Linearna algebra - 2. auditorne vježbe

1. **(Osnovne metode dokazivanja u matematici)**

   (a) Dokažite da je $n^2 - 1$ djeljivo s 3 za sve $n \in \mathbb{N}$ koji nisu djeljivi s 3.

   (b) Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: n je paran broj ako i samo ako je n^2 paran broj.

   (c) Zadan je četverokut $ABCD$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

   i. $ABCD$ je paralelogram (tj. nasuprotne stranice su mu paralelne),

   ii. jedan par nasuprotnih stranica četverokuta $ABCD$ je paralelan i jednake duljine,

   iii. nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$ su jednake duljine,

   iv. dijagonale četverokuta $ABCD$ se međusobno raspolavljaju.

2. Dokažite da za svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2$ vrijedi: $\mathbf{A}$ komutira sa svim matricama iz $\mathcal{M}_2$ ako i samo ako je oblika $\lambda \mathbf{I}$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Za matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ kažemo da je **involutorna** ako je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

   (a) Dokažite da je matrica $\mathbf{A}$ involutorna ako i samo ako je $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

   (b) Za matricu $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ kažemo da je **idempotentna** ako je $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$. Dokažite da je matrica $\mathbf{A}$ involutorna ako i samo ako je matrica $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ idempotentna.

4. Dokažite da za sve ulančane matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ vrijedi $(\mathbf{ABC})^\top = \mathbf{C}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$.

5. Dokažite da se svaka matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ može napisati u obliku zbroja simetrične i antisimetrične matrice. Odredite taj rastav za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ 10 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$