1.

Laplaceova transformacija

Sadržaj poglavlja

Engleski fizičar Heaviside [1] je pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi uveo način računanja kojeg je nazvao *operatorski račun*. Pritom su simboli deriviranja i integriranja shvaćeni kao operatori s kojima se može računati po pravilima za algebarske veličine. Strogi matematički temelji koji opravdavaju njegove postupke postavljeni su u teoriji tzv. Laplaceove transformacije.

Problemi koje rješavamo u matematičkoj analizi uključuju operacije deriviranja i integriranja. Ideja operatorskog računa temelji se na tome da funkcijama koje ulaze u račun nekom *funkcionalnom transformacijom* pridružimo nove funkcije, pri čemu će operacijama deriviranja i integriranja odgovarati neke jednostavnije algebarske operacije koje se vrše na transformatima funkcija.

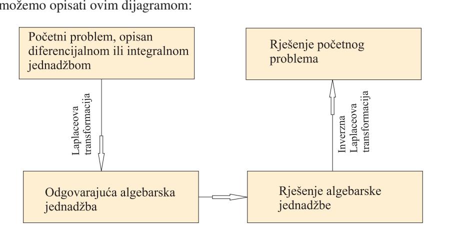
Među funkcionalnim transformacijama naročito su značajne tzv. **integralne transformacije**.

Neka su zadani interval $[a,b]$ i funkcija dviju varijabli $K(s,t)$. Tada funkciji $f(t)$ možemo pridružiti funkciju $F(s)$ formulom

$$F(s) := \int_a^b K(s,t)f(t)dt.$$

Funkcija $K(s,t)$ naziva se **jezgra** ove integralne transformacije. **Laplaceova transformacija** je integralna transformacija s jezgrom $K(s,t) = e^{-st}$ i na intervalu $[a,b] = [0,\infty\rangle$.

Laplaceova transformacija naročito je pogodna za rješavanje diferencijalnih i nekih integralnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Shematski postupak možemo opisati ovim dijagramom:



1.1. Laplaceova transformacija

Laplaceov transformat

Neka je f funkcija realnog argumenta t, definirana za $t > 0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Neka je s realni ili kompleksni parametar. **Laplaceov transformat** funkcije f je funkcija F definirana s

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt, \tag{1}$$

za svaki s za koji ovaj nepravi integral konvergira.

Funkcija f se naziva **original** ili **gornja funkcija**, a $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ **slika** ili **donja funkcija**.

Da bismo olakšali zapisivanje i razumijevanje veza između funkcija i njihovih slika, originale ćemo uglavnom označavati malim slovima poput f, g, h a njihove slike velikim slovima F, G, H. Također (iako to s matematičkog aspekta nije važno), argument originala ćemo sustavno označavati s t, a argument njihovih slika sa s.

Pridruživanje $f \mapsto F$ nazivamo **Laplaceova transformacija** i označavamo ga s $\mathscr{L}$. Dakle

$$\mathscr{L}(f) = F.$$

Obratna veza, koja slici pridružuje original, naziva se **inverzna Laplaceova transformacija** i označava s $\mathscr{L}^{-1}$:

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = f.$$

Zbog jednostavnosti zapisivanja, koristit ćemo još jednu oznaku za ovo pridruživanje. Da je originalu f pridružena slika F zapisivat ćemo ovako:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s).$$

Obratnu vezu zapisivat ćemo na sljedeći način:

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t).$$

⋆ ⋆ ⋆

Laplaceov integral je nepravi integral

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt := \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-st}f(t)\,dt.$$

Ako za neki s postoji ova granična vrijednost, tada kažemo da nepravi integral konvergira. Za takav s je definirana vrijednost slike $F(s)$. Ako pak postoji

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M |e^{-st}f(t)|\,dt,$$

tada kažemo da nepravi integral konvergira apsolutno. Nepravi integral koji konvergira apsolutno, konvergira i obično.

⋆ ⋆ ⋆

Pri različitim ocjenama često moramo izračunati apsolutnu vrijednost kompleksnog broja e^z, $z \in \mathbf{C}$. Neka je $z = x + iy$ algebarski prikaz broja z. Onda vrijedi

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Zato je

$$|e^z| = |e^x| \cdot |\cos y + i\sin y| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

Zapamtimo:

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja e^z

Za kompleksni broj $z = x + iy$ vrijedi

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Posebno je, za realni broj α

$$|e^{i\alpha}| = 1.$$

Ove ćemo formule često koristiti u nastavku pa ih treba upamtiti.

⋆ ⋆ ⋆

Ako podintegralna funkcija uzima vrijednosti u skupu kompleksnih brojeva, tada integral (1) možemo svesti na integral realnih funkcija.

1. Ako je $s = s_1 + is_2$ kompleksni parametar, dovoljno je eksponencijalnu funkciju prikazati preko trigonometrijskih:

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s_1t}\cos(s_2t)f(t)\,dt - i\int_0^\infty e^{-s_1t}\sin(s_2t)f(t)\,dt.$$

Međutim, u računu je jednostavnije integrirati eksponencijalnu funkciju, tretirajući kompleksni broj i kao konstantu.

2. Ako je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, funkcija s vrijednostima u skupu kompleksnih brojeva, tada je možemo napisati u obliku: $f(t) = u(t) + iv(t)$, pri čemu su u i v realne funkcije. Integral se može računati ovako:

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt + i\int_0^\infty e^{-st}v(t)\,dt.$$

I ovdje vrijedi ista napomena, najčešće se integracija može izvesti direktno.

3. Ako su i s i $f(t)$ kompleksni, tad kombiniramo korake 1. i 2.

⋆ ⋆ ⋆

Primjer 1.

Odredimo sliku funkcije $f(t) = t$.

► Prema definiciji je

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}t\,dt = \begin{bmatrix} u = t & dv = e^{-st}\,dt \\ du = dt & v = -\dfrac{1}{s}e^{-st} \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{t\,e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt$$
$$= -\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}(t\,e^{-st}) - \frac{1}{s^2}\lim_{t\to\infty}e^{-st} + \frac{1}{s^2}.$$

Oba će limesa postojati onda i samo onda ako je $s > 0$. Za takve je s definirana slika funkcije $f(t) = t$ i ona glasi $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$. To ćemo jednostavnije zapisivati ovako:

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}. ◄$$

⋆ ⋆ ⋆

Ovaj primjer pokazuje da je čak i za vrlo jednostavne originale računanje Laplaceovog transformata neugodan posao. Srećom, za sve elementarne funkcije mi ćemo to učiniti samo jednom, i nakon toga usvojiti **tablicu Laplaceovih transformata**. Pri određivanju slike složenijih funkcija, koristit ćemo tu tablicu i **pravila preslikavanja** koja ćemo u međuvremenu izvesti.

Prvo među njima je sljedeće svojstvo:

Teorem 1. ■ **Linearnost Laplaceove transformacije**

Ako je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$, tada vrijedi

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha F(s) + \beta G(s). \tag{2}$$

Kažemo da je Laplaceova transformacija **linearno preslikavanje**.

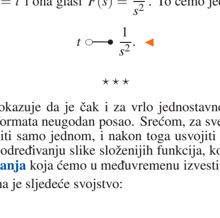
Dokaz. Vrijedi

$$\mathscr{L}(\alpha f + \beta g) = \int_0^\infty e^{-st}\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\,dt$$
$$= \alpha\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt + \beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt$$
$$= \alpha\mathscr{L}(f) + \beta\mathscr{L}(g). ◄$$

1.2. Primjeri Laplaceovih transformata

1.2.1. Step funkcija

Funkcija $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ zove se **step funkcija** ili **jedinična funkcija**.



Njezin Laplaceov transformat iznosi

$$\mathscr{L}(u(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

1.2.2. Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija $f(t) = e^{\alpha t}$ ima Laplaceov transformat

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\,dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}\,dt$$
$$= \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha}, \qquad s > \alpha.$$

Identična formula vrijedi i u slučaju kad je $\alpha = \beta + i\gamma$ kompleksan broj:

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha} + \lim_{t\to\infty}\frac{e^{(\beta+i\gamma-s)t}}{\alpha - s}.$$

Apsolutna vrijednost funkcije u brojniku ovog izraza je

$$|e^{(\beta+i\gamma-s)t}| = |e^{(\beta-s)t}|$$

pa je limes brojnika jednak nuli za svaki $s > \beta$.

Slika eksponencijalne funkcije

Za svaki realni ili kompleksni broj α vrijedi

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\alpha}, \qquad s > \operatorname{Re}\alpha.$$

1.2.3. Trigonometrijske i hiperbolične funkcije

Sliku hiperboličnih funkcija dobivamo korištenjem linearnosti Laplaceove transformacije

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{1}{2}e^{\omega t} - \frac{1}{2}e^{-\omega t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+\omega} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \qquad s > |\omega|.$$

Na identičan način dobivamo

$$\operatorname{ch}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-\omega^2}, \qquad s > |\omega|.$$

Sliku trigonometrijskih funkcija možemo dobiti iz relacije

$$e^{i\omega t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-i\omega}, \qquad s > 0.$$

Naime, lijeva se strana može napisati u obliku

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t.$$

Zato je slika funkcije kosinus jednaka realnom dijelu izraza $\dfrac{1}{s-i\omega}$, a slika funkcije sinus jednaka je imaginarnom dijelu tog izraza. Vrijedi

$$\frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Time smo dobili sljedeće formule:

Slike trigonometrijskih i hiperboličnih funkcija

$$\sin\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad \cos\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2},$$
$$\operatorname{sh}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \qquad \operatorname{ch}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

Ove formule koristimo u oba smjera:

Primjer 2.

Odredimo original funkcije **A.** $\dfrac{1}{s^2+3}$; **B.** $\dfrac{s+3}{s^2+5}$.

► **A.** Algebarskom manipulacijom ovu sliku ćemo svesti na transformat funkcije sinus:

$$\frac{1}{s^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\,t).$$

B. Iskoristit ćemo linearnost inverzne transformacije:

$$\frac{s+3}{s^2+5} = \frac{s}{s^2+(\sqrt{5})^2} + \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{s^2+(\sqrt{5})^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \cos(\sqrt{5}\,t) + \frac{3}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}\,t). ◄$$

1.2.4. Polinomi

Da bismo odredili sliku polinoma, zbog svojstva linearnosti Laplaceove transformacije, dovoljno je odrediti sliku funkcije $f(t) = t^n$ za prirodni eksponent n. Vrijedi

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^n\,dt = \frac{t^n e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\,dt.$$

Za $s > 0$ prvi je član jednak nuli. Time smo dobili **rekurzivnu formulu**:

$$\mathscr{L}(t^n) = \frac{n}{s}\mathscr{L}(t^{n-1}).$$

Iteriranjem te formule dobivamo

$$\mathscr{L}(t^n) = \frac{n}{s}\mathscr{L}(t^{n-1}) = \ldots = \frac{n!}{s^n}\mathscr{L}(1) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Slika potencije t^n

Vrijedi

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}, \tag{3}$$
$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}, \tag{4}$$
$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Primjer 3.

Odredimo sliku funkcije $f(t) = (t+3)^2$.

► Koristit ćemo svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije i formule (3)–(5):

$$(t+3)^2 = t^2 + 6t + 9 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}. ◄$$

1.2.5. Postojanje Laplaceovog transformata

Za koje će funkcije postojati Laplaceov transformat? Odgovor na ovo pitanje nije jednostavan. Za većinu primjena, dovoljno se ograničiti na jednu široku klasu funkcija za koju će taj transformat postojati.

Tako ćemo u daljnjem pojam originala suziti na sljedeću klasu funkcija:

Original

Za funkciju f ćemo reći da je **original**, ako ona zadovoljava uvjete

1. $f(t) = 0$ za $t < 0$.
2. f je na svakom konačnom intervalu po dijelovima neprekinuta, a prekidi su prve vrste.
3. f je eksponencijalnog rasta, tj. postoje konstante $M > 0$ i a takve da za sve $t > 0$ vrijedi
$$|f(t)| \leqslant Me^{at}. \tag{6}$$
Infimum svih konstanti a za koje vrijedi nejednakost (6) naziva se **eksponent rasta** funkcije f i označava s a_0.

Prvi je uvjet tehničke naravi. Laplaceova transformacija definirana je integralom po intervalu $[0,\infty\rangle$, pa vrijednosti funkcije f za $t < 0$ nisu bitne.

Drugi uvjet govori o tome koliko "loša" funkcija smije biti, da bi ipak postojao njezin transformat.

Treći uvjet govori koliko brzo funkcija smije rasti.

Napominjemo da ovi uvjeti *nisu nužni* za postojanje transformata. Oni su *dovoljni*. To znači da Laplaceov transformat može postojati i onda kad neki od ovih uvjeta nije zadovoljen.

⋆ ⋆ ⋆

U nastavku ćemo za vrijednosti varijable s uzimati, zbog jednostavnosti, samo realne brojeve.

⋆ ⋆ ⋆

Teorem 2. ■ **Konvergencija laplaceovog integrala**

Laplaceov integral $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ konvergira u području $s > a_0$, gdje je a_0 eksponent rasta funkcije f. Ako je $s_0 > a_0$, tada u području $s \geqslant s_0$ taj integral konvergira jednoliko.

► Neka je $s > a_0$. Tada postoje konstante a i M takve da je $s > a > a_0$ i $|f(t)| \leqslant Me^{at}$. Zato je

$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt = \int_0^\infty |e^{-st}|\cdot|f(t)|\,dt$$
$$\leqslant \int_0^\infty e^{-ts}Me^{at}\,dt = \frac{M}{s-a}.$$

Dakle, $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ konvergira (apsolutno) ako je $s > a_0$. Ako je pak $s \geqslant s_0 > a_0$, tada isti a vrijedi za sve s; $a_0 < a < s_0$:

$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt \leqslant \frac{M}{s-a} \leqslant \frac{M}{s_0-a}$$

i integral konvergira jednoliko po s, jer gornja međa ne ovisi o s. ◄

⋆ ⋆ ⋆

Kako ćemo provjeriti je li neka funkcija eksponencijalnog rasta? Pretpostavljat ćemo da je funkcija f u nastavku neprekinuta ili po dijelovima neprekinuta s prekidima prve vrste.

Teorem 3. ■ **Kriterij za eksponencijalni rast**

Funkcija f je eksponencijalnog rasta ako i samo ako za neku konstantu a postoji limes

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)|.$$

Tada za eksponent rasta vrijedi $a_0 \leqslant a$.

► Neka je $K = \lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)|$. Tada postoji t_0 takav da za $t > t_0$ vrijedi $e^{-at}|f(t)| < K + 1$, odnosno

$$|f(t)| \leqslant (K+1)e^{at}, \qquad \text{za sve } t > t_0.$$

Odavde slijedi da je f eksponencijalnog rasta, s eksponentom koji je $\leqslant a$. Detalji su ostavljeni za vježbu u Zadatku 6. ◄

Primjer 4.

A. Funkcija $f(t) = t^n$ je eksponencijalnog rasta, uz $a_0 = 0$. Zaista, za svaki $a > 0$ je

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}t^n = \lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{at}} = \ldots = \lim_{t\to\infty}\frac{n!}{a^n e^{at}} = 0.$$

B. Funkcija $f(t) = e^{t^2}$ nije eksponencijalnog rasta, jer je za bilo kakav $a \in \mathbf{R}$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)| = \lim_{t\to\infty} e^{t(t-a)} = \infty.$$

C. Ako je f eksponencijalnog rasta, tada je i $t^n f(t)$ eksponencijalnog rasta. Zaista, neka je a_0 eksponent rasta za f, $a > a_0$ i $b > 0$ po volji. Tada postoje M_1, M_2 takvi da vrijedi

$$|f(t)| < M_1e^{at}, \qquad |t^n| < M_2e^{bt},$$

i zato

$$|t^n f(t)| < M_1M_2e^{(a+b)t},$$

te je $t^n f(t)$ eksponencijalnog rasta s eksponentom a_0.

1.3. Svojstva Laplaceove transformacije

1.3.1. Množenje varijable konstantom

Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ i $a > 0$. Tada vrijedi

$$\mathscr{L}(f(at)) = \int_0^\infty e^{-st}f(at)\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-su/a}f(u)\frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}f(u)\,du.$$

Teorem 4. ■ **Množenje varijable konstantom**

Ako je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, onda vrijedi

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}F\Big(\frac{s}{a}\Big). \tag{7}$$
$$F(bs) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{b}f\Big(\frac{t}{b}\Big). \tag{8}$$

1.3.2. Teoremi o prigušenju i pomaku

Funkciju $e^{-at}f(t)$ zovemo **prigušenjem** [1] funkcije f i a bilo kakav realni (ili kompleksni) broj. Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$. Račun daje

$$\mathscr{L}(e^{-at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)\,dt = F(s+a).$$

Teorem 5. ■ **Teorem o prigušenju originala**

Prigušenju u gornjem području odgovara pomak ulijevo u donjem području:

$$e^{-at}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+a). \tag{9}$$

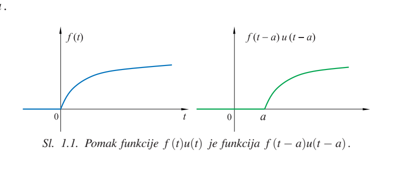
Primjer 5.

Prema Teoremu o prigušenju imamo

$$e^{-at}u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a},$$
$$t^n e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(s-2)^{n+1}}.$$

Original je funkcija f sa svojstvom $f(t) = 0$ za $t < 0$. To svojstvo kod funkcija zadanih konkretnim formulama postižemo množenjem sa step funkcijom $u(t)$.

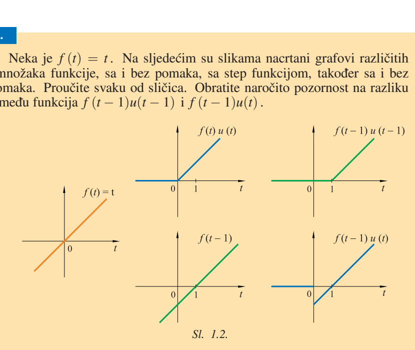
Neka je $a > 0$. Funkcija koja se dobiva translacijom grafa originala f za broj a *udesno* zadana je formulom $t \mapsto f(t-a)u(t-a)$. Ona je jednaka nuli za $t < a$.



Sl. 1.1. Pomak funkcije $f(t)u(t)$ je funkcija $f(t-a)u(t-a)$.

Primjer 6.

Neka je $f(t) = t$. Na sljedećim su slikama nacrtani grafovi različitih umnožaka funkcije, sa i bez pomaka, sa step funkcijom, također sa i bez pomaka. Proučite svaku od slika. Obratite naročito pozornost na razliku između funkcija $f(t-1)u(t-1)$ i $f(t-1)u(t)$.



Sl. 1.2.

Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ i $a > 0$. Tada imamo

$$\mathscr{L}(f(t-a)u(t-a)) = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)\,du = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du.$$

Time smo dokazali

Teorem 6. ■ **Teorem o pomaku originala**

Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ i $a > 0$. Pomaku originala udesno odgovara prigušenje u donjem području:

$$f(t-a)u(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-as}F(s). \tag{10}$$

Primjer 7.

Vrijedi $\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2+1}$. Zato $\sin(t-2)u(t-2) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}$.

Primjer 8.

Preslikaj u donje područje funkcije

A. $f_1(t) = (t-2)^2$; **B.** $f_2(t) = (t-2)^2u(t-2)$;
C. $f_3(t) = (t-2)^2e^{-t}$; **D.** $f_4(t) = (t-2)^2u(t-2)e^{-t}$.

► **A.** Na ovu se funkciju ne može primijeniti Teorem o pomaku. Sliku ćemo odrediti ovako:

$$(t-2)^2 = (t^2 - 4t + 4)u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^3} - 4\cdot\frac{1}{s^2} + 4\cdot\frac{1}{s}.$$

B. Ovdje je riječ o pomaku funkcije $t \mapsto t^2$ za 2 udesno. Primjenjujemo Teorem o pomaku. Budući da vrijedi $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s^3}$, dobivamo

$$(t-2)^2u(t-2) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-2s}\frac{2}{s^3}.$$

C. Primjenjujemo Teorem o prigušenju, na funkciju f_1:

$$(t-2)^2e^{-t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{(s+1)^3} - 4\cdot\frac{1}{(s+1)^2} + 4\cdot\frac{1}{s+1}.$$

D. Ova je funkcija dobivena prigušenjem funkcije f_2. Zato je

$$(t-2)^2u(t-2)e^{-t} \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-2(s+1)}\frac{2}{(s+1)^3}.$$

Ako funkciju f_4 napišemo u obliku

$$(t-2)^2u(t-2)e^{-t} = e^{-2}(t-2)^2u(t-2)e^{-(t-2)}$$

tad je funkcija zdesna dobivena pomakom funkcije $t^2u(t)e^{-t}$. Tako njezinu sliku možemo dobiti i ovako:

$$t^2u(t)e^{-t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{(s+1)^3},$$
$$e^{-2}(t-2)^2u(t-2)e^{-(t-2)} \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-2}\frac{2}{(s+1)^3}e^{-2s},$$

Primjer 9.

Odredimo slike funkcija
A. $f(t) = (t-3)^4e^{-2t}u(t-3)$, **B.** $g(t) = (t-3)^4e^{-2t}u(t)$.

► **A.** Pomak u argumentu step funkcije govori da je riječ o translatiranom originalu. Postupamo ovako:

$$t^4 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5},$$
$$(t-3)^4u(t-3) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{24}{s^5}e^{-3s},$$
$$e^{-2t}(t-3)^4u(t-3) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{24}{(s+2)^5}e^{-3(s+2)}.$$

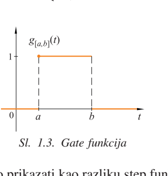
B. Na ovu se funkciju ne može primijeniti Teorem o pomaku.

$$g(t) = (t-3)^4e^{-2t}u(t)$$
$$= (t^4 - 12t^3 + 54t^2 - 108t + 81)e^{-2t}u(t)$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{24}{(s+2)^5} - 12\cdot\frac{6}{(s+2)^4} + 54\cdot\frac{2}{(s+2)^3} - 108\cdot\frac{1}{(s+2)^2} + 81\frac{1}{s+2}. ◄$$

1.3.3. Gate funkcija

To je funkcija koja se poništava izvan intervala $[a,b]$, a na njemu ima konstantnu vrijednost 1:

$$g_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1, & a\leqslant t<b,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$



Sl. 1.3. Gate funkcija

Gate funkciju[1] možemo prikazati kao razliku step funkcija:

$$g_{[a,b]}(t)=u(t-a)-u(t-b),\qquad 0<a<b.$$

Zato je njezin transformat

$$g_{[a,b]}(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{e^{-sa}}{s}-\frac{e^{-sb}}{s}.$$

Primjer 10.

Odredimo sliku funkcije

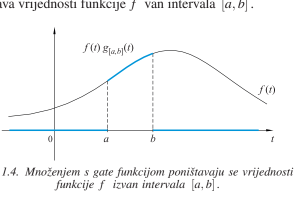
$$f(t)=\begin{cases}3, & 0<t<2,\\ -1, & 2<t<4,\\ 0, & t>4.\end{cases}$$

▶ U računu koristimo prikaz pomoću *gate* funkcije:

$$\begin{aligned}f(t)&=3g_{[0,2]}(t)-g_{[2,4]}(t)\\ &=3u(t)-3u(t-2)-u(t-2)+u(t-4)\\ &=3u(t)-4u(t-2)+u(t-4)\\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 3\cdot\frac{1}{s}-4\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-4s}}{s}=\frac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s}.\ ◀\end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆

Množenjem funkcije f s *gate* funkcijom dobiva se funkcija koja se podudara s funkcijom f na intervalu $[a,b]$, a van tog intervala jednaka je nuli. Dakle, *gate* funkcija poništava vrijednosti funkcije f van intervala $[a,b]$.

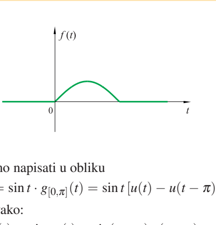


Sl. 1.4. Množenjem s gate funkcijom poništavaju se vrijednosti funkcije f izvan intervala $[a,b]$.

Ponekad se umnožak funkcije f sa *gate* funkcijom može preslikati primjenom Teorema o pomaku.

Primjer 11.

Odredimo sliku funkcije $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t\leqslant\pi,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$



▶ Funkciju možemo napisati u obliku

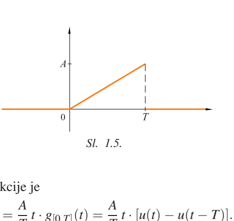
$$f(t)=\sin t\cdot g_{[0,\pi]}(t)=\sin t\,[u(t)-u(t-\pi)]$$

Sad je preslikavamo ovako:

$$\begin{aligned}f(t)&=\sin t\,u(t)+\sin(t-\pi)\,u(t-\pi)\\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2+1}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}.\ ◀\end{aligned}$$

Primjer 12.

Preslikajmo funkciju zadanu slikom:



Sl. 1.5.

▶ Jednadžba funkcije je

$$f(t)=\frac{A}{T}t\cdot g_{[0,T]}(t)=\frac{A}{T}t\cdot[u(t)-u(t-T)].$$

Da bismo odredili njezinu sliku, moramo je dovesti na oblik prikladan za primjenu Teorema o pomaku:

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{A}{T}t\cdot u(t)-\frac{A}{T}(t-T+T)u(t-T)\\ &=\frac{A}{T}t\cdot u(t)-\frac{A}{T}(t-T)u(t-T)-Au(t-T)\\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{A}{T}\cdot\frac{e^{-Ts}}{s^2}-\frac{Ae^{-Ts}}{s}.\ ◀\end{aligned}$$

Primjer 13.

Odredimo i skicirajmo graf originala funkcije $F(s)=\dfrac{e^{-s\pi}(1+e^{-s\pi})}{s^2+1}$.

▶ Napišimo original u obliku:

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}+\frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2+1}&\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sin t,\\ \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}&\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sin(t-\pi)u(t-\pi),\\ \frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}&\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sin(t-2\pi)u(t-2\pi).\end{aligned}$$

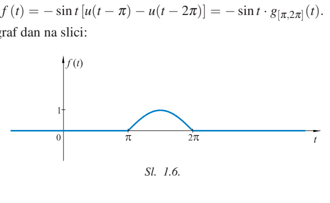
Zato je

$$\begin{aligned}f(t)&=\sin(t-\pi)\,u(t-\pi)+\sin(t-2\pi)\,u(t-2\pi)\\ &=-\sin t\,u(t-\pi)+\sin t\,u(t-2\pi).\end{aligned}$$

Jednadžbu ove funkcije možemo brzo napisati u jednostavnijem obliku:

$$f(t)=-\sin t\,[u(t-\pi)-u(t-2\pi)]=-\sin t\cdot g_{[\pi,2\pi]}(t).$$

Njezin je graf dan na slici:



Sl. 1.6.

Pomaci step funkcija mogu se eliminirati iz jednadžbe funkcije tako da se gledaju njezine vrijednosti na pojedinim intervalima. Tako npr. u ovom bismo primjeru imali:

$$\begin{aligned}f(t)&=-\sin t\,u(t-\pi)+\sin t\,u(t-2\pi)]\\ &=\begin{cases}0, & t\leqslant\pi,\\ -\sin t, & \pi<t\leqslant 2\pi,\\ -\sin t+\sin t, & 2\pi<t\end{cases}\\ &=\begin{cases}-\sin t, & \pi\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{inače.}\ ◀\end{cases}\end{aligned}$$

1.3.4. Deriviranje originala

Sljedeći je teorem od ogromne važnosti u primjenama Laplaceove transformacije.

Teorem 7. ■ Teorem o deriviranju originala

Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna i original. Tada vrijedi

$$f'(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s)-f(0),\tag{11}$$

i općenito

$$f^{(n)}(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).\tag{12}$$

Ovaj teorem, između ostalog, tvrdi da za original $f(t)$ koji posjeduje derivaciju $f'(t)$, postoji također i slika te derivacije. To je važno naglasiti jer $f'(t)$ ne mora nužno biti original.

Na primjer, funkcija $f(t)=\sin e^{t^2}$ jest original, budući da je svuda neprekinuta i vrijedi $|f(t)|\leqslant 1$. Međutim, $f'(t)=2te^{t^2}\cos e^{t^2}$ nije original, jer nije eksponencijalnog rasta.

Dokaz. Izvedimo prvu formulu.

$$\mathscr{L}(f'(t))=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,\mathrm{d}t=e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Original f je eksponencijalnog rasta pa za $s>a>a_0$ vrijedi

$$|e^{-st}f(t)|\leqslant e^{-st}\cdot Me^{at}=Me^{-(s-a)t}\to 0\quad\text{kad } t\to\infty.$$

Tako dobivamo

$$f'(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s)-f(0).$$

Uzastopnom primjenom ove formule dobivamo:

$$\begin{aligned}f''(t)&\circ\!\!-\!\!\bullet\ s[sF(s)-f(0)]-f'(0)\\ &=s^2F(s)-sf(0)-f'(0).\end{aligned}$$

Indukcijom slijedi formula (12).

Primjer 14.

Odredimo sliku funkcije $\sin t$, pomoću Teorema o deriviranju originala. Neka vrijedi $\sin t\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$. Primjenjujući dvaput (11), dobivamo

$$\begin{aligned}\cos t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s)-\sin 0=sF(s)\\ -\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2F(s)-\cos 0=s^2F(s)-1=-F(s)\end{aligned}$$

Odavde $F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$. Zato je, iz (7):

$$\sin\omega t\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{\omega}F\Big(\frac{s}{\omega}\Big)=\frac{1}{\omega}\,\frac{1}{\big(\frac{s}{\omega}\big)^2+1}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Neka je $f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$. Derivirajmo funkciju $F(s)$, koristeći se formulom o deriviranju integrala po njegovom parametru:

$$F'(s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,\mathrm{d}t\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ (-t)f(t).$$

Ovu formulu možemo poopćiti i na derivaciju reda n. Tako dobivamo:

Teorem 8. ■ Teorem o deriviranju slike

Deriviranju u donjem području odgovara množenje s $-t$ u gornjem području:

$$(-t)f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ F'(s).\tag{13}$$

Općenito:

$$(-t)^nf(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ F^{(n)}(s),\tag{14}$$

t.j.

$$t^nf(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ (-1)^nF^{(n)}(s),\tag{15}$$

Primjer 15.

Odredimo sliku funkcije $f(t)=t^n$.

▶ Vrijedi $u(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{1}{s}$. Zato

$$(-t)^nu(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\Big(\frac{1}{s}\Big)=\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{s^{n+1}}=\frac{(-1)^nn!}{s^{n+1}}.$$

Zato je

$$t^n\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{n!}{s^{n+1}}.\ ◀$$

Primjer 16.

Odredimo sliku funkcije $t\sin t$.

▶ Primjenjujemo (13):

$$\begin{aligned}\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2+1},\\ t\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\frac{1}{s^2+1}\Big)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}.\ ◀\end{aligned}$$

Primjer 17.

Odredimo sliku funkcije $te^t\sin t$.

▶ Množenje s $-t$ odgovara deriviranju u donjem području. Množenje s e^t odgovara pomaku u donjem području. Te se dvije operacije mogu izvoditi u bilo kojem poretku. Prvi način:

$$\begin{aligned}\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2+1},\\ e^t\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{(s-1)^2+1}=\frac{1}{s^2-2s+2},\\ te^t\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ (-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\frac{1}{s^2-2s+2}\Big)=\frac{2s-2}{(s^2-2s+2)^2}\end{aligned}$$

Drugi način:

$$\begin{aligned}\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2+1},\\ t\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\frac{1}{s^2+1}\Big)=\frac{2s}{(s^2+1)^2},\\ te^t\sin t&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}=\frac{2s-2}{(s^2-2s+2)^2}.\ ◀\end{aligned}$$

Primjer 18.

Odredimo sliku funkcije $tf''(t)$.

▶ Slika druge derivacije je

$$f''(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2F(s)-sf(0)-f'(0).$$

Množenje s $-t$ odgovara derivaciji u donjem području. Zato

$$tf''(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ -s^2F'(s)-2sF(s)+f(0).\ ◀$$

1.3.5. Integriranje slike

Navedimo sad svojstvo dualno onom iz prethodnog teorema.

Teorem 9. ■ Teorem o integriranju slike

Neka je $f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$. Ako je $\dfrac{f(t)}{t}$ original, onda vrijedi

$$\frac{f(t)}{t}\circ\!\!-\!\!\bullet\ \int_s^\infty F(s)\,\mathrm{d}s.\tag{16}$$

Dokaz. Označimo s $\Phi(s)$ sliku funkcije $\dfrac{f(t)}{t}$. Za svaki Laplaceov transformat vrijedi $\lim_{s\to\infty}\Phi(s)=0$. Primijenimo sad Teorem o deriviranju slike:

$$t\cdot\frac{f(t)}{t}\circ\!\!-\!\!\bullet\ -\Phi(s)'$$

pa je $\Phi'(s)=-F(s)$. Zato se Φ može dobiti određenim integralom:

$$\Phi(s)=-\int_{s_0}^sF(s)\,\mathrm{d}s+C=\int_s^{s_0}F(s)\,\mathrm{d}s+C.$$

Stavimo li $s=s_0$, slijedi $C=\Phi(s_0)$. Pustimo sad da $s_0\to\infty$:

$$\Phi(s)=\lim_{s_0\to\infty}\int_s^{s_0}F(s)\,\mathrm{d}s+\lim_{s_0\to\infty}\Phi(s_0)=\int_s^\infty F(s)\,\mathrm{d}s.$$

Primjer 19.

Odredimo sliku funkcije $\dfrac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}$.

▶ Vrijedi

$$e^{-3t}-e^{-5t}\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+5}.$$

Primijenimo sad Teorem o integriranju slike:

$$\begin{aligned}\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \int_s^\infty\Big(\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+5}\Big)\,\mathrm{d}s\\ &=\Big(\ln(s+3)-\ln(s+5)\Big)\Big|_s^\infty=\ln\frac{s+3}{s+5}\Big|_s^\infty\\ &=\ln 1-\ln\frac{s+3}{s+5}=\ln\frac{s+5}{s+3}.\ ◀\end{aligned}$$

Primjer 20.

Koristeći Laplaceovu transformaciju, izračunaj integral

$$\int_0^\infty\frac{e^{-t}\sin^2t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

▶ Prema definiciji Laplaceove transformacije, ovaj je integral jednak $F(1)$, gdje je $F(s)$ slika funkcije $\dfrac{\sin^2t}{t}$.

$$\begin{aligned}\sin^2t&=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\Big),\\ \frac{\sin^2t}{t}&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}\int_s^\infty\Big(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\Big)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\Big[\ln s-\frac{1}{2}\ln(s^2+4)\Big]\Big|_s^\infty\\ &=\frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4}\Big|_s^\infty=\frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}=F(s).\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\int_0^\infty\frac{e^{-t}\sin^2t}{t}\,\mathrm{d}t=F(1)=\frac{1}{4}\ln 5.\ ◀$$

Primjer 21.

Izračunaj integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}t}\frac{\operatorname{sh}t\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

▶ Odredit ćemo sliku $F(s)$ funkcije $\dfrac{1}{t}\operatorname{sh}t\sin t$. Onda će rezultat biti $F(\sqrt{2})$.

$$\operatorname{sh}t\sin t=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\sin t\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\Big]$$

Sada je, prema Teoremu o integriranju slike

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sh}t\sin t}{t}&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}\int_s^\infty\Big[\frac{1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\Big]\,\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{2}\Big[\operatorname{arc\,tg}(s-1)-\operatorname{arc\,tg}(s+1)\Big]\Big|_s^\infty\\ &=\frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}(s-1)-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}(s+1)\Big]\\ &=\frac{1}{2}\Big[\operatorname{arc\,tg}(s+1)-\operatorname{arc\,tg}(s-1)\Big]=F(s).\end{aligned}$$

Prema tome, traženi integral je jednak

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}t}\frac{\operatorname{sh}t\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=F(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\big[\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}+1)-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)\big].$$

On se može dovesti na prikladniji oblik korištenjem formule

$$\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b=\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{1+ab}.$$

Odavde:

$$F(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(1)=\frac{\pi}{8}.\ ◀$$

1.3.6. Integriranje originala

Teorem 10. ■ Teorem o integriranju originala

Ako je $f(t)$ original, tada je i

$$\varphi(t):=\int_0^tf(\tau)d\tau$$

također original i vrijedi

$$\int_0^tf(\tau)d\tau\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(s)}{s}.\tag{17}$$

Dokaz. Provjerimo eksponencijalni rast. f je eksponencijalnog rasta, pa vrijedi $|f(t)|\leqslant Me^{at}$ za neke konstante M i a. Neka je $b\geqslant a$, $b>0$. Onda je $|f(t)|\leqslant Me^{bt}$ pa imamo

$$|\varphi(t)|\leqslant\int_0^t|f(\tau)|d\tau\leqslant\int_0^tMe^{b\tau}d\tau=\frac{M}{b}\big(e^{bt}-1\big)<\frac{M}{b}e^{bt}.$$

Zato postoji $\Phi(s)=\mathscr{L}(\varphi(t))$. Primijenimo Teorem o deriviranju originala:

$$f(t)=\varphi'(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ s\Phi(s)-\varphi(0)=s\Phi(s)=F(s).$$

Odavde slijedi tvrdnja.

Primjer 22.

Odredimo sliku funkcije sinus integralni: $\displaystyle\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

▶ Prema Teoremu o integriranju slike, imamo

$$\frac{\sin t}{t}\circ\!\!-\!\!\bullet\ \int_s^\infty\frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{d}s=\operatorname{arc\,tg}s\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}s.$$

Primijenimo sad Teorem o integriranju originala:

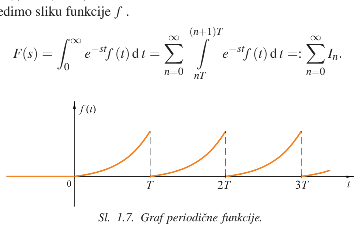
$$\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}s}{s}.\ ◀$$

1.3.7. Preslikavanje periodičnih funkcija

Za original f reći ćemo da je **periodična funkcija**, ako vrijedi $f(t)=0$ za $t<0$ i $f(t)=f(t+T)$ za neki $T>0$ i sve $t>0$.

Odredimo sliku funkcije f.

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^\infty\int_{nT}^{(n+1)T}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=:\sum_{n=0}^\infty I_n.$$



Sl. 1.7. Graf periodične funkcije.

Tu smo označili

$$\begin{aligned}I_n&=\int_{nT}^{(n+1)T}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^Te^{-s(\tau+nT)}f(\tau+nT)d\tau\\ &=e^{-nsT}\int_0^Te^{-s\tau}f(\tau+nT)d\tau\\ &=e^{-nsT}\int_0^Te^{-s\tau}f(\tau)d\tau=e^{-nsT}I_0.\end{aligned}$$

Dakle,

$$F(s)=\sum_{n=0}^\infty e^{-nsT}I_0=I_0\,\frac{1}{1-e^{-sT}}.$$

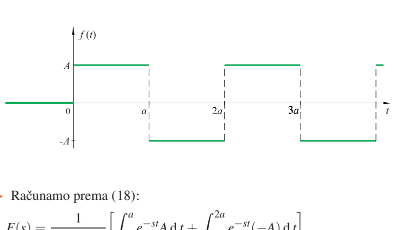
Teorem 11. ■ Slika periodične funkcije

Slika periodične funkcije f s periodom duljine T računa se formulom

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^Te^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t.\tag{18}$$

Primjer 23.

Odredimo sliku periodične funkcije zadane slikom



▶ Računamo prema (18):

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{1-e^{-2as}}\Big[\int_0^ae^{-st}A\,\mathrm{d}t+\int_a^{2a}e^{-st}(-A)\,\mathrm{d}t\Big]\\ &=\frac{1}{1-e^{-2as}}\Big[-\frac{A}{s}(e^{-as}-1)+\frac{A}{s}(e^{-2as}-e^{-as})\Big]\\ &=\frac{1}{1-e^{-2as}}\cdot\frac{A}{s}(e^{-as}-1)^2=\frac{A}{s}\cdot\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}=\frac{A}{s}\operatorname{th}\Big(\frac{as}{2}\Big).\ ◀\end{aligned}$$

Primjer 24.

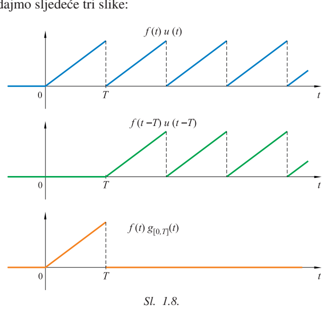
Odredimo sliku periodične funkcije s periodom $T=2$, a koja je na intervalu $[0,2]$ zadana formulom $f(t)=e^{-t}$.

▶ Računamo prema (18):

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2e^{-st}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2e^{-(s+1)t}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{-e^{-(s+1)t}}{s+1}\Big|_0^2=\frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\frac{-e^{-2(s+1)}}{s+1}+\frac{1}{s+1}\Big]\\ &=\frac{1-e^{-2(s+1)}}{(s+1)(1-e^{-2s})}.\ ◀\end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆

Formulu za transformat periodične funkcije možemo izvesti na još jedan način. Pogledajmo sljedeće tri slike:



Sl. 1.8.

Na prvoj je nacrtan graf periodične funkcije $f(t)u(t)$. Na drugoj je taj graf pomaknut za period T udesno, pa on predstavlja funkciju $f(t-T)u(t-T)$. Razlika ovih dviju funkcija daje funkciju čiji je graf nacrtan na trećoj slici, a koja glasi

$$f(t)g_{[0,T]}(t)=f(t)u(t)-f(t-T)u(t-T).$$

Preslikajmo funkcije s obiju strana ove jednakosti u donje područje. Sliku funkcije s lijeve strane dobit ćemo računanjem prema definiciji, a sliku pomaknute funkcije primjenom Teorema o pomaku:

$$\int_0^Te^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=F(s)-F(s)\cdot e^{-sT}.$$

Odavde slijedi tražena formula:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^Te^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.4. Inverzna transformacija

Za računanje originala $f(t)$ iz poznate slike $F(s)$, moramo odrediti **inverznu transformaciju**

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}(F(s)).$$

Ovaj je problem općenito složeniji od računanja slike iz poznatog originala. Mi ćemo upoznati nekoliko tehnika invertiranja slika, uglavnom za najvažnije slučajeve koji se javljaju u primjenama.

Tek se korištenjem teorije funkcija kompleksne varijable mogu dobiti općenitije formule i pojednostavniti neki postupci računanja originala. U to se ovdje ne možemo upuštati.

1.4.1. Original racionalne funkcije

U primjenama moramo najčešće odrediti original racionalne funkcije

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Da bismo riješili taj problem, *moramo poznavati nultočke polinoma Q*, odnosno njegovu faktorizaciju na linearne i kvadratne članove.

Za polinome velikog stupnja to se može učiniti samo korištenjem aparata numeričke matematike, jer ne postoje egzaktne formule za određivanje nultočaka polinoma velikog stupnja. (U praksi, te se metode koriste već za polinome stupnja 3.) Zato se za računanje inverza takvih funkcija u praksi koristi neki od mnogobrojnih dosad razvijenih programa.

U nastavku ćemo se ograničiti na računanje inverza onih racionalnih funkcija za koje nam je faktorizacija polinoma Q poznata. Riješimo na početku nekoliko primjera koristeći se samo elementarnim tehnikama.

Primjer 25.

Odredimo original funkcija

A. $\dfrac{1}{s-2}$; **B.** $\dfrac{1}{(s-2)^3}$; **C.** $\dfrac{s-3}{(s-1)(s-2)}$.

▶ **A.** Primjenjujemo Teorem o prigušenju:

$$F(s+a)\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ e^{-at}f(t).$$

Ovdje je $F(s)=\dfrac{1}{s}$ i $f(t)=u(t)$. Zato

$$\frac{1}{s-2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ e^{2t}u(t).$$

Pri zapisivanju originala, korisno je uvijek eksplicitno pisati umnožak sa step funkcijom. To je naročito važno kad god računamo original funkcije prigušene u donjem području!

B. Primjenjujemo isti teorem na par funkcija

$$F(s)=\frac{1}{s^3}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t)=\frac{t^2}{2}u(t).$$

Dakle,

$$\frac{1}{(s-2)^3}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{t^2}{2}e^{2t}u(t).$$

C. Racionalnu funkciju treba napisati u obliku zbroja dvaju prostih razlomaka:

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}.$$

Koeficijente A i B određujemo uobičajenom tehnikom. Na primjer:

$$s-3=A(s-2)+B(s-1).$$

Uvrštavajući $s=1$ dobit ćemo $A=2$, a za $s=2$ slijedi $B=-1$. Zato je

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-2)}=\frac{2}{s-1}-\frac{1}{s-2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ 2e^tu(t)-e^{2t}u(t).\ ◀$$

Primjer 26.

Odredimo original funkcija

A. $\dfrac{1}{s^2+5}$; **B.** $\dfrac{1}{s^2+4s+6}$; **C.** $\dfrac{2s-2}{s^2+4s+6}$.

▶ **A.** Funkciju svodimo na *tabličnu*, sliku sinus funkcije

$$\frac{1}{s^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{s^2+(\sqrt{5})^2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}\,t)u(t).$$

B. Nultočke polinoma u nazivniku su kompleksne, zato se on ne može rastaviti u zbroj prostih razlomaka (s realnim koeficijentima). Nazivnik ćemo pojednostavniti svodeći ga na potpuni kvadrat:

$$\frac{1}{s^2+4s+6}=\frac{1}{(s+2)^2+2}.$$

Sad ćemo primijeniti ponovo Teorem o prigušenju:

$$\frac{1}{(s+2)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t)e^{-2t}u(t).$$

C. Razlomak treba rastaviti na zbroj dvaju od kojih će jedan biti slika (prigušene) sinus, a drugi slika (prigušene) kosinus funkcije:

$$\begin{aligned}\frac{2s-2}{s^2+4s+6}&=\frac{2s-2}{(s+2)^2+2}=\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+2}-\frac{6}{(s+2)^2+2}\\ &=2\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+2}-3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\ 2\cos(\sqrt{2}\,t)e^{-2t}u(t)-3\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\,t)e^{-2t}u(t).\ ◀\end{aligned}$$

1.4.2. Heavisideov razvoj

Za računanje inverza racionalne funkcije[1] $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ trebamo tu funkciju rastaviti na proste razlomke. Taj je rastav posebno jednostavan ukoliko su sve nultočke nazivnika Q jednostruke. U tom slučaju, polinom u nazivniku ima oblik:

$$Q(s)=c(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_r),$$

a rastav racionalne funkcije izgleda ovako:

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{A_2}{s-a_2}+\ldots+\frac{A_r}{s-a_r}.$$

Teorem 12. ■ Heavisideov razvoj

Ako su $a_1,\ldots,a_r$ jednostruke nultočke polinoma Q, tada original funkcije $F(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ima oblik

$$f(t)=\Big[A_1e^{a_1t}+A_2e^{a_2t}+\ldots+A_re^{a_rt}\Big]u(t).\tag{19}$$

Pritom se koeficijenti mogu računati formulom

$$A_k=\lim_{s\to a_k}\frac{P(s)(s-a_k)}{Q(s)}=\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.\tag{20}$$

Napomena. Prvi je način računanja koeficijenta A_k u formuli (20) jednostavniji kad je nazivnik Q rastavljen u umnožak faktora, drugi način ako to nije slučaj.

Dokaz. Krenimo od prikaza

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{A_2}{s-a_2}+\ldots+\frac{A_r}{s-a_r}$$

Pomnožimo obje strane sa $s-a_k$ i izračunajmo limes kad s teži k a_k:

$$\lim_{s\to a_k}\frac{P(s)(s-a_k)}{Q(s)}=\lim_{s\to a_k}\Big(A_1\frac{s-a_k}{s-a_1}+\ldots+A_k+\ldots+A_r\frac{s-a_k}{s-a_r}\Big)=A_k$$

Broj a_k je nultočka polinoma Q, pa vrijedi $Q(a_k)=0$. Sad imamo

$$A_k=\lim_{s\to a_k}\frac{P(s)(s-a_k)}{Q(s)}=\lim_{s\to a_k}\frac{P(s)}{\dfrac{Q(s)-Q(a_k)}{s-a_k}}=\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

Primjer 27.

Neka je $F(s)=\dfrac{s^2-s+2}{s^3-s^2-6s}=\dfrac{s^2-s+2}{s(s-3)(s+2)}$. Točke 0, 3, -2 su jednostruke nultočke. Zato je original

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{k=1}^3\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_kt}=\sum_{k=1}^3\frac{s^2-s+2}{3s^2-2s-6}\,e^{st}\Big|_{s=a_k}\\ &=\Big(-\frac{1}{3}+\frac{8}{15}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}\Big)u(t)\ ◀\end{aligned}$$

[1] gate (*engl*) = vrata

[1] Pretpostavljamo da je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika.

1.5. Konvolucija

1.5.1. Definicija konvolucije

Neka su f_1 i f_2 originali.

Konvolucija funkcija

Konvolucija funkcija f_1 i f_2 označava se s $f_1 * f_2$ a definira formulom

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{21}$$

Jer su f_1 i f_2 originali, podintegralna funkcija se poništava van intervala $[0,t]$. Zato možemo pisati

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{22}$$

i ovu formulu obično koristimo pri računanju konvolucije u zadacima i primjerima. Konvoluciju ćemo uglavnom zapisivati na način $f_1(t) * f_2(t)$, iako je ovaj zapis ponešto neprecizan.

Teorem 13. Teorem o konvoluciji

Konvoluciji u gornjem području odgovara umnožak slika u donjem:

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1(s)\,F_2(s). \tag{23}$$

► Pokažimo najprije da je konvolucija $f_1 * f_2$ dvaju originala također original:

$$\begin{aligned}|(f_1 * f_2)(t)| &\leqslant \int_0^t |f_1(\tau)||f_2(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant M_1M_2 \int_0^t e^{a_1\tau} e^{a_2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{M_1M_2}{a_1-a_2}(e^{a_1t}-e^{a_2t}) \leqslant \frac{2M_1M_2}{|a_1-a_2|}\,e^{at},\end{aligned}$$

tu smo označili $a := \max(a_1,a_2)$.

Odredimo sad sliku konvolucije:

$$\begin{aligned}f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}(f_1 * f_2)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(t-\tau)}f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su}f_2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= F_1(s)F_2(s). \ ◄\end{aligned}$$

Iz formule (23) slijede neka svojstva konvolucije (koja se, dakako, mogu dokazati i direktno po definiciji):

asocijativnost

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3.$$

komutativnost

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1.$$

Primjer 28. S pomoću Teorema o konvoluciji izvedimo formulu za integriranje originala

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}.$$

► Imamo

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t), \qquad \frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ u(t).$$

Prema (23) vrijedi

$$\frac{F(s)}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) * u(t) = \int_0^t f(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \ ◄$$

1.5.2. Primjena konvolucije u računanju originala

Original umnoška dviju funkcija u donjem području može se računati pomoću Teorema o konvoluciji:

$$F(s)G(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Riješimo nekoliko primjera.

Primjer 29. Odredimo original funkcije $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

► Ovu racionalnu funkciju mogli bismo rastaviti na zbroj prostih razlomaka i zatim joj odrediti original. Međutim, neusporedivo jednostavnije je primijeniti Teorem o konvoluciji. Vrijedi

$$\frac{1}{s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ \sin t, \qquad \frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ u(t).$$

Zato je

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2+1)} \bullet\!\!-\!\!\circ \sin t * u(t) &= \int_0^t \sin\tau\, u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sin\tau\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\cos\tau\Big|_0^t = (1-\cos t)u(t). \ ◄\end{aligned}$$

Primjer 30. S pomoću konvolucije, izračunajmo original funkcije $\dfrac{1}{(s-4)(s+1)}$.

► Označimo:

$$F(s) = \frac{1}{s-4}, \qquad G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Originali ovih funkcija su $f(t) = e^{4t}$, $g(t) = e^{-t}$. Zato je original umnoška $F(s)G(s)$ jednak

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t e^{4(t-\tau)}e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = e^{4t}\int_0^t e^{-5\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= e^{4t}\frac{e^{-5\tau}}{-5}\Big|_0^t = -\frac{e^{4t}}{5}(e^{-5t}-1)u(t). \ ◄\end{aligned}$$

Primjer 31. Odredimo original funkcije $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$.

► U ovom slučaju, racionalna se funkcija ne može pojednostavniti. Preostaje nam samo uporaba Teorema o konvoluciji. Računamo ovako

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s^2+1)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \sin t * \sin t &= \int_0^t \sin\tau\,\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2}\Big[\cos(2\tau-t)-\cos t\Big]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \Big(\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)-\frac{1}{2}\tau\cos t\Big)\Big|_0^t \\ &= \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{4}\sin(-t) \\ &= \Big(\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t\Big)u(t). \ ◄\end{aligned}$$

1.6. Rješavanje diferencijalnih i integralnih jednadžbi

1.6.1. Linearne diferencijalne jednadžbe

Pomoću Laplaceove transformacije možemo rješavati Cauchyjev problem:

$$\begin{aligned}&x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t), \\ &x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.\end{aligned} \tag{24}$$

Postaviti ćemo problem ekvivalentan problemu (24) preslikavajući funkcije u donje područje. Koristimo Teorem o deriviranju originala. Neka je $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}x'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, sX(s) - x(0) = sX(s) - x_0, \\ x''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s(sX(s)-x_0) - x'(0) = s^2X(s) - sx_0 - x_1, \\ &\ \vdots \\ x^{(n)}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s^nX(s) - s^{n-1}x_0 - \ldots - sx_{n-2} - x_{n-1}, \\ f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s).\end{aligned}$$

Preslikavanjem ovih funkcija u donje područje dobivamo

$$\begin{aligned}&s^nX(s) + s^{n-1}x_0 - \ldots - x_{n-1} + \\ &\quad + a_{n-1}\big[s^{n-1}X(s) + s^{n-2}x_0 - \ldots - x_{n-2}\big] + \ldots \\ &\quad + a_1[sX(s) - x_0] + a_0X(s) = F(s).\end{aligned}$$

Nakon sređivanja, ovu relaciju možemo zapisati u obliku

$$P(s)X(s) + G(s) = F(s).$$

Tu je $P(s)$ karakteristični polinom jednadžbe (24), (stupnja n), a $G(s)$ neki polinom stupnja najviše $n-1$. Odavde dobivamo

$$X(s) = \frac{F(s)-G(s)}{P(s)}. \tag{25}$$

Potrebno je još $X(s)$ vratiti u gornje područje.

Vidimo da tehnikom Laplaceove transformacije rješavamo Cauchyjev problem direktno, nalazeći njegovo jednoznačno određeno rješenje.

Primjer 32. Riješimo Cauchyjev problem

$$\begin{aligned}x''(t) + 4x(t) &= e^t, \\ x(0) &= 2, \\ x'(0) &= 1.\end{aligned}$$

► Diferencijalna jednadžba prelazi u algebarsku:

$$s^2X(s) - 2s - 1 + 4X(s) = \frac{1}{s-1}.$$

s rješenjem

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{2s+1}{s^2+4} + \frac{1}{(s-1)(s^2+4)} \\ &= \frac{2s+1}{s^2+4} + \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{s^2+4} \\ &= \frac{9}{5}\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{5}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{5}\frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

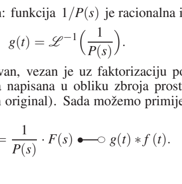
te je

$$x(t) = \Big(\frac{9}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}\sin 2t + \frac{1}{5}e^t\Big)u(t). \ ◄$$

* * *

Tehnika Laplaceove transformacije naročito je pogodna u slučaju kad je funkcija smetnje zadana različitim formulama na različitim intervalima.

Primjer 33. Riješimo problem $x'(t) - x(t) = f(t)$, $x(0) = 1$, gdje je funkcija f zadana slikom:



Sl. 1.9. Funkcija smetnje $f(t)$ je prekinuta

► Sada imamo

$$f(t) = u(t) - u(t-1),$$

pa je slika diferencijalne jednadžbe:

$$sX(s) - 1 - X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}.$$

i odavde

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s(s-1)}\big(1-e^{-s}\big) \\ &= \frac{1}{s-1} + \Big(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\Big)\big(1-e^{-s}\big) \\ &= \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\, 2u(t)e^t - u(t) - u(t-1)e^{t-1} + u(t-1).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t)[2e^t - 1] + u(t-1)[1 - e^{t-1}] \\ &= \begin{cases} 2e^t - 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2e^t - e^{t-1}, & 1 \leqslant t. \end{cases} \ ◄\end{aligned}$$

* * *

U općem slučaju, prema formuli (25), moramo invertirati funkciju $\dfrac{F(s)}{P(s)} - \dfrac{G(s)}{P(s)}$. Funkcija $\dfrac{G(s)}{P(s)}$ je prava racionalna i nju možemo invertirati. Međutim, za po volji zadanu funkciju f ponekad je teško naći original od $\dfrac{F(s)}{P(s)}$. Zato postupamo na sljedeći način: funkcija $1/P(s)$ je racionalna i možemo naći

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\Big(\frac{1}{P(s)}\Big).$$

(Taj problem nije jednostavan, vezan je uz faktorizaciju polinoma, ali kad je jednom racionalna funkcija napisana u obliku zbroja prostih razlomaka, tada možemo lako ispisati njezin original). Sada možemo primijeniti Teorem o konvoluciji:

$$\frac{F(s)}{P(s)} = \frac{1}{P(s)}\cdot F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ g(t) * f(t).$$

Primjer 34. Riješimo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{aligned}y'' + 4y &= f(t), \\ y(0) = 0, &\quad y'(0) = 1,\end{aligned}$$

pri čemu je f bilo koja zadana funkcija koja posjeduje Laplaceov transformat.

► U donjem području, jednadžba glasi

$$\big(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\big) + 4Y(s) = F(s).$$

Uvrstimo početne uvjete i sredimo jednadžbu:

$$\begin{aligned}(s^2+4)Y(s) &= F(s) + 1, \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2+4} - \frac{F(s)}{s^2+4}.\end{aligned}$$

Original funkcije $\dfrac{1}{s^2+4}$ je $g(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$. Rješenje sad možemo napisati u obliku

$$y(t) = g(t) + g(t) * f(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \ ◄$$

Primjer 35. Riješimo Cauchyjev problem

$$\begin{aligned}x'' + x &= e^{-t^2}, \\ x(0) &= x'(0) = 0.\end{aligned}$$

► Račun daje

$$\begin{aligned}s^2X(s) + X(s) &= F(s), \\ X(s) &= \frac{1}{s^2+1}\cdot F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \sin t * f(t).\end{aligned}$$

Dakle,

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)^2}\sin\tau\,d\tau.$$

Rješenje ostavljamo u ovom obliku, jer integral nije elementaran. ◄

1.6.2. Duhamelov integral

Ako su svi početni uvjeti u Cauchyjevom problemu jednaki nuli:

$$\begin{aligned}&x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t), \\ &x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = 0,\end{aligned} \tag{26}$$

tada jednadžba u donjem području ima oblik

$$s^nX(s) + a_{n-1}s^{n-1}X(s) + \ldots + a_1sX(s) + a_0X(s) = F(s),$$

tj.

$$P(s)X(s) = F(s)$$

te se u njoj, za razliku od jednadžbe (25), ne pojavljuje funkcija $G(s)$.

Inače, kad to nije slučaj, razomak $\dfrac{G(s)}{P(s)}$ u jednadžbi (25) je *racionalna funkcija*, pa je znamo invertirati. Zato možemo pretpostaviti da početni uvjeti Cauchyjevog problema glase

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Prethodno smo opisali kako se pomoću konvolucije može prikazati i izračunati original funkcije $\dfrac{F(s)}{P(s)}$. No češće se, pogotovu u primjenama u elektrotehnici, koristi nešto modificirana ideja. Umjesto početne diferencijalne jednadžbe (26) promatra se jednadžba

$$\begin{aligned}&x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0x(t) = u(t), \\ &x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0.\end{aligned} \tag{27}$$

gdje je $u(t)$, dakako, step funkcija.

Ova se jednadžba svodi na računanje originala funkcije

$$X(s) = \frac{1}{sP(s)}.$$

Neka je $x_1(t)$ rješenje problema (27). To rješenje odgovara jediničnoj funkciji smetnje (vanjskoj sili), pa se naziva **jedinično rješenje**. Originalni problem, s desnom stranom $f(t)$, ima sliku u donjem području:

$$X(s) = \frac{1}{P(s)}F(s)$$

i možemo pronaći njegovo rješenje pomoću jediničnog rješenja x_1 ovako:

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{sP(s)}\cdot sF(s) = \frac{1}{sP(s)}\Big[sF(s) - f(0)\Big] + f(0)\frac{1}{sP(s)} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\, x_1(t) * f'(t) + f(0)x_1(t).\end{aligned}$$

ili pak ovako:

$$\begin{aligned}X(s) &= s\frac{1}{sP(s)}\cdot F(s) = \Big[s\frac{1}{sP(s)} - x_1(0)\Big]F(s) + x_1(0)F(s) \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\, x_1'(t) * f(t) + x_1(0)f(t).\end{aligned}$$

Ove su formule poznate pod imenom:

Duhamelov integral

Rješenje Cauchyjevog problema (26) može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}x(t) &= x_1(t)f(0) + \int_0^t x_1(t-\tau)f'(\tau)d\tau \\ &= x_1(0)f(t) + \int_0^t f(t-\tau)x_1'(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{28}$$

Ovdje je $x_1(t)$ rješenje istog problema s jediničnom funkcijom smetnje.

Ovaj je pristup naročito interesantan u analizi problema u kojima se sklop — opisan diferencijalnom jednadžbom — ne mijenja, a promjenjiva je samo funkcija smetnje. Nakon što se odredi rješenje jediničnog problema, rješenje svakog drugog problema se lako izvodi iz jediničnog računanjem konvolucije.

1.6.3. Sustavi diferencijalnih jednadžbi

Promatramo sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + \varphi_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + \varphi_2(t) \\ &\ \vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + \varphi_n(t) \\ x_1(0) &= c_1, \ldots, x_n(0) = c_n\end{aligned} \tag{29}$$

Mnogo je spretnije koristiti matrični zapis

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + f(t) \\ x(0) &= c\end{aligned} \tag{30}$$

Preslikavanjem svih funkcija u donje područje sustav diferencijalnih jednadžbi prelazi u algebarski linearni sustav

$$sX(s) - c = AX(s) + \Phi(s),$$

tj.

$$(sI - A)X(s) = \Phi(s) + c,$$

i odavde

$$X(s) = (sI - A)^{-1}[\Phi(s) + c] \bullet\!\!-\!\!\circ x(t).$$

Primjer 36. Riješimo sustav

$$\begin{aligned}y' &= -4y - 4z \\ z' &= -2y - 6z \\ y(0) &= 3,\ z(0) = 15\end{aligned}$$

► Ovdje je

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+4 & 4 \\ 2 & s+6 \end{bmatrix}, \quad \Phi(s) = 0, \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Zato

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} Y(s) \\ Z(p) \end{bmatrix} &= \frac{1}{s^2+10s+16}\begin{bmatrix} s+6 & -4 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+8)}\begin{bmatrix} 3s-42 \\ 15s+54 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Rješenja glase:

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{3s-42}{(s+2)(s+8)} = -\frac{8}{s+2} + \frac{11}{s+8} \bullet\!\!-\!\!\circ -8e^{-2t} + 11e^{-8t} = y(t) \\ Z(s) &= \frac{15s-54}{(s+2)(s+8)} = \frac{4}{s+2} + \frac{11}{s+8} \bullet\!\!-\!\!\circ 4e^{-2t} + 11e^{-8t} = z(t) \ ◄\end{aligned}$$

1.6.4. Linearne integralne jednadžbe konvolucijskog tipa

Tehnika Laplaceove transformacije pogodna je za rješavanje integralnih jednadžbi (u kojima se javljaju integrali nepoznate funkcije) jer se integral lako preslikava u donje područje. Posebno se to odnosi na integralne jednadžbe konvolucijskog tipa, pri čemu ćemo koristiti Teorem o konvoluciji.

Primjer 37. Riješimo linearnu integralnu jednadžbu u kojoj je nepoznanica funkcija y:

$$y(t) = at + \int_0^t \sin(t-\tau)\,y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Integralna jednadžba treba biti zadovoljena za sve $t \in \mathbf{R}$.

► Jednadžba u gornjem području glasi:

$$y(t) = at + \sin t * y(t).$$

Njezina slika u donjem području je

$$Y(s) = a\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}Y(s).$$

Odavde slijedi

$$Y(s) = a\cdot\frac{s^2+1}{s^4} = a\Big(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\Big)$$

pa je rješenje početnog problema

$$y(t) = a\Big(t + \frac{t^3}{6}\Big). \ ◄$$

1.7. Primjene

1.7.1. Električne mreže

Uvedimo sljedeće oznake:

$e(t)$	: napon u trenutku t
$i(t)$	: jakost struje u trenutku t
R	: otpor otpornika
L	: induktivitet zavojnice
C	: kapacitet kondenzatora

Uz zadani napon možemo u svakoj grani nalaziti struju pomoću integralno-diferencijalnih jednadžbi. Sve veličine možemo preslikati pomoću Laplaceove transformacije. Opišimo ponašanja (pad napona) na svakom elementu mreže:

$$e_R(t) = Ri_R(t) \circ\!\!-\!\!\bullet E_R(s) = RI_R(s)$$

$$e_L(t) = L\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t} \circ\!\!-\!\!\bullet E_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0)$$

$$\begin{aligned}e_C(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^t i_C(\tau)d\tau = \frac{Q_0}{C} + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\, E_C(s) = \frac{Q_0}{Cs} + \frac{1}{Cs}I_C(s)\end{aligned}$$

Pretpostavit ćemo da je do trenutka $t = 0$ sklop bio 'mrtav', tj. $i(t) = 0$ za $t \leqslant 0$, pa je $i(0) = 0$, $Q_0 = 0$. U tom je slučaju slika mreže u donjem području istovjetna mreža u kojoj teče istosmjerna struja, sa simboličnim otporima (impedancijama) R, Ls, $^1/_{Cs}$ za sliku otpornika, zavojnice, kondenzatora. U donjem području ostaju sačuvani Kirchhoffovi zakoni.

Prema tome, struju $I(s)$ u donjem području računamo pomoću Ohmovog zakona. Ukupan otpor $Z(s)$ (nazvan još i operatorskim otporom) mreže konstruiramo po pravilima za serijsko i paralelno spajanje otpornika. Tada je

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}$$

gdje je $E(s)$ slika napona narinutog na mrežu.

Opišimo nekoliko elementarnih mreža na koje je narinut napon $u(t)$. Na taj način dobivamo tzv. jediničnu struju $i_1(t)$. Ako je na sklop narinut neki drugi napon $e(t)$, struju $i(t)$ nalazimo primjenom Duhamelovog integrala:

$$i(t) = e(0)i_1(t) + \int_0^t i_1(t-\tau)e'(\tau)d\tau$$

ili

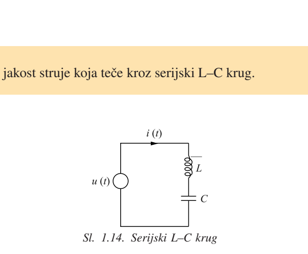
$$i(t) = i_1(0)e(t) + \int_0^t e(t-\tau)i_1'(\tau)d\tau.$$

Primjer 38. Odredimo jakost struje koja teče kroz serijski L–R krug.

Sl. 1.10. serijski L–R krug

► Impedancija u donjem području je $Z(s) = R + Ls$. Imamo $E(s) = \dfrac{1}{s}$, pa je stoga

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{1}{s(R+Ls)} = \frac{1}{R}\Big[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\Big] \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{R}\big[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\big] = i(t) \ ◄$$



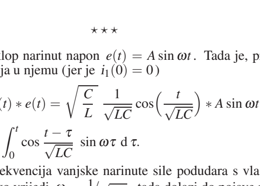
Sl. 1.11. Struja u serijskom L–R krug

Primjer 39. Odredimo jakost struje koja teče kroz serijski R–C krug.

Sl. 1.12. Serijski R–C krug

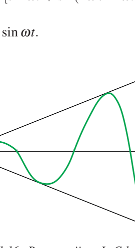
► Sada je $Z(s) = R + {}^1/_{Cs}$ i zato

$$I(s) = \frac{1}{s\big(R + \frac{1}{Cs}\big)} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{R}\,e^{-t/RC} = i(t) \ ◄$$



Sl. 1.13. Struja u serijskom R–C krugu

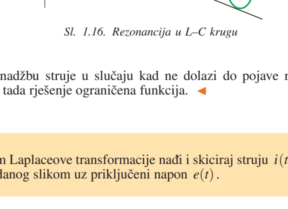
Primjer 40. Odredimo jakost struje koja teče kroz serijski L–C krug.



Sl. 1.14. Serijski L–C krug

► Ovdje je $Z(s) = Ls + {}^1/_{Cs}$.

$$I(s) = \frac{1}{Ls^2 + \frac{1}{C}} = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2 + \Big(\frac{1}{\sqrt{LC}}\Big)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \sqrt{\frac{C}{L}}\,\sin\Big(\frac{t}{\sqrt{LC}}\Big) = i(t)$$



Sl. 1.15. Struja u serijskom L–C krug

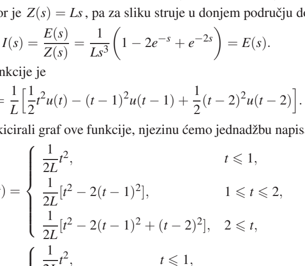
* * *

Neka je na isti sklop narinut napon $e(t) = A\sin\omega t$. Tada je, prema Duhamelovoj formuli, struja u njemu (jer je $i_1(0) = 0$)

$$\begin{aligned}i(t) = i_1'(t) * e(t) &= \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{1}{\sqrt{LC}}\cos\Big(\frac{t}{\sqrt{LC}}\Big) * A\sin\omega t \\ &= \frac{A}{L}\int_0^t \cos\frac{t-\tau}{\sqrt{LC}}\,\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Specijalno, ako se frekvencija vanjske sile podudara s vlastitom frekvencijom kruga, tj. ako vrijedi $\omega = {}^1/_{\sqrt{LC}}$, tada dolazi do pojave rezonancije:

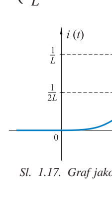
$$\begin{aligned}i(t) &= \frac{A}{L}\int_0^t \cos(\omega t - \omega\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{A}{2L}\int_0^t [\sin\omega t + \sin(2\omega\tau - \omega t)]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{A}{2L}\,t\cdot\sin\omega t.\end{aligned}$$

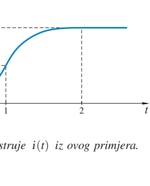


Sl. 1.16. Rezonancija u L–C krugu

Odredite jednadžbu struje u slučaju kad ne dolazi do pojave rezonancije! Uvjerite se da je tada rješenje ograničena funkcija. ◄

Primjer 41. Primjenom Laplaceove transformacije nađi i skiciraj struju $i(t)$ električnog kruga zadanog slikom uz priključeni napon $e(t)$.





► Odredimo najprije jednadžbu narinutog napona i njegovu sliku u donjem području.

$$\begin{aligned}e(t) &= t[u(t) - u(t-1)] + (2-t)[u(t-1) - u(t-2)] \\ &= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s^2} - 2\cdot\frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s} = \frac{1}{s^2}\Big(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\Big) = E(s).\end{aligned}$$

Simbolični otpor je $Z(s) = Ls$, pa za sliku struje u donjem području dobivamo

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{1}{Ls^3}\Big(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\Big) = E(s).$$

Original ove funkcije je

$$i(t) = \frac{1}{L}\Big[\frac{1}{2}t^2u(t) - (t-1)^2u(t-1) + \frac{1}{2}(t-2)^2u(t-2)\Big].$$

Da bismo skicirali graf ove funkcije, njezinu ćemo jednadžbu napisati ovako:

$$\begin{aligned}i(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2L}t^2, & t \leqslant 1, \\ \frac{1}{2L}[t^2 - 2(t-1)^2], & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ \frac{1}{2L}[t^2 - 2(t-1)^2 + (t-2)^2], & 2 \leqslant t, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2L}t^2, & t \leqslant 1, \\ \frac{1}{2L}(-t^2 + 4t - 2), & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ \frac{1}{L}, & 2 \leqslant t, \end{cases}\end{aligned}$$

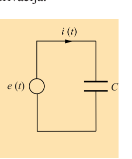
Sl. 1.17. Graf jakosti struje $i(t)$ iz ovog primjera.

1.8. Diracova funkcija

Kad funkcija u nekoj točki ima skok, ona u njoj nema derivaciju; jer je neprekinutost nuždan uvjet za derivabilnost. No, takve su funkcije redovno matematička idealizacija prirodnog toka neke fizikalne veličine koja na dotičnom mjestu vrlo naglo raste, ali ipak ne skače trenutno za neki pozitivni iznos. Budući da funkciju s naglim porastom idealiziramo predstavljajući je pomoću prekinute funkcije, postavlja se pitanje da li možemo i derivaciju takve funkcije idealizirati tako da dobijemo derivaciju dotične prekinute funkcije, čak i u mjestima prekinutosti, gdje, u smislu klasičnih pojmova više analize, ne postoji derivacija.

Primjer 42.

Neka je u trenutku $t = 0$ na ovaj sklop narinut konstantan napon iznosa $e(t) = u(t) = 1$, $t > 0$. Poznato je da će se kondenzator 'trenutno' nabiti, strujnim udarom. Kako izgleda struja $i(t)$ u ovom krugu? Do trenutka $t = 0$ je $i(t) = 0$, također i nakon tog trenutka. Međutim, mora vrijediti $\int_{-\infty}^{\infty} i(t)\,\mathrm{d}t = C$.

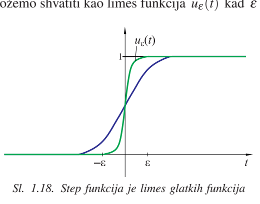


Ovakva funkcija bi morala imati svojstva:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} i(t)\,\mathrm{d}t = C.$$

Očigledno $i(t)$ nije funkcija u klasičnom smislu, jer bi inače njezin integral morao biti jednak nuli (ili ovaj integral nije više klasični Riemannov integral).

Funkciju $u(t)$ možemo shvatiti kao limes funkcija $u_\varepsilon(t)$ kad $\varepsilon \to 0$:



Sl. 1.18. Step funkcija je limes glatkih funkcija

Ove funkcije su diferencijabilne i njihove derivacije $\delta_\varepsilon(t) = u'_\varepsilon(t)$ imat će svojstvo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = u_\varepsilon(t)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = u_\varepsilon(\varepsilon) - u_\varepsilon(-\varepsilon) = 1.$$

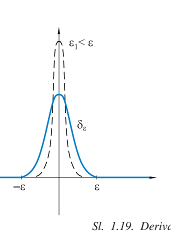
Označimo s δ graničnu 'funkciju', $\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t)$. Onda bi za nju trebalo vrijediti

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{31}$$

Pritom smo zamijenili poredak limesa i integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Dakako, ovaj postupak nije opravdan, jer nisu zadovoljeni uvjeti za takvu zamjenu. To samo potvrđuje da ne postoji klasična funkcija koja bi imala svojstva (31).



Sl. 1.19. Derivacije funkcija u_ε

Derivaciju $u'(t)$ označavamo sa $\delta(t)$ i zovemo **Diracova funkcija** (ili **delta funkcija**), iako to nije funkcija u klasičnom smislu. Što je $\delta(t)$?

Matematički možemo strogo opisati ovakve objekte pomoću aparata koji izlazi izvan područja diferencijalnog računa. Potrebna su nam sredstva operatorskog računa, specijalno, teorija distribucija, kojoj je osnove postavio Laurent Schwartz 1940. godine.

Neka je X vektorski prostor. Preslikavanje $A : X \to \mathbf{R}$ sa svojstvom

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

za sve $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, zove se **linearni funkcional**.

Odnos funkcija i funkcionala. Neka je $X = L^2[a,b]$ ili $X = C[a,b]$ prostor funkcija definiranih na intervalu $[a,b]$. Preslikavanjem

$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbf{R}$$

određen je linearni funkcional na X. (Vrijednost tog funkcionala na funkciji $f \in X$ jest broj određen integralom.)

Općenitije, ako je $\varphi \in X$ neka fiksna funkcija, tada je preslikavanjem

$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

također definiran linearni funkcional. Možemo ga označiti s A_φ:

$$A_\varphi(f) = \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{32}$$

Prema tome, svakoj funkciji $\varphi \in X$ odgovara jedan linearni funkcional na prostoru X oblika (32). Takve funkcionale nazivamo **regularnim**.

Međutim, linearnih funkcionala ima mnogo više nego funkcija.

Neka je $t_0 \in [a,b]$ bilo koji i $X = C[a,b]$. Pridruživanjem

$$f \longmapsto f(t_0)$$

određen je također linearan funkcional, s prostora $C[a,b]$ u $\mathbf{R}$. Označimo ga s δ_{t_0}:

$$\delta_{t_0}(f) := f(t_0).$$

Provjerimo linearnost:

$$\begin{aligned} \delta_{t_0}(\lambda f + \mu g) &:= (\lambda f + \mu g)(t_0) \\ &= \lambda f(t_0) + \mu g(t_0) = \lambda \delta_{t_0}(f) + \mu \delta_{t_0}(g) \end{aligned}$$

Ovaj se funkcional ne može prikazati formulom (32) preko integrala. To je primjer **singularnog** funkcionala.

Ako pak, iz formalnih razloga, prihvatimo identičan zapis i napišemo

$$\delta_{t_0}(f) = \int_a^b f(t)\delta_{t_0}(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0),$$

tada je očito da $\delta_{t_0}(t)$ neće biti prava funkcija. Za nju će vrijediti

$$\delta_{t_0} = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases}, \qquad \int_a^b \delta_{t_0}(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

tj. δ_{t_0} će biti upravo δ–funkcija, pomaknuta u točku t_0. Zato pišemo $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$:

$$\int_a^b \delta(t - t_0) f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0).$$

S $\delta(t)$ možemo formalno računati kao da se radi o pravoj funkciji. Izvedimo neke formalne račune s δ–funkcijom, imajući u vidu da je $\delta(t) := u'(t)$. Neka su a i b bilo koji, $0 \in [a,b]$. Tada

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(t)u(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)u(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(b) - \int_0^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - (f(b) - f(0)) = f(0). \end{aligned}$$

Funkciju δ možemo derivirati:

$$\delta'(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0).$$

Općenito će vrijediti

$$\delta^{(n)}(f) = (-1)^n f^{(n)}(0),$$

ili u standardnom zapisu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Na funkciju δ možemo primjenjivati i sva pravila operatorskog računa:

$$\mathscr{L}(\delta(t)) := \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t)\,\mathrm{d}t = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1.$$

Dakle

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1.$$

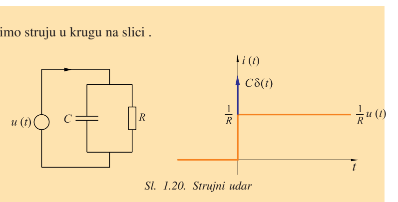
Na isti način

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\delta^{(n)}(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st}\delta^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n (e^{-st})^{(n)}\Big|_{t=0} = (-1)^{(n)}(-s)^n e^{-st}\Big|_{t=0} = s^n. \end{aligned}$$

$$\delta^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^n$$

Primjer 43.

Nađimo struju u krugu na slici .



Sl. 1.20. Strujni udar

► Imamo $Z(s) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + Cs} = \dfrac{R}{RCs + 1}$, $I(s) = \dfrac{RCs + 1}{Rs} = C + \dfrac{1}{Rs}$. Stoga je $i(t) = C\delta(t) + \dfrac{1}{R}u(t)$. ◄

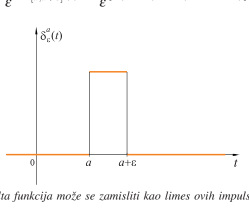
⋆⋆⋆

Označimo sada s δ^a_ε **jedinični impuls**, funkciju koja je konstantna na intervalu $[a, a+\varepsilon]$ i čiji je integral jednak jedinici:

$$\delta^a_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & \alpha \leqslant t \leqslant a + \varepsilon, \\ 0, & \text{za ostale } t. \end{cases}$$

Onda vrijedi

$$\delta^a_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot g_{[a,a+\varepsilon]}(t) = \frac{1}{\varepsilon}[u(t - a) - S(t - a - \varepsilon)].$$



Sl. 1.21. Delta funkcija može se zamisliti kao limes ovih impulsnih funkcija.

Slika ove funkcije je

$$\mathscr{L}(\delta^a_\varepsilon(t)) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+\varepsilon)s}}{s}\right) = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \cdot e^{-as}.$$

U graničnom procesu, limes funkcija $\delta^a_\varepsilon(t)$ kad $\varepsilon \to 0$ trebao bi se ponašati kao delta funkcija $\delta(t - a)$. Ovaj limes postoji u donjem području. Naime, vrijedi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = s$$

pa je stoga

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{L}(\delta^a_\varepsilon(t)) = e^{-as}.$$

Prema tome, možemo pisati

$$\delta(t - a) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-as}.$$

Temeljno svojstvo delta funkcije,

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t - a)\,\mathrm{d}t = f(a)$$

slijedi iz teorema srednje vrijednosti:

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta^a_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\varepsilon}(a + \varepsilon - a)f(t_0) = f(t_0).$$

Ovdje je t_0 neka točka iz intervala $[a, a+\varepsilon]$. Kad ε teži u nulu, $f(t_0)$ teži ka $f(a)$, zbog neprekinutosti od f.

Primjetite da se i Laplaceov transformat delta funkcije može izračunati na temelju osnovnog svojstva delta funkcije:

$$\int_0^{\infty} f(x)\delta(t - a)\,\mathrm{d}t = e^{-st}\Big|_{t=a} = e^{-as}.$$

1.9. Redovi potencija i stepenaste funkcije

1.9.1. Preslikavanje razvojem u red potencija

Pretpostavimo da niz funkcija $f_n(t)$ konvergira prema funkciji $f(t)$ za koju postoji Laplaceov transformat $F(s)$. Postavlja se pitanje: je li Laplaceova transformacija neprekinuto pridruživanje? Hoće li vrijediti

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{L}(f_n(t)) = \mathscr{L}(\lim_{n\to\infty} f_n(t))? \tag{33}$$

Ako je to slučaj, onda funkciju $F(s)$ možemo dobiti u graničnom procesu:

$$F(s) = \lim_{n\to\infty} F_n(s) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{L}(f_n(t)).$$

Laplaceova je transformacija definirana nepravim integralom. Zamjena (33) predstavlja zamjenu limesa i nepravog integrala. U mnogim se slučajevima ta zamjena smije provesti.

Primjer 44.

Odredimo sliku funkcije $f(t) = \sin t$ razvojem u red potencija.

► Vrijedi

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^6} - \ldots$$

Red zdesna je geometrijski. Njegova je suma

$$\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s^2 + 1}. \ ◄$$

⋆⋆⋆

Istovjetna metoda može se primijeniti za računanje inverzne transformacije. Original $f(t)$ možemo tražiti razvojem funkcije $F(s)$ u Taylorov red po potencijama $\dfrac{1}{s}$.

Ilustrirajmo to na poznatom paru funkcija.

Primjer 45.

Odredimo original funkcije $\dfrac{1}{s - 1}$.

► Razvijmo funkciju po potencijama od $\dfrac{1}{s}$:

$$\frac{1}{s - 1} = \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{1}{s}} = \frac{1}{s}\left[1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \ldots\right] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \ldots$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots = e^t. \ ◄$$

Teorem 14. Preslikavanje redova potencija

Ako se u donjem području funkcija $F(s)$ može prikazati sumom konvergentnog reda po potencijama od $1/s$

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{s^{n+1}}, \tag{34}$$

tada se njezin original može računati formulom

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n. \tag{35}$$

Primjer 46.

Odredimo original funkcije $F(s) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{s}\right)$.

► Razvijmo funkciju u red po potencijama od $\dfrac{1}{s}$:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} - \ldots - \frac{1}{ns^n} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ns^n}.$$

Original ove funkcije je

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ns^n} \bullet\!\!-\!\!\circ\ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \frac{1 - e^t}{t}. \ ◄$$

Primjer 47.

Funkciju $F(s) = \dfrac{1}{1 + s^k}$ teško je za velike k invertirati na standardni način, jer je teško odrediti rastav te racionalne funkcije na proste razlomke. Međutim, možemo pisati:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + s^k} &= \frac{1}{s^k} \frac{1}{1 + 1/s^k} = \frac{1}{s^k}\left[1 - \frac{1}{s^k} + \frac{1}{s^{2k}} - \ldots\right] \\ &= \frac{1}{s^k} - \frac{1}{s^{2k}} + \frac{1}{s^{3k}} - \ldots \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{t^{3k-1}}{(3k-1)!} - \ldots \end{aligned}$$

⋆⋆⋆

Ma koliko ovakvi postupci računanja transformata i originala bili logični, mora se imati na umu da se smiju primjenjivati samo one formule koje su "prošle" strogi matematički dokaz. Tako na primjer, postupak preslikavanja originala "član po član", nije uvijek opravdan.

Primjer 48.

Odredimo sliku funkcije $f(t) = e^{-t^2}$.

► Ova funkcija trne vrlo brzo, neprekinuta je i ograničena (konstantom 1), pa postoji njezina slika. Ako napišemo njezin rastav u Taylorov red (koji za svaki realni t konvergira, i to vrlo brzo) i zatim red preslikamo član po član, dobit ćemo

$$\begin{aligned} e^{-t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{s^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)\cdots(n+2)(n+1)}{s^{2n}}. \end{aligned}$$

Dobiveni red ne konvergira niti za jedan s, u što se možemo uvjeriti D'Alembertovim kriterijem:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{|s|^2} = \infty. \ ◄$$

⋆⋆⋆

Dokaz sljedećeg teorema na ovom mjestu ne možemo izvesti:

Teorem 15. Preslikavanje redova potencija

Ako red

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{36}$$

konvergira za $t \geqslant 0$, pri čemu vrijedi

$$|a_n| \leqslant \frac{M\alpha^n}{n!},$$

za sve dovoljno velike n i neke konstante $\alpha > 0$, $M > 0$, onda se slika funkcije može odrediti preslikavajući "član po član":

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{s^{n+1}}. \tag{37}$$

1.9.2. Gama funkcija

Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t^r$ za prirodni eksponent r iznosi

$$t^r \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{r!}{s^{r+1}}.$$

Kako glasi taj transformat za eksponent r koji nije prirodan broj?

Na ovo se pitanje ne može odgovoriti u terminima elementarnih funkcija. Laplaceov transformat ove funkcije postoji, ali nije elementarna funkcija. Naime, integral

$$\int_0^{\infty} t^r e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

općenito nije elementarni integral. Obzirom da se ovaj tip integrala javlja vrlo često, ne samo pri računanju Laplaceovih transformata, on će poslužiti za definiciju nove funkcije.

Gama funkcija

Neka je $x > 0$ realni broj. **Gama funkcija** definira se nepravim integralom

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{38}$$

Uvjet $x > 0$ je nuždan da bi ovaj nepravi integral konvergirao.

⋆⋆⋆

Prije nego što utvrdimo vezu između gama funkcije i Laplaceovog transformata funkcije t^r, izvedimo neka svojstva gama funkcije. Pokušajmo izračunati integral (38) parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\begin{matrix} u = t^{x-1} & \mathrm{d}v = e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = (x-1)t^{x-2}\,\mathrm{d}t & v = -e^{-t} \end{matrix}\right] \\ &= -t^{x-1}e^{-t}\Big|_0^{\infty} + (x-1)\int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Integral zdesna će konvergirati ako je $x > 1$. Limes prvog člana jednak je nuli u obje granice. Tako smo dobili *rekurzivnu formulu* koju zadovoljava gama funkcija:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \qquad x > 1 \tag{39}$$

Ova formula pokazuje da je za računanje vrijednosti gama funkcije dovoljno poznavati njezine vrijednosti unutar intervala $\langle 0, 1]$. Tako na primjer, imamo

$$\begin{aligned} \Gamma(4.3) &= 3.3 \cdot \Gamma(3.3) = 3.3 \cdot 2.3 \cdot \Gamma(2.3) \\ &= 3.3 \cdot 2.3 \cdot 1.3 \cdot \Gamma(1.3) = 3.3 \cdot 2.3 \cdot 1.3 \cdot 0.3 \cdot \Gamma(0.3). \end{aligned}$$

Vrijednosti gama funkcije su tabelirane i mogu se dobiti u svakom (boljem) džepnom kalkulatoru. Među rijetkima koje se mogu izračunati elementarnim aparatom spada

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Za prirodni eksponent n sad možemo napisati, koristeći se rekurzivnom relacijom

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots \\ &= n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \end{aligned}$$

Zato kažemo da je gama funkcija poopćenje funkcije faktorijela na realne argumente.

Još se jedna vrijednost može izračunati integralnim računom (u što se sad nećemo upuštati):

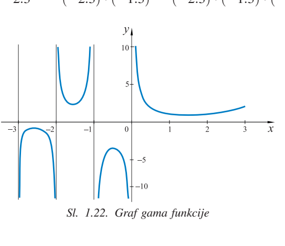
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{40}$$

Vrijednost gama funkcije za $x = 0$ ne postoji, jer integral divergira. Međutim, za negativne argumente x, koji nisu cjelobrojni, gama funkciju možemo definirati koristeći se rekurzivnom relacijom (39) *unatrag*:

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \qquad x < 0. \tag{41}$$

Na primjer

$$\Gamma(-2.3) = \frac{\Gamma(-1.3)}{-2.3} = \frac{\Gamma(-0.3)}{(-2.3)\cdot(-1.3)} = \frac{\Gamma(0.7)}{(-2.3)\cdot(-1.3)\cdot(-0.3)}$$



Sl. 1.22. Graf gama funkcije

⋆⋆⋆

Teorem 16. Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t^r$

Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t^r$ za sve realne $r > -1$ glasi

$$t^r \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \tag{42}$$

► Račun ide ovako:

$$t^r \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^{\infty} t^r e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\begin{matrix} u = st \\ \mathrm{d}u = s\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right] = \frac{1}{s^{r+1}}\int_0^{\infty} u^r e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}.$$

Svi su integrali u ovoj formuli definirani i ona vrijedi za sve realne brojeve $r > -1$. ◄

Primjer 49.

Odredimo Laplaceov transformat funkcija

A. $f(t) = \sqrt{t}$, **B.** $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

► Prema (42) i (40) imamo

$$\sqrt{t} = t^{1/2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{s^{3/2}}.$$

Za funkciju $1/\sqrt{t}$ će biti

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Primijetite da funkcija $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ *nije original*, jer nije ograničena u nuli. Ipak, njezin Laplaceov transformat postoji. Isto vrijedi za sve funkcije $t \mapsto t^r$, čim je $-1 < r < 0$. ◄

1.9.3. Besselova diferencijalna jednadžba

U skupinu važnijih diferencijalnih jednadžbi spada Besselova diferencijalna jednadžba reda ν:

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \nu^2)x = 0 \tag{43}$$

Njezina su rješenja J_ν, Besselove funkcije indeksa ν.

Posebice, za $\nu = 0$, dobivamo Besselovu jednadžbu reda 0. Rješit ćemo tu jednadžbu, uz početne uvjete:

$$\begin{aligned} t\ddot{x} + \dot{x} + tx &= 0, \\ x(0) = 1, \quad \dot{x} &= 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Ovo je linearna diferencijalna jednadžba s nekonstantnim koeficijentima. Ne postoji jednostavna supstitucija koja bi ovu jednadžbu prevela u jednadžbu s konstantnim koeficijentima. Ona se može riješiti *razvojem u red potencija*. Sad ćemo opisati drugu mogućnost, koja koristi tehnike Laplaceove transformacije.

Neka je $X(s)$ slika nepoznate funkcije $x(t)$. Prema Teoremu o deriviranju originala, znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} \dot{x} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sX(s) - x(0) = sX(s) - 1, \\ \ddot{x} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - s. \end{aligned}$$

Sliku funkcije $t\ddot{x}$ dobivamo primjenom Teorema o deriviranju slike:

$$t\ddot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[s^2X(s) - s\right]$$

Slično se preslikava i posljednji član diferencijalne jednadžbe:

$$tx \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}.$$

Prema tome, slika diferencijalne jednadžba u donjem području glasi

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[s^2X(s) - s\right] + sX(s) - 1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) = 0.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$(s^2 + 1)X'(s) + sX(s) = 0. \tag{45}$$

Budući da početna jednadžba nije imala konstantne koeficijente, njezina slika u donjem području nije *algebarska* već opet *diferencijalna jednadžba*. Red diferencijalne jednadžbe koja se ovakvim transformacijama može dobiti nije nužno jednak 1, tako na primjer, slika opće Besselove diferencijalne jednadžbe bit će opet diferencijalna jednadžba reda 2, zbog faktora t^2 koji množi funkcije u gornjem području.

Jednadžba (45) može se lako riješiti separacijom varijabli i nakon toga integriranjem:

$$X(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}}. \tag{46}$$

Iz tablica Laplaceovih transformata čitamo

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \bullet\!\!-\!\!\circ\ J_0(t),$$

funkcija $J_0(t)$ je **Besselova funkcija prve vrste reda nula**. Za tu je funkciju poznato da vrijedi $J_0(0) = 1$. Zato je

$$x(t) = C \cdot J_0(t)$$

pa uvrštavanjem $t = 0$ dobivamo $C = 1$. Dakle, rješenje diferencijalne jednadžbe je funkcija $J_0(t)$.

Da bismo stekli nekakav utisak o izgledu funkcije J_0, rastavit ćemo original (46) po potencijama od $1/s$ i dobiveni red preslikati u gornje područje *član po član*.

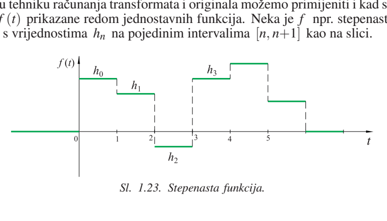
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{C}{s\sqrt{1 + \frac{1}{s^2}}} = \frac{C}{s}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} \\ &= C\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{s^5} - \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{s^7} + \ldots\right) \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\ C\left(1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{64} - \frac{t^6}{2304} + \ldots\right) = x(t) \end{aligned}$$

Iz početnog uvjeta $x(0) = 1$ slijedi $C = 1$. Odavde dobivamo Taylorov razvoj funkcije J_0:

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{64} - \frac{t^6}{2304} + \ldots$$

1.9.4. Slike stepenastih funkcija

Sličnu tehniku računanja transformata i originala možemo primijeniti i kad su $F(s)$ ili $f(t)$ prikazane redom jednostavnih funkcija. Neka je f npr. stepenasta funkcija, s vrijednostima h_n na pojedinim intervalima $[n, n+1]$ kao na slici.



Sl. 1.23. Stepenasta funkcija.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n g_{[n,n+1]}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n[u(t - n) - u(t - n - 1)]$$

Tada je

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{s}\left[e^{-ns} - e^{-(n+1)s}\right] = \frac{1 - e^{-s}}{s}\sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-ns}$$

ukoliko ovaj red konvergira za neki s. Nuždan i dovoljan uvjet za to jest da red $\sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$ ima pozitivan polumjer konvergencije. Ako stavimo $z = e^{-ns}$ i

$$\Delta_1(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$$

tada vrijedi

$$F(s) = \Delta_1(s)H(e^{-s}).$$

Funkcija Δ_1 je transformat jediničnog signala $g_{[0,1]}(t)$.

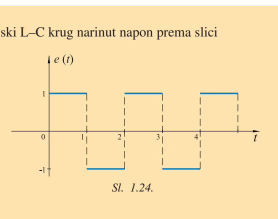
Primjer 50.

Neka je npr. $h_n = n$, i $f(t)$ odgovarajuća stepenasta funkcija. Tada imamo

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1 - z)^2} \\ F(s) &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \cdot \frac{e^{-s}}{(1 - e^{-s})^2} = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}. \end{aligned}$$

Primjer 51.

Neka je na serijski L–C krug narinut napon prema slici



Sl. 1.24.

Odredimo jakost struje u tom krugu.

► Vrijedi

$$Z(s) = Ls + \frac{1}{Cs}, \qquad \frac{1}{Z(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + 1} = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\omega s}{s^2 + \omega^2}$$

gdje je $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Odredimo $E(s)$. Vrijedi

$$h_n = (-1)^n \implies H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1 + z}$$

$$E(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1 + e^{-s}}.$$

Dakle,

$$I(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 - e^{-s}}{1 + e^{-s}}.$$

Ovu je funkciju teško invertirati. Međutim, možemo $\dfrac{1}{1 + e^{-s}}$ razviti u red potencija po e^{-s}!

$$\begin{aligned} I(s) &= \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}(1 - e^{-s})(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \ldots) \\ &= \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}(1 - 2e^{-s} + 2e^{-2s} - 2e^{-3s} + \ldots) \end{aligned}$$

i sada ovaj red invertirati *član po član*:

$$i(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\left[\sin\omega t\, u(t) - 2\sin\omega(t-1)\,u(t-1) + 2\sin\omega(t-2)\,u(t-2) - \ldots\right]$$

Ovaj je red dobro definiran, jer za svaki t imamo samo konačno mnogo pribrojnika različitih od nule. No može se dogoditi da $i(t)$ neograničeno raste s vremenom. Npr. ako je ${}^{\omega}/_{\pi}$ cjelobrojan neparan broj, tada će se doprinosi pojedinih harmonika zbrajati, bez pomaka u fazi. U tom slučaju doći će do pojave rezonancije.

Mnogo ćemo jasnije vidjeti što se događa ako prikažemo $e(t)$ na drugi način. U sljedećem ćemo poglavlju pokazati da se ova funkcija može prikazati redom oblika:

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)\pi t.$$

Iskoristimo Duhamelov integral. Uz jedinični napon $e_1(t) = u(t)$ dobivamo jediničnu struju

$$i_1(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\sin\omega t, \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Zato je

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(0)e(t) + e(t) * i_1'(t) \\ &= \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{C}{L}}\,\omega\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\pi t * \cos\omega t \end{aligned}$$

Jer vrijedi

$$\cos\omega t * \sin\beta t = \frac{2\beta}{(\beta + \omega)(\beta - \omega)}\sin\frac{(\beta + \omega)t}{2}\sin\frac{(\beta - \omega)t}{2}$$

za $\omega \neq \beta$ (za $\omega = \beta$ formula će vrijediti ako izračunamo graničnu vrijednost desne strane kad $\beta \to \omega$), dobivamo

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{C}{L}}\,\omega\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\,\frac{2(2n+1)\pi}{[(2n+1)\pi + \omega][(2n+1)\pi - \omega]} \times \\ &\quad \times \sin\frac{[(2n+1)\pi + \omega]t}{2}\,\sin\frac{[(2n+1)\pi - \omega]t}{2} \\ &= 8\sqrt{\frac{C}{L}}\,\omega\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 - \omega^2}\sin\frac{(2n+1)\pi + \omega}{2}t\,\sin\frac{(2n+1)\pi - \omega}{2}t. \end{aligned}$$

Sad je jasno da će se pojaviti rezonancije ukoliko je $\omega = (2n+1)\pi$ barem za jedan prirodni broj n. ◄