2.

Fourierov red

Sadržaj poglavlja

Uobičajeni je postupak u matematici da se složenije funkcije prikazuju pomoću jednostavnijih. Tako na primjer, eksponencijalnu funkciju možemo prikazati kao zbroj reda

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Ta nam formula omogućava da aproksimiramo eksponencijalnu funkciju polinomom, uzimajući konačno mnogo pribrojnika s desne strane.

Poznato nam je da se Taylorovim redom mogu prikazati samo funkcije koje zadovoljavaju stroge uvjete. Tako na primjer, prekinuta se funkcija ne može prikazati Taylorovim redom. Međutim, umjesto potencija 1, x, $x^2, \ldots$, možemo odabrati i neki drugi pogodni skup funkcija pomoću kojih ćemo prikazivati složenije funkcije.

Godine 1807. francuski fizičar i matematičar Joseph Fourier koristio je u takvom prikazu *harmonike*. On je tvrdio da se svaka funkcija $f(x)$ na ograničenom intervalu može prikazati u obliku sume harmonika

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega x + \varphi_n).$$

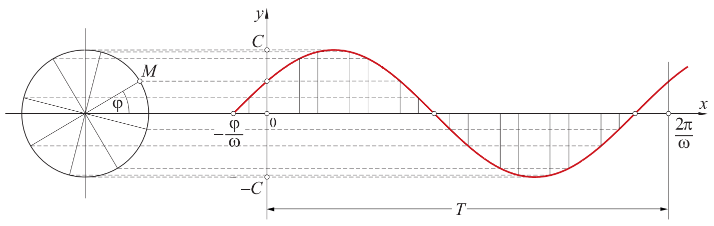
Iako su redove sličnih oblika promatrali i njegovi veliki prethodnici poput Bernoullija, D'Alemberta i Eulera, Fourierova metoda je bila toliko napredna da je trebalo proći još petnaest godina dok ne bude priznata od autoriteta njegovog doba, Laplacea, Poissona i Lagrangea. Oni su (opravdano) zamjerali Fourieru nedostatak matematičke strogosti, jer su neke njegove tvrdnje bile pogrešne. Fourier je konačno 1822. god. objavio svoj rad pod naslovom *Théorie Analytique de la Chaleur* (Analitička teorija topline) u kojem analizira problem širenja topline, opisan parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i koristi svoj revolucionarni način prikazivanja funkcija da bi riješio taj problem.

Matematičku strogost Fourierovom radu dali su kasnije Dirichlet i Riemann.

2.1. Periodične funkcije

2.1.1. Sinusoida

Zamislimo da se točka M giba jednolikom brzinom po kružnici. Promotrimo njezinu udaljenost od bilo kojeg pravca koji prolazi središtem kružnice. Najprikladnije je kružnicu postaviti u koordinatni sustav i za pravac odabrati os apscisa. Onda je ta udaljenost ordinata točke M i definira funkciju koju nazivamo **sinusoida**.



Sl. 2.1. Sinusoidu možemo zamisliti kao projekciju kružnog gibanja na os ordinata.

Točka M počinje se gibati po kružnici polumjera C u trenutku $x = 0$. Varijabla x ima fizikalno značenje *vremena* od početka vrtnje. C je pozitivan broj koji nazivamo **amplituda** sinusoide. Neka je φ kut koji radijvektor točke u početnom trenutku zatvara s osi apscisa, φ se naziva **fazni pomak**. Brzina kojom točka M kruži određena je **kružnom frekvencijom** ω. Onda ordinata točke M definira funkciju čija je jednadžba

$$f(x) = C \sin(\omega x + \varphi). \tag{1}$$

Točka će opisati puni krug kad bude $\omega x = 2\pi$, dakle, u trenutku $x = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Taj se iznos naziva **period** sinusoide i označava s $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

⋆ ⋆ ⋆

Prema adicijskom teoremu vrijedi

$$\begin{aligned} C \sin(\omega x + \varphi) &= C \sin\varphi \cos\omega x + C \cos\varphi \sin\omega x \\ &= A \cos\omega x + B \sin\omega x \end{aligned} \tag{2}$$

gdje smo označili $A := C\sin\varphi$, $B := C\cos\varphi$. Dakle, svaku sinusoidu možemo prikazati u obliku zbroja sinus i kosinus funkcije, bez faznog pomaka. Ako su A i B poznati, možemo odrediti C i φ, jer vrijedi

$$\begin{aligned} &A^2 + B^2 = C^2 \sin^2\varphi + C^2 \cos^2\varphi = C^2 &&\Longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ &\frac{A}{B} = \frac{C \sin\varphi}{C \cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi &&\Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{B} \end{aligned} \tag{3}$$

Primjer 1.

Nacrtajmo funkciju $f(x) = 2\cos x + \sin x$.

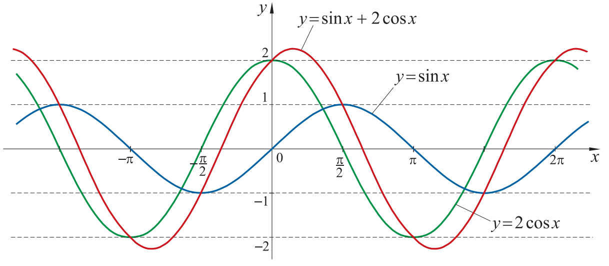
► Ovdje je $A = 2$, $B = 1$. Zato,

$$C = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{1} \Longrightarrow \varphi = \operatorname{arc\,tg} 2 \approx 63^\circ 26'.$$

Iz poznatog tangensa, kut nije jednoznačno određen. Moramo znati i u kojem se kvadrantu on nalazi. U ovom su primjeru koeficijenti A i B pozitivni. Zato su pozitivni $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$, pa se kut φ nalazi u prvom kvadrantu.

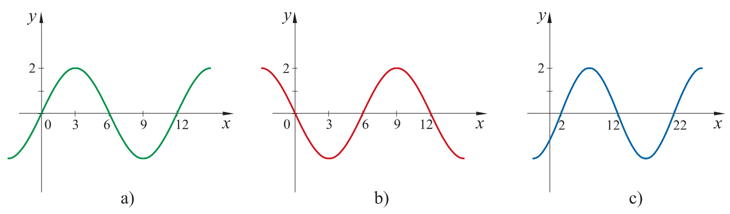
Graf funkcije skiciran je na slici 2.2.



Sl. 2.2. Nije očigledno, ali formule (2) potvrđuju da je zbroj sinus funkcije i kosinus funkcije — s različitim amplitudama ali istom frekvencijom — ponovo sinusoida. Njezina amplituda iznosi $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Primjer 2.

Odredimo jednadžbe sinusoida prema slici 2.3.a) – c).



a) b) c)

Sl. 2.3.

▶

A. $f(x) = 2\sin\dfrac{\pi}{6}x$; **B.** $f(x) = 2\sin\dfrac{\pi}{6}(x-6) = 2\sin(\dfrac{\pi}{6}x - \pi)$;

C. $f(x) = 2\sin\dfrac{\pi}{10}(x-2) = 2\sin(\dfrac{\pi}{10}x - \dfrac{\pi}{5})$. ◀

⋆ ⋆ ⋆

Nas će u nastavku najviše interesirati svojstvo **periodičnosti** sinusoide.

2.1.2. Periodične funkcije

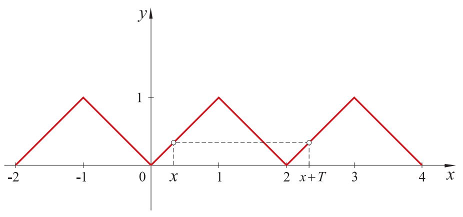
Prisjetimo se definicije periodične funkcije.

Definicija 1. ■ **Periodične funkcije**

Kažemo da je $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ **periodična funkcija**, ako postoji $T > 0$ takav da za svaki x iz domene funkcije f vrijedi

$$f(x) = f(x+T). \tag{4}$$

Broj T se naziva **period** od f. Najmanji period (ako postoji) nazivamo **osnovni** (ili **temeljni**) period.



Sl. 2.4. Periodična funkcija.

Navedimo neka svojstva periodičnih funkcija. Zbog jednostavnosti, pretpostavit ćemo da je područje definicije funkcije f skup $\mathbf{R}$.

Cjelobrojni višekratnik perioda je period. Zaista,

$$f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

prema tome, i $2T$ je period. Sada indukcijom zaključujemo da je kT period za svaki $k \in \mathbf{N}$.

Ako je f periodična s periodom T, tada je dovoljno poznavati ponašanje funkcije na bilo kojem intervalu duljine T, recimo na $[a, a+T]$. Tako vrijedi npr. za bilo koji $c \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{a} f(t+T)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Obično se f promatra na intervalima oblika $[0, T]$ ili pak $[-{}^{T}\!/_{2},\ {}^{T}\!/_{2}]$.

Temeljni period. Periodična funkcija ne mora imati osnovni period. Tako npr. $f(x) \equiv 1$ ima za period svaki pozitivni broj $T > 0$.

Također,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q},\\ 0, & x \notin \mathbf{Q},\end{cases}$$

ima za period svaki pozitivni racionalni broj $T > 0$: ako je x racionalan, tada je i $x+T$ racionalan te je $f(x) = f(x+T) = 1$. Ako je pak x iracionalan, tada je i $x+T$ iracionalan. Zato je uvijek $f(x) = f(x+T)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Temeljni period ne postoji, jer nema najmanjeg pozitivnog racionalnog broja.

Ova je funkcija vrlo nepravilna, ona je prekinuta u svakoj točki. Može se dokazati (u što se ovdje nećemo upuštati) da svaka periodična funkcija f različita od konstante, a koja je neprekinuta barem u jednoj točki, ima temeljni period.

Operacije s periodičnim funkcijama. Zbroj i umnožak periodičnih funkcija s istim periodom opet je periodična funkcija s tim periodom.

Eventualno se pritom temeljni period može smanjiti, npr. $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ ima period π, dok funkcije sinus i kosinus imaju period 2π.

Zbroj (ili umnožak) funkcija koje su periodične, ali s različitim periodima, ne mora biti periodična funkcija.

Za periode T_1 i T_2 funkcija f, odnosno g, kažemo da su **sumjerljivi** ako je omjer $T_1 : T_2$ racionalan broj. Tada postoje prirodni brojevi p i q takvi da vrijedi $pT_2 = qT_1$. Tada je $T = pT_2 = qT_1$ njihov zajednički period te je $f+g$ periodična s periodom T. Npr.

T_1	T_2	zajednički period	primjer funkcije
π	${}^{\pi}\!/_{3}$	π	$\operatorname{tg} x + \cos 6x$
4π	6π	12π	$\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{3}$
2π	$\sqrt{2}\pi$	ne postoji	$\cos x + \sin\sqrt{2}\,x$

Primjer 3.

Kad će funkcija $f(x) = A\cos\alpha x + B\sin\beta x$, $\alpha,\ \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$ biti periodična?

▶ $f(x+T) - f(x) = 0$ daje

$$\begin{aligned}&A\cos(\alpha x + \alpha T) - A\cos\alpha x + B\sin(\beta x + \beta T) - B\sin\beta x\\ &\qquad = 2B\cos(\beta x + \frac{\beta T}{2})\sin\frac{\beta T}{2} - 2A\sin(\alpha x + \frac{\alpha T}{2})\sin\frac{\alpha T}{2} = 0\end{aligned}$$

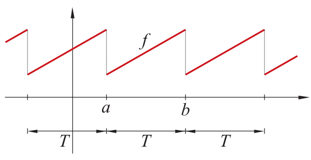
za svaki $x \in \mathbf{R}$, i zato mora biti $\sin\dfrac{\alpha T}{2} = 0$, $\sin\dfrac{\beta T}{2} = 0$. Prema tome, $\alpha T = 2k_1\pi$, $\beta T = 2k_2\pi$ za neke prirodne k_1, k_2, tj. $T = \dfrac{2k_1\pi}{\alpha} = \dfrac{2k_2\pi}{\beta}$. Odavde slijedi da su α i β sumjerljivi, jer vrijedi $\alpha : \beta = k_1 : k_2$. Dakle, da bi f bila periodična funkcija, broj α/β mora biti racionalan. ◀

2.1.3. Periodična proširenja

Svaka se funkcija $f : \langle a, b] \to \mathbf{R}$ može proširiti do periodične funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s periodom $T = b - a$.

Pritom je dovoljno situaciju s intervala $\langle a, b]$ “preslikati” na svaki susjedni interval iste duljine.

Ako je početna funkcija definirana na zatvorenom intervalu $[a,b]$, onda u rubnim točkama ovako konstruiranih intervala funkcija možda neće biti dobro definirana (kad god je $f(a) \neq f(b)$). Njezinu vrijednost u tim točkama možemo onda uzeti uzeti po volji. U teoriji Fourierovih redova obično se uzima srednja vrijednost $\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$.



Sl. 2.5. Funkcija i njezino periodično proširenje.

Primjer 4.

Uvjerimo se da su funkcije $f(x) = \arcsin(\sin x)$ i $g(x) = \arccos(\cos x)$ periodične. Nacrtajmo njihove grafove.

► Vrijedi

$$f(x+2\pi) = \arcsin(\sin(x+2\pi)) = \arcsin(\sin x) = f(x),$$

te je f periodična s periodom 2π. Nadalje, po definiciji funkcije arkus sinus, vrijedi

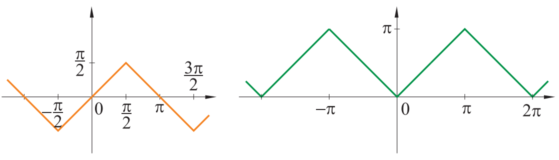
$$\arcsin(\sin x) = x\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ako je pak $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, tada je $x - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i zato

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin x) &= \arcsin(\sin(x-\pi+\pi)) \\ &= \arcsin(-\sin(x-\pi)) = -\arcsin(\sin(x-\pi)) = -x+\pi.\end{aligned}$$

Time je funkcija f definirana na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ koji ima duljinu njezinog perioda, i dalje se periodički ponavlja (slika 2.6 lijevo).

Slično dobivamo i graf finkcije $\arccos(\cos x)$ (slika 2.6 desno). ◄



Sl. 2.6. Graf funkcije $\arcsin(\sin x)$ *(lijevo), te funkcije* $\arccos(\cos x)$ *(desno).*

⋆ ⋆ ⋆

Neka je f periodična s periodom 2π. Tada je funkcija $x \mapsto f\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ periodična s periodom T. Tako na primjer, funkcija $x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ ima period T.

Neka je sada f periodična s periodom T. Tada je funkcija $x \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ periodična s periodom 2π. Zato je u teorijskim razmatranjima dovoljno promatrati periodične funkcije s periodom 2π.

Parna i neparna proširenja funkcije. Funkcija f je **parna**, ako vrijedi

$$f(-x) = f(x)$$

za svaki realni x iz domene funkcije f. (Ta domena stoga mora biti simetrična s obzirom na ishodište.) Graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os Oy.

Funkcija f je **neparna**, ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Njezin je graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Funkcije 3, $2x^2$, $3x^4$, $\cos x$, $\sin(x^2)$ su parne. Funkcije $3x - 2x^3$, $\sin x$, $\operatorname{sh} x$ su neparne. Funkcija e^x niti je parna, niti neparna (i 'većina' funkcija je takva).

Ako je f bilo koja funkcija, tada je funkcija definirana formulom

$$f_p(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

parna, dok je

$$f_n(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

neparna (*provjeri!*). Pritom vrijedi

$$f(x) = f_p(x) + f_n(x).$$

Dakle, svaka se funkcija može rastaviti na zbroj parne i neparne funkcije.

To je upravo situacija koju nalazimo pri definiciji hiperboličkih funkcija; krenuvši od eksponencijalne koja nije niti parna niti neparna, dobivamo

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Dakle, funkcija kosinus hiperbolički je upravo parni dio eksponencijalne funkcije, dok je funkcija sinus hiperbolički njezin neparni dio. Pritom vrijedi $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.

⋆ ⋆ ⋆

Funkciju $f : [0,L] \to \mathbf{R}$ možemo proširiti do periodične funkcije s periodom $T = 2L$, tako da ova bude bilo parna bilo neparna. U tu je svrhu najprije potrebno definirati to proširenje na intervalu $[-L, 0]$.

Želimo li dobiti parnu funkciju, onda za $x \in [-L, 0]$ stavljamo $f(x) = f(-x)$. (Primijeti da je tad $-x \in [0, L]$.)

Želimo li dobiti neparnu funkciju, onda za $x \in [-L, 0]$ stavljamo $f(x) = -f(-x)$.

Sad je dovoljno ovu funkciju, definiranu na intervalu $[-L, L]$, proširiti do periodične funkcije.

Primjer 5.

Odredimo i skicirajmo parno, odnosno neparno, periodično proširenje funkcije $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

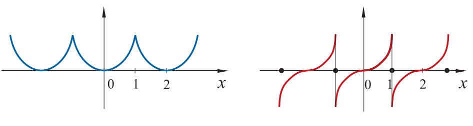
► Za parno proširenje će biti

$$f(x) = f(-x) = (-x)^2 = x^2, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Za neparno proširenje će biti

$$f(x) = -f(-x) = -(-x)^2 = -x^2, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Ova funkcija u točkama $\ldots -3$, -1, 1, $3\ldots$ nije dobro definirana. pa prema dogovoru u tim točkama za njezinu vrijednost uzimamo 0 (sredinu lijevog i desnog limesa). ◄



Sl. 2.7. Parno periodično proširenje (lijevo) i neparno (desno) funkcije $f(x) = x^2$ *definirane na intervalu* $[0,1]$.

2.2. Trigonometrijski Fourierov red

Promatrat ćemo sinusoide s cjelobrojnim harmonicima (frekvencijama):

$$\frac{1}{2}, \quad \cos x, \quad \sin x, \ldots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \ldots$$

Budući da je $2\pi/n$ period od $\cos nx$ i od $\sin nx$, onda je 2π zajednički period svih ovih funkcija. Prema tome je

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

periodična funkcija s periodom 2π. Također, ako red

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5}$$

konvergira, on definira periodičnu funkciju f perioda 2π. Ovaj red se naziva **(trigonometrijski) Fourierov red** za funkciju f.

Osnovni problemi koje ćemo proučavati su

1. Ako je f periodična s periodom 2π, kada će postojati njezin Fourierov red?

2. Ako postoji Fourierov red od f oblika (5), kako se računaju koeficijenti a_n, b_n?

3. U kojem smislu Fourierov red aproksimira funkciju f?

Odgovorit ćemo najprije na pitanje 2.

Računanje koeficijenata a_n i b_n zasniva se na svojstvu ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija.

2.2.1. Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Za funkcije f, $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ kažemo da su **ortogonalne** na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{6}$$

Sljedeću lemu provjerite neposrednim integriranjem. Pri računanju integrala koristite se formulama (koje vrijede i u slučaju $m = n$):

$$\begin{aligned}
\sin mx \sin nx &= \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2},\\
\cos mx \cos nx &= \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2},\\
\sin mx \cos nx &= \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}.
\end{aligned}$$

Lema 1.

Trigonometrijski sustav: $\frac{1}{2}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, \ldots$ ortogonalan je na intervalu $[-\pi, \pi]$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi, & n = 0,\\ 0, & n > 0,\end{cases}\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = 0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \sin nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n,\\ \pi, & m = n,\end{cases}\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \cos nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n,\\ \pi, & m = n,\end{cases}\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \sin nx\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Računanje koeficijenata trigonometrijskog Fourierovog reda. Relacije (7) omogućavaju nam odrediti koeficijente Fourierovog reda. Neka je

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{8}$$

Tada integriranjem dobivamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0\pi + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\mathrm{d}x\right] = a_0\pi$$

pri čemu smo zamijenili poredak sumiranja i integriranja i iskoristili relacije (7). Analogno, množenjem relacije (8) s $\cos nx$ i potom integriranjem, uz pomoć relacija (7) dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x\\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \cos nx\,\mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \cos nx\,\mathrm{d}x\right] = a_n\pi
\end{aligned}$$

Na sličan način imamo i

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x\\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \sin nx\,\mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \sin nx\,\mathrm{d}x\right] = b_n\pi
\end{aligned}$$

Ovakav izvod formula za koeficijente reda dao je Euler[1] 1777. god. i one se stoga ponekad nazivaju **Eulerove formule**. Zasad nemamo opravdanja za postupak zamjene integriranja i sumiranja u tom izvodu. Više o tome govorit ćemo kasnije.

Nadalje, čak i u slučaju kad postoji Fourierov red i kad je račun s formulom (8) korektan, nismo sigurni da će ta suma *predstavljati funkciju* f. Zaista, to općenito i neće biti slučaj. Stoga, dok ne pojasnimo detaljnije vezu između funkcije f i sume reda (8), tu ćemo sumu privremeno označavati drugim imenom.

Definicija 2. ■ Fourierov red

Fourierov red zadane funkcije f je red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{9}$$

kojemu se koeficijenti računaju formulama

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos n\xi\,\mathrm{d}\xi,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned} \tag{10}$$

Koeficijenti a_0, a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots$ nazivaju se **Fourierovi koeficijenti** od f, dok se pribrojnici u formuli (9) zovu **harmonici**.

Vezu funkcije f i njezinog Fourierovog reda S označavamo ovako:

$$f(x) \sim S(x).$$

2.2.2. Postojanje i konvergencija Fourierovog reda

Kad će trigonometrijski Fourierov red biti jednak funkciji f? Dokazat ćemo da u (8) vrijedi jednakost za široku klasu funkcija važnih u primjenama. Opišimo tu klasu.

Definicija 3. ■ Po dijelovima nepreknute funkcije

Kažemo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ **po dijelovima neprekinuta** na intervalu $[a, b]$ ako je f neprekinuta na $[a, b]$, ili ima na tom intervalu samo konačno mnogo prekida. Tada postoje točke $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takve da je f neprekinuta na intervalima (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$. Ako u djelišnim točkama postoje i konačni su jednostrani limesi

$$f(a+0), \quad f(x_i \pm 0),\ i = 1, \ldots, n-1, \quad f(b-0)$$

tada prekide nazivamo **prekidima prve vrste**.

U točkama prekida x_i funkcija može imati bilo koju vrijednost.

Ukoliko su svi prekidi prekidi prve vrste, tada je po dijelovima neprekinuta funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ograničena na $[a, b]$, jer se na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ može proširiti do neprekinute funkcije. Zato je f i **apsolutno integrabilna** na $[a, b]$, tj. postoji i konačan je $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Definicija 4. ■ Po dijelovima glatka funkcija

Kažemo da je funkcija **po dijelovima glatka** ako postoji rastav intervala $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takav da je f neprekinuto diferencijabilna na svim intervalima (x_{i-1}, x_i). U ovom slučaju jednostrani limesi $f'(x_i \pm 0)$ ne moraju biti konačni.

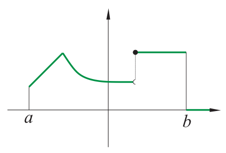
Definicija 5. ■ Dirichletovi uvjeti

Kažemo da f zadovoljava **Dirichletove uvjete** na intervalu $[a,b]$, ako vrijedi

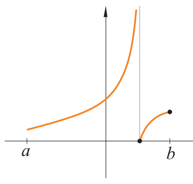
1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste,

2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

Ako funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete, tada se interval $[a,b]$ može rastaviti na konačan broj podintervala na kojima je funkcija neprekinuta i monotona, a na rubovima podintervala ima konačne limese.



Sl. 2.8. Primjer funkcije koja zadovoljava Dirichletove uvjete



Sl. 2.9. Primjer funkcije koja ne zadovoljava Dirichletove uvjete

Odgovorimo sada na pitanje: kada postoji i čemu je jednaka suma Fourierovog reda periodične funkcije?

Teorem 2. ■ Konvergencija Fourierovog reda

Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:

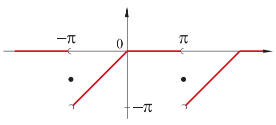
(i) $S(x) = f(x)$, ako je f neprekinuta u točki x

(ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, ako je x točka prekida za f.

Napomena. Ovaj teorem ćemo dokazati u dodatku ovom poglavlju. Uvjet glatkosti u ovom teoremu nije nužna. On će vrijediti i ukoliko funkcija f zadovoljava samo Dirichletove uvjete, međutim, dokaz tome je složeniji.

Primjer 6.

Periodičnu funkciju f s periodom 2π, zadanu slikom 2.10, razvijmo u Fourierov red.



Sl. 2.10.

▶ Funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete. Također, vrijedi $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ za svaki $x \in \mathbf{R}$. Zato će se ona podudarati sa svojim Fourierovim redom u svakoj točki. Vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$$

te je njezin period $T = 2\pi$. Zato

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x\,.$$

Integral računamo parcijalnom integracijom. Dobivamo

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\big(1 - \cos n\pi\big)\,, \qquad n \geqslant 1\,.$$

Iz

$$\cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1\,, & \text{za parni } n \\ -1\,, & \text{za neparni } n \end{cases}$$

zaključujemo da su svi koeficijenti a_n s parnim indeksom jednaki nuli:

$$a_{2n} = 0\,, \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)^2\pi}\,.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right). \quad ◀$$

2.2.3. Fourierov red periodične funkcije

Neka je sada funkcija f periodična s periodom $T = 2L$. Onda je funkcija $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$ periodična s periodom 2π:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)\,.$$

Da bismo odredili Fourierov red za funkciju f, napisat ćemo najprije Fourierov red za funkciju g, i zatim iskoristiti vezu

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{T}\right) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Tako iz (10) dobivamo

$$f(x) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{11}$$

Koeficijente računamo formulama

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\mathrm{d}\xi = \begin{bmatrix} L\xi/\pi = x \\ \mathrm{d}\xi = \pi/L\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\cos n\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\cos n\xi\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{12}$$

Ove formule izvedene su za slučaj kad periodičnu funkciju promatramo na *simetričnom* intervalu $[-L, L]$ duljine perioda. Napišimo sad i formule za najopćenitiji slučaj, kad funkciju promatramo na bilo kojem intervalu $[a,b]$ duljine T.

Trigonometrijski Fourierov red

Trigonometrijski Fourierov red za funkciju f periodičnu s periodom $T = b - a$ glasi:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right). \tag{13}$$

Koeficijenti se računaju formulama

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, \mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{14}$$

Primjer 7.

Funkciju $f(x) = x$ razvij u Fourierov red na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

► Period iznosi $T = 1$. Koeficijente računamo po formuli (14):

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 x\, \mathrm{d}x = 1.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 x \cos(2n\pi x)\, \mathrm{d}x \\ &= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \cos(2n\pi x)\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \dfrac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \end{bmatrix} \\ &= 2 \left(x \cdot \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \sin(2n\pi x)\, \mathrm{d}x \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 x \sin(2n\pi x)\, \mathrm{d}x \\ &= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \sin(2n\pi x)\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = -\dfrac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi} \end{bmatrix} \\ &= 2 \left(-x \cdot \frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \cos(2n\pi x)\, \mathrm{d}x \right) = -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

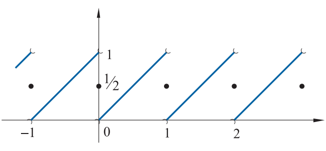
Zato je

$$S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi x)$$

i vrijedi

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2} [f(+0) + f(1-0)] = \frac{1}{2}, & \text{za } x = 0 \text{ i } x = 1. \end{cases}$$

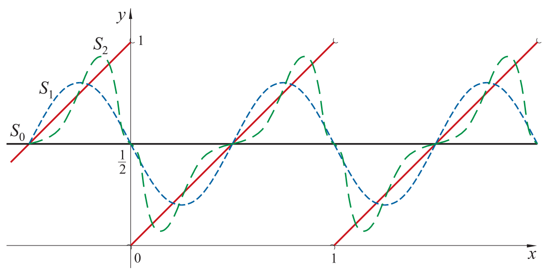
Graf Fourierovog reda S dan je na slici 2.11.



Sl. 2.11. Fourierov red funkcije iz Primjera 7 predstavlja periodično proširenje funkcije f.
Obrati pozornost na vrijednost u točkama prekida.

Nekoliko prvih parcijalnih suma tog reda glasi

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2}, \\ S_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x), \\ S_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x) - \frac{1}{2\pi} \sin(4\pi x). \end{aligned}$$ ◄



Sl. 2.12. Aproksimacija funkcije s prve tri parcijalne sume njezinog Fourierovog reda.

---

[1] Leonhard Euler (1707–1783), švicarski matematičar

2.2.4. Fourierov red parnih i neparnih funkcija

Ako je funkcija f, definirana na simetričnom intervalu $[-L, L]$, parna, odnosno neparna, tada će njezin Fourierov red sadržavati samo kosinus, odnosno sinus članove:

Teorem 3. ■ Fourierov red parnih i neparnih funkcija

1. Ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki x, tj. f parna funkcija, tada je $b_n = 0$ za svaki n, jer je odgovarajuća podintegralna funkcija u formuli (12) neparna. Njezin Fourierov red glasi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{15}$$

Koeficijenti uz kosinus funkcije računaju se formulama

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \quad n \geqslant 0. \tag{16}$$

2. Ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki x, tj. ako je f neparna funkcija, tada zbog istih razloga vrijedi $a_n = 0$ za svaki n. Fourierov red glasi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{17}$$

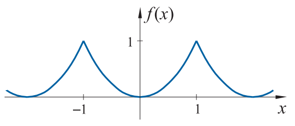
a koeficijenti se računaju formulama

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \quad n \geqslant 1. \tag{18}$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u Fourierov red po kosinus, odnosno sinus funkcijama.

Primjer 8.

Razvij u Fourierov red funkciju definiranu na intervalu $[-1, 1]$ formulom $f(x) = x^2$ (slika 2.13).



Sl. 2.13. Fourierov red parne funkcije sadržavat će samo kosinus članove.

► Funkcija f je parna. Vrijedi $L = 1$. Po formuli (16) dobivamo koeficijente

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$
$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) \, \mathrm{d}x.$$

Nakon uzastopne parcijalne integracije dobivamo

$$a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2} (-1)^n.$$

Prema tome, Fourierov red funkcije f glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \dots \right) \end{aligned}$$ ◄

⋆ ⋆ ⋆

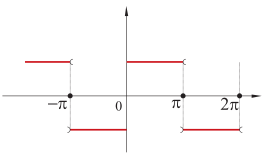
Ako je funkcija f u početku definirana na intervalu $[0, L]$, možemo je razviti u red samo po kosinus, odnosno samo po sinus funkcijama tako da je nadopunimo na intervalu $[-L, 0]$ do parne, odnosno neparne funkcije. Pritom će njezin period iznositi $T = 2L$, i takva dva proširenja će se, jasno, razlikovati na intervalu $[-L, 0]$.

Ilustrirajmo to u sljedeća dva primjera.

Primjer 9.

Funkciju $f(x) = \frac{\pi}{4}$ razvij u Fourierov red na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ po sinus funkcijama. Pomoću dobivenog razvoja sumiraj redove

A. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots;$ **B.** $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots.$



Sl. 2.14. Fourierov red neparne funkcije sadržavat će samo neparne članove.

► Računamo po formuli (18):

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2n} \left[1 - (-1)^n \right].$$

Dakle, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$. Zato

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots, \qquad 0 < x < \pi.$$

Specijalno, za $x = \pi/2$ dobivamo

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Za $x = \pi/3$ dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{5}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) + \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{9} \cdot 0 + \dots \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots \right), \end{aligned}$$ ◄

i suma reda pod **B.** iznosi $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Primjer 10.

Funkciju $f(x) = x$ razvij u intervalu $[0, \pi]$

A. po kosinus funkcijama; **B.** po sinus funkcijama.

Koristeći razvoj u **A.** izračunaj sumu reda $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

► **A.** Funkcija se može proširiti na simetričan interval $[-\pi, \pi]$ tako da bude bilo parna, bilo neparna. Proširimo je do parne funkcije. Tada je poluperiod $L = \pi$ i po (16) imamo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, \mathrm{d}x = \pi, \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\,\pi}\,[\cos n\pi - 1].$$

Dakle,

$$a_{2n} = 0\,, \qquad a_{2n+1} = -\frac{4}{(2n+1)^2\,\pi}\,.$$

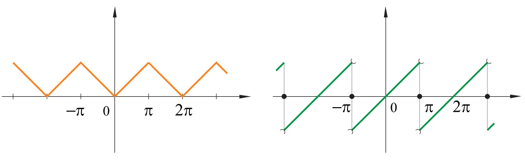
Tako smo dobili:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x\,, \qquad 0 \leqslant x < \pi. \tag{19}$$

Na intervalu $[-\pi, 0]$ ovaj red predstavlja funkciju $-x$. Na slici 2.15 (lijevo), nacrtan je graf dobivenog Fourierovog reda.

Stavljajući u (19) $x = 0$, dobivamo

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}\,.$$



Sl. 2.15. Parno periodično proširenje funkcije $f(x) = x$ (lijevo) i njezino neparno proširenje (desno).

B. Po formuli (18),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-x\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{\pi}\,(-1)^{n+1}\,. \end{aligned}$$

te je

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\sin nx\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Ovaj trigonometrijski red predstavlja funkciju nacrtanu na slici 2.15 (desno). ◀

2.3. Svojstva Fourierovog reda

2.3.1. Spektar periodične funkcije

Fourierov red periodične funkcije sastavljen je od niza harmonika čije su frekvencije cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

Diskretni spektar periodične funkcije

Trigonometrijski Fourierov red može se napisati u obliku

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x) = \pm\frac{1}{2}\,c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\sin(n\omega_0 x + \varphi_n)$$

gdje je, po formulama (3)

$$c_0 = |a_0|,$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

c_n je **amplituda** n–tog harmonika, a φ_n **fazni pomak** n–tog harmonika.

Niz (c_n) naziva se **(diskretni) amplitudni spektar** a (φ_n) **fazni spektar** funkcije f. Nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ zovemo **(diskretni) sinusni**, odnosno **kosinusni spektar** funkcije f.

Broj c_n naznačava s kojim intezitetom n–ti harmonik ulazi u rastav funkcije f. Parna funkcija će imati samo kosinusni, a neparna samo sinusni dio spektra.

2.3.2. Jednoznačnost spektralnog prikaza

Ako je poznat spektar funkcije, je li onda funkcija f jednoznačno određena? Drugim riječima, mogu li dvije različite funkcije f i g imati isti spektar?

Na ovo pitanje nije sasvim jednostavno odgovoriti. Za naše svrhe dovoljno će biti da promatramo funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete. U dokaz sljedećeg teorema nećemo se ovdje upuštati:

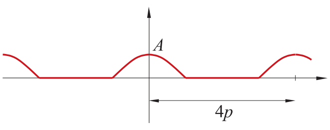
Teorem 4.

Ako periodičke funkcije f i g zadovoljavaju Dirichletove uvjete i imaju isti diskretni spektar, onda se one podudaraju u svim točkama osim možda u točkama prekida.

U smislu ovog teorema govorit ćemo da je funkcija jednoznačno određena svojim amplitudnim i faznim spektrom. Isto vrijedi za sinusni i kosinusni spektar.

Primjer 11.

Odredimo spektar frekvencija ispravljene kosinusoide prema slici 2.16.



Sl. 2.16. Graf ispravljene kosinusoide.

▶ Funkcija je periodična s periodom $T = 4p$. Njezina jednadžba na intervalu $[-2p, 2p]$ glasi

$$f(x) = \begin{cases} A\,\cos\dfrac{\pi x}{2p}\,, & |x| \leqslant p, \\ 0\,, & p \leqslant |x| \leqslant 2p. \end{cases}$$

Zbog parnosti, svi su koeficijenti b_n jednaki nuli.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^p A\,\cos\frac{\pi x}{2p}\,\mathrm{d}x = \frac{2A}{\pi}\,, \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{p}\int_0^p \cos\frac{\pi x}{2p}\,\cos\frac{n\pi x}{2p}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{p}\int_0^p \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi x + n\pi x}{2p} + \cos\frac{n\pi x - \pi x}{2p}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{2p}\cdot\frac{2p}{\pi}\left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{\pi x}{2p}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\dfrac{\pi x}{2p}}{n-1}\right)\Bigg|_0^p \\ &= \frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\dfrac{\pi}{2}}{n-1}\right) = -\frac{2A}{\pi}\,\frac{\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n^2-1}\,. \end{aligned}$$

ukoliko je $n > 1$. Za $n = 1$ trebamo uvrstiti tu vrijednost prije integriranja da bismo izračunali koeficijent a_1. Možemo međutim shvatiti n u gornjem integralu kao parametar i pustiti ga da teži k 1:

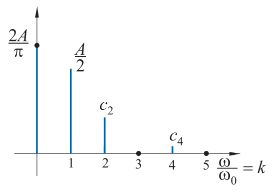
$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{n\to 1} a_n = \lim_{n\to 1} -\frac{2A}{\pi}\,\frac{\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n^2-1} \\ &= -\frac{2A}{\pi}\,\lim_{n\to 1}\,\frac{-\dfrac{\pi}{2}\,\sin\dfrac{n\pi}{2}}{2n} = \frac{A}{2}\,. \end{aligned}$$

Za spektar funkcije f vrijedi $c_n = |a_n|$, jer su koeficijeni b_n jednaki nuli. Dakle,

$$c_0 = \frac{2A}{\pi}\,, \qquad c_1 = \frac{A}{2}\,,$$

$$c_{2n} = \frac{2A}{\pi(4n^2-1)}\,, \qquad c_{2n+1} = 0\,, \quad n \geqslant 1.$$

Taj je spektar prikazan na slici 2.17. ◀



Sl. 2.17. Prikaz spektra frekvencija ispravljene kosinusoide. Periodična funkcija ima diskretan spektar čije su frekvencije višekratnici osnovne frekvencije ω_0.

2.3.3. Deriviranje i integriranje Fourierovog reda

Razvijemo li funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = x$ u Fourierov red na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, dobit ćemo sljedeće prikaze:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad -\pi < x < \pi, \tag{20}$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \qquad -\pi < x < \pi. \tag{21}$$

Deriviranjem *član po član* reda (20), dobit ćemo

$$2x = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-n\sin nx)$$

a odavde se dobiva rastav (21). Dakle, deriviranjem članova Fourierovog reda, dobili smo ispravnu formulu. Hoće li to uvijek biti slučaj? Primijenimo li istu tehniku na red (21), dobit ćemo

$$1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cos nx,$$

no ova je jednakost besmislena! Uvjeri se da red zdesna nije konvergentan.

Što se događa pri deriviranju članova Fourierovog reda? Promotrimo općenitu formulu, za Fourierov red funkcije na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. (Isti zaključak će vrijediti i za bilo koji drugi interval.) Ako je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

onda formalnim deriviranjem, *član po član*, dobivamo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n\cdot a_n\sin nx + n\cdot b_n\cos nx)$$

što je po svom obliku opet Fourierov red. Međutim, njegovi su koeficijenti, u odnosu na koeficijente početnog reda množeni s faktorom n. Radi toga, novodobiveni red ne mora konvergirati, a u slučaju da konvergira, konvergencija će biti sporija.

Dovoljan uvjet da bismo smjeli Fourierov red derivirati član po član jest da on konvergira uniformno prema funkciji f. To će biti slučaj kad god je funkcija f neprekinuta, a njezina derivacija f' zadovoljava Dirichletove uvjete (pa se može rastaviti u Fourierov red).

Ako je f zadana samo na konačnom intervalu i na njemu je neprekinuta, to posebno znači da se njezine vrijednosti na krajevima intervala moraju podudarati.

Teorem 5. ■ **Deriviranje Fourierovog reda**

Pretpostavimo da je periodična funkcija f perioda 2π neprekinuta na $\mathbf{R}$ i ima sljedeći Fourierov prikaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx.$$

Ako f' zadovoljava Dirichletove uvjete, onda se ona može prikazati u obliku

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot n\cdot\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)\cdot n\cdot\sin nx.$$

Uvjeti teorema ne mogu se oslabiti. Uvjeri se u to rješavajući zadatke 15.–17.

* * *

Pri integriranju članova Fourierovog reda nećemo imati problem s konvergencijom, dobiveni red će uvijek konvergirati. Ilustrirajmo to s prije navedenim primjerom. Krenimo od formule

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\,, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Integrirajući ovaj red član po član, dobivamo

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{d}x &= 2\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int\sin nx\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

tj.

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{\cos nx}{n} + C\,.$$

Konstanta integracije C je upravo član $\frac{a_0}{2}$ u razvoju funkcije x^2 u Fourierov red:

$$C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Vidimo da će opći koeficijenti integriranog reda biti dijeljeni s faktorom n, zato je njegova konvergencija neupitna.

Primijetimo samo da se pri integriranju Fourierovog reda može u općem slučaju dobiti red koji neće biti Fourierov. Naime, ako je u početnom redu koeficijent a_0 različit od nule, pri integriranju ćemo dobiti član a_0x koji ne pripada članovima Fourierovog reda. Dakako, taj se član također može rastaviti po sinus i kosinus funkcijama.

2.3.4. Parsevalova jednakost

Funkcije $\{\frac{1}{2},\ \sin(n\omega_0x + \varphi_n),\ n \in \mathbf{N}\}$ su također ortogonalne na intervalu $[a, b]$ duljine T. Lako se provjerava

$$\int_a^b \sin^2(n\omega_0x + \varphi_n)\,\mathrm{d}x = \frac{T}{2},$$

$$\int_a^b \sin(n\omega_0x + \varphi_n)\sin(m\omega_0x + \varphi_m)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{za } n \neq m,$$

$$\int_a^b \tfrac{1}{2}\cdot\sin(n\omega_0x + \varphi_n)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_a^b\left(\tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(n\omega_0x + \varphi_n)\right)^2\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b\left[\frac{1}{4}c_0^2 + 2c_0\sum_{n=1}^{\infty} c_n\tfrac{1}{2}\cdot\sin(n\omega_0x + \varphi_n) + \right.\\ &\qquad\left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(n\omega_0x + \varphi_n)\right)^2\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}c_0^2\int_a^b\mathrm{d}x + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_0c_n\int_a^b\tfrac{1}{2}\cdot\sin(n\omega_0x + \varphi_n)\,\mathrm{d}x\\ &\qquad + \sum_{n,m=1}^{\infty} c_nc_m\int_a^b\sin(n\omega_0x + \varphi_n)\sin(m\omega_0x + \varphi_m)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{T}{4}c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\int_a^b\sin^2(n\omega_0x + \varphi_n)\,\mathrm{d}x.\\ &= \frac{T}{4}c_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\end{aligned}$$

$$= \frac{T}{4}a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Teorem 6. ■ Parsevalova jednakost

Za Fourierove koeficijente $a_0, a_1, a_2 \dots$ i $b_1, b_2, \dots$ vrijedi **Parsevalova jednakost**

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{22}$$

Primjer 12.

Koristeći razvoj funkcije $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$ u Fourierov red i Parsevalovu jednakost, izračunaj sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

► Znamo da za ovu funkciju vrijedi

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad -\pi < x < \pi$$

Primijenimo na ovaj razvoj Parsevalovu jednakost. Najprije,

$$\frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^4}{5}.$$

Zato je, prema (22),

$$\frac{1}{2}c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5},$$

i odavde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \ ◄$$

2.3.5. Jednolika konvergencija Fourierovog reda

Pokažimo sada pod kojim će uvjetima Fourierov red konvergirati jednoliko (uniformno) k funkciji f na svakom zatvorenom intervalu na kojem je f neprekinuta. U tom će se slučaju Fourierov red moći derivirati član po član.

Teorem 7. ■ Jednolika konvergencija Fourierovog reda

Neka je f neprekinuta funkcija za koju f' zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[-\pi, \pi]$ i neka je $f(-\pi) = f(\pi)$. Trigonometrijski Fourierov red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

konvergira jednoliko i vrijedi $S(x) = f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

DOKAZ. Dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Tada, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\begin{aligned} |S(x) - S_n(x)| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\Big| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k|\,|\cos kx| + |b_k|\,|\sin kx|) \\ &\leqslant \sum_{k=n_0+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \varepsilon, \qquad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Prema Weierstrassovom kriteriju, odavde zaključujemo da S_n konvergira jednoliko prema funkciji S. Ta se funkcija podudara s f zbog neprekinutosti od f.

Vrijedi

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k\pi} f(x)\sin kx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx \,\mathrm{d}x = -\frac{b'_k}{k}, \end{aligned}$$

gdje je b'_k koeficijent u razvoju funkcije f' u Fourierov red. Analogno dobivamo $b_k = {a'_k}/{k}$.

Funkcija f' može se rastaviti u Fourierov red, te za njezine koeficijente vrijedi Parsevalova jednakost

$$\frac{{a'_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a'_n}^2 + {b'_n}^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Nadalje, iz nejednakosti $\alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ dobivamo

$$\frac{|a'_k|}{k} \leqslant \frac{1}{2}({a'_k}^2 + \frac{1}{k^2}); \qquad \frac{|b'_k|}{k} \leqslant \frac{1}{2}({b'_k}^2 + \frac{1}{k^2}).$$

Zato je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{|a'_k|}{k} + \frac{|b'_k|}{k}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}({a'_k}^2 + {b'_k}^2) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty.$$

Dobili smo

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{|b'_k|}{k} + \frac{|a'_k|}{k}\Big) < \infty$$

i time je teorem dokazan. ◄

2.3.6. Najbolja aproksimacija

U primjenama funkciju f nužno aproksimiramo konačnim Fourierovim redom

$$f(x) \approx S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\Big(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\Big).$$

S tim u vezi može se postaviti pitanje: je li ova aproksimacija najbolja moguća? Ili, preciznije, na koji način treba izabrati koeficijente A_n, B_n u prikazu

$$R_N(x) := \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\Big(A_k \cos\frac{k\pi x}{L} + B_k \sin\frac{k\pi x}{L}\Big).$$

da aproksimacija bude najbolja moguća?

Da bismo uopće mogli odgovoriti na ovo pitanje, moramo utvrditi što ćemo uzeti kao mjeru za odstupanje funkcije f od predložene aproksimacije R_N. Prikladno je uzeti tzv. **udaljenost najmanjih kvadrata**

$$\begin{aligned} E &:= \int_{-L}^{L} |f(x) - R_N(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-L}^{L}\Big|f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{N}\Big(A_k \cos\frac{k\pi x}{L} + B_k \sin\frac{k\pi x}{L}\Big)\Big|^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ovaj je izraz funkcija po nepoznanicama A_n, B_n, minimum koje tražimo. Vidimo da je to kvadratna funkcija po tim nepoznanicama. Minimum ćemo naći uzimajući $\frac{\partial E}{\partial A_n} = 0$, $\frac{\partial E}{\partial B_n} = 0$. Dobivamo

$$\frac{\partial E}{\partial A_n} = 2\int_{-L}^{L}\Big[f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{N}\Big(A_k \cos\frac{k\pi x}{L} + B_k \sin\frac{k\pi x}{L}\Big)\Big]\cos\frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x.$$

Zbog ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija, pod integralom preostaju samo dva člana:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x - A_n\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x = 0$$

i odavde

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x = a_n.$$

Slično vrijedi $B_n = b_n$. Time smo pokazali da Fourierov polinom daje najbolju aproksimaciju za funkciju f među svim trigonometrijskim polinomima reda N.

2.3.7. Kompleksni oblik Fourierovog reda

Neka je f periodička funkcija s temeljnim periodom $T = b - a$. Za teorijska razmatranja praktičnije je Fourierov red pisati u kompleksnom obliku. Iz De Moivreove formule

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$
$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha,$$

zbrajanjem i oduzimanjem dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Zato možemo pisati:

$$\begin{aligned} a_n\cos n\alpha + b_n\sin n\alpha &= a_n\frac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{2} + b_n\frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2}e^{in\alpha} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-in\alpha} \\ &=: c_n e^{in\alpha} + c_{-n}e^{-in\alpha}. \end{aligned}$$

Stavimo još $c_0 = \frac{a_0}{2}$. Sad za $\alpha = \frac{2\pi x}{T}$ dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n\sin\frac{2\pi nx}{T}\right) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{(2\pi inx)/T} + c_{-n}e^{-(2\pi inx)/T}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{(2\pi inx)/T}. \end{aligned}$$

Koeficijente c_n za $n > 0$ računamo po formuli

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_a^b f(\xi)\cos\frac{2\pi n\xi}{T}\,\mathrm{d}\xi - i\frac{2}{T}\int_a^b f(\xi)\sin 2\pi n\xi T\,\mathrm{d}\xi\right) \\ &= \frac{1}{T}\int_a^b f(\xi)\left[\cos\frac{2\pi n\xi}{T} - i\,\sin\frac{2\pi n\xi}{T}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{T}\int_a^b e^{-(2\pi in\xi)/T} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Slično ovome, koeficijente c_{-n} (gdje je opet $n > 0$) računamo kao

$$\begin{aligned} c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_a^b f(\xi)\cos\frac{2\pi n\xi}{T}\,\mathrm{d}\xi + i\frac{2}{T}\int_a^b f(\xi)\sin\frac{2\pi n\xi}{T}\,\mathrm{d}\xi\right) \\ &= \frac{1}{T}\int_a^b f(\xi)\left[\cos\frac{2\pi n\xi}{T} + i\,\sin\frac{2\pi n\xi}{T}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{T}\int_a^b e^{(2\pi in\xi)/T} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Sad vidimo da za $n < 0$ vrijedi identična formula:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^b e^{-(2\pi in\xi)/T} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Teorem 8. ■ Kompleksni oblik Fourierovog reda

Periodička funkcija f s periodom koja zadovoljava Dirichletove uvjete, ima sljedeći prikaz:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{(2\pi inx)/T}. \tag{23}$$

Koeficijenti se računaju formulama

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^b e^{-(2\pi in\xi)/T} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{24}$$

Parsevalova jednakost

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2 = \frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

ima jednostaviji oblik ako je Fourierov red prikazan u kompleksnom obliku:

Teorem 9. ■ Parsevalova jednakost za kompleksni oblik Fourierovog reda

Za periodičku funkciju f prikazanu u obliku (24) vrijedi

$$\frac{1}{T}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{25}$$

Dokaz. Prema Parsevalovoj jednakosti za realni oblik Fourierovog reda, lijeva strana jednakosti je jednaka:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Vrijedi prema definiciji $\frac{a_0^2}{4} = c_0^2$. Dalje imamo za svaki $n > 0$

$$\begin{aligned} |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 &= \left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right|^2 + \left|\frac{a_n + ib_n}{2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[(a_n^2 + b_n^2) + (a_n^2 + b_n^2)\right] = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana.