x),
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili jednakost

$$g_{[-a,a]}(x-t)=\begin{cases}1, & -a\leqslant x-t\leqslant a,\\ 0, & \text{inače}\end{cases}=\begin{cases}1, & -a+x\leqslant t\leqslant a+x,\\ 0, & \text{inače}\end{cases}=g_{[-a+x,a+x]}(t).$$

Sada imamo

$$\mathscr{F}\{(f*f)(x)\}=\mathscr{F}\Big\{(2a-|x|)\,g_{[-2a,2a]}(x)\Big\}=\frac{2-2\cos 2a\lambda}{\lambda^2}=\frac{4\sin^2 a\lambda}{\lambda^2},$$

pri čemu smo koristili transformat

$$\mathscr{F}\Big\{(a-|x|)\,g_{[-a,a]}(x)\Big\}=\frac{2-2\cos a\lambda}{\lambda^2},\quad \text{za } a>0$$

iz primjera 19.

Alternativno, možemo koristiti formulu za konvoluciju i transformat iz Primjera 10 te pisati

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{(f*f)(x)\}&=\mathscr{F}\{f(x)\}\cdot\mathscr{F}\{f(x)\}=\mathscr{F}\Big\{g_{[-a,a]}(x)\Big\}^2\\
&=\left(\frac{2\sin a\lambda}{\lambda}\right)^2=\frac{4\sin^2 a\lambda}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Dodatno se za $\lambda=0$ dobije $4a^2$. ◄

Primjer 25.

Izračunajte i skicirajte funkciju $f*g$ te joj odredite Fourierov transformat ukoliko je $f(x)=u(x)e^{-x}$ i $g(x)=g_{[-1,1]}(x)$.

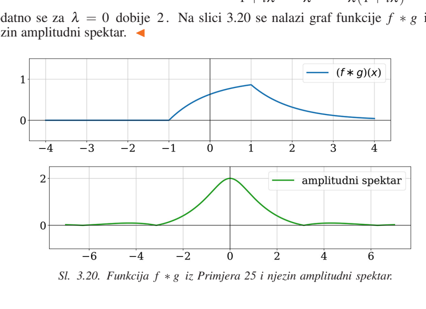
► Računamo

$$\begin{aligned}
(f*g)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-t} g_{[-1,1]}(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-t} g_{[-1+x,1+x]}(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{x-1}^{x+1} u(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{x-1}^{x+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, & x\geqslant 1,\\ \int_{0}^{x+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \int_{0}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t, & x\leqslant -1\end{cases}\\
&=\ldots=\begin{cases}e^{-x+1}-e^{-x-1}, & x\geqslant 1,\\ 1-e^{-x-1}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & x\leqslant -1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Transformat dobijemo iz formule

$$\mathscr{F}\{(f*g)(x)\}=\mathscr{F}\{f(x)\}\cdot\mathscr{F}\{g(x)\}=\frac{1}{1+i\lambda}\cdot\frac{2\sin\lambda}{\lambda}=\frac{2\sin\lambda}{\lambda(1+i\lambda)}.$$

Dodatno se za $\lambda=0$ dobije 2. Na slici 3.20 se nalazi graf funkcije $f*g$ i njezin amplitudni spektar. ◄



Sl. 3.20. Funkcija $f*g$ iz Primjera 25 i njezin amplitudni spektar.

Konvolucija u obradi signala. Prisjetimo se sada činjenice da Fourierova transformacija prebacuje signal $f(x)$ iz vremenske domene u $\hat{f}(\lambda)$ frekvencijsku domenu.

Kod obrade signala često želimo propustiti signal kroz frekvencijski filtar i zadržati samo neke frekvencije u signalu. Na primjer, želimo u signalu zadržati samo frekvencije iz raspona $\lambda\in[-100\pi,100\pi]$. Ono što možemo napraviti jest uzeti Fourierov transformat signala $\hat{f}(\lambda)$ i pomnožiti ga s funkcijom $\hat{g}(\lambda)$ definiranom s

$$\hat{g}(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\in[-100\pi,100\pi],\\ 0, & \text{inače}.\end{cases} \tag{19}$$

Zatim taj rezultat trebamo vratiti natrag u vremensku domenu što činimo koristeći inverznu Fourierovu transformaciju $\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\cdot\hat{g}(\lambda)\}$. Time dobijemo modificirani signal iz kojeg su izbrisane sve frekvencije izvan intervala $[-100\pi,100\pi]$.

Uočite sada da nam prethodni teorem omogućava pojednostavnjivanje čitavog tog procesa. Ukoliko nam je poznata funkcija $g(x)$, čiji je Fourierov transformat "gate funkcija" $\hat{g}(\lambda)$, onda se filtrirani signal može jednostavno dobiti konvolucijom signala $f(x)$ s funkcijom $g(x)$. Naime, vrijedi

$$(f*g)(x)=\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\cdot\hat{g}(\lambda)\}.$$

Prednost ovog načina je što zaobilazimo računanje Fourierovog transformata signala i onda ponovno vraćanje u vremensku domenu korištenjem inverzne transformacije. K tome, izbor funkcije $g(x)$ ovisi isključivo o filtru $\hat{g}(\lambda)$ koji želimo primijeniti, a ne i o signalu. Stoga ako želimo isti filtar primijeniti na mnogo signala, svaki od signala ćemo konvoluirati uvijek s istom funkcijom $g(x)$.

Primjer 26.

Odredimo funkciju $g(x)$ za koju vrijedi $\mathscr{F}\{g(x)\}=\hat{g}(\lambda)$, pri čemu je $\hat{g}$ gate funkcija definirana u (19).

► Tražimo $g(x)=\mathscr{F}^{-1}\{\hat{g}(\lambda)\}$, pri čemu je $\hat{g}(\lambda)=g_{[-100\pi,100\pi]}(\lambda)$. Prisjetimo li se formule za inverz Fourierove transformacije možemo pisati

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\Big\{g_{[-100\pi,100\pi]}(\lambda)\Big\}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} g_{[-100\pi,100\pi]}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-100\pi}^{100\pi} e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-100\pi}^{100\pi}(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{100\pi}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{\sin\lambda x}{\pi x}\Big|_{0}^{100\pi}=\frac{\sin 100\pi x}{\pi x}.
\end{aligned}$$

Dakle, za brisanje frekvencija $|\lambda|>100\pi$ iz nekog signala, potrebno je taj signal konvoluirati s funkcijom $\frac{\sin 100\pi x}{\pi x}$. ◄

Napomena. Iz gornjeg primjera čitamo $\mathscr{F}\{\frac{\sin 100\pi x}{\pi x}\}=g_{[-100\pi,100\pi]}(\lambda)$. Općenitije se može pokazati da za $a>0$ vrijedi

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\sin ax}{x}\right\}=\pi\,g_{[-a,a]}(\lambda).$$

Učinite to!

Primjer 27.

Na Matematičkoj analizi 2 smo naučili rješavati Cauchyjevu zadaću za nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$\begin{cases}y'(x)+ay(x)=f(x),\\ y(0)=0.\end{cases}$$

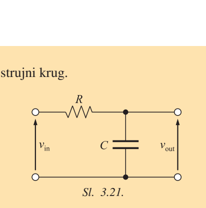
Štoviše, izveli smo formulu za rješenje $y(x)=e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t$. Uočite da uz pretpostavku da je $f(x)=0$ za $x<0$ možemo pisati

$$y(x)=\int_0^x e^{-a(x-t)}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}u(x-t)e^{-a(x-t)}f(t)\,\mathrm{d}t=(g*f)(x),$$

gdje je $g(x)=u(x)e^{-ax}$ takozvani *impulsni odziv sustava* ili *Greenova funkcija sustava*. Dakle za svaki signal $f(x)$ (pri čemu je $f(x)=0$ za $x<0$) kojim je tjeran ovaj sustav, rješenje $y(x)$ uvijek možemo dobiti konvolucijom tog signala s Greenovom funkcijom sustava $g(x)=u(x)e^{-ax}$.

Primjer 28.

Promotrimo sljedeći strujni krug.



Sl. 3.21.

Na lijevoj strani dovodimo napon $v_{\mathrm{in}}(t)$ koji varira u vremenu (za $t<0$ stavljamo $v_{\mathrm{in}}(t)=0$). Zanima nas koliko iznosi $v_{\mathrm{out}}(t)$ koji se javlja na krajevima desno.

Razmislite! Ako na lijevu stranu priključimo mikrofon a na desnu zvučnik kako očekujete da će ovaj krug modificirati zvuk koji snimi mikrofon?

► Iz Ohmovog zakona znamo da vrijedi

$$v_{\mathrm{in}}(t)-v_{\mathrm{out}}(t)=RI(t)$$

gdje je $I(t)$ jakost struje koja protječe krugom u trenutku t. Za količinu naboja na kondenzatoru vrijedi

$$Q(t)=Cv_{\mathrm{out}}(t).$$

Uzmemo li sada u obzir činjenicu da je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)=I(t)$, lako dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$v_{\mathrm{in}}(t)-v_{\mathrm{out}}(t)=RCv'_{\mathrm{out}}(t),$$

odnosno

$$v'_{\mathrm{out}}(t)+\frac{1}{RC}v_{\mathrm{out}}(t)=\frac{1}{RC}v_{\mathrm{in}}(t).$$

Ako sada pretpostavimo da je početni napon nula $v_{\mathrm{out}}(0)=0$, onda je to upravo jednadžba koju smo rješavali u prethodnom primjeru. Stoga direktno čitamo rješenje $v_{\mathrm{out}}(t)=\frac{1}{RC}(g*v_{\mathrm{in}})(t)$ gdje je $g(t)=u(t)e^{-\frac{t}{RC}}$.

Kako vidimo izlazni signal je upravo dobiven konvolucijom ulaznog signala i funkcije g koja je impulsni odziv ovog sustava. ◄

Napomena. U poglavlju o Laplaceovoj transformaciji funkcije realne varijable f, takve da je $f(x)=0$ za $x<0$, nazivali smo *originalima*. Ponekad takve funkcije zovemo *kauzalnima* ili, pogotovo ako x predstavlja vrijeme, *kauzalnim signalima*.

* * *

Napomena. U Poglavlju 1.5 govorili smo o konvoluciji u kontekstu Laplaceove transformacije. Radi se o istoj operaciji, za funkcije f_1 i f_2 konvolucija je definirana kao

$$(f_1*f_2)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

No ukoliko uzmemo da su f_1 i f_2 originali (pa posebno vrijedi da je $f_1(t)=0$ i $f_2(t)=0$ za $t<0$), onda lako vidimo da je produkt podintegralnih funkcija nula za sve $\tau<0$ i sve $\tau>t$ pa se izraz za konvoluciju pojednostavljuje na

$$(f_1*f_2)(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

što je točno izraz koji smo koristili u poglavlju o Laplaceovoj transformaciji.

3.3.6. Parsevalova jednakost za Fourierovu transformaciju

Već smo vidjeli da za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ vrijedi

$$(f*g)(x)=\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\cdot\hat{g}(\lambda)\},$$

odnosno

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\hat{f}(\lambda)\,\hat{g}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Uvrstimo li sada vrijednost $x=0$ u gornju jednadžbu, dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,g(-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\,\hat{g}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{20}$$

Stavimo li sada $\overline{h(x)}=g(-x)$, pri čemu $z\mapsto\bar{z}$ označava kompleksno konjugiranje, onda uočavamo da je

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\lambda)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,\overline{h(-x)}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}u=-x\\ \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x\end{bmatrix}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda u}\,\overline{h(u)}\,\mathrm{d}u=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda u}\,h(u)\,\mathrm{d}u}=\overline{\hat{h}(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (20) i prelaskom s varijable t na x u lijevom integralu dobivamo da vrijedi formula

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\overline{h(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\,\overline{\hat{h}(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ukoliko sada umjesto $h(x)$ uzmemo istu funkciju $f(x)$ i uočimo da vrijedi $f(x)\overline{f(x)}=|f(x)|^2$ odnosno $\hat{f}(\lambda)\overline{\hat{f}(\lambda)}=|\hat{f}(\lambda)|^2$ dobivamo Parsevalovu jednakost:

Teorem 8. Parsevalova jednakost za Fourierovu transformaciju

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\lambda. \tag{21}$$

Ova formula kao i analogna formula za Fourierov red

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

govore o očuvanju takozvane L^2-norme[1] pri prelasku iz vremenske u frekvencijsku domenu. Matematičkim rječnikom kažemo da je Fourierova transformacija *izometrija* između dvaju funkcijskih prostora.

Da bismo uvidjeli fizikalnu interpretaciju ovih jednakosti, promotrimo prvo primjer jednostavnog električnog kruga s jednim otpornikom.

Primjer 29.

Kroz otpornik otpora R protječe vremenski promjenjiva struja jakosti $I(t)=u(t)e^{-t}$, pri čemu t označava vrijeme, a $u(t)$ je jedinična step funkcija. Izračunajmo kolika je ukupna potrošnja električne energije (to jest obavljeni rad) takvog kruga.

► Prisjetimo se da snagu unutar tog strujnog kruga u trenutku t možemo računati kao $RI^2(t)$. Energija koja od vremena $t=a$ do $t=b$ u tom krugu pretvori iz električne u toplinsku iznosi

$$\int_a^b RI^2(t)\,\mathrm{d}t=R\int_a^b I^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ukupna energija koju taj krug pretvori u toplinsku je stoga

$$E=R\int_{-\infty}^{\infty}I^2(t)\,\mathrm{d}t=R\int_0^{\infty}e^{-2t}\,\mathrm{d}t=\frac{R}{2}.$$

Parsevalova jednakost (21) nam onda kaže da tu ukupnu energiju možemo računati i preko Fourierovog transformata funkcije $I(t)$. Prisjetimo se da je $\hat{I}(\lambda)=\mathscr{F}\{u(x)e^{-x}\}=\frac{1}{i\lambda+1}$. Računamo

$$\begin{aligned}
E&=R\int_{-\infty}^{\infty}I^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{R}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{I}(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{R}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{i\lambda+1}\right|^2\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{R}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2+1}\,\mathrm{d}\lambda=\frac{R}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}(\lambda)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{R}{2\pi}\pi=\frac{R}{2}.
\end{aligned}$$

Kao što vidimo, dobili smo isti rezultat. ◄

Slično se može vidjeti da ukoliko imamo periodičan signal čija je jakost u vremenu opisana funkcijom $f(t)$ temeljnog perioda T, onda prosječna snaga tog signala, odnosno energija koju taj signal nosi u jednom svom periodu, iznosi

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Tu prosječnu snagu po Parsevalovoj jednakosti (2.26) možemo računati kao sumu kvadrata amplituda kompleksnih Fourierovih koeficijenata $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$.

Drugim riječima, signal Fourierovim razvojem rastavljamo na osnovne periodičke komponente od kojih svaka doprinosi ukupnoj snazi signala proporcionalno kvadratu svoje amplitude.

Zanimljivo je vidjeti da i za mehaničke sustave vrijedi ista zakonitost. U sljedećem primjeru pokazujemo da je ukupna energija sustava koji se sastoji od utega koji oscilira na opruzi također proporcionalna kvadratu amplitude oscilacija.

Primjer 30.

Uteg mase m ovješen je na opruzi krutosti k. Označimo ravnotežnu poziciju utega kao visinu 0. U trenutku 0 uteg je ispušten s visine h u slobodno titranje. Uz pretpostavku da nema gubitka energije na trenje i otpor zraka, uteg će vječno titrati. Odredimo jednadžbu gibanja i ukupnu energiju tog sustava.

► Označimo s $f(t)$ poziciju utega u trenutku $t\geqslant 0$. Odmah uočavamo da je gibanje utega opisano diferencijalnom jednadžbom s početnim uvjetom

$$\begin{cases}mf''(t)=-kf(t), & \text{(Hookeov zakon)}\\ f(0)=h\\ f'(0)=0.\end{cases}$$

Lako se dobiva da gornja jednadžba ima jedinstveno rješenje $f(t)=h\cos\omega t$ za $t\geqslant 0$, pri čemu je $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ kutna brzina ovog sustava.

Energiju ovog sustava u svakom trenutku možemo računati kao sumu elastične potencijalne energije sadržane u opruzi E_P i kinetičke energije utega E_K,

$$\begin{aligned}
E_P(t)&=\frac{1}{2}kf(t)^2=\frac{kh^2}{2}\cos^2\omega t,\\
E_K(t)&=\frac{1}{2}mf'(t)^2=\frac{1}{2}m\omega^2h^2\sin^2\omega t=\frac{kh^2}{2}\sin^2\omega t,\\
E(t)&=E_P(t)+E_K(t)=\frac{kh^2}{2}.
\end{aligned}$$

Kao i što smo rekli, ukupna energija sustava se ne mijenja kroz vrijeme i proporcionalna je kvadratu amplitude titranja, $E\propto h^2$. ◄

3.3.7. Diracova delta funkcija

S Diracovom delta funkcijom smo se sreli već u Poglavlju 1.8. Motivacija za uvođenje ovog, naizgled, vrlo apstraktnog objekta dolazi iz primjena. Naime, u primjenama je korisno govoriti o trenutnim, impulsnim promjenama stanja promatranog sustava. Primjerice u strujnim krugovima možemo pokušati analizirati trenutno nabijanje kondenzatora nekim nabojem, ili u mehanici možemo promatrati trenutni prijelaz nepomičnog paka iz stanja mirovanja u stanje jednolikog gibanja po ledu nakon što ga udarimo hokejaškom palicom.

U oba slučaja dolazimo do problema matematičkog opisivanja promjene (odnosno derivacije) tih veličina. U prvom bi slučaju jakost struje u trenutku nabijanja bila beskonačna, a u drugom je akceleracija paka u trenutku udara beskonačna.

Kao rješenje ovih problema u Poglavlju 1.8 uveli smo Diracovu delta funkciju koja striktno govoreći uopće nije funkcija. To je objekt kojeg formalno možemo shvaćati kao derivaciju step funkcije $u(x)$. Korisno je o tom objektu razmišljati kao o funkciji koja je svuda nula, osim u nuli gdje ima vrh beskonačne visine

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0.\end{cases}$$

Dodatno, taj objekt je integrabilan i integral mu je jednak 1 na svakom intervalu koji sadrži nulu

$$\int_a^b\delta(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & \text{ako } 0\in[a,b],\\ 0, & \text{inače}.\end{cases}$$

Zbog svega ovoga Diracova delta funkcija se ponekad naziva i **jediničnim impulsom**.

Definirali smo i delta funkcije kojima je vrh pomaknut u neku dugu točku $x_0\in\mathbf{R}$ koja ne mora biti nula

$$\delta_{x_0}(x)=\delta(x-x_0).$$

Jedno od definirajućih svojstava delta funkcije je i činjenica

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x=f(0).$$

iz koje lako računamo Fourierov transformat delta funkcije

$$\mathscr{F}\{\delta(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,\delta(x)\,\mathrm{d}x=e^{-i\lambda 0}=1.$$

Općenito, imamo

$$\mathscr{F}\{\delta_{x_0}(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x=e^{-i\lambda x_0}.$$

Spomenuli smo i da se delta funkcija može derivirati (u prostoru funkcionala) i za njezinu n-tu derivaciju vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(n)}(x)=(-1)^nf^{(n)}(0).$$

Stoga je

$$\mathscr{F}\Big\{\delta^{(n)}(x)\Big\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,\delta^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^n(-i\lambda)^ne^{-i\lambda 0}=(i\lambda)^n,$$

odnosno općenitije

$$\mathscr{F}\Big\{\delta_{x_0}^{(n)}(x)\Big\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,\delta_{x_0}^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^n(-i\lambda)^ne^{-i\lambda x_0}=(i\lambda)^ne^{-i\lambda x_0}.$$

Uočite da su ove formule u skladu s Teoremom 5 o Fourierovom transformatu derivacije funkcije.

Na kraju još spomenimo zanimljivo svojstvo delta funkcije koje kaže da je ona neutralni element za operaciju konvolucije. Vrijedi

$$f*\delta=\delta*f=f.$$

Dokažite to!

Napomena. U Primjeru 27 pokazali smo da se rješenje Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases}y'(x)+ay(x)=f(x),\\ y(0)=0\end{cases}$$

može zapisati kao $y(x)=(g*f)(x)$, gdje je $g(x)=u(x)e^{-ax}$ *impulsni odziv sustava* ili *Greenova funkcija sustava*.

Razlog zašto $g(x)$ zovemo impulsnim odzivom sustava je stoga što je to upravo rješenje gornje zadaće, ukoliko stavimo da je $f(x)=\delta(x)$ jedinični impuls. Naime, tada je $y(x)=(g*\delta)(x)=g(x)$.

3.4. Diskretna Fourierova transformacija

3.4.1. Diskretna Fourierova transformacija

U primjenama često želimo Fourierovom transformacijom analizirati neki signal $f(t)$ koji nam neće biti zadan u obliku neke matematičke funkcije, već će nam biti dan niz izmjerenih vrijednosti tog signala u nekim vremenskim trenutcima. Obično govorimo o uzorkovanju (*engl.* sampliranju) tog signala u pravilnim vremenskim razmacima duljine Δt.

Razmislimo sada kako bismo u računalu napisali program koji će za signal trajanja T sekundi koji smo uzorkovali u n trenutaka razmaknutih za $\Delta t=\frac{T}{n}$ sekundi,

$$(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=(f(0),f(\Delta t),f(2\Delta t),\ldots,f((n-1)\Delta t)),$$

izračunati njegov Fourierov transformat.

Pretpostavit ćemo da je $f(t)=0$ izvan segmenta $[0,T]$. U tom slučaju

$$\hat{f}(\lambda)=\int_0^T e^{-i\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\approx\sum_{m=0}^{n-1}e^{-i\lambda m\Delta t}f(m\Delta t)\,\Delta t=\sum_{m=0}^{n-1}e^{-i\lambda m\Delta t}x_m\,\Delta t$$

pa možemo pisati

$$\hat{f}(\lambda)\approx\frac{T}{n}\sum_{m=0}^{n-1}e^{-i\lambda T\frac{m}{n}}x_m. \tag{22}$$

Greška koju radimo gornjom aproksimacijom integrala sumom je to manja što je vremenski interval uzorkovanja Δt manji, odnosno što je frekvencija uzorkovanja (*engl.* sampling rate) viša.

Običaj je da se gornji izraz također računa na diskretnoj mreži, konkretno za frekvencije oblika $\lambda_k=k\frac{2\pi}{T}$ je

$$\hat{f}\left(k\frac{2\pi}{T}\right)\approx\frac{T}{n}\sum_{m=0}^{n-1}e^{-2\pi i\frac{mk}{n}}x_m,\quad \text{za } k\in\mathbf{Z}.$$

Izraz na desnoj strani iskoristit ćemo za definiciju *diskretne Fourierove transformacije* niza $(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$. Stavljamo

$$X_k=\frac{T}{n}\sum_{m=0}^{n-1}e^{-2\pi i\frac{mk}{n}}x_m,\quad \text{za } k\in\mathbf{Z}.$$

Uočite da je niz (X_k) periodičan niz s periodom n, odnosno vrijedi $X_k=X_{k+n}$ za sve $k\in\mathbf{Z}$. Stoga je običaj da se uzima samo prvih n vrijednosti toga niza $(X_0,X_1,\ldots,X_{n-1})$. Uz to se radi jednostavnosti uzima $T=1$ pa dolazimo do sljedeće definicije diskretne Fourierove transformacije.

Definicija 1. Diskretna Fourierova transformacija

Ako je zadan niz realnih ili kompleksnih brojeva $(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$ duljine n, onda definiramo **Diskretni Fourierov transformat (DFT)** toga niza kao niz kompleksnih brojeva $(X_0,X_1,\ldots,X_{n-1})$ koji je također duljine n i definiran je formulom

$$X_k=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}e^{-2\pi i\frac{mk}{n}}x_m,\quad \text{za } k\in\{0,1,\ldots,n-1\}. \tag{23}$$

Pišemo $\mathscr{F}\{(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})\}=(X_0,X_1,\ldots,X_{n-1})$.

Budući da ovdje govorimo isključivo o konačnim nizovima realnih ili kompleksnih brojeva, korištenje iste oznake kao i za Fourierovu transformaciju neće dovesti do zabune.

Uočite da je ovako definirana operacija linearni operator s vektorskog prostora $\mathbf{C}^n$ na taj isti prostor.

Primjer 31.

Zapišite matricu operatora DFT za nizove duljine 3 u kanonskoj bazi.

► Trebamo samo izračunati u koje se vektore preslikavaju vektori kanonske baze $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ te dobivena tri vektora zapisati kao stupce matrice. Računamo

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{(1,0,0)\}&=\frac{1}{3}(1,1,1),\\
\mathscr{F}\{(0,1,0)\}&=\frac{1}{3}(1,e^{-\frac{2\pi}{3}i},e^{-2\frac{2\pi}{3}i}),\\
\mathscr{F}\{(0,0,1)\}&=\frac{1}{3}(1,e^{-2\frac{2\pi}{3}i},e^{-4\frac{2\pi}{3}i}),
\end{aligned}$$

pa dobivamo da je matrica transformacije u kanonskoj bazi jednaka

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & e^{-\frac{2\pi}{3}i} & e^{-2\frac{2\pi}{3}i}\\ 1 & e^{-2\frac{2\pi}{3}i} & e^{-4\frac{2\pi}{3}i}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

◄

Općenito, matrica DFT za nizove duljine n u kanonskoj bazi je simetrična kvadratna matrica reda n oblika

$$A=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & e^{-\frac{2\pi}{n}i} & e^{-2\frac{2\pi}{n}i}1 & \ldots & e^{-(n-1)\frac{2\pi}{n}i}\\ 1 & e^{-2\frac{2\pi}{n}i} & e^{-4\frac{2\pi}{n}i}1 & \ldots & e^{-2(n-1)\frac{2\pi}{n}i}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & e^{-(n-1)\frac{2\pi}{n}i} & e^{-2(n-1)\frac{2\pi}{n}i}1 & \ldots & e^{-(n-1)^2\frac{2\pi}{n}i}\end{bmatrix}.$$

Može se pokazati da je ova matrica (a samim time i DFT) invertibilna te vrijedi $A^*A=AA^*=\frac{1}{n}I$, pri čemu smo s $A^*=\overline{A^T}$ označili Hermitski adjungiranu matricu matrici A. Iz toga onda odmah vidimo da je $A^{-1}=nA^*$, iz čega slijedi sljedeća formula za inverznu DFT.

Teorem 9. Inverz diskretne Fourierove transformacije

Ako je $\mathbf{X}=(X_0,X_1,\ldots,X_{n-1})$ diskretni Fourierov transformat niza $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$ kao u (23), onda početni niz $\mathbf{x}$ možemo rekonstruirati iz transformiranog niza $\mathbf{X}$ koristeći formulu

$$x_k=\sum_{m=0}^{n-1}e^{2\pi i\frac{mk}{n}}X_m,\quad \text{za } k\in\{0,1,\ldots,n-1\}. \tag{24}$$

Napomena. Uočite sličnost izraza za izračun DFT i njezinog inverza. U računalu je, stoga, dovoljno implementirati računanje DFT, a inverz se onda lako dobije koristeći činjenicu $\mathscr{F}^{-1}\{\mathbf{X}\}=n\overline{\mathscr{F}\{\overline{\mathbf{X}}\}}$. (Uvjerite se u to!)

Za DFT se mogu izvesti analogoni svih svojstava koje vrijede i za običnu Fourierovu transformaciju, no mi se time u ovom kolegiju nećemo baviti.