



Matematička analiza 2 - predavanja

POGLAVLJE 6: *Diferencijalne jednačbe prvog reda*

Tomislav Burić, Domagoj Kovačević, Lana Horvat Dmitrović,
Mervan Pašić, Mate Puljiz, Tomislav Šikić,
Igor Velčić, Ana Žgaljić Keko



VERZIJA OD 1. LIPNJA 2023.

PUBLISHED BY FER, WWW.FER.UNIZG.HR

Copyright © 2020 ZPM

Ova skripta se smije koristiti isključivo u osobne svrhe te se ne smije ni na koji način mijenjati ili umnožavati, kao ni prikazivati, izvoditi ili distribuirati u javnosti i drugim medijima, ili na bilo koji drugi način koristiti za bilo koju javnu ili komercijalnu svrhu.



Sadržaj

6	Diferencijalne jednađbe prvog reda - DJ	5
6.1	Uvod	5
6.1.1	Geometrija rješenja. Diferencijalna jednađba familije krivulja	6
6.1.2	Separacija varijabli i direktna integracija	9
6.1.3	DJ s početnim uvjetom - Cauchyjev problem	13
6.1.4	Supstitucija u DJ	15
6.2	Linearna diferencijalna jednađba prvog reda	15
6.2.1	Metoda varijacije konstante	16
6.2.2	Formula za opće rješenje	17
6.2.3	Linearna diferencijalna jednađba po $x(y)$ i $x' = dx/dy$	19
6.3	Bernoullijeva i Riccatijeva diferencijalna jednađba	21
6.3.1	Bernoullijeva diferencijalna jednađba - linearizacija	21
6.3.2	Dodatak - formula za opće rješenje Bernoullijeve DJ	23
6.3.3	Dodatak - varijacija konstante za Bernoullijevu DJ	24
6.3.4	Dodatak - Riccatijeva diferencijalna jednađba	24
6.4	Diferencijalna jednađba homogenog stupnja	26
6.4.1	$P(x,y)$ i $Q(x,y)$ su polinomi istog homogenog stupnja	27
6.4.2	Transformacija na diferencijalnu jednađbu homogenog stupnja	29
6.4.3	$P(x,y)$ i $Q(x,y)$ su funkcije (ne nužno polinomi) istog homogenog stupnja	31
6.5	Diferencijalne jednađbe kao matematički modeli	32
6.5.1	Primjena u geometriji	32

6.5.2	Ortogonalne trajektorije	34
6.5.3	Primjene u optimizaciji, kulinarstvu, biologiji, medicini i tehnici	36
6.6	Egzaktna diferencijalna jednađba. Eulerov multiplikator	40
6.6.1	Nužan uvjet za egzaktnost diferencijalne jednađbe	40
6.6.2	Dovoljan uvjet za egzaktnost diferencijalne jednađbe	41
6.6.3	Eulerov multiplikator	44
6.7	Egzistencija i jedinstvenost rješenja	48
6.7.1	Peanov teorem - lokalna egzistencija rješenja	48
6.7.2	Picardov teorem - lokalna jedinstvenost rješenja	49
6.7.3	Regularna i singularna rješenja	52
6.8	Lagrangeova i Clairautova diferencijalna jednađba	56
6.8.1	Lagrangeova diferencijalna jednađba	56
6.8.2	Clairautova diferencijalna jednađba	58
6.8.3	Ovojnica familije krivulja	59
6.9	Dodatak - Numeričko rješavanje diferencijalne jednađbe	60
6.9.1	Eulerova metoda	61
6.9.2	Taylorova metoda - numerička aproksimacija Picardovih iteracija	63
6.10	Pitanja za ponavljanje gradiva	64
6.11	Zadaci	65
6.12	Rješenja za zadatke	65
	Kazalo	66



6. Diferencijalne jednađžbe prvog reda -

Ključni pojmovi: linearna diferencijalna jednađžba prvog reda 15, Bernoullijeva diferencijalna jednađžba 21, Riccatijeva diferencijalna jednađžba 24, diferencijalna jednađžba homogenog stupnja 27, ortogonalne trajektorije 34, egzaktna diferencijalna jednađžba 40, Eulerov multiplikator 44, egzistencija rješenja 48, jedinstvenost rješenja 49, Lagrangeova diferencijalna jednađžba 56, Clairautova diferencijalna jednađžba 59, Eulerova metoda za numeričko rješavanje diferencijalne jednađžbe 61

Dijelovi teksta pisani malim slovima, kao što su "Detalji", "Dodatak" i "Iz povijesti" ne treba učiti za ispit, budući da služe za informiranje i neobavezno proširivanje znanja.



Iza svakog primjera, koji je potpuno riješen, postoje vježbe za samostalni rad. Iza svake vježbe je napisano njeno rješenje bez postupka rješavanja, a za posebno odabrane vježbe postoji i link na njenu video verziju s postupkom rješavanja, oznaka: "YT-VIDEO"

6.1 Uvod

Kod algebarske linearne jednađžbe $2x - 1 = 0$, kvadratne jednađžbe $x^2 + x + 1 = 0$, eksponencijalne jednađžbe $e^{2x} - e^x + 3 = 0$, trigonometrijske jednađžbe $2 \sin(4x) + 1 = 0$ ili logaritamske jednađžbe $\ln(3x + 1) = 5$, nepoznata varijabla koju tražimo je realni broj x . Za razliku od toga, u *diferencijalnoj jednađžbi prvog reda*, koju općenito zapisujemo u jednom od sljedećih oblika:

$$y' = f(x, y), \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \text{ili} \quad F(x, y, y') = 0,$$

nepoznata varijabla koju tražimo je realna funkcija $y = y(x)$, gdje je

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Maksimalan red derivacije koji se pojavljuje u diferencijalnoj jednačbi prvog reda je 1.

Postoje mnogi tipovi diferencijalnih jednačbi prvog reda. Tip je karakteriziran nekim njenim svojstvom, koje je često naglašeno u njenom imenu. Na primjer:

- $y' + 2xy = x^2 + 1$ je *linearna diferencijalna jednačba prvog reda*;
- $y' - x^2y = xy^3$ je *Bernoullijeva diferencijalna jednačba*;
- $(x^4 + 5xy^3)dx - x^2y^2dy = 0$ je *diferencijalna jednačba homogenog stupnja*;
- $e^x \sin(y)dx + (e^x + 3) \cos(y)dy = 0$ je *egzaktna diferencijalna jednačba*.

U poglavlju 11 se promatraju diferencijalne jednačbe drugog i višeg reda. U ovakvim jednačbama, maksimalan red derivacije koji se u njima pojavljuje je jednak ili veći od 2.

Počev od 17. stoljeća pa do danas, mnogi vrijedni problemi u znanosti i tehnici su riješeni i rješavaju se pomoću diferencijalnih jednačbi, koje predstavljaju njihove matematičke modele. Za neke od njih pogledati u 6.5.3.

6.1.1 Geometrija rješenja. Diferencijalna jednačba familije krivulja

Svaka funkciju $y = y(x)$ koja zadovoljava jednakost $y' = f(x, y)$ (ili $F(x, y, y') = 0$) je *rješenje diferencijalne jednačbe* $y' = f(x, y)$ (odnosno $F(x, y, y') = 0$). Ako rješenje $y(x)$ dobivamo općim postupkom integriranja diferencijalne jednačbe, koje zbog neodređenog integrala mora sadržavati neodređenu konstantu $c \in \mathbb{R}$, tada je $y(x)$ *opće rješenje*. Ako je rješenje $y(x)$ konkretna funkcija koja ne sadrži neodređenu konstantu $c \in \mathbb{R}$, tada je $y(x)$ jedno konkretno rješenje, takozvano *partikularno rješenje*. Na primjer:

- funkcija $y(x) = e^x$ je partikularno rješenje diferencijalne jednačbe $y' = e^x$, koje (usput budi bolje rečeno) zadovoljava uvjet $y(0) = 1$;
- familija funkcija $y(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$ je opće rješenje diferencijalne jednačbe $y' = y$;
- funkcija $y(x) = \sin x$ je partikularno rješenje diferencijalne jednačbe $(y')^2 - 1 + y^2 = 0$, koje zadovoljava uvjet $y(0) = 0$.

Problem 6.1 Što predstavljaju rješenja diferencijalne jednačbe prvog reda u geometrijskom smislu? Kako od zadane familije krivulja (rješenja) doći do njene diferencijalne jednačbe?

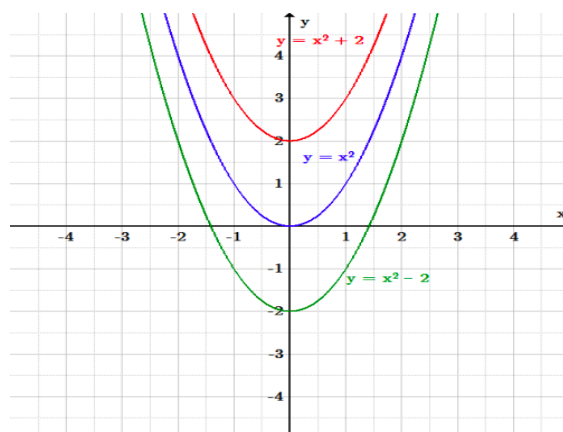
Znamo da je graf funkcije $y = f(x)$ ravninska krivulja, koja je definirana kao skup točaka u ravnini:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

Na primjer, graf kvadratne funkcije $y = x^2$ je jedna parabola u ravnini. Međutim, graf familije kvadratnih funkcija $y = x^2 + c$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan realan parametar, definira skup međusobno sličnih parabola, tzv. familiju parabola, vidi Sliku 6.1 dolje. Ako deriviramo obje strane u jednakosti $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, tada dobivamo da ova familija parabola zadovoljava diferencijalnu jednačbu $y' = 2x$ odnosno parabole $y = x^2 + c$ su rješenja ove diferencijalne jednačbe.

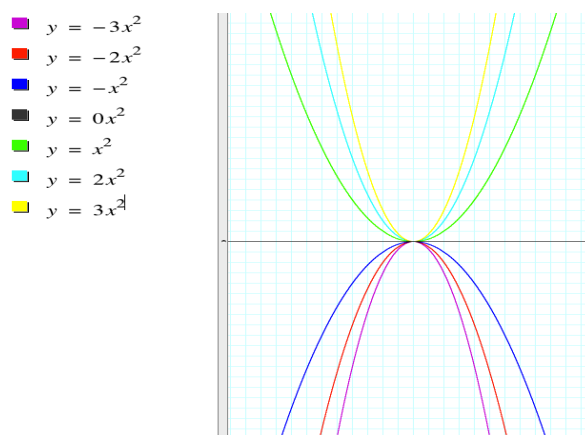
Definicija 6.1.1 *Jednparametarska familija krivulja* je skup krivulja u ravni čije se jednačbe razlikuju samo za vrijednosti neke konstante (parametra) $c \in \mathbb{R}$. Najčešće su to međusobno slične krivulje. Pri tome, dvije krivulje su slične ako se jedna iz druge dobije transformacijama sličnosti, kao što su translacija, rotacija, dilatacija, refleksija (sjeti se Linearne algebre). ■

Po ovoj definiciji, graf od $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ je familija parabola, koja je nastala translacijom osnovne parabole $y = x^2$ za konstantu c u smjeru osi Oy .



Slika 6.1: familija parabola $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$

■ **Primjer 6.1** Znamo iz Matan 1 da grafovi familije funkcija $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$ u geometrijskom smislu definiraju familiju parabola za $c \neq 0$ i pravac za $c = 0$, kao na slici:



Slika 6.2: familija krivulja $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Jedan način da iz familije $y = cx^2$ eliminiramo neodređenu konstantu c je sljedeći:

- prvo deriviramo obje strane u jednakosti $y = cx^2$, iz čega dobivamo: $y' = 2cx$;
- potom iz ove jednakosti izrazimo $c = y'/2x$ pa ovakvu c vratimo u početnu familiju $y = cx^2$, čime smo dobili:

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 \quad \text{odnosno} \quad y' = \frac{2y}{x}.$$

Prema tome, $y' = 2y/x$ je *diferencijalna jednačba zadane familije* $y = cx^2$. Lako se provjeri da vrijedi i obrat: $y = cx^2$ su *rješenja diferencijalne jednačbe* $y' = 2y/x$. ■

■ **Primjer 6.2** Zadana je familija pravaca $y(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Ako deriviramo ovu jednakost po varijabli x , tada dobivamo $y' = c$ iz čega slijedi $c = y'$. Ako sada c uvrstimo u početnu jednakost, tada ćemo eliminirati konstantu c pa dobivamo $y = xy'$ odnosno dobili smo diferencijalnu jednačbu $y' = y/x$ čije je rješenje familija pravaca $y(x) = cx$ (ovo je korigirano 1. 6. 2023. na temelju studentske primjedbe: Dino Dubroja, hvala!). ■

■ **Primjer 6.3** Odredimo diferencijalnu jednačbu $F(x, y, y') = 0$ čija su rješenja zadana familijom parabola $y(x) = x^2 - cx$, $c \in \mathbb{R}$. Postupak provodimo u nekoliko koraka:

- 1) ako deriviramo po x jednakost $y = x^2 - cx$, tada dobivamo: $y' = 2x - c$;
- 2) ako izrazimo c iz dobivene jednakosti, tada dobivamo: $c = 2x - y'$ te ako uvrstimo prethodno dobiveni c u familiju parabola $y = x^2 - cx$, tada dobivamo $y = x^2 - (2x - y')x$ odnosno $y' = y/x + x$ je tražena diferencijalna jednačba. ■

U prethodna tri primjera smo intuitivno koristili pravilo, koje se može generalno formulirati na sljedeći način:

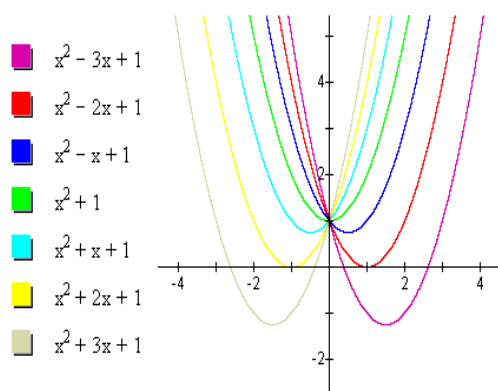
Pravilo 1 Postupak traženja diferencijalne jednačbe iz zadane familije krivulja $\Phi(x, y, c) = 0$

- 1: Deriviramo po x jednačbu $\Phi(x, y, c) = 0$ (derivacija složene funkcije više varijabli):

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, c) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, c)y'(x) = 0;$$

- 2: Iz prethodne jednakosti izrazimo c kao funkciju od x , y i y' te ga uvrstimo u $\Phi(x, y, c) = 0$; na taj način smo eliminirali konstantu c i dobili pripadnu diferencijalnu jednačbu $F(x, y, y') = 0$.
-

Vježba 6.1 Znamo da grafovi familije funkcija $y = x^2 - cx + 1$, $c \in \mathbb{R}$ definiraju u geometrijskom smislu familiju parabola kao na slici:



Slika 6.3: familija parabola $y = x^2 - cx + 1$, $c \in \mathbb{R}$.

Slično kao u Primjeru 6.2, odrediti diferencijalnu jednačbu ove familije parabola.

■ **Rješenja za Vježbu 6.1** : $y' - y/x = x - 1/x$.

Vježba 6.2 Primijetimo da u geometrijskom smislu $y^2 - 2x + cx^2 = 0$, $c \in \mathbb{R}$ vrijedi:

- ako je $c > 0$ ($c < 0$), to je familija pomaknutih elipsa (hiperbola) $c^2(x - \frac{1}{c})^2 + cy^2 = 1$; (ovo je korigirano 1. 6. 2023. na temelju studentske primjedbe: Dino Dubroja, hvala!)
- ako je $c = 0$, to je parabola $y^2 = 2x$.

Odrediti diferencijalnu jednadžbu ove familije krivulja.

Rješenja za Vježbu 6.2 : $yy' - \frac{1}{x}y^2 + 1 = 0$.



za Vježbu 6.2. (ako želite visoku kvalitetu slike kao što je to na originalu, onda na ekranu videa kliknite gdje piše "settings" pa "Quality" i postavite na barem 720p).

Vježba 6.3 Naći diferencijalnu jednadžbu zadane familije krivulja:

1. $y = cx^3$; 2. $cy^2 + x^2 = 2y$; 3. $x^3 = cx + y^2$.

Rješenja za Vježbu 6.3 : 1. $xy' - 3y = 0$; 2. $(x^2 - y)y' = xy$; 3. $2xyy' - y^2 = 2x^3$



za Vježbu 6.3.3.



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu: [Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 1. dio](#) (dio između 00:00 i 17:48).

6.1.2 Separacija varijabli i direktna integracija

Najjednostavnija metoda za rješavanje diferencijalne jednadžbe prvog reda je takozvana separacije varijabli u kombinaciji s direktnom integracijom. Pod *separacijom varijabli* u diferencijalnoj jednadžbi podrazumijevamo postupak razdvajanja varijabli, ako je to moguće, i to u smislu da varijable y i dy stavimo na lijevu stranu, a varijable x i dx na desnu stranu zadane diferencijalne jednadžbe.

■ **Primjer 6.4** Na primjer:

$$x^2yy' - y^2x = 0 \implies x^2y \frac{dy}{dx} = y^2x \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \text{ uz uvjet } y \neq 0.$$

Nakon što je izvršena separacija varijabli u diferencijalnoj jednadžbi, dobivena jednakost se može direktno integrirati, tako što se svaka strana jednadžbe integrira po svojoj varijabli:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} &\implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c \implies \ln|y| = \ln|x| + c \\ &\implies e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+c} = e^c e^{\ln|x|} \end{aligned}$$

(vidi DETALJI dolje)

$$\implies |y(x)| = e^c |x| \implies y(x) = Cx,$$

gdje je $C = \pm e^c \in \mathbb{R}$ proizvoljna realna konstanta, dobivena kao posljedica neodređenog integrala. Na ovaj način smo riješili diferencijalnu jednadžbu $x^2yy' - y^2x = 0$, a sva njena rješenja (opće rješenje) zapisujemo u formi: $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$.

Primijetimo da je $y(x) = 0$ isto tako rješenje ove jednačbe, te je ono sadržano u dobivenom općem rješenju specijalno za $C = 0$.

Dobivena rješenja možemo provjeriti tako da funkciju $y = Cx$ direktno uvrstimo u jednačbu $x^2yy' - y^2x = 0$. Zaista, iz $y = Cx$ slijedi $y' = C$, odnosno

$$x^2yy' - y^2x = x^2Cx - C^2x^2x = C^2x^3 - C^2x^3 = 0.$$

■

Napomena 6.1 Primijetimo da za razliku od jednačbe iz prethodnog primjera: $x^2yy' - y^2x = 0$, u diferencijalnoj jednačbi $x^2yy' - y^2x = 1$ se ne može izvršiti separacija varijabli.

■



Funkcionalna jednakost

$$e^{\ln x} = x, \quad \forall x > 0, \quad (6.1)$$

je poseban slučaj funkcionalne tvrdnje:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f^{-1}), \quad \text{specijalno za } f(x) = e^x \text{ i } f(x) = \ln x.$$

Algebarska jednakost:

$$e^{\ln|x|} = |x|, \quad \forall x \neq 0, \quad (6.2)$$

nije funkcionalna jednakost, jer funkcija $f(x) = \ln|x|$ nije injekcija na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pa samim time ne može biti niti inverzna funkcije neke funkcije. Jednakost (6.2) se pokazuje pomoću (6.1), odvajanjem na dva funkcionalna podslučaja, kao što slijedi:

$$e^{\ln|x|} = \begin{cases} e^{\ln x} = x, & \text{za } x > 0 \\ e^{\ln(-x)} = -x, & \text{za } x < 0 \end{cases} = |x|.$$

Nerijetko se zbog jednostavnije riješivosti određene diferencijalne jednačbe u (6.2) prelazi na $x > 0$ i na taj način koristimo:

$$e^{\ln|x|} = x, \quad \forall x > 0,$$

bez naglašavanja uvjeta $x > 0$. Na primjer,

$$y(x) = \int \frac{1}{x^3} e^{\ln|x|} dx = \int \frac{1}{x^3} x dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

Na ovaj praktičan način smo suzili domenu rješenja $y(x)$ u cilju jednostavnijeg rješavanja pripadne diferencijalne jednačbe. To se isto radi i sa kodomenom rješenja $y(x)$, kada se u integralima poput ovog na desnoj strani pojavljuje y umjesto x .

■ **Primjer 6.5** Riješimo diferencijalnu jednačbu: $2x^2yy' + y^2 = 3$.

1. Separacija varijabli:

$$2x^2yy' + y^2 = 3 \implies \frac{ydy}{3 - y^2} = \frac{dx}{2x^2}, \quad y^2 - 3 \neq 0.$$

2. Direktna integracija:

$$\frac{ydy}{y^2 - 3} = -\frac{dx}{2x^2} \implies \int \frac{ydy}{y^2 - 3} = -\int \frac{dx}{2x^2} + c \implies \frac{1}{2} \ln|y^2 - 3| = \frac{1}{2x} + c$$

$$\implies \ln|y^2 - 3| = \frac{1}{x} + 2c \implies y^2 - 3 = Ce^{1/x},$$

gdje je $C = \pm e^{2c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proizvoljna konstanta. Prema tome, traženo opće rješenje je zapisano u implicitnom obliku: $y^2 - 3 = Ce^{1/x}$.

Primijetimo da za $C = 0$ dobivamo $y^2 - 3 = 0$ odnosno $y(x) = \pm\sqrt{3}$, što su isto tako dva konkretna rješenja ove jednadžbe, koja provjeravamo direktnim uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu. ■

■ **Primjer 6.6** Riješimo diferencijalnu jednadžbu: $xydx + (x+1)dy = 0$.

1. Separacija varijabli:

$$xydx + (x+1)dy = 0 \implies \frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1}, \quad y \neq 0.$$

2. Direktna integracija:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1} &\implies \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{xdx}{x+1} + c \implies \ln|y| = -x + \ln|x+1| + c \\ &\implies y = C(x+1)e^{-x}, \end{aligned}$$

gdje je $C = \pm e^c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proizvoljna konstanta u općem rješenju: $y = C(x+1)e^{-x}$.

Primijetimo da za $C = 0$ dobivamo $y(x) = 0$ što je isto tako jedno konkretno rješenje ove jednadžbe, koje provjeravamo direktnim uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu. ■

U prethodnim primjerima smo intuitivno koristili pravilo, koje se može generalno formulirati na sljedeći način:

Pravilo 2 Kombinacija separacije varijabli i direktne integracije

- 1: Razdvajanjem varijabli u općenitoj diferencijalnoj jednadžbi $F(x, y, y') = 0$, ako je to moguće, dobivamo jednakost: $P(y)dy = Q(x)dx$.
- 2: Direktnom integracijom jednakosti $P(y)dy = Q(x)dx$ dobivamo:

$$\int P(y)dy = \int Q(x)dx + c,$$

što predstavlja rješenje od $F(x, y, y') = 0$.



Moželi se ili ne u sljedećim diferencijalnim jednadžbama izvršiti separacija varijabli x i y ?

- | | | |
|------------------------|-----------|-----------|
| 1. $y' + 2y = x^2$; | DA | NE |
| 2. $2y'y = x^2$; | DA | NE |
| 3. $y' - 2y = x^2$; | DA | NE |
| 4. $2y'/y = x^2$; | DA | NE |
| 5. $y' + 2xy = xy^3$; | DA | NE |
| 6. $y' + 2y = xy^3$. | DA | NE |



Pomoću separacije varijabli i direktne integracije diferencijalne jednačbe, dokazat ćemo poznatu Eulerovu formulu, koju smo koristili u zimskom semestru u gradivu Matana 1:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Označimo sa $y(x) = \cos x + i \sin x$. Budući da je $i^2 = -1$, lako se provjeri da ova funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačbu: $y' = iy$ i početni uvjet $y(0) = 1$, koju rješavamo separacijom varijabli:

$$y' = iy \implies \frac{dy}{y} = i dx \implies y(x) = ce^{ix}.$$

Iz uvjeta $y(0) = 1$ slijedi $c = 1$, pa smo dokazali da je $y(x) = e^{ix}$. Q.E.D.

Vježba 6.4 Riješiti sljedeće diferencijalne jednačbe separacijom varijabli i direktnom integracijom:

1. $\frac{y'}{x^2} = \frac{x}{y^2}$; 2. $\frac{y'}{x+1} = \frac{x}{2y+4}$; 3. $x^3 y^2 y' - y^3 = 5$;
4. $y' - xy^2 = 2xy$; 5. $y' = 10^{x+y}$; 6. $xydy - \sqrt{y^2 + 1}dx = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.4 :

1. $\frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + c$; 2. $y^2 + 4y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$; 3. $y(x) = \sqrt[3]{ce^{-3/(2x^2)} - 5}$;
4. $\frac{y}{y+2} = ce^{x^2}$, $y = -2$; 5. $y = -\log_{10}(c - 10^x)$; 6. $c + \sqrt{y^2 + 1} = \ln|x|$.

YT-VIDEO

za Vježbu 6.4.4.; za Vježbu 6.4.5.; za Vježbu 6.4.6.



Pomoću separacije varijabli i direktne integracije diferencijalne jednačbe, izračunat ćemo poznati nepravilni integral, kojeg klasičnim metodama integracije nije moguće riješiti:

$$I(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(wx) dx, \quad \forall w \in \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

Primijetimo da zbog parnosti podintegralne funkcije vrijedi:

$$I(w) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(wx) dx.$$

Deriviranjem po w prethodne jednakosti i korištenjem derivacije integrala s parametrom, koju smo radili u Matan 1, te potom primjenimo parcijalnu integraciju, dobivamo:

$$I'(w) = -2 \int_0^{\infty} x e^{-x^2} \sin(wx) dx = [e^{-x^2} \sin(wx)]_0^{\infty} - w \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(wx) dx = -\frac{w}{2} I(w).$$

Odnosno, nepravilni integral $I(w)$ zadovoljava diferencijalnu jednačbu $I'(w) = -(w/2)I(w)$, koju rješavamo separacijom:

$$I'(w) = -\frac{w}{2} I(w) \implies \frac{dI}{I} = -\frac{w dw}{2} \implies I(w) = ce^{-w^2/4}.$$

Kako je $c = I(0)$, to u (6.3) uvrštavamo $w = 0$ i dobivamo poznati Gaussov integral:

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Prema tome $I(w) = \sqrt{\pi} e^{-w^2/4}$. Q.E.D.

Problem 6.2 Nakon što se izvrši separacija varijabli u jednadžbi (ako je moguća) i dobije se oblik $Q(y)dy = P(x)dx$, zašto je moguće integrirati neovisno lijevu i desnu stranu po varijabli y odnosno x ? Budući da je dobivena jednadžba egzaktna diferencijalna jednadžba, odgovor ćemo dati nakon Teoremu 6.6.2 na stranici 43 u Primjedbi 6.8.



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeće poveznice:

Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 1. dio (bez supstitucije, između 17:48 i 32:10),

Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 4. dio (supstitucija je dio između 00:00 i 20:45).

6.1.3 DJ s početnim uvjetom - Cauchyjev problem

U Primjeru 6.5 smo pokazali da familija krivulja $y^2 - 3 = Ce^{1/x}$ predstavlja opće rješenje diferencijalne jednadžbe $2x^2yy' + y^2 = 3$. Međutim, ako tražimo jedno konkretno rješenje ove diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava takozvani *početni* ili *inicijalni* uvjet $y(1) = 2$, tada rješavamo problem:

$$\begin{cases} 2x^2yy' + y^2 = 3, \\ y(1) = 2. \end{cases} \quad (6.4)$$

Ova vrsta problema se zove *Cauchyjev problem* i zapisujemo ga u jednom od sljedeća dva oblika:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad \text{ili} \quad \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (6.5)$$

gdje pretpostavljamo da je točka (x_0, y_0) iz domene funkcije $f(x, y)$.

Problem (6.5) rješavamo tako da prvo riješimo pripadnu diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x, y)$, a potom iz uvjeta $y(x_0) = y_0$ nađemo konkretnu vrijednost konstante c . Na taj način smo dobili samo ono rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = f(x, y)$ koje prolazi točkom (x_0, y_0) . Na primjer, kad nađemo rješenje jednadžbe $2x^2yy' + y^2 = 3$, a to je $y^2 - 3 = Ce^{1/x}$, u njega uvrstimo uvjet $y(1) = 2$ odnosno $x_0 = 1$ i $y_0 = 2$:

$$y^2 - 3 = Ce^{1/x} \quad \text{u} \quad x = 1, y = 2 \implies 4 - 3 = Ce \implies C = 1/e.$$

Prema tome, rješenje Cauchyjevog problema (6.4) je funkcija $y = y(x)$ zadana implicitno jednadžbom: $y^2 - 3 = e^{1/x-1}$.

■ **Primjer 6.7** Naći rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' - \frac{3}{x}y = 0, \\ y(2) = 4. \end{cases} \quad (6.6)$$

Separacijom varijabli i direktnom integracijom, lako je pokazati da je $y(x) = cx^3$, $c \in \mathbb{R}$ opće rješenje pripadne diferencijalne jednadžbe u (6.6): $y' - 3y/x = 0$. Sada je potrebno u ovo rješenje uvrstiti početni uvjet $y(2) = 4$, pa dobivamo jednakost $4 = c2^3$, iz čega slijedi da je $c = 1/2$. Prema tome, $y(x) = x^3/2$ je jedno rješenje problema (6.6). ■

Napomena 6.2 Primijetimo da rješenje Cauchyjevog problema nije uvijek jedinstveno. Na primjer, direktnim uvrštavanjem u problem:

$$y' = \frac{3}{2}y^{1/3}, y(0) = 0, \quad (6.7)$$

Iako se vidi da su $y(x) = x^{3/2}$ i $y(x) = 0$ dva različita rješenja problema (6.7). ■

Vezano uz Cauchyjev problem (6.5) često se postavljaju sljedeća dva pitanja:

- 1) naći uvjete na funkciju $f(x, y)$, takve da rješenje od (6.5) bude jedinstveno;
- 2) pod kojim uvjetima je rješenje od (6.5) nejedinstveno, odnosno postoje barem dva različita rješenja od (6.5).

Odgovore na ova i slična pitanja ćemo dati u jednoj od sljedećih točaka.

Vježba 6.5 U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, separacijom varijabli i direktnom integracijom pokazati da za rješenja sljedećeg problema:

$$(P_a) : y' - \frac{a}{x}y = 0, y(0) = 0,$$

vrijedi:

- (i) ako je $a > 0$, tada (P_a) ima beskonačno mnogo rješenja;
- (ii) ako je $a < 0$, tada (P_a) ima jedno rješenje.

Rješenja za Vježbu 6.5 :



za Vježbu 6.5

Za diferencijalne jednačbe iz Vježbe 6.4 postavljamo sljedeće Cauchyjeve probleme.

Vježba 6.6 Riješiti:

1. $\begin{cases} \frac{y'}{x^2} = \frac{x}{y^2}, \\ y(0) = 3; \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{y'}{x+1} = \frac{x}{2y+4}, \\ y(-1) = -1; \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^3 y^2 y' - y^3 = 5, \\ y(1) = 0; \end{cases}$
4. $\begin{cases} y' - xy^2 = 2xy, \\ y(0) = 1; \end{cases}$
5. $\begin{cases} y' = 10^{x+y}, \\ y(1) = -\log_{10} 10; \end{cases}$
6. $\begin{cases} xy dy - \sqrt{y^2 + 1} dx = 0, \\ y(e) = 0. \end{cases}$

Rješenja za Vježbu 6.6 :

1. $\frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + 9;$
2. $y^2 + 4y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{19}{6};$
3. $y(x) = \sqrt[3]{5(e^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{x^2})} - 1)};$
4. $y(x) = \frac{2}{3e^{-x^2} - 1};$
5. $y(x) = -\log_{10}(20 - 10^x);$
6. $\sqrt{y^2 + 1} = \ln|x|.$



za Vježbu 6.6.4.; za Vježbu 6.6.5.; za Vježbu 6.6.6.

6.1.4 Supstitucija u DJ

Nerijetko u diferencijalnim jednađbama nije moguće separirati varijable x i y . Međutim, u nekim slučajevima nakon uvođenja nove funkcije $z(x)$ umjesto $y(x)$, koju zovemo supstitucija, u dobivenoj jednađbi se mogu separirati varijable x i z .

■ **Primjer 6.8** Na diferencijalnu jednađbu $y' - y = 2x - 3$ ne možemo primijeniti separaciju varijabli x i y . Međutim, supstitucijom $z = y + 2x$ i $z' = y' + 2$, prethodna diferencijalna jednađba postaje $z' = z - 1$ pa imamo:

$$z' = z - 1 \implies \frac{dz}{z-1} = dx \implies \int \frac{dz}{z-1} = \int dx + c \implies z(x) = Ce^x + 1.$$

Ako vratimo supstituciju $y = z - 2x$, tada je $y(x) = Ce^x - 2x + 1$ rješenje početne jednađbe.

■

Vježba 6.7 Koristeći supstituciju $z = z(x)$ svedite sljedeće diferencijalne jednađbe na oblik pogodan za separaciju varijabli x i z , te je potom riješite:

1. $y' + y = x + 2, \quad z = y - x;$
2. $y' = \cos^2(y + x) - 1, \quad z = y + x;$
3. $y' + 2 = \sqrt{4x + 2y - 1}, \quad z = 2x + y;$
4. $y' - \cos(y - x) = 0, \quad z = y - x;$
5. $\frac{1}{(x^2 + y)^2} - y' = 2x, \quad z = ?;$
6. $xy' - y^2 = yy' + x^2 - 2xy, \quad z = ?.$

U 5. i 6. sami otkrijte supstituciju $z = z(x)$.

Rješenja za Vježbu 6.7 :

1. $z' + z = 1, \quad y = x + 1 + ce^{-x};$
2. $z' = \cos^2 z, \quad \operatorname{tg}(y + x) = x + c;$
3. $\sqrt{4x + 2y - 1} = x + c, \quad y = 1/2 - 2x;$
4. $z' + 1 - \cos(z) = 0, \quad \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + c;$
5. $y = -x^2 + \sqrt[3]{3x + c};$
6. $y = x - 1 - ce^{-x}, \quad y = x.$



za Vježbu 6.7.5.; za Vježbu 6.7.6.

6.2 Linearna diferencijalna jednađba prvog reda

Diferencijalna jednađba prvog reda je *linearna* ako se može prikazati u formi:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x). \quad (6.8)$$

Kao što vidimo, stožerne funkcije $y'(x)$ i $y(x)$ se u prethodnoj diferencijalnoj jednađbi pojavljuju u linearnom obliku. U sljedeće dvije točke ćemo na dva različita načina pokazati da je opće rješenje linearne diferencijalne jednađbe (6.8) dano formulom:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \right), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (6.9)$$

6.2.1 Metoda varijacije konstante

Metoda varijacije konstante je jedan od postupaka za rješavanje linearne diferencijalne jednačbe prvog reda, koji se ne mora nužno koristiti, ali se preporučuje, jer se jednostavno realizira u nekoliko sljedećih koraka:

1. homogeni dio ove jednačbe, odnosno jednačbu $y' + f(x)y = 0$ rješavamo separacijom varijabli i direktnom integracijom:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0 \implies \frac{dy}{y} = -f(x)dx \implies y(x) = Ce^{-\int f(x)dx}, C \in \mathbb{R};$$

2. iz prethodnog koraka, rješenje polazne jednačbe $y' + f(x)y = g(x)$ tražimo u obliku:

$$y(x) = C(x)e^{-\int f(x)dx}, \quad (6.10)$$

gdje $C(x)$ nije više konstantna nego promjenjiva funkcija (tzv. varirana konstanta);

3. funkciju $y(x)$ iz (6.10) uvrštavamo u jednačbu $y' + f(x)y = g(x)$:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int f(x)dx} - C(x)e^{-\int f(x)dx}f(x) + f(x)C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

odnosno

$$C'(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

što je ekvivalentno s:

$$C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx};$$

4. prethodnu diferencijalnu jednakost integriramo i dobivamo izraz za funkciju $C(x)$:

$$C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + c, c \in \mathbb{R}; \quad (6.11)$$

5. funkciju $C(x)$ dobivenu u (6.11) uvrštavamo u pretpostavljeni oblik rješenja (6.10), pa dobivamo konačni oblik rješenja za jednačbu $y' + f(x)y = g(x)$:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + c \right), c \in \mathbb{R}.$$

■ **Primjer 6.9** Pomoću prethodnog algoritma, rješavamo linearnu diferencijalnu jednačbu prvog reda $y' - xy = 2x$. Potom za usporedbu, riješite je i separacijom varijabli.

1. Opće rješenje homogenog dijela jednačbe $y' - xy = 2x$:

$$y' - xy = 0 \implies \frac{dy}{y} = xdx \implies y(x) = Ce^{x^2/2}, C \in \mathbb{R}; \quad (1. \text{ korak})$$

2. Opće rješenje jednačbe $y' - xy = 2x$:

$$y' - xy = 0 \ \& \ y(x) = Ce^{x^2/2} \implies y' - xy = 2x \ \& \ y(x) = C(x)e^{x^2/2}, \quad (2. \text{ korak})$$

gdje $C(x)$ varirana konstanta; iz $y' - xy = 2x$ i $y(x) = C(x)e^{x^2/2}$ slijedi

$$\frac{dC}{dx}e^{x^2/2} + C(x)e^{x^2/2}x - xC(x)e^{x^2/2} = 2x \implies \frac{dC}{dx} = 2xe^{-x^2/2}; \quad (3. \text{ korak})$$

$$C(x) = \int 2xe^{-x^2/2}dx + c = -2e^{-x^2/2} + c, c \in \mathbb{R}; \quad (4. \text{ korak})$$

$$y(x) = C(x)e^{x^2/2} = e^{x^2/2}(-2e^{-x^2/2} + c) = ce^{x^2/2} - 2, c \in \mathbb{R}. \quad (5. \text{ korak})$$

■

Vježba 6.8 Varijacijom konstante riješiti sljedeće linearne diferencijalne jednačine:

1. $y' - \frac{1}{x}y = x \cos x$; 2. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$; 3. $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$;
 4. $(y \sin x - 1)dx + (\cos x)dy = 0$; 5. $y' - \frac{2}{x \ln x}y = \frac{1}{x}$.

Rješenja za Vježbu 6.8 :

1. $y = cx + x \sin x$; 2. $y = ce^x + e^x \ln |x|$; 3. $y = \frac{c}{x} - \frac{\ln |x|}{x}$;
 4. $y = c \cos x + \sin x$; 5. $y = c \ln^2 x - \ln x$.



za Vježbu 6.8.4.; za Vježbu 6.8.5.

6.2.2 Formula za opće rješenje

Kao što znamo, primjenom varijacije konstanti na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$y' + f(x)y = g(x). \quad (6.12)$$

dobivamo rješenje u obliku formule (6.9). Ukoliko rješavamo pripadni Cauchyjev problem s uvjetom $y(x_0) = y_0$, tada je $c = y_0$. Zbog toga bi bilo dobro u (6.9) umjesto neodređenog integrala \int napisati precizniju oznaku $\int_{x_0}^x$. Tada (6.9) poprima jasniji oblik:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds} \left(y(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) e^{\int_{x_0}^t f(s)ds} dt \right). \quad (6.13)$$

Postavlja se pitanje: sadrži li formula (6.13) sva rješenja jednačine (6.12) ili samo neka?

Teorem 6.2.1 Formulom (6.13) su određena sva rješenja linearne diferencijalne jednačine (6.12), odnosno s (6.13) je dano opće rješenje jednačine (6.12).

Dokaz. Neka je $y(x)$ proizvoljno rješenje jednačine (6.12). Pokazat ćemo da $y(x)$ istovremeno zadovoljava i formulu (6.13). Zaista, ako (6.12) pomnožimo s $e^{\int f(s)ds}$ tada dobivamo

$$y'(x) e^{\int_{x_0}^x f(s)ds} + f(x) y(x) e^{\int_{x_0}^x f(s)ds} = g(x) e^{\int_{x_0}^x f(s)ds}$$

što je ekvivalentno s

$$\left(y(x) e^{\int_{x_0}^x f(s)ds} \right)' = g(x) e^{\int_{x_0}^x f(s)ds}.$$

Integriranjem ove jednakosti od x_0 do x dobivamo:

$$y(x) e^{\int_{x_0}^x f(s)ds} - y(x_0) = \int_{x_0}^x g(t) e^{\int_{x_0}^t f(s)ds} dt.$$

Ako pomnožimo ovu jednakost s $e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds}$ direktno dobivamo da $y(x)$ zadovoljava formulu (6.13). Q.E.D. ■

Napomena 6.3 Ako su $y_h(x)$ i $y_p(x)$ funkcije definirane sa:

$$y_h(x) = y(x_0)e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds} \quad \text{i} \quad y_p(x) = e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds} \int_{x_0}^x g(t)e^{\int_{x_0}^t f(s)ds} dt,$$

tada se lako provjeri da je $y_h(x)$ opće rješenje od $y' + f(x)y = 0$, a $y_p(x)$ je partikularno rješenje od $y' + f(x)y = g(x)$. Sve to zajedno s formulom (6.13) pokazuje da se opće rješenje od linearne diferencijalne jednačbe $y' + f(x)y = g(x)$ može zapisati u obliku

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

■

■ **Primjer 6.10** Zbog usporedbe, linearnu diferencijalnu jednačbu:

$$xy' - 2y = 2x^4, \quad (6.14)$$

riješit ćemo na dva načina: varijacijom konstanti i pomoću formule (6.9).

Prvi način: metoda varijacije konstanti.

0. jednačbu (6.14) ćemo prvo napisati u obliku:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 2x^3; \quad (6.15)$$

1. homogeni dio ove jednačbe rješavamo separacijom varijabli:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \implies y(x) = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R};$$

2. prema ovome, rješenje polazne jednačbe (6.14) tražimo u obliku:

$$y(x) = C(x)x^2, \quad (6.16)$$

gdje je $C(x)$ funkcija po varijabli x ;

3. funkciju $y(x)$ iz (6.16) uvrštavamo u jednačbu (6.15) i dobivamo:

$$\frac{dC}{dx}x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = 2x^3,$$

odnosno $dC/dx = 2x$;

4. integriranjem prethodne jednakosti dobivamo: $C(x) = x^2 + c, c \in \mathbb{R}$;

5. sada funkciju $C(x)$ uvrštavamo u pretpostavljeni oblik rješenja (6.16) i dobivamo konačni oblik rješenja: $y(x) = x^2(x^2 + c) = x^4 + cx^2, c \in \mathbb{R}$.

Drugi način: formula (6.9). Iz diferencijalne jednačbe (6.15) vidimo da je: $f(x) = -2/x$ i $g(x) = 2x^3$. Zbog toga je:

$$\int f(x)dx = -\int \frac{2dx}{x} = -\ln x^2, \quad e^{-\int f(x)dx} = x^2, \quad e^{\int f(x)dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Ako uvrstimo ove integrale u formulu (6.9), tada dobivamo:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(\int g(x)e^{\int f(x)dx} dx + c \right) = x^2 \left(\int \frac{2x^3}{x^2} dx + c \right) = x^2(x^2 + c).$$

Na kraju vidimo da smo na dva različita načina došli do istog rješenja. ■



Dokaz Teorema 6.2.1 se pojavljuje na ispitu. Ne zaboravite da nemamo usmeni dio ispita, pa pismeni dio sadrži oko 40% teorijskih pitanja. Koji od prethodna dva postupka za rješavanje linearne diferencijalne jednačbe se može koristiti na ispitu? Odgovor: po slobodnom izboru, jer se jednako vrednuju obadva postupka. Pri tome, formulu (6.9) odnosno (6.13) treba znati napamet, jer ona ne postoji u službenim formulama koje se smiju koristiti. Zbog toga se savjetuje shvatiti i naučiti njen dokaz, koji je dan u dokazu Teorema 6.2.1, pomoću koga se u slučaju zaborava formule, ona lako može izvesti.

Vježba 6.9 Pomoću (6.9) riješiti sljedeće linearne diferencijalne jednačbe:

1. $\frac{y}{x} = y' - x \cos x$; 2. $y' - y = \frac{e^x}{x}$; 3. $x^2 y' + xy + 1 = 0$;
4. $y' + \operatorname{tg}(x)y = \frac{1}{\cos x}$; 5. $xy' - 1 = \frac{2y}{\ln x}$.

Rješenja za Vježbu 6.9 :

1. $y = x(c + \sin x)$; 2. $y = e^x(\ln|x| + c)$; 3. $xy = c - \ln|x|$;
4. $y = (\operatorname{tg}(x) + c) \cos x$; 5. $y = c \ln^2 x - \ln x$.



za Vježbu 6.9.4.; za Vježbu 6.9.5.



Formula (6.13) može se jednostavnije napisati ako se eksponencijalni dio podvuče pod integral, odnosno

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds} \left(y(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) e^{\int_{x_0}^t f(s)ds} dt \right) = y(x_0) e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds} + \int_{x_0}^x g(t) e^{-\int_t^x f(s)ds} dt.$$



Ako rješavamo linearnu diferencijalnu jednačbu $y' + f(x)y = g(x)$ te koristimo formulu (6.9), tada u integralu $\int f(s)ds$ ne stavljamo $+C$, jer konstanta C se već nalazi u (6.9).



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na:
Diferencijalne jednačbe prvog reda - 1. dio (dio od 32:16 pa do kraja).

6.2.3 Linearna diferencijalna jednačba po $x(y)$ i $x' = dx/dy$

Ponekad diferencijalna jednačba $F(x, y, y') = 0$ nije linearna po $y(x)$ i $y' = dy/dx$, ali je linearna po $x(y)$ i $x' = dx/dy$, pa je korisno promatrati diferencijalnu jednačbu:

$$\frac{dx}{dy} + f(y)x = g(y).$$

Na temelju razmatranja iz prethodne dvije točje, lako se zaključuje da opće rješenje ove diferencijalne jednačbe je dano formulom:

$$x(y) = e^{-\int f(y)dy} \left(C + \int g(y)e^{\int f(y)dy} dy \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

■ **Primjer 6.11** Diferencijalna jednačba $(x + y^2)y' = y$ nije linearna po $y(x)$ zbog člana y^2y' . Međutim, moguće je napraviti sljedeći prelaz na $x(y)$ i $x' = dx/dy$:

$$(x + y^2)y' = y \implies (x + y^2)\frac{dy}{dx} = y \implies x + y^2 = y\frac{dx}{dy} \implies \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y,$$

što je linearna diferencijalna jednačba po $x(y)$, pa se kao takva i rješava:

$$x' + f(y)x = g(y) \implies x(y) = e^{-\int f(y)dy} \left(\int g(y)e^{\int f(y)dy} dy + c \right), \quad c \in \mathbb{R};$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y \implies f(y) = -\frac{1}{y}, \quad g(y) = y \implies \int f(y)dy = -\ln y,$$

$$x(y) = e^{\ln y} \left(\int ye^{-\ln y} dy + c \right) = y(y + c) = y^2 + cy.$$

■

DA-NE

Odgovori s "DA" ako je diferencijalna jednačba linearna po $x = x(y)$, a nije linearna po $y = y(x)$:

- | | | |
|---------------------------|----|----|
| 1. $y' + 5y = x^4$; | DA | NE |
| 2. $y'(\sin y + x) = 3$; | DA | NE |
| 3. $y' + y^2 = x^3$; | DA | NE |
| 4. $y'(y^3 - 2x) = y$; | DA | NE |
| 5. $y' - y = e^{3x}$. | DA | NE |

Vježba 6.10 Prelazom na $x(y)$ i $x' = dx/dy$ riješiti sljedeće linearne po $x(y)$ diferencijalne jednačbe:

1. $(2e^y - x)y' - 1 = 0$; 2. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$; 3. $(-2x + y)dy - ydx = 4 \ln y dy$;
 4. $y'(3x - y^2) = y$; 5. $y' - 2xyy' = y^2 - y$.

Rješenja za Vježbu 6.10 :

1. $x = e^y + ce^{-y}$; 2. $x = (c - \cos y) \sin y$; 3. $x = cy^{-2} + \frac{1}{3}y + 1 - 2 \ln y$;
 4. $x = cy^3 + y^2$; 5. $(y - 1)^2 x = y - \ln(cy)$.

YT-VIDEO

Za Vježbu 6.10.3; Za Vježbu 6.10.5.

DETALJI

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:

Diferencijalne jednačbe prvog reda - 2. dio (dio između 00:00 i 13:00).

6.3 Bernoullijeva i Riccatijeva diferencijalna jednačba

6.3.1 Bernoullijeva diferencijalna jednačba - linearizacija

Bernoullijeva diferencijalna jednačba je nelinearna diferencijalna jednačba prvog reda:

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1, \quad (6.17)$$

koja se jednostavnom supstitucijom

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) \quad \text{i} \quad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \quad (6.18)$$

svodi na linearnu diferencijalnu jednačbu prvog reda po $z = z(x)$ odnosno:

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x). \quad (6.19)$$

Ovaj postupak se još zove *linearizacija nelinearne diferencijalne jednačbe*. Zaista, množenjem jednačbe (6.17) sa $y^{-\alpha}$, gdje za $\alpha > 0$ obavezno pretpostavljamo da je $y \neq 0$, dobivamo:

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x).$$

Ako uvrstimo supstituciju (6.18) u ovu jednakost, tada direktno slijedi tražena linearna diferencijalna jednačba prvog reda (6.19), koju možemo riješiti formulom za opće rješenje koja je dana u (6.9), što zajedno sa supstitucijom (6.18) nam daje formulu za opće rješenje Bernoullijeve DJ:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(C + (1-\alpha) \int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} dx \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (6.20)$$

Za razliku od formule (6.9) koja se lako zapamti, formulu (6.20) nije preporučljivo napamet naučiti (boli glava). U sljedeća dva potpoglavlja, kao dodatak (neobavezno gradivo) ćemo dokazati da je ovom formulom dano opće rješenje Bernoullijeve DJ te da ovo rješenje možemo dobiti direktnom primjenom varijacije konstante na Bernoullijevu DJ.

Napomena 6.4 Ako je $\alpha > 0$, tada dobivenom općem rješenju treba pridodati i $y = 0$, koje je isto tako rješenje od (6.17) za $\alpha > 0$. ■

■ **Primjer 6.12** Rješavamo diferencijalnu jednačbu: $xy^2y' - x^2 = y^3$. U cilju određivanja tipa ove jednačbe, napisat ćemo je u formi:

$$y' - \frac{1}{x}y = xy^{-2}.$$

Prema ovome zaključujemo da je ovo Bernoullijeva diferencijalna jednačba za $\alpha = -2$. Ako pomnožimo ovu jednačbu sa y^2 , tada dobivamo:

$$y^2y' - \frac{1}{x}y^3 = x.$$

Zbog toga uvodimo supstituciju $z(x) = y^3(x)$, pa prethodna jednačba se transformira u linearnu jednačbu po $z(x)$:

$$z' - \frac{3}{x}z = 3x.$$

Opće rješenje ove jednačbe je:

$$z(x) = e^{3 \int dx/x} \left(c + 3 \int x e^{-3 \int dx/x} dx \right) = x^3 \left(c - \frac{3}{x} \right)$$

Prema tome, rješenje polazne jednačbe je: $y^3 = cx^3 - 3x^2$. ■



Johann Bernoulli (1667–1748) je bio Švicarski matematičar, koji se bavio diferencijalnim i integralnim računom, postavio je poznati "Brachistochrone problem" (čije je rješenje cikloida), te je riješio takozvani "Sophomore's dream" pomoću svoje Bernoullijeve jednakosti. Interesantno je istaknuti da je obitelj Bernoulli dala u jednom kratkom razdoblju (17. i 18. stoljeće) osam matematičara - znanstvenika: Jacob, Johann, Nicolaus I, Nicolaus II, Daniel, Johann II, Johann III i Jacob II.

Vježba 6.11 Riješite sljedeće Bernoullijeve diferencijalne jednačbe:

1. $y' + 2y - y^2 e^x = 0$; 2. $y' - (\cos x)y^4 = (\operatorname{tg} x)y$; 3. $xy' + 2y = -x^5 e^x y^3$;
4. $(x+1)(y' + y^2) + y = 0$; 5. $xy' - 2x^2 y^{1/2} - 4y = 0$; 6. $(y^3 + x)dx - xy^2 dy = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.11 :

1. $y(e^x + ce^{2x}) = 1$ i $y = 0$; 2. $y^{-3} = c \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x$ i $y = 0$;
3. $y^{-2} = x^4(2e^x + c)$ i $y = 0$; 4. $(x+1)y(\ln|x+1| + c) = 1$ i $y = 0$;
5. $y = x^4 \ln^2(cx)$ i $y = 0$; 6. $y = \sqrt[3]{cx^3 - 3x/2}$.



za Vježbu 6.11.5.; za Vježbu 6.11.6.

Vježba 6.12 Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

1. $\begin{cases} 2xy' - y + x \cos(x)y^3 = 0, \\ y(\pi/2) = 1; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2y' - 2xy^5 = xy, \\ y(0) = 1; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 4xy' + y + 4xe^{\sqrt{x}}y^3 = 0, \\ y(1) = \frac{1}{2\sqrt{e}}. \end{cases}$

Rješenja za Vježbu 6.12

1. $y^{-2} = \sin x + \frac{\cos x}{x}$; 2. $y^{-4} = 3e^{-x^2} - 2$; 3. $y^{-2} = 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$.



Za Vježbu 6.12.2; Za Vježbu 6.12.3.

Vježba 6.13 Riješite sljedeće Bernoullijeve diferencijalne jednačine po $x(y)$ i $x' = dx/dy$:

1. $(2x^2y \ln y - x)y' = y$; 2. $x^3y' \sin y + 2y = xy'$; 3. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.13 :

1. $xy(c - \ln^2 y) = 1$; 2. $x^2(c - \cos y) = y, \quad y = 0$; 3. $y^2 \exp(-\frac{1}{xy}) = c, \quad y = 0$.



Za Vježbu 6.13.3.



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:

Diferencijalne jednačine prvog reda - 2. dio (dio između 13:00 i 30:20).



6.3.2 Dodatak - formula za opće rješenje Bernoullijeve DJ

U ovom dodatku ćemo pokazati da je formulom (6.20) ustvari dano opće rješenje Bernoullijeve DJ. U tom smislu pretpostavimo da je $y(x)$ bilo koje rješenje Bernoullijeve DJ:

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, 1,$$

gdje pretpostavljamo da je $y(x) \neq 0$ ako je $\alpha > 0$. Pomnožimo prethodnu jednakost sa:

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}e^{(1-\alpha)\int f(x)dx},$$

pa tako dobivamo:

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}y'y e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} + (1 - \alpha)f(x)y^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} = (1 - \alpha)g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}$$

odnosno ako pojednostavnimo (primijenimo pravilo derivacije produkta na prva dva člana) slijedi:

$$\left(y^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}\right)' = (1 - \alpha)g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}.$$

Integriranjem prethodne jednakost dobivamo:

$$y^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} = C + (1 - \alpha) \int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} dx,$$

iz čega jednostavnim algebarskim sređivanjem dobivamo da $y(x)$ mora zadovoljavati formulu (6.20). Prema tome pokazali smo da je formulom (6.20) zadano opće rješenje Bernoullijeve DJ.



6.3.3 Dodatak - varijacija konstante za Bernoullijevu DJ

U ovom dodatku ćemo pokazati da se do formule (6.20) može doći i direktnom primjenom varijacije konstanti na Bernoullijevu DJ. Prema tome, ako netko na ispitu primjeni ovaj postupak, onda se on potpuno priznaje kao i metoda linearizacije opisana u potpoglavlju 6.3.1. Zahvaljujemo se našem kolegi profesoru Ljubi Maranguniću, koji nam je skrenuo pažnju na ovu metodu za rješavanje Bernoullijeve DJ.

Postupamo na potpuno analogan načina kao u slučaju primjene metode varijacije konstante na linearnu DJ, koja je demonstrirana u potpoglavlju 6.2.1: prvo rješavamo pripadnu linearnu DJ odnosno

$$y' + f(x)y = g(x) \implies y(x) = Ce^{-\int f(x)dx};$$

u drugom koraku tražimo rješenje Bernoullijeve DJ u obliku varijacije konstante odnosno

$$y(x) = C(x)e^{-\int f(x)dx} \quad \text{ i } \quad y' + f(x)y = g(x)y^\alpha \implies \frac{C'(x)}{C^\alpha(x)} = g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx};$$

u trećem koraku na prethodnu DJ po nepoznatoj $C(x)$ primijenimo separaciju varijabli C i x iz čega slijedi njeno rješenje:

$$C(x) = \left(C + (1-\alpha) \int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} dx \right)^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

na kraju trebamo vratiti dobivenu $C(x)$ u pretpostavljeno rješenje iz drugog koraka, iz čega direktno slijedi formula (6.20).



6.3.4 Dodatak - Riccatijeva diferencijalna jednačba

Kao i Bernoullijeva diferencijalna jednačba $y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$, $\alpha \neq 0, 1$, Riccatijeva diferencijalna jednačba:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad p(x) \not\equiv 0, \quad (6.21)$$

je nelinearna po varijabli y . Preciznije, ako (6.21) napišemo u standardnom obliku $y' = f(x, y)$, tada je $f(x, y)$ kvadratna funkcija po y . Jasno je da vrijedi:

- i) ako je $r(x) \equiv 0$, tada jednačba (6.21) postaje specijalni oblik Bernoullijeve diferencijalne jednačbe za $\alpha = 2$;
- ii) ako je $r(x) \not\equiv 0$, tada su ova dva tipa diferencijalnih jednačbi neusporediva.

Nažalost, za razliku od Bernoullijeve diferencijalne jednačbe, nije moguće dati generalni postupak za pronalaženje općeg rješenja Riccatijeve diferencijalne jednačbe, osim u nekim posebnim slučajevima, kao što slijedi.

Propozicija 1 Neka je $y_1(x)$ jedno (partikularno) rješenje jednačbe (6.21), a $z(x)$ opće rješenje Bernoullijeve diferencijalne jednačbe:

$$z' + (-2p(x)y_1(x) - q(x))z = p(x)z^2. \quad (6.22)$$

Tada je $y(x) = y_1(x) + z(x)$ opće rješenje Riccatijeve diferencijalne jednačbe (6.21).

Dokaz. Po pretpostavci znamo da je:

$$y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x). \quad (6.23)$$

Sada iz jednakosti (6.22) i (6.23) direktno slijedi da funkcija $y(x) = y_1(x) + z(x)$ zadovoljava jednačbu (6.21). Obratno, ako je $y(x)$ neko rješenje jednačbe (6.21), tada iz jednakosti (6.21) i (6.23) lagano slijedi da funkcija $z(x) = y(x) - y_1(x)$ zadovoljava jednačbu (6.22). Q.E.D.

■ **Primjer 6.13** Promatramo Riccatijevu diferencijalnu jednačbu

$$y' = \frac{1}{x^3}y^2 + \frac{1}{2x}y + \frac{x}{2}. \quad (6.24)$$

Lako je provjeriti da je funkcija $y_1(x) = x^2$ jedno partikularno rješenje jednačbe (6.24). Zbog toga po prethodnoj propoziciji, opće rješenje jednačbe (6.24) tražimo u obliku

$$y(x) = x^2 + z(x). \quad (6.25)$$

Kada uvrstimo $y(x)$ iz (6.25) u jednačbu (6.24), tada dobivamo da $z(x)$ mora zadovoljavati pripadnu Bernoullijevu diferencijalnu jednačbu:

$$z' - \frac{5}{2x}z = \frac{1}{x^3}z^2. \quad (6.26)$$

Kao što smo već naučili, transformacijom jednačbe (6.26) na pripadnu linearnu diferencijalnu jednačbu, dobivamo da je:

$$z(x) = \frac{x^{5/2}}{c - 2\sqrt{x}}. \quad (6.27)$$

Prema tome, opće rješenje jednačbe (6.24) je dano s (6.25) i (6.27). ■

Napomena 6.5 U pripadnoj Bernoullijevoj jednačbi (6.22) koeficijent uz linearni član može biti identički jednak nuli, odnosno: $-2p(x)y_1(x) - q(x) \equiv 0$, pa se jednačba (6.22) reducira na oblik pogodan za separaciju varijabli:

$$z' + (-2p(x)y_1(x) - q(x))z = p(x)z^2 \implies z' = p(x)z^2 \implies \frac{dz}{z^2} = p(x).$$

Na primjer, $y_1(x) = x^2$ je partikularno rješenje Riccatijeve diferencijalne jednačbe: $y' = -y^2 + 2x^2y - x^4 + 2x$. Po Propoziciji 1, opće rješenje ove jednačbe tražimo u obliku $y(x) = x^2 + z(x)$, gdje je $z(x)$ opće rješenje pripadne Bernoullijeve diferencijalne jednačbe $z' = -z^2$, koja se lako riješi separacijom varijabli i direktnom integracijom. ■

Vježba 6.14 Je li $y_1(x) = \cos x$ jedno partikularno rješenje Riccatijeve diferencijalne jednačbe: $(1 - \sin x \cos x)y' + (\cos x)y^2 - y + \sin x = 0$?

Rješenja za Vježbu 6.14 : DA.

Vježba 6.15 Odrediti realne parametre a i b , tako da je zadana funkcija $y_1(x)$ jedno partikularno rješenje dane Riccatijeve diferencijalne jednačbe:

1. $y_1(x) = ax^b$, $x^2y' + x^2y^2 - xy + 1 = 0$;
2. $y_1(x) = ax^b$, $x^3y' - y^2 - x^2y + x^2 = 0$;
3. $y_1(x) = a \operatorname{tg}(x)$, $y' + y^2 - 3(\operatorname{tg} x)y + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.15 :

1. $a = 1, b = -1$; 2. $a = 1, b = 1$; 3. $a = 1$.

Vježba 6.16 Riješiti danu Riccatijevu diferencijalnu jednačbu, ako je zadano jedno njeno partikularno rješenje $y_1(x)$:

1. $xy' - (2x + 1)y + y^2 + x^2 = 0, y_1(x) = x$;
 2. $(1 - x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0, y_1(x) = -x^2$;
 3. $y' = y^2 - 2e^xy + e^{2x} + e^x = 0, y_1(x) = e^x$.

Rješenja za Vježbu 6.16 :

1. $y = x + \frac{x}{x+c}$; 2. $y(x) = \frac{1-cx^2}{c-x}$; 3. $y = e^x - \frac{1}{x+c}$.



Najjednostavnija Riccatijeva diferencijalna jednačba je $y' = y^2 + 1$. Ako je $y(0) = 0$, dobro je poznato da pripadni Cauchyjev problem ima za rješenje $y(x) = \operatorname{tg}(x)$ lokalno na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Ova jednačba ima opće rješenje u obliku:

$$y(x) = \frac{c + \operatorname{tg}(x)}{1 - c \operatorname{tg}(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

gdje $y(x)$ nije definirana u točkama $x = \pi/2 + k\pi$ (zbog tangens funkcije) te gdje je pripadni nazivnik jednak nuli. Za razliku od Riccatijeve jednačbe, gdje je nelinearni dio kvadratna funkcija po y , kod Abelove diferencijalne jednačbe, nelinearni dio je polinom trećeg stupnja po y , odnosno opći oblik Abelove jednačbe glasi:

$$y' = p(x)y^3 + q(x)y^2 + r(x)y + e(x), \quad p(x) \not\equiv 0.$$

Najjednostavnija Abelova diferencijalna jednačba je $y' = y^3 + 1$. Malo je poznato da ova diferencijalna jednačba ima opće rješenje zadano u implicitnom obliku:

$$\frac{1}{6} \ln \frac{(y+1)^2}{y^2 - y + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y-1}{\sqrt{3}} = x + c.$$

6.4 Diferencijalna jednačba homogenog stupnja

Kažemo da su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ funkcije istog homogenog stupnja ako postoji stupanj α takav da je:

$$P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y) \quad \text{i} \quad Q(tx, ty) = t^\alpha Q(x, y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Na primjer, funkcije $P(x, y) = x^2 - y^2$ i $Q(x, y) = xy$ su istog homogenog stupnja $\alpha = 2$.

Diferencijalna jednačba $F(x, y, y') = 0$ je *homogenog stupnja* ako se može prikazati u obliku:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad \text{gdje su } P(x, y) \text{ i } Q(x, y) \text{ funkcije istog homogenog stupnja.}$$

U ovakvom slučaju, supstitucija $z(x) = y(x)/x$ može svesti promatranu diferencijalnu jednačbu na oblik pogodan za separaciju varijabli z i x , kao u sljedećim primjerima.

6.4.1 $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ su polinomi istog homogenog stupnja

Prvo ćemo provježbati slučaj diferencijalne jednačbe homogenog stupnja kada su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ polinomi istog homogenog stupnja.

■ **Primjer 6.14** Riješimo diferencijalnu jednačbu: $2x^3y' = 2x^2y - y^3$. Ovu jednačbu možemo napisati u obliku: $(2x^2y - y^3)dx - 2x^3dy = 0$, iz čega slijedi da su funkcije $P(x, y) = 2x^2y - y^3$ i $Q(x, y) = -2x^3$ istog homogenog stupnja 3. Zbog toga polaznu jednačbu možemo podijeliti s x^3 , odnosno:

$$2x^3y' = 2x^2y - y^3 \implies y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

Nakon supstitucije $z(x) = y(x)/x$ odnosno $y(x) = xz(x)$ i $y' = z + xz'$, prethodna diferencijalna jednačba se transformira u oblik: $xz' = -z^3/2$, u kojem se varijable z i x mogu separirati, jer:

$$\begin{aligned} xz' &= -\frac{1}{2}z^3 \implies \frac{dz}{z^3} = -\frac{dx}{2x}, \quad z \neq 0, \\ \implies \int \frac{dz}{z^3} &= -\int \frac{dx}{2x} + c \implies -\frac{1}{2z^2} = -\frac{1}{2}\ln(x) + c, \quad z \neq 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{1}{z^2} = \ln(x) + C, \quad z \neq 0,$$

gdje je $C = -2c$, što zajedno sa supstitucijom $z = y/x$ povlači:

$$\frac{x^2}{y^2} = \ln(x) + C, \quad y \neq 0,$$

Budući da u ovom rješenju nismo mogli uzeti u obzir funkciju $y(x) = 0$, trebamo još provjeriti je li i ovo isto tako rješenje. U tom smislu:

$$y(x) = 0 \quad \text{i} \quad 2x^3y' = 2x^2y - y^3 \implies y' = 0 \quad \text{i} \quad 2x^3 \cdot 0 = 2x^2 \cdot 0 - 0^3,$$

što znači da je $y(x) = 0$ isto tako rješenje. Prema tome, sva rješenja su:

$$\frac{x^2}{y^2} = \ln(x) + C, \quad y(x) = 0.$$

■

■ **Primjer 6.15** Rješavamo diferencijalnu jednačbu: $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. Obje funkcije $P(x, y) = y^2 - 2xy$ i $Q(x, y) = x^2$ su homogenog stupnja $\alpha = 2$. Zbog toga ovu jednačbu dijelimo s x^2 , odnosno:

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0 \implies \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right) + y' = 0.$$

Nakon supstitucije $z(x) = y(x)/x$ odnosno: $y(x) = xz(x)$ i $y' = z + xz'$, prethodna diferencijalna jednačba se transformira u $z^2 - 2z + z + xz' = 0$ u kojoj se mogu separirati varijable z i x , odnosno:

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0 \implies xz' = z - z^2 \implies \frac{dz}{z - z^2} = \frac{dx}{x}, \quad z \neq 0, \quad z \neq 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{dz}{z-z^2} &= \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \ln \frac{z}{1-z} = \ln x + C \\ \Rightarrow \frac{z}{1-z} &= cx, \quad z \neq 0, \quad z \neq 1, \end{aligned}$$

gdje je $c = e^C$. Sada vraćamo supstituciju $z = y/x$ i dobivamo da je rješenje polazne jednačbe jednako:

$$\frac{y}{x-y} = cx, \quad y \neq 0, \quad y \neq x, \quad \text{odnosno} \quad y(x) = \frac{cx^2}{1+cx}, \quad y \neq 0, \quad y \neq x.$$

Budući da u ovom rješenju nisu uzete u obzir funkcije $y(x) = 0$ i $y(x) = x$, provjerit ćemo posebno da li su ovo isto tako rješenja ili nisu:

$$y(x) = 0 \quad \text{i} \quad (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow (0^2 - 0)dx + x^2 \cdot 0 = 0$$

pa je $y(x) = 0$ isto tako rješenje;

$$y = x \quad \text{i} \quad (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0 \Rightarrow dy = dx \Rightarrow (x^2 - 2x^2)dx + x^2 dx = 0$$

pa je $y(x) = x$ isto tako rješenje; prema tome, sva rješenja su dana sa:

$$y = \frac{cx^2}{1+cx}, \quad y = 0, \quad y(x) = x.$$

Budući da je za $c = 0$ funkcija $y(x) = 0$ već sadržana u izrazu $y(x) = \frac{cx^2}{1+cx}$ to se prethodna rješenja mogu jednostavnije zapisati u obliku:

$$y(x) = \frac{cx^2}{1+cx}, \quad y(x) = x.$$

■



Iako će nastavnik na ploči uraditi samo jedan od prethodna dva primjera, savjetujemo da se na papiru riješe obadva. Poslije toga, proučite bitne razlike među njima.

Vježba 6.17 Riješite sljedeće diferencijalne jednačbe homogenog stupnja:

1. $y^2 + x^2 y' = xy y'$;
2. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$;
3. $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$;
4. $2y - (x+y)y' = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.17 :

1. $y = ce^{y/x}$;
2. $\ln(x^2 + y^2) = c - 2 \arctan(y/x)$;
3. $y^2 - x^2 = cy, \quad y = 0$;
4. $\frac{y}{(x-y)^2} = c, \quad c \in \mathbb{R}$ i $y = x$ ($y = 0$ je uključeno u općem rješenju specijalno za $c = 0$).



za Vježbu 6.17.4; za Vježbu 6.17.4 na drugi način - shvaćenu kao linearnu DJ po $x = x(y)$.



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:

[Diferencijalne jednačbe prvog reda - 2. dio](#) (dio od 30:34 pa do kraja snimke).

6.4.2 Transformacija na diferencijalnu jednačbu homogenog stupnja

Promatramo diferencijalnu jednačbu:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (6.28)$$

gdje pretpostavljamo da je barem jedan od c_1 i c_2 različit od nule, što povlači da (6.28) nije homogenog stupnja. Isto tako, pretpostavljamo da pripadni sustav linearnih jednačbi:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

ima rješenje $x = x_0$ i $y = y_0$. Ako uvedemo supstitucije:

$$u = x - x_0 \quad \text{i} \quad v = y - y_0,$$

tada vrijedi:

$$dx = du, \quad dy = dv, \quad a_1x + b_1y + c_1 = a_1u + b_1v \quad \text{i} \quad a_2x + b_2y + c_2 = a_2u + b_2v.$$

Zbog toga se (6.28) transformira u jednačbu:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right),$$

koja je diferencijalna jednačba homogenog stupnja 1, te se rješava kao u prethodnoj točki.

■ **Primjer 6.16** Promatramo diferencijalnu jednačbu:

$$y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}. \quad (6.29)$$

Pripadni sustav linearnih jednačbi: $x + y - 3 = 0$ i $x - y - 1 = 0$ ima rješenje $x = 2$ i $y = 1$. Ako uvedemo supstitucije: $u = x - 2$ i $v = y - 1$, tada vrijedi:

$$dx = du, \quad dy = dv, \quad x + y - 3 = u + v \quad \text{i} \quad x - y - 1 = u - v.$$

Zbog toga se (6.29) transformira u jednačbu:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v},$$

koja je jednačba homogenog stupnja 1. Sada supstitucijom $z(u) = v(u)/u$ dobivamo $v' = z + uz'$ i:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v} \implies \frac{dv}{du} = \frac{1 + v/u}{1 - v/u} \implies z + uz' = \frac{1 + z}{1 - z} \implies uz' = \frac{1 + z^2}{1 - z},$$

gdje se zadnja jednačba rješava separacijom varijabli:

$$uz' = \frac{1+z^2}{1-z} \implies \frac{(1-z)dz}{1+z^2} = \frac{du}{u} \implies \frac{dz}{1+z^2} - \frac{zdz}{1+z^2} = \frac{du}{u}$$

iz čega slijedi rješenje:

$$\arctan z - \ln \sqrt{1+z^2} = \ln u + c \implies \arctan \frac{v}{u} - \ln \sqrt{\frac{u^2+v^2}{u^2}} = \ln u + c$$

odnosno rješenje diferencijalne jednačbe (6.29) je:

$$\arctan \frac{y-1}{x-2} - \ln \sqrt{\frac{(x-2)^2 + (y-1)^2}{(x-2)^2}} = \ln |x-2| + c.$$

■

Napomena 6.6 Diferencijalna jednačba:

$$y' = \frac{2x-y+3}{4x-2y+1},$$

nije homogenog stupnja budući da polinomi u brojniku i nazivniku $P(x,y) = 2x-y+3$ i $Q(x,y) = 4x-2y+1$ nisu funkcije homogenog stupnja (problem je u slobodnim članovima). Isto tako, pripadni sustav:

$$2x-y+3=0 \quad \text{i} \quad 4x-2y+1=0$$

nema rješenje. Međutim, supstitucijom $z(x) = 2x-y(x)$, $z' = 2-y'$, iz prethodne jednačbe slijedi:

$$y' = \frac{2x-y+3}{4x-2y+1} \implies 2-z' = \frac{z+3}{2z+1} \implies z' = \frac{3z-1}{2z+1},$$

gdje zadnju jednačbu rješavamo separacijom varijabli:

$$\frac{(2z+1)dz}{3z-1} = dx \implies \frac{2dz}{3} + \frac{5dz}{3(3z-1)} = dx \implies \frac{2}{3}z + \frac{5}{9} \ln |3z-1| = x + c$$

iz čega slijedi rješenje:

$$\frac{2}{3}(2x-y) + \frac{5}{9} \ln |3(2x-y)-1| = x + c.$$

■

Napomena 6.7 Jednačbu $(2x+y+1)dx + (x+2y)dy = 0$ je lakše riješiti kao egzaktnu diferencijalnu jednačbu. Ovaj tip jednačbi radimo na stranici 40.

■

Vježba 6.18 Riješiti diferencijalne jednačbe:

$$1. \quad y' = \frac{-2x+4y-6}{x+y-3}; \quad 2. \quad y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}; \quad 3. \quad y' = \frac{2x-2y+2}{x-y+3}, y(1) = -1.$$

Rješenja za Vježbu 6.18 :

1. $(y - 2x)^3 = c(y - x - 1)^2$; 2. $2x + y - 1 = ce^{2y-x}$;
 3. $x - y + 4 \ln |x - y - 1| = -x + 3$.

**Za Vježbu 6.18.3.**

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:

Diferencijalne jednačbe prvog reda - 6. dio (dio između 48:57 i 1:04:30).

6.4.3 $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ su funkcije (ne nužno polinomi) istog homogenog stupnja

Supstitucija $z(x) = y(x)/x$ je korisna i u slučajevima kada u diferencijalnoj jednačbi $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ su homogenog stupnja, ali nisu nužno polinomi, kao što je to bio slučaj u prethodnim točkama.

■ **Primjer 6.17** Riješimo diferencijalnu jednačbu:

$$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (6.30)$$

Primjetimo da ovu jednačbu možemo napisati u obliku: $(y + x \operatorname{tg}(y/x))dx - xdy = 0$, iz čega slijedi da je

$$P(x, y) = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad \text{i} \quad Q(x, y) = -x.$$

Sada provjeravamo homogenost funkcija $P(x, y)$ i $Q(x, y)$:

$$P(tx, ty) = (ty) + (tx) \operatorname{tg} \frac{(ty)}{(tx)} = (ty) + (tx) \operatorname{tg} \frac{y}{x} = tP(x, y) \quad \text{i} \quad Q(tx, ty) = -tx = tQ(x, y),$$

odnosno pokazali smo da su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ funkcije istog homogenog stupnja 1.

Ako podijelimo ovu jednačbu s x onda vidimo da u (6.30) dominira član y/x , što je pogodna situacija za primjenu supstitucije $z = y/x$ i $y' = z'x + z$, odnosno:

$$\begin{aligned} xy' - y &= x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \implies y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x} \implies z'x + z - z = \operatorname{tg} z \\ \implies z'x &= \operatorname{tg} z \implies \int \frac{\cos z dz}{\sin z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad \sin(z) \neq 0 \implies \ln |\sin z| = \ln |x| + C \\ \implies \sin z &= cx. \end{aligned}$$

Primjetimo da za $c = 0$ u ovo rješenje je uključen i slučaj $\sin(z) = 0$ odnosno konstantna rješenja $z_k(x) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Sad vratimo supstituciju $z = y/x$ i dobivamo da su sva rješenja jednačbe (6.30) dana sa $\sin(y/x) = cx$. ■

Vježba 6.19 Riješite sljedeće diferencijalne jednačbe u kojima dominira izraz y/x :

1. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} = y$; 2. $xy' - y \cos \ln \frac{y}{x} = 0$; 3. $xy' - (x+y) \ln \frac{x+y}{x} = y$;
4. $ydx - xdy = -\sqrt{xy}dx$; 5. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$, $y(1) = 1$.

Rješenja za Vježbu 6.19 :

1. $y = -x \ln \ln(cx)$; 2. $\ln(cx) = \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \ln(y/x) \right)$; 3. $\ln \frac{x+y}{x} = cx$;
4. $x \ln(cx) = 2\sqrt{xy}$, $y = 0$; 5. $\arcsin(y/x) = \ln(x) + \pi/2$, $y = x$.

YT-VIDEO

za Vježbu 6.19.3; za Vježbu 6.19.5.



U diferencijalnoj jednačbi homogenog stupnja, ako na ispitu nije posebno navedeno, niste dužni dokazivati da su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ homogenog stupnja, nego možete odmah preći na njeno rješavanje pomoću supstitucije $z = y/x$.



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:

Diferencijalne jednačbe prvog reda - 2. dio (dio od 30:34 pa do kraja snimke).

6.5 Diferencijalne jednačbe kao matematički modeli

Pomoću diferencijalnih jednačbi prvog reda je moguće riješiti raznovrsne probleme u geometriji. U sljedeće dvije točke prezentiramo neke od njih.

6.5.1 Primjena u geometriji

Osnovna ideja je da se određena zakonitost, koju zadovoljava tražena familija krivulja, zapiše (modelira) u obliku pripadne diferencijalne jednačbe, čija rješenja pak predstavljaju traženu familiju krivulja.

■ **Primjer 6.18** Naći sve krivulje $y(x)$ u ravnini sa svojstvom da je za svaku točku $T_0(x_0, y_0)$ takve krivulje površina trokuta određenog pravcem $\overline{OT_0}$, osi O_y i tangentom na $y(x)$ u T_0 jednaka 1, gdje je $O = (0, 0)$.

Znamo da je $P = ah/2$ gdje je a stranica trokuta na O_y osi, h je visina spuštена iz T_0 na O_y . Ako je t_0 tangenta na $y(x)$ u T_0 i $S = O_y \cap t_0$, tada je $a = |\overline{OS}|$, a $h = x_0$. Zbog toga je:

$$P = ah/2 = |\overline{OS}|x_0/2 = 1.$$

Prema tome, potrebno je još pronaći S i duljinu $|\overline{OS}|$. S obzirom da je $S = O_y \cap t_0$ to točku S pronalazimo kada u jednačbu tangente:

$$t_0 \dots y - y_0 = y'_0(x - x_0)$$

uvrstimo $x = 0$, pa dobivamo:

$$S = (0, y_0 - x_0 y'_0) \quad \text{i} \quad a = |\overline{OS}| = |y_0 - x_0 y'_0|.$$

Prema tome, uvjet $P = 1$ odnosno uvjet $|\overline{OS}|x_0/2 = 1$ se pretvara u jednačbu:

$$(y_0 - x_0 y'_0)x_0 = 2 \quad \text{i} \quad -(y_0 - x_0 y'_0)x_0 = 2.$$

Ako uklonimo indeks 0 na svim mjestima, tada dobivamo dvije linearne diferencijalne jednačbe:

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2} \quad \text{i} \quad y' - \frac{1}{x}y = \frac{2}{x^2}.$$

Rješavanjem ovih dviju jednačbi dobivamo sljedeća rješenja:

$$y(x) = \frac{1}{x} + cx \quad \text{i} \quad y(x) = -\frac{1}{x} + cx.$$

■

■ **Primjer 6.19** Naći jednačbu familije krivulja za koje je u svakoj točki odječak tangente na osi y jednak udaljenosti te točke od ishodišta koordinatnog sustava.

Ako na svaku krivulju tražene familije jednačbu tangente u dirališnoj točki (x_0, y_0) napišemo u segmentnom obliku:

$$\frac{x}{x_0 - y_0/y'_0} + \frac{y}{y_0 - y'_0 x_0} = 1,$$

tada odječak tangente na osi y je jednak $y_0 - y'_0 x_0$. S druge strane, udaljenost (x_0, y_0) do $(0, 0)$ je jednaka: $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Prema ovome, uvjet zadatka postaje:

$$y_0 - y'_0 x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

pa je diferencijalna jednačba tražene familije jednaka:

$$y - y'x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ovo je jednačba homogenog stupnja, koja se na standardan način supstitucijom $z = y/x$ transformira na jednačbu sa separiranim varijablama: $-z'x = \sqrt{1+z^2}$, pa dobivamo:

$$z + \sqrt{1+z^2} = \frac{c}{x}, \quad c \neq 0,$$

odnosno tražena familija krivulja $y = y(x)$ zadovoljava jednačbu: $y + \sqrt{y^2 + x^2} = c, c \neq 0$.

■

Vježba 6.20 Odrediti sve krivulje u ravnini koje zadovoljavaju tvrdnju: tangenta u bilo kojoj njihovoj točki čini s koordinatnim osima trokut površine 4.

■ **Rješenja za Vježbu 6.20** TRAŽENE KRIVULJE SU: $y = \pm 2/x, y = cx \pm 2\sqrt{-c}$.

Vježba 6.21 Odredite familiju krivulja takvu da za svaku krivulju iz te familije vrijedi: koeficijent tangente povučene iz njene proizvoljne točke $(x_0 > 0, y_0 > 0)$ je jednak kvadratnom korijenu koeficijenta sekante između te točke i ishodišta.

Rješenja za Vježbu 6.21 TRAŽENA FAMILIJA KRIVULJA JE $y = (\sqrt{x} + c)^2, c \geq 0$.



Za Vježbu 6.21

Vježba 6.22 Odredite familiju krivulja za koje vrijedi $a = b$, gdje a i b definiramo na sljedeći način: iz bilo koje točke (x_0, y_0) na krivulji povučemo tangentu p_t i normalu p_n , gdje je točka $(a, 0)$ presjek p_t s osi x , a točka $(0, b)$ je presjek p_n s osi y .

Rješenja za Vježbu 6.22 TRAŽENA FAMILIJA KRIVULJA JE

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} = c.$$



Za Vježbu 6.22

Vježba 6.23 Odredite krivulju koja prolazi ishodištem, te u svakoj njenoj točki pripadna normala prolazi točkom $(1, 1)$.

Rješenja za Vježbu 6.23 TRAŽENA FAMILIJA KRIVULJA $y = y(x)$ ZADOVOLJAVA IMPLICITNU JEDNADŽBU: $y - y^2/2 = x^2/2 - x$.



Za Vježbu 6.23



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:

Diferencijalne jednačbe prvog reda - 5. dio (dio između 18:40 i 39:13).

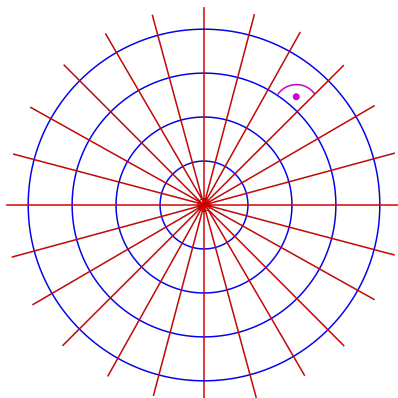
6.5.2 Ortogonalne trajektorije

Definicija 6.5.1 Dvije krivulje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ su međusobno *ortogonalne* (ortogonalne trajektorije) ako u svakoj točki u kojoj se sijeku su im pripadne tangente okomite, odnosno za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ gdje je $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ vrijedi:

$$y_1'(x_0) = -\frac{1}{y_2'(x_0)}. \quad (6.31)$$

Familija krivulja \mathcal{C}_2 : $\Phi_2(x, y, c_2) = 0, c_2 \in \mathbb{R}$ je *ortogonalna familija* danoj familiji krivulja \mathcal{C}_1 : $\Phi_1(x, y, c_1) = 0, c_1 \in \mathbb{R}$, ako su svake dvije krivulje iz \mathcal{C}_1 i \mathcal{C}_2 međusobno ortogonalne. ■

Lako se provjeri da su kružnica $x^2 + y^2 = 1$ i pravac $y = x$ međusobno ortogonalne trajektorije. Štoviše, familije kružnica $x^2 + y^2 = c$ i pravaca $y = Cx$ su međusobno ortogonalne familije, kao na slici:

Slika 10.4: ortogonalne familije: kružnice $x^2 + y^2 = c$ i pravci $y = Cx$

Efektivni postupak traženja ortogonalne familije krivulja $\Phi_2(x, y, c_2) = 0$ danoj familiji krivulja $\Phi_1(x, y, c_1) = 0$ provodimo u sljedeća 3 koraka:

- 1) familiji krivulja $\Phi_1(x, y, c_1) = 0$ odredimo njenu diferencijalnu jednačbu $F_1(x, y, y') = 0$ direktnim deriviranjem njene algebarske jednačbe $\Phi_1(x, y, c_1) = 0$ i eliminiranjem konstante c_1 ;
- 2) iz uvjeta ortogonalnosti (6.31), u diferencijalnu jednačbu $F_1(x, y, y') = 0$ stavimo umjesto y' izraz $-1/y'$, pa dobivamo diferencijalnu jednačbu njene ortogonalne familije: $F_2(x, y, y') = F_1(x, y, -1/y') = 0$;
- 3) rješavanjem diferencijalne jednačbe $F_2(x, y, y') = 0$ dobivamo njeno rješenje u obliku $\Phi_2(x, y, c_2) = 0$, što je familija ortogonalna početnoj familiji $\Phi_1(x, y, c_1) = 0$.

■ **Primjer 6.20** Naći krivulje koje sijeku familiju eksponencijalnih krivulja $y = ce^{x^2}$ pod pravim kutem:

- 1) deriviranjem ove familije dobivamo $y' = 2cxe^{x^2}$; ako izrazimo konstantu c iz prve jednakosti dobivamo $c = ye^{-x^2}$ te je uvrstimo u prethodnu diferencijalnu jednačbu $y' = 2ye^{-x^2}xe^{x^2}$, tada dobivamo diferencijalnu jednačbu $y' = 2xy$ familije $y = ce^{x^2}$;
- 2) transformacijom $y' \rightarrow -1/y'$ iz prethodne jednačbe slijedi diferencijalna jednačba ortogonalne familije: $-2yy' = 1/x$;
- 3) prethodnu jednačbu lako rješavamo separacijom varijabli, pa je jednačba traženih krivulja dana sa: $-y^2 = \ln x + C$. ■

U sljedećem primjeru prezentiramo dokaz da je familija potencija ortogonalna familija koncentričnoj familiji elipsa.

■ **Primjer 6.21** Zadana je koncentrična familija elipsa $\mathcal{C}_1: x^2 + 3y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. U sljedeća 3 koraka pronalazimo njenu ortogonalnu familiju krivulja:

- 1) diferencijalna jednačba od \mathcal{C}_1 je:

$$x^2 + 3y^2 = c \implies \frac{d}{dx}(x^2 + 3y^2) = 0 \implies 2x + 6yy' = 0;$$

- 2) u diferencijalnoj jednačbi $x + 3yy' = 0$ mijenjamo y' sa izrazom $-1/y'$ odnosno

$$x + 3yy' = 0 \implies x - \frac{3y}{y'} = 0 \implies xy' - 3y = 0;$$

prema tome, diferencijalna jednačba ortogonalne familije od \mathcal{C}_1 je $xy' - 3y = 0$;

3) separacijom varijabli slijedi:

$$xy' - 3y = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x} \implies \ln y = 3 \ln x + c \implies y(x) = cx^3, c \in \mathbb{R};$$

prema tome, $y(x) = cx^3$, $c \in \mathbb{R}$ je familija potencija, koja je ortogonalna danoj familiji elipsa \mathcal{C}_1 . ■

Vježba 6.24 Neka su a i b dva pozitivna realna parametra. Odrediti ortogonalnu familiju familiji elipsa $ax^2 + by^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$.

Rješenja za Vježbu 6.24 FAMILIJA POTENCIJA $y(x) = cx^{b/a}$, $c \in \mathbb{R}$.

Vježba 6.25 Odrediti ortogonalnu familiju familiji eksponencijalnih funkcija $y = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$.

Rješenja za Vježbu 6.25 FAMILIJA PARABOLA $y^2 = -2x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

YT-VIDEO

Za Vježbu 6.25

Dodatak

Općenitiji od pojma "ortogonalne trajektorije" je pojam "izogonalne trajektorije": familija krivulja \mathcal{C}_2 : $\Phi_2(x, y, c_2) = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ je *izogonalna familija* danoj familiji krivulja \mathcal{C}_1 : $\Phi_1(x, y, c_1) = 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$, ako se svake dvije krivulje iz \mathcal{C}_1 i \mathcal{C}_2 sijeku pod istim unaprijed danim kutom α . Ako je $\alpha = \pi/2$, tada je izogonalna familija ortogonalna familija.

DETALJI

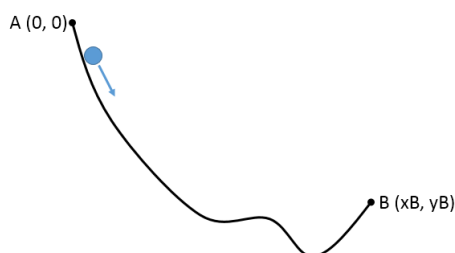
Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:

Diferencijalne jednačbe prvog reda - 5. dio (dio između 00:00 i 18:20).

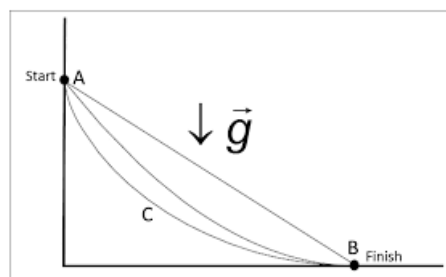
6.5.3 Primjene u optimizaciji, kulinarstvu, biologiji, medicini i tehnici

Dodatak

"Brachistochrone" problem. Pretpostavimo da u vertikalnoj ravnini imamo dvije točke A i B tako je da A iznad i lijevo od B . Puštamo kuglicu po putu iz točke A prema točki B , uz djelovanje sile gravitacije. Tražimo onaj put od A do B po kome će kuglica uz minimalno utrošeno vrijeme stići iz A u B . Ovaj optimizacijski problem je prvi formulirao Galileo 1638. godine, a potom 1699. godine Johann Bernoulli, kada ga je i riješio. Osim njega su ga riješili i Leibniz, Newton i brat od Bernoullija James.



Slika 10.5: od A do B po proizvoljnom putu;



od A do B po pravcu, kružnici i cikloidi C

Na primjer, uzmimo pravac ili kružnicu između A i B i neovisno puštamo kuglicu po svakom putu i mjerimo vrijeme kretanja iz A u B , slika desno. Jedni su mislili da je rješenje ovog problema kružnica, dok drugi pravac. No niti jedan od ova dva puta nije rješenje ovog problema. Naime, može se pokazati da se ovaj problem modelira diferencijalnom jednačbom:

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{x}{2a},$$

gdje je $y(x)$ funkcija čiji je graf traženi put između A i B , a konstanta a osigurava da put prolazi kroz A i B . Iz ove jednačbe slijedi:

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{x}{2a} \implies y'^2 = \frac{x^2}{2ax - x^2} \implies y(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Ako u ovaj integral uvedemo supstituciju $x(t) = a(1 - \cos t)$, tada se lako dolazi do rješenja: $y(t) = a(t - \sin t)$, pa je traženi put *cikloida* kroz točke A i B . Kao i na slici gore, dobili smo izokrenutu cikloidu.



Dvije strategije hlađenja kave iz aparata. Iz aparata za kavu smo u čašu nasuli kavu i želimo je ohladiti s hladnim mlijekom uz početak od 5 minuta. Imamo dvije strategije:

- 1) odmah sipamo hladno mlijeko i čekamo 5 minuta;
- 2) prvo čekamo 5 minuta i onda sipamo hladno mlijeko.

Želimo nakon 5 minuta imati manje vruću kavu. *Koja strategija pobjeđuje?*



Slika 10.6: kava i aparat za kavu

Ako eksperimentalno mjerimo obadvije strategije, tada eksperiment kaže da je strategija 2) pobjednik. Međutim, to isto potvrđuje većina različitih matematičkih modela, koji koriste različite diferencijalne jednačbe, čije rješenja $y = y(x)$ označava temperaturu kave nakon što je proteklo x minuta hlađenja, a T je temperatura prostorije gdje se nalazimo, poput:

$$\frac{dy}{dx} = -k(y - T); \quad (\text{Newtonov zakon})$$

$$\frac{dy}{dx} = -ky^{5/4} \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = -ky^p, \quad p > 1; \quad (\text{Lorentzov zakon})$$

$$\frac{dy}{dx} = -(y^4 - T^4). \quad (\text{Stefanov zakon})$$

Ako zapišemo ove modele u obliku $y' = -f(y)$, bitno zajedničko svojstvo funkcija $f(y)$ je njihova konveksnost za $y > 0$. Primjetimo da se sve ove jednačbe rješavaju separacijom varijabli.

Dodatak

Odmrzavanja zamrznute hrane. Pretpostavimo da smo iz hladnjaka, u kome se nalazi zamrznuta hrana na temperaturi H u trenu $x = x_0$ izvadili u kuhinju zamrznutu sarmu. Kuhinja ima konstantnu temperaturu K , koja se neće još neko vrijeme mijenjati. Ako je $y(x)$ temperatura ove sarme u vremenu x , vidi sliku dolje, tada je $y(x_0) = H$, a brzina zagrijavanja zamrznute sarme na kuhinjskoj temperaturi K je proporcionalna razlici između trenutne temperature sarme i kuhinjske temperature. Iz ove jednostavne zakonitosti slijedi najjednostavniji matematički model zagrijavanja smrznute sarme:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha(K - y(x)), \quad y(x_0) = H,$$

gdje je $\alpha > 0$ koeficijent provodljivosti u kuhinji (na primjer, suh zrak ima veću provodljivost, nego vlažan). Ovo je linearna diferencijalna jednačba s konstantnim koeficijentima.



Slika 10.7: sarma nakon odmrzavanja

Dodatak

Populacijska dinamika. Broj jedinki $y = y(x)$ neke populacije u vremenu x se modelira takozvanom *logističkom* diferencijalnom jednačbom:

$$\frac{dy}{dx} = ry \left(1 - \frac{1}{k}y \right), \quad (6.32)$$

gdje su r i k parametri populacije (biotički potencijal, održivost i slično). Ako u desnoj strani modela (6.32) izlučimo konstantu k , tada se on svodi na $y' = f(x, y)$, gdje je $f(x, y) = Ry(k - y)$, $R = r/k$, pa je $f(x, y)$ kvadratna funkcija po y . Zbog toga se (6.32) zove i *kvadratni populacijski model*. Separacijom varijabli (ili rješavanjem Bernoullijeve diferencijalne jednačbe) dolazimo do rješenja koje zadovoljava početni uvod $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = \frac{k}{1 + ce^{-rx}}, \quad c = \frac{k}{y_0} - 1.$$

Pitanje: zašto umjesto kvadratne funkcije $f(x, y) = Ry(k - y)$, ne promatrati linearnu funkciju $f(x, y) = Ry$ (takozvani *eksponencijalni populacijski model*, jer mu je rješenje eksponencijalna funkcija)? Odgovor: linearni član Ry pokazuje rast populacije bez utjecaja prirodnih neprijatelja na y , takozvani *grabežljivci*, dok u kvadratnom modelu $Ry(k - y)$ osim Ry (*rast populacije*) se pojavljuje i $(k - y)$ (*gubitak populacije zbog utjecaja grabežljivaca*), pa je kvadratni model bliži stvarnoj situaciji u prirodi. Primijetimo da je od kvadratnog populacijskog modela realniji *kubni populacijski model*:

$$\frac{dy}{dx} = Ry(k^2 - y^2), \quad (6.33)$$

Jer on osim rasta Ry i gubitka populacije $(k - y)$ sadrži i član $(k + y)$, koji predstavlja revitalizaciju populacije, jer kako se populacija (hrana grabežljivaca) smanji, grabežljivci gube interes i mijenjaju stanište, pa se potom populacija počinje povećavati. Bitno zajedničko svojstvo funkcije $f(x, y)$ u obadva modela (6.32) i (6.33) je njihova konkavnost po $y > 0$, takozvane *jednograste funkcije*.

Dodatak

Kategorizacija u percepciji govora. Percepcija govora se može smatrati kao proces formiranja uzorka u mozgu. Koegzistencija (istovremeno postojanje) dva različita stanja kao par riječi koje su jako slične, poput engleskih riječi: "say" – "stay", "way" – "ray" ili hrvatske "krati" – "prati", "mlati" – "plati" te spontano prebacivanje između njih se modelira diferencijalnom jednačbom:

$$\frac{dy}{dx} = -y^3 + y - k,$$

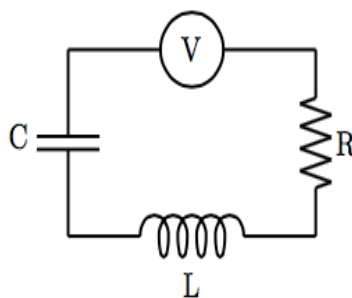
gdje je k takozvani kontrolni parametar. Analiza rješenja ove jednačbe daje odgovore na pitanja poput: kako i koji mehanizam ljudske percepcije se mijenja prelazom iz jednog u drugo stanje?

Dodatak

RLC krug. RLC krug je električni krug, vidi sliku dolje, koji se sastoji od otpornika otpora R , induksijskog svitka indukcije L , kondenzatorskih ploča kapaciteta C i izvora napajanja $V(x)$ u vremenu x . Pretpostavimo da je napon na kondenzatoru konstantan i iznosi Q . Po Kichhoffovom zakonu, koji kaže da je napon između bilo koje dvije točke ne ovisan o putu kretanja između njih, dolazimo do diferencijalne jednačbe za jakost struje $y(x)$ u vremenu x :

$$L \frac{dy}{dx} + Ry + \frac{Q}{C} = V(t),$$

što je linearna diferencijalna jednačba prvog reda.



Slika 10.8: RLC krug

6.6 Egzaktna diferencijalna jednačba. Eulerov multiplikator

Definicija 6.6.1 Kažemo da je diferencijalna jednačba

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (6.34)$$

egzaktna ako postoji funkcija $U(x,y)$, takozvani *potencijal*, takva da je

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU, \quad (6.35)$$

gdje znamo da je prvi diferencijal dU definiran sa:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy. \quad (6.36)$$

Odnosno, iz (6.35) i (6.36) direktno zaključujemo da je (6.34) egzaktna diferencijalna jednačba ako postoji funkcija $U(x,y)$ takva da je

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) \quad \text{i} \quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y). \quad (6.37)$$

Sada iz (6.34) i (6.35) slijedi $dU = 0$ što povlači da je opće rješenje egzaktno diferencijalne jednačbe:

$$U(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

6.6.1 Nužan uvjet za egzaktnost diferencijalne jednačbe

Ako prvu jednakost u (6.37) parcijalno deriviramo po y a drugu po x varijabli tada dobivamo:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Time smo dokazali sljedeći nužni uvjet za egzaktnost diferencijalne jednačbe:

Teorem 6.6.1 Ako je diferencijalna jednačba $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ egzaktna, tada vrijedi:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \quad (6.38)$$

■ **Primjer 6.22** Pokažimo da diferencijalna jednačba $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ zadovoljava nužni uvjet egzaktnosti (6.38). Budući da je $P(x,y) = e^{-y}$ i $Q(x,y) = -2y - xe^{-y}$, dobivamo $\partial P / \partial y = -e^{-y} = \partial Q / \partial x$. ■

Vježba 6.26 Pokažite da sljedeće diferencijalne jednačbe zadovoljavaju uvjet (6.38):

1. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;
2. $\left(\frac{3x^2}{y^2} + 1\right)dx - \left(\frac{2x^3}{y^3} + \frac{5}{y^2}\right)dy = 0$;
3. $(y^2 \sin(2x) + 1)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$;
4. $(2x + 2x\sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.26 :

1. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}, \frac{\partial}{\partial x}(y^3 + \ln x) = \frac{1}{x};$
2. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2}{y^2} + 1\right) = -\frac{6x^2}{y^3}, \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x^3}{y^3} - \frac{5}{y^2}\right) = -\frac{6x^2}{y^3};$
3. $\frac{\partial}{\partial y}(y^2 \sin(2x)) = 2y \sin(2x), \frac{\partial}{\partial x}(-2y \cos^2 x) = 2y \sin(2x);$
4. $\frac{\partial}{\partial y}(2x + 2x\sqrt{x^2 - y}) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}, \frac{\partial}{\partial x}(-\sqrt{x^2 - y}) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}.$

Ako znamo da je zadovoljen nužni uvjet egzaktnosti, tada to ne znači da je dotična diferencijalna jednačba egzaktna. Međutim, to nam govori da možemo pristupiti traženju potencijala $U(x, y)$ sa svojstvom (6.37).

■ **Primjer 6.23** Diferencijalna jednačba $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ je egzaktna. Zaista, iz svojstva (6.37) odnosno

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) = e^{-y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) = -2y - xe^{-y}.$$

možemo pogoditi da je potencijal $U(x, y) = -y^2 + xe^{-y}$, odnosno:

$$d(-y^2 + xe^{-y}) = e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Zbog toga je rješenje dano sa: $-y^2 + xe^{-y} = c$. ■

Da nije potrebno pogađati potencijal $U(x, y)$ već ga izračunati iz zadanih funkcija $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, pokazujemo u nastavku.

6.6.2 Dovoljan uvjet za egzaktnost diferencijalne jednačbe

Sada ćemo dokazati da je (6.38) istovremeno i nužan i dovoljan uvjet za egzaktnost diferencijalne jednačbe.

Teorem 6.6.2 Ako funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ zadovoljavaju uvjet (6.38), tada je diferencijalna jednačba $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ egzaktna, a pripadni potencijal $U(x, y)$ računamo po formuli:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x P(s, y)ds + \int_{y_0}^y Q(x_0, t)dt + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C, \end{aligned} \quad (6.39)$$

gdje x_0 i y_0 po volji biramo iz domene funkcija $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, a rješenje je dano u implicitnom obliku: $U(x, y) = c, c \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka vrijedi (6.38). Pokazat ćemo da tada $U(x, y)$ definiran formulom (6.39) zadovoljava:

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (6.40)$$

odnosno da je diferencijalna jednačba $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ egzaktna. Znamo da je uvjet (6.40) ekvivalentan sa:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y). \quad (6.41)$$

Integriranjem prve jednakosti u (6.41) po varijabli x dobivamo:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(s, y) ds + c(y), \quad (6.42)$$

gdje je $c(y) = U(x_0, y)$ funkcija koja je konstanta po x a promjenjiva po y . Ako uvrstimo prethodni izraz za $U(x, y)$ u drugu jednakost iz (6.41), dobivamo:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y}(s, y) ds + c'(y). \quad (6.43)$$

Zbog (6.38) član $\frac{\partial P}{\partial y}$ možemo zamjeniti s $\frac{\partial Q}{\partial x}$, a $\frac{\partial U}{\partial y}$ sa $Q(x, y)$, pa prethodna jednakost dobiva svoj ekvivalentni oblik:

$$Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial s}(s, y) ds + c'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + c'(y),$$

iz čega slijedi da je $c'(y) = Q(x_0, y)$. Ako integriramo ovu jednakost po varijabli y , tada dobivamo izraz za $c(y)$:

$$c(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sad uvrstimo ovakav $c(y)$ u (6.42) i dobivamo traženu formulu (6.39). Q.E.D.



Dokaz Teorema 6.6.2 se pita na ispitu. Osim toga, dobro ga je znati u slučaju da ste zaboravili formulu (6.39), a potrebna vam je u rješavanju konkretnog zadatka.

■ **Primjer 6.24** Pokazali smo da je $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ egzaktna diferencijalna jednačba (Primjer 6.23). Pomoću formule (6.39) sada možemo naći i potencijal $U(x, y)$ uzimajući u obzir da je $P(x, y) = e^{-y}$ i $Q(x, y) = -2y - xe^{-y}$:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x P(s, y) ds + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + C \\ &= \int_0^x e^{-y} dx - \int_0^y (2t + 0e^{-t}) dt + C = xe^{-y} - y^2 + C, \end{aligned}$$

gdje smo odabrali za x_0 i y_0 najjednostavnije vrijednosti koje su iz domene funkcija $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, odnosno $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$. Prema tome, još jednom potvrđujemo da je rješenje ove jednačbe implicitno dano: $xe^{-y} - y^2 = c$. ■

II. način za računanje potencijala $U(x, y)$. Osim primjene formule (6.39), za egzaktnu diferencijalnu jednačbu $Pdx + Qdy = 0$ je moguće izračunati potencijal $U(x, y)$ i na način da ponovimo kompletan postupak izvođenja formule za potencijal iz dokaza Teorema 6.6.2. Ovo je pokazano u sljedećem primjeru.

■ **Primjer 6.25** (II. način za računanje potencijala za $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ iz prethodnog primjera):

1. korak: znamo da integriranjem prve jednakosti u (6.41) dobivamo (6.42) odnosno:

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx + c(y) = \int e^{-y} dx + c(y) = e^{-y}x + c(y);$$

2. korak: znamo da nepoznatu $c(y)$ možemo odrediti tako što dobiveni $U(x, y)$ uvrstavamo u drugu jednakost u (6.41) odnosno

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \implies -xe^{-y} + c'(y) = -2y - xe^{-y},$$

iz čega slijedi: $c'(y) = -2y$ odnosno $c(y) = -y^2 + C$.

3. korak: uvrstavamo dobiveni $c(y)$ u potencijal $U(x, y)$ iz prvog koraka:

$$U(x, y) = e^{-y}x + c(y) = e^{-y}x - y^2 + C,$$

iz čega slijedi da je $e^{-y}x - y^2 = c$ rješenje egzaktna diferencijalne jednačbe:

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

■

Napomena 6.8 Sada ćemo pokazati zašto se nakon separacije varijabli u diferencijalnoj jednačbi, ako je izvediva, možemo neovisno integrirati lijevu i desnu stranu po dogovarajućim varijablama: nakon separacije dobivamo $Q(y)dy = P(x)dx$ odnosno $P(x)dx - Q(y)dy = 0$. Budući da je:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x) = \frac{\partial}{\partial x}(-Q(y)) = 0,$$

jednačba $P(x)dx - Q(y)dy = 0$ je egzaktna, pa primjenom Teorema 6.6.2 dobivamo rješenje:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x)dx - \int_{y_0}^y Q(y)dy = c \implies \int_{y_0}^y Q(y)dy = \int_{x_0}^x P(x)dx + c.$$

■



U formuli (6.39) najčešći izbor za x_0 i y_0 je $x_0 = y_0 = 0$, pod uvjetom da su te točke iz domene od koeficijenata $P(x, y)$ i $Q(x, y)$. Tada se napamet uvrste donje granice u rezultat integriranja u (6.39), dobivajući time rezultat nula, što može biti pogrešno. U sljedećem primjeru nismo napamet uvrštavali donje granice:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x (2sy^3 + 2se^{s^2} \ln y)ds + \int_1^y \frac{1}{t}dt \\ &= (s^2y^3 + e^{s^2} \ln y)|_0^x + \ln t|_1^y = x^2y^3 + e^{x^2} \ln y - e^{0^2} \ln y + \ln y - \ln 1 \\ &= x^2y^3 + e^{x^2} \ln y - \ln y + \ln y = x^2y^3 + e^{x^2} \ln y. \end{aligned}$$

Vježba 6.27 Pokažite da su sljedeće diferencijalne jednačbe egzaktna te pronađite pripadni potencijal $U(x, y)$ i opće rješenje:

1. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;
2. $\left(\frac{3x^2}{y^2} + 1\right)dx - \left(\frac{2x^3}{y^3} + \frac{5}{y^2}\right)dy = 0$;
3. $(y^2 \sin(2x) + 1)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$;
4. $(2x + 2x\sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.27 :

1. $U(x, y) = y \ln x + y^4/4 + C, \quad 4y \ln x + y^4 = c;$
2. $U(x, y) = x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} + C, \quad x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = c;$
3. $U(x, y) = x - y^2 \cos^2 x + C, \quad x - y^2 \cos^2 x = c;$
4. $U(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + C, \quad x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = c.$

YT-VIDEO

Za Vježbu 6.27.2 - I. način ; **Za Vježbu 6.27.2** - II. način ;
Za Vježbu 6.27.3 - I. način ; **Za Vježbu 6.27.3** - II. način .

6.6.3 Eulerov multiplikator

Kada jednačba $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ nije egzaktna odnosno ne zadovoljava uvjete (6.38):

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

tada množenjem ove jednačbe s multiplikatorom $\mu = \mu(x, y)$ (tzv. Eulerov multiplikator) ova jednačba može postati egzaktna, odnosno:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \implies (\mu P)(x, y)dx + (\mu Q)(x, y)dy = 0 \implies$$

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \quad (6.44)$$

Ako je uvjet (6.44) zadovoljen, tada iz njega pronalazimo nepoznatu funkciju $\mu = \mu(x, y)$. Naravno, to je teško kada multiplikator $\mu(x, y)$ istovremeno ovisi od obje varijable. Zbog toga, radimo slučajeve kada je $\mu = \mu(x)$ i $\mu = \mu(y)$.

Slučaj $\mu = \mu(x)$. Ovaj slučaj nastupa kada se u (6.44) varijabla y eliminira (pokrati), kao u sljedećem primjeru. Tada (6.44) postaje linearna diferencijalna jednačba prvog reda po nepoznatoj funkciji $\mu = \mu(x)$ i varijabli x :

$$\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mu = 0. \quad (6.45)$$

Sugestija: napišite detaljno račun kako se u ovom slučaju iz (6.44) dobije (6.45) ili pogledajte kako će to profesor na ploči napraviti! Primijetimo da koeficijent u (6.45) ne ovisi o varijabli y nego samo o x , što je uvjet za ovisnost multiplikatora μ o varijabli x .

■ **Primjer 6.26** (slučaj $\mu = \mu(x)$) Promatramo diferencijalnu jednačbu:

$$(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0. \quad (6.46)$$

Budući da je $P(x, y) = x \sin y + y \cos y$ i $Q(x, y) = x \cos y - y \sin y$, lako slijedi da je:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y \neq \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

odnosno ova jednačba nije egzaktna. Međutim:

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = -1,$$

odnosno ovaj izraz ne ovisi o varijabli y , pa primjenjujemo slučaj $\mu = \mu(x)$, a ovaj multiplikator određujemo po jednačbi (6.45):

$$\frac{d\mu}{dx} - \mu = 0 \implies \frac{d\mu}{\mu} = dx \implies \mu(x) = e^x.$$

Prema tome, jednačba (6.46) nije egzaktna, međutim kad se ona pomnoži s multiplikatorom $\mu(x) = e^x$, tada ona postaje egzaktna:

$$(x \sin y + y \cos y)e^x dx + (x \cos y - y \sin y)e^x dy = 0. \quad (6.47)$$

Na klasičan način pronalazimo potencijal $U(x, y) = (xe^x - e^x) \sin y + e^x y \cos y + c$. Prema tome, opće rješenje za obje jednačbe (6.46) i (6.47) je dano sa $U(x, y) = C$ odnosno $(xe^x - e^x) \sin y + e^x y \cos y = C$. ■

Slučaj $\mu = \mu(y)$. Ovaj slučaj nastupa kada se u (6.44) varijabla x eliminira (pokrati). Tada (6.44) postaje sljedeća linearna diferencijalna jednačba prvog reda po nepoznatoj funkciji $\mu = \mu(y)$ i varijabli y :

$$\frac{d\mu}{dy} + \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu = 0. \quad (6.48)$$

Sugestija: napišite detaljno račun kako se u ovom slučaju iz (6.44) dobije (6.48) ili pogledajte kako će to profesor na ploči napraviti! Primijetimo da koeficijent u (6.48) ne ovisi o varijabli x nego samo o y , što je uvjet za ovisnost multiplikatora μ o varijabli y .

■ **Primjer 6.27** (slučaj $\mu = \mu(y)$) Promatramo diferencijalnu jednačbu:

$$(x^2 + \ln y)y dx + x dy = 0. \quad (6.49)$$

Budući da je $P(x, y) = (x^2 + \ln y)y$ i $Q(x, y) = x$, to je:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + x^2 + \ln y \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

što pokazuje da ova jednačba nije egzaktna. Međutim:

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{y},$$

odnosno ovaj izraz ne ovisi o varijabli x , pa primjenjujemo slučaj $\mu = \mu(y)$. Zbog toga ovaj multiplikator odredjujemo po jednačbi (6.48):

$$\frac{d\mu}{dy} + \frac{1}{y}\mu = 0 \implies \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dy}{y} \implies \mu(y) = \frac{1}{y}.$$

Znamo da jednačba (6.49) nije egzaktna, ali kad se ona pomnoži s multiplikatorom $\mu(y) = 1/y$, tada ona postaje egzaktna: $(x^2 + \ln y)dx + (x/y)dy = 0$. Na klasičan način pronalazimo potencijal $U(x, y) = x^3/3 + x \ln y + c$. Prema tome, opće rješenje je dano s $U(x, y) = C$, odnosno $x^3/3 + x \ln y = C$. ■

Napomena 6.9 Ukoliko ne znamo unaprijed je li Eulerov multiplikator funkcija od x ili y varijable, tada to možemo otkriti na sljedeći način. Pretpostavimo da diferencijalna jednačba $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ nije egzaktna. Nakon množenja ove jednačbe s $\mu(x, y)$ postavljamo uvjet egzaktnosti (6.44), te u njemu izvršimo sve operacije parcijalnog deriviranja i potom (6.44) napišemo u obliku:

$$P(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu. \quad (6.50)$$

Sada, ako je $\mu = \mu(x)$ (odnosno $\mu = \mu(y)$), tada u jednakosti (6.50) treba nestati varijabla y (odnosno x). Na primjer, za jednačbu $y^2 dx - (xy + x^3)dy = 0$, koja nije egzaktna, ako pretpostavimo da je $\mu = \mu(y)$, tada se (6.50) u ovom slučaju reducira na jednakost:

$$y^2 \frac{d\mu}{dy} = -3(y + x^2)\mu.$$

Budući da varijabla x nije isčezla, to pretpostavka $\mu = \mu(y)$ nije dobra. Međutim, ako pretpostavimo da je $\mu = \mu(x)$, tada se (6.50) u ovom slučaju reducira na jednakost:

$$x(y + x^2) \frac{d\mu}{dx} = -3(y + x^2)\mu \implies x \frac{d\mu}{dx} = -3\mu,$$

odnosno varijabla y je isčezla. Prema tome, zaključujemo da je $\mu = \mu(x)$. ■

■ **Primjer 6.28** (*slučaj $\mu = \mu(x, y)$*) Pokažimo da je $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$ Eulerov multiplikator diferencijalne jednačbe $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ te je potom riješimo.

Općenito u slučaju $\mu = \mu(x, y)$ nismo u mogućnosti izračunati multiplikator $\mu(x, y)$ osim ako je on unaprijed zadan, kao u ovom zadatku. Kao prvo, lako je provjeriti da ovo nije egzaktna diferencijalna jednačba. Dalje, po definiciji znamo da je funkcija $\mu(x, y)$ Eulerov multiplikator jednačbe $Pdx + Qdy = 0$ (koja nije egzaktna) ako pomnožena takva $(P\mu)dx + (Q\mu)dy = 0$ jest egzaktna odnosno $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ nije egzaktan DJ dok:

$$\left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy = 0$$

jest egzaktna DJ. Klasičnim postupkom računamo potencijal ove DJ te dobivamo njen potencijal i njeno rješenje:

$$U(x, y) = x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c \implies 2x + \ln(x^2 + y^2) = C. \quad \blacksquare$$

Napomena 6.10 (dva bitno različita tipa Eulerovog multiplikatora iste DJ) Jednačba $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ se u prethodnom primjeru rješava pomoću Eulerovog multiplikatora $\mu(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$. Dok u Vježbi 6.28.2 ova ista DJ se rješava pomoću Eulerovog multiplikatora u obliku $\mu = \mu(x)$, gdje se dobiva da je $\mu(x) = e^{2x}$ isto njen Eulerov multiplikator. Primijetimo da ako je $\mu(x, y)$ Eulerov multiplikator neke DJ da je tada i $c\mu(x, y)$ isto Eulerov multiplikator iste DJ, gdje je $c \in \mathbb{R}$. ■

Vježba 6.28 Pomoću Eulerovog multiplikatora riješiti sljedeće diferencijalne jednačbe:

1. $(1 - xy^3)dx - x^2y^2dy = 0$ (koristiti $\mu = \mu(x)$);
2. $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ (koristiti $\mu = \mu(x)$);
3. $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$ (koristiti $\mu = \mu(x)$);
4. $(xy + y^2)dx + (xy + 1)dy = 0$ (koristiti $\mu = \mu(y)$);
5. $y^2dx + (e^x - y)dy = 0$ (koristiti $\mu(x, y) = e^{-x}/y$);
6. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin(2y)dy = 0$ (koristiti $\mu = \mu(x)$).

Rješenja za Vježbu 6.28 :

1. $\mu(x) = x, \quad 2x^3y^3 - 3x^2 = c$;
2. $\mu(x) = e^{2x}, \quad 2x + \ln(x^2 + y^2) = c$;
3. $\mu(x) = 1/x^3, \quad y^2 = x^2(c - 2y) \quad (y = 0 \text{ je uključeno za } c = 0)$;
4. $\mu(y) = 1/y, \quad x^2/2 + xy + \ln|y| = c, \quad y = 0$;
5. $\ln|y| - ye^{-x} = c, \quad y = 0$;
6. $\sin^2 y = cx - x^2$.

YT-VIDEO

Za Vježbu 6.28.3; Za Vježbu 6.28.4; Za Vježbu 6.28.5.



U jednostavnijim situacijama se ponekad Eulerov multiplikator može i pogoditi, kao u sljedećem primjeru. Promatrajmo diferencijalnu jednačbu, koja nije egzaktna (provjerite):

$$(3x + 6y^2)dx + \left(6xy + \frac{4y^3}{x}\right)dy = 0.$$

Budući da u koeficijentu uz dy postoji razlomak koji jedini bitno narušava balans između koeficijenata uz dx i dy , ovu jednačbu bi bilo mudro pomnožiti s x i dobiti definitivno jednostavniju:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Međutim,

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy^2) = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y + 4y^3) = 12xy,$$

što pokazuje da je ova jednačba egzaktna i dokazuje da je $\mu(x) = x$ Eulerov multiplikator polazne jednačbe, pa u ovom slučaju nemamo potrebu raditi generalni postupak za pronalaženje Eulerovog multiplikatora za ovu jednačbu. Naravno, u većini slučajeva je jako teško pogoditi Eulerovo multiplikator.



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:

Diferencijalne jednačbe prvog reda - 3. dio (cijeli snimak).

6.7 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

U točki 6.1.3 smo definirali pojam Cauchyjevog problema te postavili pitanje o uvjetima na funkciju $f(x, y)$ pod kojima imamo egzistenciju ili jedinstvenosti Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (6.51)$$

Definicija 6.7.1 Rješenje od (6.51) na otvorenom intervalu $J_0 := \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ je neprekidna funkcija $y = y(x)$, koja zadovoljava diferencijalnu jednačbu $y' = f(x, y)$ na J_0 , početni uvjet $y(x_0) = y_0$ i čija derivacija $y'(x)$ je neprekidna funkcija na J_0 . ■

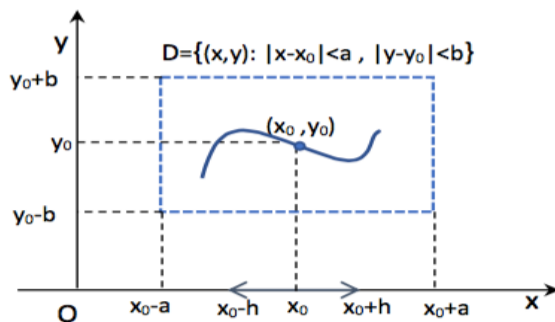
6.7.1 Peanov teorem - lokalna egzistencija rješenja

Ukoliko ne znamo efektivno riješiti (6.51), tada je dobro znati je li (6.51) uopće ima baremo jedno rješenje? Jedan od prvih odgovora na ovo pitanje, ali ne i jedini, sadržan je u sljedećem povijesnom rezultatu.

Teorem 6.7.1 — Peanov teorem o lokalnoj egzistenciji rješenja. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija na pravokutniku

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

oko točke (x_0, y_0) . Tada postoji interval oblika $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ na kojem Cauchyev problem (6.51) ima rješenje.



Slika 10.9: Peanov teorem

- **PRETPOSTAVKA:** funkcija $f(x, y)$ je neprekinuta na pravokutniku D s centrom u točki (x_0, y_0) ;
- **ZAKLJUČAK:** postoji rješenje $y(x)$ Cauchyjevog problema (6.51) na intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ s centrom u točki x_0 .

Peanov teorem govori o egzistenciji rješenja lokalno po varijabli x oko točke x_0 . Na primjer, specijalno za $x_0 = y_0 = 0$ i $f(x, y) = 1 + y^2$, problem (6.51) postaje:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (6.52)$$

Iako funkcija $f(x, y) = 1 + y^2$ zadovoljava uvjete Peanovog teorema globalno po (x, y) ($a = -\infty$ i $b = \infty$), pripadno rješenje $y(x) = \tan x$ je definirano lokalno oko $x_0 = 0$ na okolini $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

Napomena 6.11 Primijetimo da linearna diferencijalna jednačina $y' + f(x)y = g(x)$ ima oko svake točke x_0 globalno rješenje koje je definirano formulom (6.13), odnosno za interval egzistencije vrijedi: $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle = \mathbb{R}$. ■

■ **Primjer 6.29** Pokažimo da diferencijalna jednačina $(x-2)y' = y^2 + \frac{4}{x}$ uz uvjet $y(1) = 3$, zadovoljava uvjete Peanovog teorema. Prvo danu jednačinu trebamo napisati u obliku:

$$y' = \frac{xy^2 + 4}{x(x-2)}, \quad y(1) = 3,$$

gdje je:

$$f(x, y) = \frac{xy^2 + 4}{x(x-2)} \quad \text{ i } \quad (x_0, y_0) = (1, 3).$$

Iako funkcija $f(x, y)$ nije definirana pa samim time nije niti neprekidna na okomitim pravcima $x = 0$ i $x = 2$ možemo naći dovoljno mali pravokutnik D oko točke $(1, 3)$ a koji je istovremeno dovoljno udaljen od pravaca $x = 0$ i $x = 2$ tako da je $f(x, y)$ definirana i neprekidna na D . Na primjer: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| < 1/2, |y-3| < b\}$ za bilo kakav $b > 0$. Primijetimo da se u ovom primjeru ne bi ništa bitno promijenilo da smo početni uvjet $y(1) = 3$ zamijenili s $y(1) = y_0$ za bilo koji $y_0 \in \mathbb{R}$. ■



Ideja za dokaz Peanovog teorema. Cauchyjev problem (6.51) je ekvivalentan s integralnom jednačinom:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad (6.53)$$

i to u smislu da deriviranjem (6.53) dobivamo (6.51) i obratno, integriranjem (6.51) dobivamo (6.53). Rješenje od (6.53) se traže kao limes Picardovih iteracija koje su rekurzivno definirane:

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, & n \in \mathbb{N}, \\ y_0(x) := y_0. \end{cases}$$

Pretpostavljeni uvjeti na funkciju $f(x, y)$ trebaju osigurati da niz $y_n(x)$ konvergira ka funkciji $y(x)$, te da je $y(x)$ rješenje integralne jednačine (6.53). Q.E.D.

6.7.2 Picardov teorem - lokalna jedinstvenost rješenja

Ako znamo da postoji barem jedno rješenje problema (6.51), tada je isto tako važno pitanje jedinstvenost takvog rješenja. Zašto? U slučaju da ne možemo efektivno riješiti problem (6.51), pristupamo njegovom numeričkom rješavanju pod uvjetom da smo ispitili uvjete egzistencije i jedinstvenosti rješenja.

Teorem 6.7.2 — Picardov teorem o lokalnoj jedinstvenosti rješenja. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana na pravokutniku

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

oko točke (x_0, y_0) te neka ima svojstva:

- f je neprekinuta na D ;

- $\frac{\partial f}{\partial y}$ je omeđena funkcija na D .

Tada postoji interval oblika $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ na kojem Cauchyev problem (6.51) ima jedinstveno rješenje.

Pri tome uvjet omeđenosti parcijalne derivacije od $f(x, y)$ po y znači da postoji konstanta $M > 0$ tako da vrijedi:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M, \forall (x, y) \in D. \quad (6.54)$$

■ **Primjer 6.30** Pokažimo da Cauchyev problem: $(x-2)y' = y^2 + \frac{4}{x}$, $y(1) = 3$, zadovoljava uvjete Picardovog teorema. U Primjeru 6.29 smo pokazali da se ova jednačba treba napisati u obliku $y' = f(x, y)$, gdje su:

$$f(x, y) = \frac{xy^2 + 4}{x(x-2)} \quad \text{i} \quad (x_0, y_0) = (1, 3),$$

te smo pokazali da je $f(x, y)$ neprekidna na $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| < 1/2, |y-3| < b\}$ za bilo kakav $b > 0$. Budući da je

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \quad 3-b < y < 3+b \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{x(x-2)},$$

to je $\frac{\partial f}{\partial y}$ omeđena na D , jer je: $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 12(3+b)$, $\forall (x, y) \in D$. Primjetimo da se u ovom primjeru ne bi ništa bitno promijenilo da smo početni uvjet $y(1) = 3$ zamjenili s $y(1) = y_0$ za bilo koji $y_0 \in \mathbb{R}$. ■

Ako napravimo obrat po kontrapoziciji od Picardovog teorema, tada je sljedeća tvrdnja istinita: ako (6.51) nema jedinstveno rješenje na intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ za svaki $h > 0$, tada jedan od uvjeta na funkciju $f(x, y)$ iz Picardovog teorema nije zadovoljen. Ovo ćemo pokazati u sljedećem primjeru u kome Cauchyjev problem nema jedinstveno rješenje.

■ **Primjer 6.31** Neka su $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Pokazat ćemo da za Cauchyev problem

$$\begin{cases} \frac{1}{5}y' = \sqrt[5]{y^4}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (6.55)$$

vrijedi:

- ako je $y_0 = 0$, tada (6.55) ima dva rješenja i nisu zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema;
- ako je $y_0 = 1$, tada su zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema, pa kao posljedicu (6.55) mora imati jedinstveno rješenje.

Postupak rješavanja. a) Očigledno jedno rješenje od (6.55) je $y_1(x) \equiv 0$. Pretpostavimo sada da je $y(x) \not\equiv 0$. Separacijom varijabli u (6.55) slijedi:

$$\frac{dy}{5\sqrt[5]{y^4}} = dx \implies \sqrt[5]{y(x)} = x + c \implies y(x) = (x + c)^5.$$

Specijalno za $c = -x_0$ dobivamo još jedno rješenje od (6.55): $y_2(x) = (x - x_0)^5$. Prema tome dobili smo dva različita rješenja Cauchyevog problema (6.55) pod uvjetom da je $y_0 = 0$. S druge strane, iz (6.55) slijedi:

$$f(x, y) = 5\sqrt[5]{y^4} \implies \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{\sqrt[5]{y}},$$

pa je funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$ neomeđena u svakoj okolini točke $(x_0, 0)$. Prema tome, ako je $y_0 = 0$, tada (6.55) ne zadovoljava uvjete Picardovog teorema.

b) Ako je $y_0 = 1$, tada je $\frac{\partial f}{\partial y}$ omeđena je na kvadratu oko točke $(x_0, 1)$ duljine stranice $1/2$, pa su o ovom slučaju zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema. ■



U prethodnom primjeru smo prezentirali značenje tvrdnje dobivene obratom po kontrapoziciji tvrdnje Picardovog teorema: "ako rješenje od (6.51) nije jedinstveno, tada nije zadovoljen barem jedan uvjet Picardovog teorema". Međutim, obrat tvrdnje Picardovog teorema općenito ne vrijedi, odnosno općenito ne vrijedi sljedeća tvrdnja: "ako je rješenje od (6.51) jedinstveno, tada su zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema." Pokažimo to na primjeru Cauchyjevog problema:

$$y' = \sqrt{y} + 1, \quad y(1) = 0,$$

koji ne zadovoljava uvjete Picardovog teorema, jer parcijalna derivacije desne strane jednadžbe je $1/(2\sqrt{y})$ što nije omeđena funkcija na bilo kojoj okolini oko točke $(x_0, 0)$, $\forall x_0$, pa specijalno i oko točke $(1, 0)$. S druge strane, ovaj problem ima jedinstveno rješenje, koje se lako dobije separacijom varijabli i uvrštavanjem početnog uvjeta:

$$y' = \sqrt{y} + 1 \implies \frac{dy}{\sqrt{y} + 1} = dx \implies \sqrt{y} + 1 - \ln(\sqrt{y} + 1) = \frac{x}{2} + c, \quad c = \frac{1}{2}.$$

Vježba 6.29 Pokazati da za Cauchyjev problem $y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}$, $y(3) = y_0$, vrijedi:

- a) ako je $y_0 = 1$, tada nisu zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema; u ovom slučaju naći barem dva njegova rješenja;
b) ako je $y_0 = 2$, tada su zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema.

Rješenja za Vježbu 6.29 a) $f(x, y) = (y-1)^{2/3} \implies \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-1)^{-1/3}$ - nije definirana u $y = 1$ pa specijalno niti u točki $(3, 1)$, pa nije zadovoljen drugi uvjet Picardovog teorema (korigirano 1. 6. 2023. na temelju studentske primjedbe: Dino Dubroja, hvala!); dva rješenja su: $y_1(x) = 1$ (direktno uvrštavanje) i $y_2(x) = (x/3 - 1)^3 + 1$ (separacija varijabli);

b) funkcije $f(x, y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ su kao pod a) i prema tome, to su neprekidne funkcije oko točke $(3, 2)$; pravokutnik $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 3| < a, |y - 2| < 1/2\}$ s centrom u $(3, 2)$ na kome je $\frac{\partial f}{\partial y}$ omeđena za bilo koji $a > 0$.

Vježba 6.30 Pokazati da za svaki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Cauchyjev problem: $y' = x - 2y$, $y(x_0) = y_0$, zadovoljava uvjete Picardovog teorema.

Rješenja za Vježbu 6.30 $f(x, y) = x - 2y$ je neprekidna funkcija na \mathbb{R}^2 , $\frac{\partial f}{\partial y} = -2$ je omeđena funkcija na \mathbb{R}^2 .

Vježba 6.31 Promatramo Cauchyjev problem $xy' = y(\ln y)^{4/5}$, $y(3) = 1$. a) Je li rješenje jedinstveno? b) Jesu li zadovoljeni uvjeti Picardova teorema. Obrazložiti sve tvrdnje.

Rješenja za Vježbu 6.31 a) rješenje nije jedinstveno jer postoje dva rješenja: $y = 1$ (direktno uvrštavanje) i $\ln y = [(\ln x + c)/5]^5$ (separacija varijabli), gdje se c lako odredi uz uvjeta $y(3) = 1$;

b) nisu zadovoljeni uvjeti Picardova teorema jer je $f(x, y) = y(\ln y)^{4/5}/x$, pa $\frac{\partial f}{\partial y}$ nije definirana u $y_0 = 1$.



Osim Peanovog i Picardovog teorema, postoje i neki drugi rezultati o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, kao što su Picard-Lindelöf, Cauchy-Lipschitz itd. U jednom od njih, drugi uvjet Picardovog teorema odnosno (6.54) se pojavljuje u svom ekvivalentnom obliku: $f(x, y)$ je *Lipschitz-neprekidna po drugoj varijabli*, što po definiciji znači da postoji konstanta $M > 0$ takva da vrijedi:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D,$$

gdje je D pravokutnik definiran u Picardovom teoremu.



Globalna egzistencija i jedinstvenost rješenja. Ako pravokutnik D u Picardovom teoremu zamijenimo s trakom oko (x_0, y_0) , koja je beskonačna po varijabli y , odnosno:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, -\infty < y < \infty\},$$

i ako $f(x, y)$ zadovoljava obadva uvjeta Picardova teorema na ovakvom D , tada rješenje $y(x)$ Cauchyjevog problema (6.51) globalno postoji i jedinstveno je na intervalu $|x - x_0| \leq a$. Ovdje u zaključku nemamo lokalnu otvorenu okolinu $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ oko x_0 , nego globalni zatvoreni interval $|x - x_0| \leq a$ oko x_0 .



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:

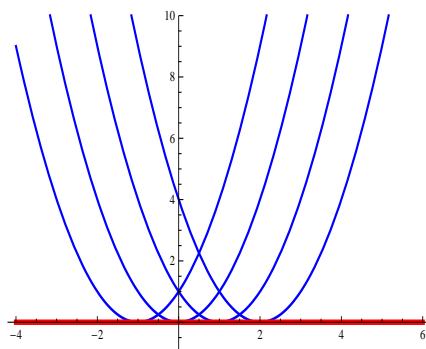
[Diferencijalne jednačbe prvog reda - 5. dio](#) (dio između 39:23 i 50:36).

6.7.3 Regularna i singularna rješenja

Jedinstvenost i nejedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema, koja smo promatrali u prethodnoj točki, ćemo primijeniti na promatranje regularnih i singularnih rješenja diferencijalne jednačbe. Ako primijenimo separaciju varijabli na sljedeće dvije naoko veoma slične diferencijalne jednačbe, tada zaključujemo da vrijedi:

$$(y')^2 = 4y \implies y = 0 \text{ i } y = (x + c)^2, \quad y' = y^2 \implies y = 0 \text{ i } y = -1/(x + c).$$

Međutim, struktura rješenja ove dvije jednačbe je bitno različita, u smislu da u prvoj jednačbi rješenje $y = 0$ - crvena krivulja na slici dolje siječe odnosno tangira svaku krivulju iz općeg rješenja $y = (x + c)^2$ - plave krivulje na slici dolje, dok u drugoj jednačbi za $y = 0$ to nije slučaj, jer vrijedi $|y| = 1/|x + c| > 0$ (nacrtajte):



Slika 10.10: jednadžba $(y')^2 = 4y \implies$ singularno rješenje $y = 0$ -crvena i opće rješenje $y = (x + c)^2$ -plava

Još jednostavnije rečeno, u prvom slučaju kažemo da je $y = 0$ *singularno rješenje* od $(y')^2 = 4y$, dok u drugom slučaju kažemo da je $y = 0$ *regularno rješenje* od $y' = y^2$. Preciznije određenje pojmova regularnog i singularnog rješenja je dano u sljedećoj definiciji.

Definicija 6.7.2 Neka je funkcija $z(x)$ jedno fiksirano rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = f(x, y)$. Kažemo:

A) $y_s(x)$ je *singularno rješenje* jednadžbe $y' = f(x, y)$ ako za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ postoji još jedno rješenje $y(x)$ od $y' = f(x, y)$ koje prolazi točkom $(x_0, y_s(x_0))$ i $y \not\equiv y_s$, odnosno za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ pripadni Cauchyjev problem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_s(x_0)$ nema jedinstveno rješenje;

B) $y(x)$ je *regularno rješenje* jednadžbe $y' = f(x, y)$ ako za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ postoji samo jedno rješenje od $y' = f(x, y)$ koje prolazi točkom $(x_0, y(x_0))$, odnosno za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ pripadni Cauchyjev problem ima jedinstveno rješenje (i to samo $y(x)$);

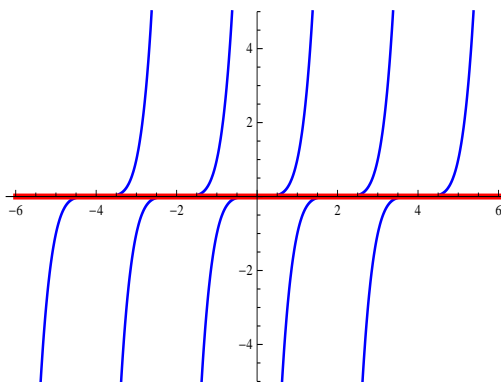
C) $y(x)$ *nije regularno rješenje* jednadžbe $y' = f(x, y)$ ako postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ tako da pripadni Cauchyjev problem nema jedinstveno rješenje. ■

Kako vidimo C) je negacija od B), dok A) nije negacija od B).

Napomena 6.12 Svojstva A), B) i C) možemo izraziti u terminima međusobnih presjeka ili tangiranja rješenja diferencijalne jednadžbe $y' = f(x, y)$. Na primjer, za dokazati B) ekvivalentno je pokazati da rješenje $y(x)$ nema točke presjeka ili tangiranja niti s jednim drugim rješenjem od $y' = f(x, y)$ ili još jednostavnije, pokazati da pripadni Cauchyjev problem zadovoljava uvjete Picardovog teorema u svakoj točki $(x_0, y(x_0))$. A za dokazati C), ekvivalentno je pokazati da postoji jedno drugo rješenje $y_2(x)$ od $y' = f(x, y)$ tako da se $y(x)$ i $y_2(x)$ sijeku ili tangiraju u barem jednoj točki. ■

■ Primjer 6.32 [slučaj A) iz Definicije 6.7.2]

U Primjeru 6.31 smo pokazali da Cauchyjev problem (6.55): $y' = 5\sqrt[5]{y^4}$, $y(x_0) = 0$, za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ ima barem dva rješenja: $y_s(x) = 0$ i $y(x) = (x - x_0)^5$ odnosno $y_s(x)$ i $y(x)$ prolaze kroz točku $(x_0, 0) = (x_0, y_s(x_0))$ za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$. Prema tome, $y_s(x) = 0$ je singularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = 5\sqrt[5]{y^4}$, kao što je to na sljedećoj slici grafički prikazano: ■



Slika 10.11: jednačba $y' = 5\sqrt[3]{y^4}$ ima singularno rješenje $y_s = 0$ -crvena i opće rješenje $y = (x - c)^5$ -plava

■ **Primjer 6.33 [slučaj B) iz Definicije 6.7.2]**

Pokazat ćemo da su sva rješenja Bernoullijeve diferencijalne jednačbe:

$$y' - 2y = y^2, \quad (6.56)$$

regularna i da su dana formulom:

$$y(x) = 0 \quad \text{i} \quad y(x) = \frac{1}{ce^{-2x} - 1/2}. \quad (6.57)$$

Očigledno je $y(x) = 0$ jedno rješenje od (6.56). Ako pretpostavimo da je $y(x) \neq 0$, tada (6.56) možemo riješiti separacijom varijabli ili kao Bernoullijevu transformacijom $y = 1/u$ na linearnu diferencijalnu jednačbu:

$$u' + 2u = -1 \implies u(x) = ce^{-2x} - 1/2,$$

iz čega slijedi (6.57). Da bi dokazali regularnost svih rješenja od (6.56) primijetimo da je opće rješenje $y(x) = \frac{1}{ce^{-2x} - 1/2} \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa se rješenja dana u (6.57) ne sijeku niti u jednoj točki. Treba još pokazati da se međusobno ne sijeku rješenja iz općeg rješenja $y(x)$. Naime, za bilo koja dva različita rješenja

$$y_1(x) = \frac{1}{c_1 e^{-2x} - 1/2} \quad \text{i} \quad y_2(x) = \frac{1}{c_2 e^{-2x} - 1/2},$$

mora vrijediti $c_1 \neq c_2$ pa onda:

$$c_1 \neq c_2 \implies c_1 e^{-2x} \neq c_2 e^{-2x} \implies \frac{1}{c_1 e^{-2x} - 1/2} \neq \frac{1}{c_2 e^{-2x} - 1/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

odnosno $y_1(x) \neq y_2(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Prema tome $y_1(x)$ i $y_2(x)$ se ne sijeku niti u jednoj točki, čime smo pokazali da su sva rješenja od (6.56) regularna. ■

■ **Primjer 6.34 [slučajevi B) i C) iz Definicije 6.7.2]**

Promatramo rješenja diferencijalne jednačbe:

$$y' = 6(x+1)\sqrt[3]{(y-1)^2}. \quad (6.58)$$

Budući da na lijevoj strani u (6.58) vrijedi $y' = (y-1)'$, to separacijom varijabli i direktnim uvrštavanjem zaključujemo da:

- 1) $y(x) = (x^2 + 2x + c)^3 + 1$, $c \in \mathbb{R}$ je opće rješenje od (6.58);
 2) $y(x) = 1$ je isto tako rješenje od (6.58) koje nije sadržano u općem rješenju.

Sada ćemo proučiti međusobne presjke rješenja:

$$(x^2 + 2x + c)^3 + 1 = 1 \implies x^2 + 2x + c = 0 \implies x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - c},$$

odnosno postoje presjeci ako i samo ako je $1 - c \geq 0$ odnosno $c \leq 1$. Prema ovome zaključujemo sljedeće:

- i) za $c > 1$, svako rješenje $y(x)$ is općeg rješenja $y(x) = (x^2 + 2x + c)^3 + 1$ je regularno rješenje od (6.58);
 ii) za $c \leq 1$, svako rješenje $y(x)$ is općeg rješenja $y(x) = (x^2 + 2x + c)^3 + 1$ nije regularno rješenje od (6.58), jer ima presjek s rješenjem $y(x) = 1$ u barem jednoj točki. ■

Vježba 6.32 [slučaj A] iz Definicije 6.7.2] Pokazati da je $y = 1$ singularno rješenje diferencijalne jednačbe $x^2 y' = y(\ln y)^{1/3}$.

Rješenja za Vježbu 6.32 Očito je $z(x) = 1$ jedno rješenje, pa za svaki x_0 vrijedi $z(x_0) = 1$; separacijom varijable u diferencijalnoj jednačbi, dolazimo do općeg rješenja:

$$\frac{3}{2}(\ln y)^{2/3} = -\frac{1}{x} + c;$$

ako želimo da kroz svaku točku $(x_0, 1)$ rješenja $z(x) = 1$ prolazi neko drugo rješenje $y(x)$ iz općeg rješenja, dovoljno je iz uvjeta $y(x_0) = 1$ odrediti konstantu c , pa je $c = \frac{1}{x_0}$; sada je $y(x_0) = 1 = z(x_0)$ odnosno kroz svaku točku rješenja $z(x) = 1$ prolazi jedno rješenje $y(x)$ iz općeg rješenja za koji je $y(x_0) = 1$.

Vježba 6.33 [slučaj B] iz Definicije 6.7.2] Pokazati da linearna diferencijalna jednačba $y' + f(x)y = g(x)$ ima samo regularna rješenja.

Rješenja za Vježbu 6.33 Iz formule (6.13) slijedi da je rješenje Cauchyjevog problema $y' + f(x)y = g(x)$, $y(x_0) = y_0$, jedinstveno za svaki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, odnosno svako rješenje linearne jednačbe $y' + f(x)y = g(x)$ je regularno.

Vježba 6.34 [slučajevi A), B) i C) iz Definicije 6.7.2] U ovisnosti o realnom parametru $p \in \mathbb{R}$, promatramo rješenja diferencijalne jednačbe:

$$y' = (y - x)^p + 1. \quad (6.59)$$

Pokazati da vrijedi:

- 1) ako je $p \in (0, 1)$, tada je funkcija $y(x) = x$ singularno rješenje jednačbe (6.59); štoviše, ako je $p < 1$, tada sva druga rješenja nisu regularna i imaju oblik:

$$y(x) = x + [(1 - p)(x + c)]^{\frac{1}{1-p}}, \quad c \in \mathbb{R};$$

- 2) ako je $p = 1$, tada jednačba (6.59) ima samo regularna rješenja dana formulom:
 $y = ce^x + x$, $c \in \mathbb{R}$;

3) ako je $p = 0$, tada jednačba (6.59) ima samo regularna rješenja dana formulom: $y = c + x$, $c \in \mathbb{R}$.

Rješenja za Vježbu 6.34 $y(x) = x$ je rješenje od (6.59) (direktno uvrštavanje), a opće rješenje od (6.59) koje je dano u zadatku lako možemo naći supstitucijom $z = y - x$ i separacijom varijabli; potom nađemo konstantu c iz uvjeta $y(x) = x$, iz čega slijedi da kroz svaku točku rješenja $y(x) = x$ prolazi jedno rješenje iz općeg rješenja, što dokazuje da je $y(x) = x$ singularno rješenje.



Prethodni primjeri i vježbe iz ove točke se na ispitu pojavljuju u formi teorijskih zadataka, jer na konkretan način propituju razumjevanje teorije o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, te o njihovoj regularnosti i singularnosti.



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:

[Diferencijalne jednačbe prvog reda - 5. dio](#) (od 50:37 do kraja snimke).

6.8 Lagrangeova i Clairautova diferencijalna jednačba

Ako diferencijalnu jednačbu $F(x, y, y') = 0$ ne možemo razriješiti po y' onda obično koristimo tehniku parametrizacije ove jednačbe i rješenje dobivamo također u parametarskom obliku.

6.8.1 Lagrangeova diferencijalna jednačba

Lagrangeova diferencijalna jednačba je jednačba oblika

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'), \quad (6.60)$$

gdje su φ i ψ zadane diferencijabilne funkcije. Jednačbu rješavamo uvodeći parametar p na sljedeći način:

$$y' = p \quad (dy = p dx). \quad (6.61)$$

Sada uvrštavanjem u (6.60) dobivamo $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Diferenciranjem ove jednakosti slijedi:

$$dy = \varphi(p) dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p)) dp. \quad (6.62)$$

Ako spojimo (6.61) i (6.62) dobivamo $\varphi(p) dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p)) dp = p dx$, odnosno

$$(\varphi(p) - p) \frac{dx}{dp} + \varphi'(p)x = -\psi'(p).$$

Ako je $\varphi(p) - p \neq 0$, tada opće rješenje Lagrangeove jednačbe (6.60) dobivamo rješavanjem jednačbe:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}, \quad \varphi(p) \neq p.$$

Ako je $\varphi(p) - p = 0$, tada singularno rješenje Lagrangeove jednačbe (6.60) dobivamo eliminiranjem parametra p iz jednakosti $\varphi(p) = p$ i $y = x\varphi(p) + \psi(p)$.

■ **Primjer 6.35** Promatramo Lagrangeovu diferencijalnu jednačbu:

$$y = -xy' + 4\sqrt{y'}. \quad (6.63)$$

Po gornjem postupku, uvodimo supstituciju $y'(x) = p(x)$, te dobivamo:

$$y = -xp + 4\sqrt{p}. \quad (6.64)$$

Sada je potrebno naći $x(p)$, pa u tom smislu deriviramo jednakost (6.64) po x i dobivamo:

$$\begin{aligned} y &= -xp + 4\sqrt{p} \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \\ \Rightarrow p &= y' = -p - x \frac{dp}{dx} + \frac{2}{\sqrt{p}} \frac{dp}{dx} \\ \Rightarrow 2p &= \frac{dp}{dx} \left(\frac{2}{\sqrt{p}} - x \right) \\ \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{1}{2p}x &= \frac{1}{\sqrt{p^3}}, \quad p \neq 0, \\ \Rightarrow x(p) &= e^{-\int \frac{1}{2p} dp} \left(c + \int \frac{1}{\sqrt{p^3}} e^{\int \frac{1}{2p} dp} dp \right) \\ \Rightarrow x(p) &= \frac{1}{\sqrt{p}} (c + \ln p), \quad p \neq 0. \end{aligned}$$

Ako dobiveni izraz za $x(p)$ uvrstimo u (6.64) tada dobivamo konačno rješenje:

$$\begin{cases} x(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} (c + \ln p), \\ y(p) = \sqrt{p}(4 - c - \ln p), \quad p \neq 0. \end{cases}$$

Ovo rješenje vrijedi uz uvjet da je $p \neq 0$. Sada razmotrimo singularni slučaj $p = 0$. Ako uvrstimo $p = 0$ u (6.64), tada slijedi da je $y = 0$ singularno rješenje Lagrangeove diferencijalne jednačbe (6.63). ■



Joseph-Louis Lagrange (1736.–1813.) je bio talijanski i francuski matematičar, rođen kao Ludovico de la Grange Tournier. Dao je znatne doprinose na polju matematičke analize, teorije brojeva, klasične mehanike, nebeske mehanike i hidrodinamike. Udario je temelje modernom varijacijskom računu, a na ovu temu su poznata dopisivanja između njega i Eulera tijekom 1755. godine, kada je Lagrange imao samo 19 godina :).

Vježba 6.35 Naći opće i singularno rješenje za sljedeće Lagrangeove diferencijalne jednačbe:

1. $y = 3xy' - 7y^3$; 2. $x(y'^2 + 1) - 2yy' = 0$; 3. $y = xy'^2 - 2y^3$;
4. $2xy' - \ln y' = y$; 5. $3(xy' - y) = y'^3$.

Rješenja za Vježbu 6.35 :

1. $x(p) = 3p^2 + c|p|^{-3/2}$, $y(p) = 2p^3 + 3c|p|^{-1/2}\text{sgn}(p)$, $y = 0$;
2. $x(p) = cp$, $y(p) = c(p^2 + 1)$, $y = \pm x$;
3. $x(p) = (p - 1)^{-2}(c + 2p^3 - 3p^2)$, $y(p) = xp^2 - 2p^3$, $y = 0$, $y = x - 2$;
4. $x(p) = 1/p + c/p^2$, $y(p) = 2 + 2cp^{-1} - \ln p$;
5. $y = cx - c^3/3$, $y = \pm \frac{2}{3}x^{3/2}$.

6.8.2 Clairautova diferencijalna jednačba

Clairautova diferencijalna jednačba je specijalni slučaj Lagrangeove za $\varphi(p) = p$, odnosno

$$y = y'x + \psi(y').$$

Ponovimo li gornji postupak za Lagrangeovu diferencijalnu jednačbu dobivamo:

$$y' = p \implies y = px + \psi(p) \implies p = y' = x \frac{dp}{dx} + p + \psi'(p) \frac{dp}{dx},$$

iz čega slijedi:

$$\frac{dp}{dx} \cdot (x + \psi'(p)) = 0.$$

Prema tome, imamo dvije klase rješenja:

- opće rješenje $\frac{dp}{dx} = 0$ odnosno $p = c$, $c \in \mathbb{R}$,
- singularno rješenje $x + \psi'(p) = 0$.

Ako sad i jedno i drugo rješenje uvrstimo u $y = px + \psi(p)$ dobivamo konačni oblik za ove dvije vrste rješenja:

opće rješenje $y = cx + \psi(c)$, $c \in \mathbb{R}$ i singularno rješenje $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$.

■ **Primjer 6.36** Promatramo opća i singularna rješenja Clairautove diferencijalne jednačbe: $y = xy' + 1/y'$. Za $y' = p$ dobivamo $y = xp + \frac{1}{p}$. Deriviranjem po x slijedi:

$$p = y' = p + x \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2} \frac{dp}{dx}$$

odnosno

$$\frac{dp}{dx} \left(x - \frac{1}{p^2} \right) = 0.$$

Sada $\frac{dp}{dx} = 0$ nam daje $p = c$ što zajedno s $y = xp + \frac{1}{p}$ formira opće rješenje:

$$y = cx + \frac{1}{c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

S druge strane $x - \frac{1}{p^2} = 0$ i $y = xp + \frac{1}{p}$ nam daju $y = 2/p$ što zajedno s $x = 1/p^2$ daje singularno rješenje u obliku: $y^2 = 4x$. ■



Alexis Clairaut (1713.–1765.) je bio francuski matematičar, koji je dao doprinose u diferencijalnim jednačinama, geometriji, astronomiji i geofizici.

Vježba 6.36 Naći opće i singularno rješenje za sljedeće Clairautove diferencijalne jednačine:

1. $y = xy' - y'^2$; 2. $y - xy' + 2 + y' = 0$; 3. $1 = 2y'^2(y - xy')$;
4. $xy' - \ln y' = y$.

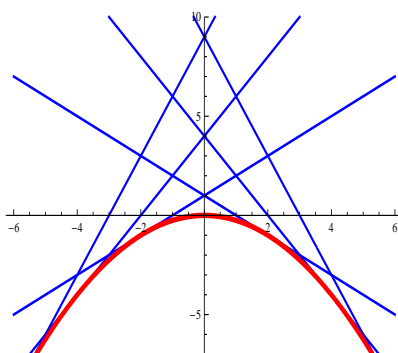
Rješenja za Vježbu 6.36 :

1. $y = cx - c^2, y = x^2/4$; 2. $y = cx - c - 2$; 3. $y = cx + 1/(2c^2), y = \frac{3}{2}x^{2/3}$
4. $y = cx - \ln c, y = \ln x + 1$.

6.8.3 Ovojnica familije krivulja

Da bi objasnili geometrijsku povezanost singularnog i općeg rješenja Clairautove jednačine, uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 6.8.1 Graf funkcije $y(x)$ je ovojnica zadane familije krivulja $\Phi(x, y, c) = 0$ ako tangira svaku krivulju iz ove familije. ■



Slika 10.12: ovojnica $y = -x^2/4$ -crvena, familije pravaca $y = cx + c^2$ -plava

■ **Primjer 6.37** Parabola $y = -x^2/4$ je ovojnica familije pravaca $y = cx + c^2$, jer je svaki pravac iz zadane familije pravaca tangenta na ovu parabolu, što znači da ova parabola tangira sve pravce iz ove familije. Zaista, neka je $y = Cx + C^2$ jedan konkretan pravac iz familije. Pokazat ćemo da postoji točka (x_0, y_0) na paraboli u kojoj se ove dvije krivulje

tangiraju, odnosno u kojoj je dani pravac tangenta ove parabole. Dakle, tražena točka (x_0, y_0) je na paraboli: $y_0 = -x_0^2/4$, a jednačba njene tangente je:

$$y + \frac{x_0^2}{4} = -\frac{x_0}{2}(x - x_0) \implies y = -\frac{x_0}{2}x - \frac{x_0^2}{4}.$$

Uvjet tangiranja: $C = -x_0/2$ iz čega slijedi: $x_0 = 2C$. Prema tome, svaki pravac iz ove familije pravaca $y = cx + c^2$ tangira zadanu parabolu u njenoj točki $(2c, -c^2)$. ■

Primijetimo da je $y = -x^2/4$ singularno rješenje, a $y = cx + c^2$ opće rješenje Clairautove diferencijalne jednačbe: $y = xy' + y'^2$. Ovo vrijedi za svaku Clairautovu diferencijalnu jednačbu: *singularno rješenje je ovojnica familije krivulja iz općeg rješenja*.

■ **Primjer 6.38** Odredimo ovojnicu familije pravaca $y = cx + 1/c$. Pripadna Clairautova diferencijalna jednačba je $y = xy' + 1/y'$. U Primjeru 6.36 smo pokazali da je parabola $y^2 = 4x$ singularno rješenje ove diferencijalne jednačbe. Prema tome, geometrijski gledano je $y^2 = 4x$ ovojnica familije pravaca $y = cx + 1/c$. ■

Vježba 6.37 Za svaku od sljedećih familija krivulja odrediti njihovu ovojnicu:

1. $y = cx - c^2$; 2. $y = cx + \frac{1}{2c^2}$; 3. $y = cx - \ln c$.

Rješenja za Vježbu 6.37 :

1. $y = x^2/4$; 2. $y = \frac{3}{2}x^{2/3}$; 3. $y = \ln x + 1$.



Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:

[Diferencijalne jednačbe prvog reda - 4. dio](#) (od 20:50 do kraja snimke).



6.9 Dodatak - Numeričko rješavanje diferencijalne jednačbe

Egzaktno rješenje Cauchyjevog problema obično možemo dobiti u obliku formule. Primjerice, ako rješavamo problem $y' = x$, $y(0) = 1$ za rješenje ćemo dobiti $y(x) = x^2/2 + 1$. Suprotno tome, pod numeričkim rješenjem diferencijalne jednačbe smatramo skup vrijednosti koje aproksimiraju analitičko rješenje na danom skupu točaka x_0, \dots, x_n . Dakle, numeričko rješenje bio bi skup vrijednosti y_0, \dots, y_n , koji obično zapisujemo kao vektor rješenja. Pri tome je y_i približno jednako $y(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$. Ovisno o tome na koji način ćemo iz y_n računati vrijednost y_{n+1} dobivamo različite numeričke metode. Nadalje, ukoliko se za računanje y_{n+1} koristi y_n metoda se zove jednokoračna metoda, a ako koristimo više prethodnih vrijednosti metoda se zove višekoračna. Najjednostavniji primjer jednokoračne takve metode je Eulerova metoda.

6.9.1 Eulerova metoda

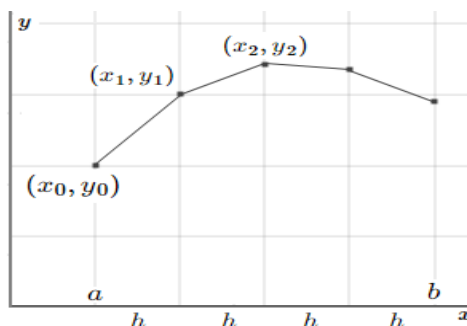
Problem 6.3 Zadana su tri realna broja x_0, y_0, b ($b > x_0$), funkcija $f(x, y)$ i prirodni broj m . Želimo aproksimirati rješenje $y = y(x)$ Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (6.65)$$

u točki $x = b$ koristeći podjelu intervala $[x_0, b]$ na m podintervala jednake duljine: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{m-1}, x_m = b]$, gdje je

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 1, 2, \dots, m \quad \text{ i } \quad h = \frac{b - x_0}{m}.$$

Broj h predstavlja duljinu svakog podintervala, odnosno $h = x_n - x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, m$. Prema tome, aproksimiramo $y(b) = y(x_m)$ sa brojem y_m , koji je zadnji član u nizu aproksimacija $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m$, a koje ćemo dobiti Eulerovom (numeričkom) metodom.



Slika 10.13: rješenje $y(x)$ aproksimiramo nizom aproksimacija $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m$

Pokažimo kako Eulerovom metodom dobivamo niz aproksimacija y_1, y_2, \dots, y_m dobivamo na sljedeći način: kroz početnu točku (x_0, y_0) , koja je zadana u (6.65) povučemo tangentu na rješenje $y = y(x)$, koja ima jednačbu: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Budući da je $y'(x) = f(x, y(x))$, ova tangenta poprima oblik: $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$. Ako je presiječemo s okomitim pravcem $x = x_1$, dobivamo $y(x_1) - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. Ako pretpostavimo da je $y_1 := y(x_1)$, tada je $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Ovaj postupak induktivno ponovimo tako da umjesto (x_0, y_0) promatramo upravo dobivenu (x_1, y_1) i tako dalje:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Na ovaj način smo dobili po dijelovima linearnu funkciju koja aproksimira $y(x)$ i vrijedi $y(x_n) = y_n$, vidi sliku gore.

Cijeli postupak dobivanja niza aproksimacija (x_n, y_n) Eulerovom metodom je moguće zapisati u jednu tablicu, u kojoj se po stupcima nalaze redom nizovi $x_n, y_n, f(x_n, y_n)$ i y_{n+1} , a broj redaka $m + 1$, te se popunjava s lijeva na desno i odozgo prema dolje:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1} := y_n + hf(x_n, y_n)$
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$y_1 := y_0 + hf(x_0, y_0)$
1	$x_1 := x_0 + h$	y_1	$f(x_1, y_1)$	$y_2 := y_1 + hf(x_1, y_1)$
2	$x_2 := x_1 + h$	y_2	$f(x_2, y_2)$	$y_3 := y_2 + hf(x_2, y_2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m	$b = x_m$	y_m		

■ **Primjer 6.39** Eulerovom metodom trebamo aproksimirati rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = y^2 + x, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (6.66)$$

u točki $x = 1$ koristeći podjelu intervala $[0, 1]$ na 5 podintervala jednake duljine. Zbog ovog uvjeta, duljina svakog podintervala $h = 0,2$. Postupak ćemo prikazati u sljedećoj tablici:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = x_n + y_n^2$	$y_{n+1} := y_n + hf(x_n, y_n)$
0	0	0	$f(x_0, y_0) = 0$	$y_1 = 0$
1	0,2	0	0,2	0,04
2	0,4	0,04	0,4016	0,12032
3	0,6	0,12032	0,61144769024	0,24321538048
4	0,8	0,24321538048	0,8591537213	0,41504612474
5	1	$y_5 = 0,41504612474$		

Prema tome, dobili smo da je $y(1) \approx y_5 = 0,41504612474$. ■

Vježba 6.38 Eulerovom metodom aproksimirajte rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = \frac{2\sqrt{x}+1}{2y-2x}, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

u točki $x = 1,3$ koristeći podjelu intervala $[1, 1,3]$ na 3 podintervala jednake duljine. Račun provedite na 5 decimala.

■ **Rješenja za Vježbu 6.38** $y_3 = 2,44022$.

Vježba 6.39 Eulerovom metodom aproksimirajte rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = y - x, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

u točki $x = 0,5$ koristeći podjelu intervala $[0, 0,5]$ na 5 podintervala jednake duljine. Račun provedite na 5 decimala.

■ **Rješenja za Vježbu 6.39** $y_5 = 3,11051$.

Vježba 6.40 Eulerovom metodom aproksimirajte rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = -2y + x^3, \\ y(0) = 0,25, \end{cases}$$

u točki $x = 0,6$ koristeći podjelu intervala $[0, 0,6]$ na 6 podintervala jednake duljine. Račun provedite na 4 decimale.

■ **Rješenja za Vježbu 6.40** $y_6 = 0,0853$.

Napomena 6.13 Znamo da rješenje Cauchyjevog problema (6.65) možemo zapisati u obliku $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$. Ako uzmemo $h = x_1 - x_0$ i aproksimiramo podintegralnu funkciju konstantom $f(x_0, y_0)$ dolazimo do Eulerove metode. Postoje određene

modifikacije Eulerove metode, ovisno o tome kako odlučimo aproksimirati podintegralnu funkciju. ■

Napomena 6.14 Eulerova metoda nije jedina numerička metoda za aproksimaciju rješenja Cauchyjevog problema. Postoje i razne varijante Eulerove metode, pa Runge-Kutta metoda i njene razne varijante, i tako dalje. ■

6.9.2 Taylorova metoda - numerička aproksimacija Picardovih iteracija

Postoje razne varijante Taylorove metode, koje imaju zajedničku ideju: neki se dio u diferencijalnoj jednačbi zamijeni s Taylorovim polinomima raznog reda (najčešće reda 2). Da bi izbjegli dobivanje slične metode Eulerovoj metodi, ovdje primjenjujemo Taylorove polinome u dobivanju numeričke aproksimacije Picardovih iteracija.

U dokazu o egzistenciji lokalnog rješenja Cauchyjevog problema za diferencijalnu jednačbu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, prethodna diferencijalna jednačba se zamjenjuje s ekvivalentnom integralnom jednačbom:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

koja se pak rješava kao limes Picardovih iteracija koje su definirane s:

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, & n \in \mathbb{N}, \\ y_0(x) := y_0. \end{cases} \quad (6.67)$$

Problem 6.4 Zadani su realni brojevi x_0 i y_0 , funkcija $f(x, y)$ i prirodni broj m . Pronađi numeričku aproksimaciju $\hat{y}_m(x)$ za m -tu Picardovu iteraciju $y_m(x)$ iz (6.67), gdje se podintegralna funkcija $f(x, y_n(x))$ prije integriranja razvija u Taylorov polinom n -tog reda po potencijama $x - x_0$, odnosno:

$$\begin{cases} \hat{y}_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x T_n[f(t, \hat{y}_n(t))] dt, & n = 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ \hat{y}_0(x) := y_0, \end{cases} \quad (6.68)$$

gdje $T_n[f(t, \hat{y}_n(t))]$ označava Taylorov polinom n -tog stupnja po $t - t_0$ od funkcije $F(t) = f(t, \hat{y}_n(t))$. Pri tome je $T_0[f(t, \hat{y}_0(t))]$ prvi i jedini član u Taylorovom polinomu nultog reda odnosno

$$T_0[f(t, \hat{y}_0(t))] = f(x_0, \hat{y}_0(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

□

Ovu metodu ćemo demonstrirati na sljedećem primjeru.

■ **Primjer 6.40** Odredimo numeričku aproksimaciju $\hat{y}_3(x)$ za Picardovu iteraciju $y_3(x)$ Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x+y} + x, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (6.69)$$

Budući da je $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ i $f(x, y) = \sqrt{x+y} + x$, iz (6.68) slijedi:

$$\begin{aligned} \hat{y}_0(x) &= 1, \quad T_0[f(t, \hat{y}_0(t))] = f(0, 1) = 1; \\ \hat{y}_1(x) &= 1 + \int_0^x T_0[f(t, \hat{y}_0(t))] dt = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1[f(t, \hat{y}_1(t))] &= T_1[\sqrt{t + \hat{y}_1(t)} + t] = T_1[\sqrt{1 + 2t} + t] = 1 + 2t, \\
\hat{y}_2(x) &= 1 + \int_0^x T_1[f(t, \hat{y}_1(t))] dt = 1 + \int_0^x (1 + 2t) dt = 1 + x + x^2; \\
T_2[f(t, \hat{y}_2(t))] &= T_2[\sqrt{t + \hat{y}_2(t)} + t] = T_2[\sqrt{1 + 2t + t^2} + t] = 1 + 2t, \\
\hat{y}_3(x) &= 1 + \int_0^x T_2[f(t, \hat{y}_2(t))] dt = 1 + \int_0^x (1 + 2t) dt = 1 + x + x^2,
\end{aligned}$$

gdje smo koristili formulu za Taylorov polinom:

$$T_n[\sqrt{1+x}] = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1} 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k k!} x^k = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

Primijetimo da je $\hat{y}_2(x) = \hat{y}_3(x) = 1 + x + x^2$, što je moguće budući da je funkcija $y(x) = x^2 + x + 1$ doista rješenje Cauchyjevog problema (6.69). ■

Vježba 6.41 Odredimo numeričku aproksimaciju $\hat{y}_3(x)$ za Picardovu iteraciju $y_3(x)$ Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = 1 + x^3 y(y - x^{10}), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

■ **Rješenja za Vježbu 6.41** $\hat{y}_3(x) = x + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{11}}{33}$.

6.10 Pitanja za ponavljanje gradiva

Odgovor na svako pitanje pokušajte obrazložiti matematičkim argumentima.

1. U svakoj se diferencijalnoj jednačbi mogu separirati varijable? Ako je odgovor negativan, navedi po jedan primjer diferencijalne jednačbe, za i protiv ove tvrdnje.
2. Ako je moguća separacija varijabli u nekoj diferencijalnoj jednačbi, objasni zašto se nakon separacije varijabli mogu lijeva i desna strana neovisno integrirati svaka po svojoj varijabli?
3. Napiši i izvedi formulu za opće rješenje linearne diferencijalne jednačbe prvog reda. Možemo li iz ove formule zaključiti da su rješenja Cauchyjevog problema za linearnu diferencijalnu jednačbu prvog reda globalna i jedinstvena?
4. Postupak kojim se Bernoullijeva diferencijalna jednačba transformira u pripadnu linearnu diferencijalnu jednačbu se može nazvati linearizacija nelinearne diferencijalne jednačbe prvog reda. Ovo je točna ili netočna tvrdnja?
5. Bernoullijevu diferencijalnu jednačbu $y' + xy = xy^2$ možemo riješiti i separacijom varijabli? Ako da, koji postupak je na ovoj jednačbi brži: Bernoullijeva linearizacija ili separacija varijabli?
6. Kružnica $x^2 + y^2 = 1$ i pravac $y = x$ su međusobno ortogonalne trajektorije? Familije kružnica $x^2 + y^2 = c$ i pravaca $y = Cx$ su međusobno ortogonalne familije?
7. Nužni i dovoljni uvjeti za egzaktnost diferencijalne jednačbe su isti ili različiti?
8. Napiši i izvedi formulu za opće rješenje egzaktno diferencijalne jednačbe.
9. Što je to Eulerov multiplikator? Kako prepoznati da je Eulerov multiplikator funkcija po x ili y varijabli?

10. Cauchyjev problem $y' = y^p$, $y(x_0) = 0$ ne zadovoljava uvjete Picardovog teorema ako je $p \neq 1$?
11. Ako je $p \in (0, 1)$ tada je $y = 0$ singularno rješenje, a ako je $p \geq 1$ tada je $y = 0$ regularno rješenje Cauchyjevog problema $y' = y^p$, $y(x_0) = 0$?
12. Je li svaka Clairautova diferencijalna jednačba specijalni oblik Lagrangeove diferencijalne jednačbe?
13. Koja od ove dvije diferencijalne jednačbe je Lagrangeova a nije Clairautove diferencijalna jednačba: $y = xy' - y'^2$ i $y = 2xy' - y'^2$?
14. Navedi i grafički skiciraj geometrijski smisao singularnog rješenja Clairautove diferencijalne jednačbe $y = xy' + 1/y'$?
15. U kojoj minuti i sceni filma "Spiderman 2", glavni glumac spominje "Brachistochrone" problem, koji smo kao dodatak razmatrali u potpoglavlju 6.5.3?

6.11 Zadaci

U sljedećim zadacima riješiti diferencijalne jednačbe prvog reda.

1. $y' + y - xy^3 = 0$; 2. $(y \cos x - x^2)dx + (\sin x + y)dy = 0$;
3. $y^2 \operatorname{ctg} x + yy' = \cos x$; 4. $y - y' = xy'^2$;
5. $y^2 - xyy' = \sqrt{x^4 + y^4}$; 6. $2xy' + y^2 = 1$;
7. $y^2 + xy' = y - y'$; 8. $xy + y^2 = x^2y'$;
9. $xydx + (1 - x^2)dy = 0$; 10. $3y = x^2y' - 2xy$;
11. $(x - y^2)dy = dx$; 12. $(x + y)^2y' = 1$;
13. $\frac{dx}{x} - (1/y - 2x)dy = 0$; 14. $ydx - (2x - 2y^2)dy = 0$;
15. $x(x - 1)y' + 2xy = 1$;
16. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$; 17. $dx - (x \cos y + \sin(2y))dy = 0$;
18. $(4xy - 3)y' + y^2 = 1$; 19. $(\cos x - x \sin x)ydx + (x \cos x - 2y)dy = 0$;
20. $xy'/y + 2xy \ln(x) + 1 = 0$; 21. $(1 - x^2y)dx + (x^2y - x^3)dy = 0$;
22. $ye^y dx - (2xe^y + y^4)dy = 0$; 23. $(6x^2 - 2xy^2 + 1)dx - (2x^2y - 3y^2)dy = 0$;
24. $xyy' = y^2 - x^2$, $y(1) = \sqrt{2}$; 25. $y' + (\operatorname{tg} x)y = 2 \cos^2 x$, $y(0) = 1$;
26. $(2x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$, $y(1) = 1$.

6.12 Rješenja za zadatke

1. $y^2(ce^{2x} + x + 1/2) = 1$, $y = 0$; 2. $-x^3/3 + y^2/2 + y \sin x = c$;
3. $2 \sin x + c/\sin^2 x = 3y^2$; 4. $x = \frac{\ln(cp) - p}{(p-1)^2}$, $y = xp^2 + p$, $y = 0$;
5. $\sqrt{x^4 + y^4} + y^2 = c$; 6. $cx - 1 = (cx + 1)y$, $y = 1$;
7. $y = (x + 1)/(x + c)$, $y = 0$; 8. $y \ln(cx) + x = 0$, $y = 0$;
9. $y^2 = c(x^2 - 1)$; 10. $y = cx^2 \exp(-3/x)$;
11. $x = ce^y + y^2 + 2y + 2$; 12. $x + y = \operatorname{tg}(y - c)$;
13. $y(yx - 1) = cx$; 14. $x = y^2(c - \ln(y^2))$, $y = 0$;

15. $(x-1)^2y = x - \ln x + c$;
16. $y^{2/3} = ce^{2x} + x/3 + 1/6$, $y = 0$; 17. $x + 2 + 2\sin y = ce^{\sin y}$;
18. $x(y^2 - 1)^2 = y^3 - 3y + c$ $y = \pm 1$; 19. $xy \cos x - y^2 = c$;
20. $xy(\ln^2 x + c) = 1$; 21. $y^2/2 - 1/x - xy = c$;
22. $x = y^2(c - (y+1)e^{-y})$, $y = 0$; 23. $2x^3 - x^2y^2 + y^3 + x = c$;
24. $y^2 = x^2 \ln \frac{e^2}{x^2}$; 25. $y(x) = (2\sin x + 1)\cos x$;
26. $x^2 + y^2 + xy + x = 4$.



Kazalo

Bernoullijeva diferencijalna jednađžba, 6,
21–24

Clairaut, 59

Clairautova diferencijalna jednađžba, 58–
60

egzaktna diferencijalna jednađžba, 6, 40,
41, 43, 44

Eulerov multiplikator, 40, 44, 47

familija krivulja, 6, 7, 13

homogenog stupnja, 26

Johann Bernoulli, 22

Lagrange, 57

Lagrangeova diferencijalna jednađžba, 56,
58

linearna diferencijalna jednađžba, 6, 15, 19,
21, 44

Metoda varijacije konstante, 16

Ortogonalne trajektorije, 34

ortogonalne trajektorije, 34

ovojnica, 59

Peanov teorem, 48

Picardov teorem, 49, 51–53

Picardove iteracije, 63

regularno rješenje, 52–55

Riccatijeva diferencijalna jednađžba, 24

singularno rješenje, 52, 53, 55