Robusna optimizacija - dodatni materijal

Siječanj 2022

1 Dva načina izvoda za primjer sa predavanja

Tvrtka proizvodi dvije vrste lijekova; $DrugI$ i $DrugII$ koji sadrže aktivni reagens A. A se izvlači iz dvije vrste sirovina – $RawI$ i $RawII$. Pronaite plan koji maksimizira profit tvrtke, uz podatke dane na predavanjima. Pretpostavite da su aI i aII količine A u $RawI$ i $RawII$, i da variraju 0.5% i 2% oko nominalne vrijednosti, tj. $aI \in [0.00995, 0.0105], aII \in [0.0196, 0.0204]$.

Očito je problem samo ograničenje koje sadrži aI i aII. To je jedino ograničenje kojim se moramo baviti jer su svi ostali podatci u LP-u sa slideova deterministički:

$$aI \cdot RawI + aII \cdot RawII + aIII \cdot DrugI + aIV \cdot DrugII \geq 0 \tag{1}$$

Ostatak programa koji je deterministički jednostavno prepišemo u rješenje, no ovo ograničenje moramo prepisati u robusni ekvivalent neizvjesnog LP i preraditi u LP. U ovom slučaju imamo iznimno jednostavnu poliedralnu neizvjesnost sljedećeg oblika:

$$U_{a1} = \left\{ a1 | \begin{array}{c} aI \leq 0.0105 \\ aI \geq 0.00995 \\ aII \leq 0.0196 \\ aII \geq 0.0204 \\ aIII = -0.5 \\ aIV = -0.6 \end{array} \right\}$$

1.1 Specifičan problemu - najbrži za ovaj slučaj

U ovom slučaju, uvrštavamo poliedralnu neizvjesnost u unutarnji problem (slide 15) i pokušavamo vidjeti možemo li trivijalno razriješiti unutarnji problem u rješenje. U ovom slučaju je to moguće. Unutarnji problem (sve je obrnuto od slidea jer je ograničenje $\geq$) jest:

$$\begin{bmatrix} min_{a_1} a_1^T x \\ aI \geq 0.00995 \\ aI \leq 0.0105 \\ aII \leq 0.0196 \\ aII \geq 0.0204 \\ aIII = -0.5 \\ aIV = -0.6 \end{bmatrix} \geq 0$$

Jasno je da se minimum ostvaruje za donje granice intervala za pojedine parametre. Dakle $a_1 = [0.00995, 0.0196, -0.5, -0.6]^T$, stoga je dovoljno samo unutarnji problem zamijeniti sa:

$0.00995 \cdot RawI + 0.0196 \cdot RawII - 0.5 \cdot DrugI - 0.6 \cdot DrugII \geq 0$

1.2 Opći postupak

Ovdje slijedimo postupak koji funkcionira za svaku poliedralnu neizvjesnost (slide 17). Ovdje je problem što moramo problem prilagoditi strukturi unutarnjeg problema sa slidea 15 da bi za takvu formu vrijedila izvedena forma LP-a sa slidea 17. Dakle, originalno ograničenje 1 treba pretvoriti u *leq*:

$$aI \cdot RawI + aII \cdot RawII + aIII \cdot DrugI + aIV \cdot DrugII \leq 0 \tag{2}$$

što povlači promjene u poliedralnoj neizvjesnosti (množenja sa -1):

$$\begin{bmatrix} max_{a_1} a_1^T x \\ aI \leq -0.00995 \\ aI \geq -0.0105 \\ aII \leq -0.0196 \\ aII \geq -0.0204 \\ aIII = 0.5 \\ aIV = 0.6 \end{bmatrix} \leq 0$$

Unutarnji problem treba raspisati u formu prebacujući jednakosti u dvije nejednakosti, te okrećući množenjima sa -1 sva ograničenja u $\leq$:

$$\begin{bmatrix} max_{a_1} a_1^T x \\ aI \leq -0.00995 \\ -aI \leq 0.0105 \\ aII \leq -0.0196 \\ -aII \leq 0.0204 \\ aII \leq 0.5 \\ -aII \leq -0.5 \\ aIV \leq 0.6 \\ -aIV \leq -0.6 \end{bmatrix} \leq 0$$

Iz ove forme se lako konstruiraju matrica D_1 i vektor d_1 iz kojih slijedi razrješenje unutarnjeg LPa koje se upisuje u deterministički dio polaznog problema. Novouvedena varijabla p_1 za dual ovog problema ima 8 dimenzija.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} -0.00995 & 0.0105 & -0.0196 & -0.0204 & 0.5 & -0.5 & 0.6 & -0.6 \end{bmatrix}^T$$

Uz oznaku $x = [RawI, RawII, DrugI, DrugII]$, razriješeni dio unutarnjeg programa (koji se umeće sa determinističkim dijelom početnog programa) jest:

$$min_{x,p_1} c^T x$$
$$p_1^T d_1 \leq 0$$
$$D_1^T p_1 = x$$
$$p_1 \geq 0$$
$$det.ograničenja...$$

Pogledajte konačno rješenje u python notebooku priloženom uz predavanje u repozitoriju predmeta.