

Rang i inverz matrice

Sadržaj poglavlja

- 3.1. Matrična jednadžba i inverzna matrica
 - 3.1.1. Matrična jednadžba
 - 3.1.2. Inverzna matrica
- 3.2. Determinante i inverzna matrica
 - 3.2.1. Računanje inverzne matrice
- 3.3. Elementarne transformacije i reducirani oblik matrice
 - 3.3.1. Reducirani oblik matrice
- 3.4. Elementarne matrice. Ekvivalentne matrice
 - 3.4.1. Elementarne matrice
 - 3.4.2. Ekvivalentne matrice
- 3.5. Rang i inverzna matrica
 - 3.5.1. Odnosanje ranga matrice
 - 3.5.2. Rang i regularne matrice
- 3.6. Linearna nezavisnost vektora i rang matrice

3.1. Matrična jednadžba i inverzna matrica

U ovom ćemo poglavlju promatrati samo kvadratne matrice. U skupu kvadratnih matrica reda n definirane su dve operacije: zbrajanje matrica, množenje skalara i matrice te množenje matrice.

3.1.1. Matrična jednadžba

Neka su \mathbf{A} i \mathbf{B} dvije kvadratne matrice reda n . Matrična jednadžba je jednadžba oblika

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (1)$$

gdje je \mathbf{X} nepoznata kvadratna matrica reda n .

Postavlja se pitanje:

- Kad će jednadžba (1) imati jedinstveno rješenje \mathbf{X} ?
- Vidjet ćemo da odgovor na ovo pitanje ovisi samo o matrici \mathbf{A} , dakle, ne ovisi o matrici \mathbf{B} .

Primjer 1.

Riješi jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

► Stavimo $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Množenjem matrica s lijeve strane i izjednačavanjem s matricom na desnoj strani dolazimo do jednadžbi

$$\begin{aligned} 3a + c &= 1, & 3b + d &= 2, \\ 5a + 2c &= 3, & 5b + 2d &= 1, \end{aligned}$$

odakle lagano slijedi $a = -5$, $c = 14$, $b = 3$, $d = -7$, tj.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$



Problem možemo riješiti neznatno drukčijim pristupom. Ideja se sastoji u tome da se promoti pomoćna jednadžba

$$\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (2)$$

Pretpostavimo da ona ima rješenje $\mathbf{A}' = \mathbf{I}$. Množeći jednadžbu (2) s \mathbf{A}' (s lijeve strane!) dobivamo

$$\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{A}'\mathbf{B}.$$

Budući da vrijedi $\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{X}) = (\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{I}\mathbf{X} = \mathbf{X}$, odavde slijedi da je traženo rješenje jednadžbe (1) matrica $\mathbf{A}'\mathbf{B}$.

Primjer 2.

Riješi ovim pristupom prijašnju jednadžbu

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

► Pomoćna jednadžba $\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ glasi:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odakle imamo

$$\begin{aligned} 3e + 5f &= 1, & 3g + 5h &= 0, \\ e + 2f &= 0, & g + 2h &= 1. \end{aligned}$$

Odavde je rješenje $\mathbf{Y} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Sad imamo

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}'\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Korist od ovoga pristupa sastoji se u tome da znajući matricu \mathbf{A}' možemo jednostavnije odrediti rješenje jednadžbe (1) za bilo koju matricu \mathbf{B} .

Uvjerite se da matrica \mathbf{A}' zadovoljava i jednadžbu $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanje rješenja $\mathbf{X} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$ u (1) daje

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$$

što sugerira da vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}$. Pokazat ćemo uskoro da je to istina.

3.1.2. Inverzna matrica

Inverzna matrica

Neka je \mathbf{A} kvadratna matrica reda n . Matrica \mathbf{A}' za koju vrijedi

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I} \quad (3)$$

naziva se **inverzna matrica** (kratko: **inverz**) matrice \mathbf{A} .

Inverznu matricu obično označavamo s \mathbf{A}^{-1} .

Za matricu \mathbf{A} kažemo da je **regularna** (ili **invertibilna**) ukoliko postoji njezina inverzna matrica \mathbf{A}^{-1} .

Primjer 3.

Vrijedi

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvjeri se da umnožak matrica slijeva u drugom poretku daje isti rezultat.

Pokažimo da je inverzna matrica (ako postoji!) jednoznačno određena.

Teorem 1.

Neka je \mathbf{A} kvadratna matrica reda n . Postoji najviše jedna matrica \mathbf{A}' za koju vrijedi

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}.$$

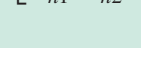
Dokaz. Pretpostavimo da postoje dvije matrice, \mathbf{A}' i \mathbf{A}'' koje zadovoljavaju ovu jednakost. Tad iz $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$, množeći zdesna matricom \mathbf{A}'' dobivamo

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{A}'' = \mathbf{I}\mathbf{A}'' = \mathbf{A}'',$$

S obzirom da po pretpostavci vrijedi

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{A}'' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}'') = \mathbf{A}'\mathbf{I} = \mathbf{A}',$$

odavde slijedi tvrdnja. \blacktriangleleft



Teorem 1 ne govori ništa o *postojanju* matrice \mathbf{A}^{-1} , već samo da, ukoliko postoji, postoji najviše jedna takva matrica. Inverz ne mora uvijek postojati. Pri tome ne mislimo samo na inverz nul matrice, za koju je takva tvrdnja očevidna.

Tako npr. matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nema inverza. Zaista, iz uvjeta $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što je nemoguće.

Učini li vam se da je razlog tome što i ova matrica ima previše nula, pokušajte pronaći inverz matrice $\begin{bmatrix} 21 & 39 \\ 49 & 91 \end{bmatrix}$.

Teorem 2.

(**Umnožak regularnih matrica**) Ako su \mathbf{A} i \mathbf{B} regularne matrice istog reda, tad je i \mathbf{AB} regularna i vrijedi

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (4)$$

Dokaz. Matrica $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ postoji po pretpostavci. Direktna provjera sad daje

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Slično se dobiva i

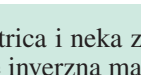
$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

Zato postoji inverz od \mathbf{AB} i on je jednak $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. \blacktriangleleft

Formula (4) vrijedi i za umnožak n regularnih matrica: ako su $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ regularne, tad je i matrica $\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n$ regularna i vrijedi

$$(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}.$$

U to se možemo uvjeriti direktnim množenjem.



U nastavku ćemo odgovoriti na sljedeća pitanja

- Kad je matrica \mathbf{A} regularna?
- Ako je \mathbf{A} regularna, kako se računa njezin inverz?

3.2. Determinante i inverzna matrica

Pokazali smo da regularna matrica ima jedinstven inverz, matricu \mathbf{A}^{-1} za koju vrijedi $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Iz ove relacije, primjenom Binet–Cauchyjevog teorema slijedi

$$\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1})\det\mathbf{A} = \det\mathbf{I} = 1.$$

Odavde zaključujemo da za regularnu matricu mora biti $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Pokažimo odmah da vrijedi i obratna tvrdnja:

Teorem 3.

Matrica \mathbf{A} je regularna onda i samo onda ako vrijedi $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Teorem ćemo dokazati tako da ćemo izvesti eksplicitnu formulu za računanje inverzne matrice.

3.2.1. Računanje inverzne matrice Cramerovim pravilom

Krenimo od definicije determinante

$$\det\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \mathbf{A}_{jk} \quad (5)$$

(razvoj determinante po k -tom stupcu). Ovdje je \mathbf{A}_{jk} algebarski komplement elementa a_{jk} . Što se događa ako u ovakvoj sumi uzmemo algebarske komplemente nekoga drugog stupca? Tad vrijedi

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} \mathbf{A}_{ji} = 0, \quad \text{za } i \neq k. \quad (6)$$

Evo obrazloženja: ima li suma razvoj po i -tom stupcu determinante koja ima dva jednaka stupca: $i+1$ i k -ti; zato je njezina vrijednost jednaka nuli. Obje ove relacije daju sljedeći identitet

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} \mathbf{A}_{ji} = \begin{cases} \det\mathbf{A}, & \text{ako je } i = k, \\ 0, & \text{ako je } i \neq k, \end{cases} \quad (7)$$

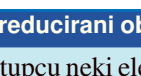
ili, nakon dijeljenja s $\det\mathbf{A} \neq 0$,

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\mathbf{A}_{ji}}{\det\mathbf{A}} \right) a_{jk} = \delta_{ik}. \quad (8)$$

Označimo sa $\tilde{\mathbf{A}}$ matricu (\mathbf{A}_{ij}) . Jednadžba (8) ekvivalentna je s

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I} \quad (9)$$

Matrica $\tilde{\mathbf{A}}^T$ naziva se **adjunkta** matrice \mathbf{A} . Primjetimo da (9) vrijedi čak i ako je $\det\mathbf{A} = 0$.



Što relacija (8) kaže? Označimo

$$a'_{ij} := \frac{\mathbf{A}_{ji}}{\det\mathbf{A}}.$$

i s \mathbf{A}' matricu s elementima a'_{ij} . Tad se (8) svodi na

$$(\mathbf{A}')_{ik} = \sum_{j=1}^n a'_{ij} a_{jk} = \delta_{ik},$$

ili, u matricnom zapisu $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Drugim riječima, matrica \mathbf{A}' je upravo **inverzna matrica** matrice \mathbf{A} .



Teorem 4.

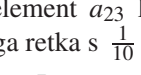
(**Računanje inverzne matrice — Cramerovo pravilo**) Neka je \mathbf{A} kvadratna matrica reda n . Ona je regularna ako i samo ako vrijedi $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Elementi inverzne matrice su

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = a'_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ji}}{\det\mathbf{A}}.$$

Eksplicitni zapis inverzne matrice možemo predočiti na sljedeći način:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}^T. \quad (10)$$



Algoritam za računanje inverzne matrice Cramerovim pravilom

Korak 1. Izračunaj determinantu $\det\mathbf{A}$. Ako je ona različita od nule, nastavi.

Inače, matrica nema inverza.

Korak 2.

Odgodi algebarski komplement svakoga matricnog elementa i zapiši ih u odvojene tablice u skladu s prvim i drugim stupcem.

Korak 3.

Transponiraj dobivenu matricu i podijeli je s determinantom od \mathbf{A} .

Primjer 4.

Inverz matrice reda 2. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Pretpostavimo da je njezina determinanta $\det\mathbf{A} = ad - bc$ različita od nule. Matrica algebarskih komplementa glasi

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Zato je inverzna matrica

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Primjer 5.

Odredi inverznu matricu matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

► Koristit ćemo formulu (10).

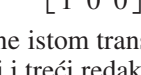
Najprije treba provjeriti postoji li inverzna matrica! Izračunat ćemo $\det\mathbf{A}$ jer nam je ta determinanta iotako potrebna u gornjoj formuli.

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 18 - (-3 - 3 + 16) = 2.$$

Determinanta je različita od nule, stoga postoji inverzna matrica. Za matricu reda 3 najlakšije je u odmah formirati (velikuf) matricu reda 3 čiji su elementi algebarski komplementi. Primijetiti da se predznaci ispod minora mijenjaju na isti način kao i pri računanju determinante razvojem po retku ili stupcu. Također, praktičnije je transponiranje matrice načiniti u drugome koraku:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -9 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$



Dokažimo sad sljedeći rezultat koga smo najavili na početku poglavlja:

Teorem 5.

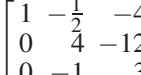
Neka je \mathbf{A} kvadratna matrica i neka za matricu \mathbf{A}' vrijedi $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Tad vrijedi i $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}$, tj. \mathbf{A}' je inverzna matrica.

Dokaz. Po Binet–Cauchyjevom teoremu je $1 = \det\mathbf{I} = \det(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = \det\mathbf{A}'\det\mathbf{A}$. Zato mora biti $\det\mathbf{A} \neq 0$ te prema Teoremu 3 matrica \mathbf{A} regularna i postoji njezin inverz \mathbf{A}^{-1} . Množenjem relacije $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$ zdesna matricom \mathbf{A}^{-1} dobivamo $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$ čime je teorem dokazan. \blacktriangleleft

Napomenimo da ovaj teorem ne vrijedi ukoliko matrica \mathbf{A} nije kvadratna. Evo primjera. Za sljedeće matrice

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

vrijedi $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ali $\mathbf{A}\mathbf{A}' \neq \mathbf{I}$.



Postupak za nalaženje inverzne matrice Cramerovim pravilom izgleda prihvatljiv, zbog eksplicitnog zapisa inverzne matrice i relativno laganog računa. On to i jeste — sve dok su u pitanju matrice reda 2 i reda 3. Za matrice višega reda postupak više nije efikasan i svakako ga treba izbjegavati. Dakako, razlog tome je što direktno računanje determinanti postaje komplicirano. Poželimo li pak minore računati drukčije, recimo primjenom elementarnih transformacija čitav algebranski postupak besmislen jer se prvenstveno ti isti transformacija može izračunati i sama inverzna matrica i to na jednostavniji način. O tome će biti riječ u nastavku.

S obzirom na učestalost računa s malim matricama (geometrija dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog prostora opisuje se takvim matricama), ovaj algoritam ima svoju važnost. Ne treba zaboraviti niti

3.5. Rang i inverz matrice

U dosadašnjemu razmatranju nismo odgovorili na važno pitanje: je li reducirana forma matrice jedinstvena? Odgovor je: da! Izbor elementarnih transformacija nije jednoznačan, no rezultat ne ovisi o izabranoj poretku.

Dokaz ovoga svojstva, korištenjem metoda koje smo do sad usvojili, zahtijevao bi previše opisivanja. Student ga može sam obrazložiti, imajući u vidu gore dokazani teorem: svaka dvije (moždaće različite) završene forme međusobno su ekvivalentne. To znači da se jedna iz druge mogu dobiti elementarnim transformacijama. Međutim, ako se one razlikuju u bilo kojem od svojstava reducirane matrice, tad se može uvidjeti da je nemoguće prevesti jednu matricu u drugu korištenjem elementarnih transformacija.

Prema tome, smatrat ćemo da je reducirana matrica A_R zadane matrice A jedinstvena. Tako ima smisla sljedeća definicija.

Rang matrice
Rang matrice jest broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice. Označavamo ga simbolom $\text{rang}(A)$.

3.5.1. Određivanje ranga matrice

Pojam ranga vrlo je važan pojam koji će nas pratiti u daljnjim izlaganjima. Da bismo utvrdili rang, potrebno je matricu svesti na reducirani oblik. Istina, ako je samo rang u pitanju, dovoljno se je zaustaviti na obliku u kojem prepoznajemo stožerne elemente *ispod* kojih se nalaze nule (a ne nužno i iznad kojih). Međutim, određivanje ranga obično je povezano s drugim zadacima poput nalaženja inverzne matrice ili pak rješavanja linearnih sustava za što nam je potreban upravo reducirani oblik matrice.

Primjer 11.	Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je ranga 3, matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ je ranga 2, a matrica $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ima rang 1.
--------------------	--

3.5.2. Rang i regularne matrice

Iz definicije ranga slijedi da rang (A) nije veći od broja redaka matrice A , rang $(A) \leq m$. Iz definicije reducirane forme slijedi da rang nije veći niti od broja stupaca matrice A , rang $(A) \leq n$, jer je najviše toliko mjesta za mogući raspored stožernih elemenata po stupcima reducirane matrice.

Zbog jednoznačnosti i definicije reducirane forme možemo smatrati da je dokazana sljedeća lema

Lema 8.	Kvadratna matrica A reda n ima rang jednak n ako i samo ako je $A_R = I$.
----------------	--

Lema 9.	Ako je kvadratna matrica A regularna i B ekvivalentna s njom, tad je i matrica B regularna.
----------------	---

Dokaz. Budući da je B po retcima ekvivalentna matrici A , možemo napisati

$$B = E_r \cdots E_1 A.$$

Svaka od elementarnih matrica je regularna pa postoji umnožak $A^{-1} E_1^{-1} \cdots E_r^{-1}$, no to je upravo izraz za inverz matrice B .

Tu tvrdnju možemo izvesti iz samoga oblika matrice B : ona je produkt regularnih matrica pa je i sama regularna matrica.



Na osnovu ovih razmatranja sad možemo izvesti nekoliko dalekosežnih posljedica koje se tiču inverza matrice.

Pretpostavljat ćemo nadalje da je A kvadratna matrica reda n . Za nju ćemo reći da je ona **punoga ranga**, ako je rang $(A) = n$. Tad je, po gornjoj lemi $A_R = I$. To znači da se jedinična matrica može dobiti nizom elementarnih transformacija iz matrice A . Stoga možemo napisati:

$$I = (E_r \cdots E_1) A.$$

Zaključujemo da je A regularna matrica. Štoviše, njezina inverzna matrica jednaka je umnošku elementarnih matrica koje su sudjelovale u transformacijama:

$$A^{-1} = E_r \cdots E_1.$$

Time smo dokazali jedan (za nas važniji) smjer u ovome teoremu

Teorem 10.	Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako ima puni rang.
-------------------	--

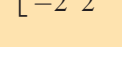
Dokažimo sad i drugi smjer.

Dokaz. Neka je matrica A regularna. Svedimo i nju na reducirani oblik A_R . Dvije su mogućnosti:

- A_R nema niti jedan nul redak.
- A_R ima barem jedan nul redak.

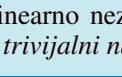
U drugom slučaju, po lemi 9, niti A nije regularna, jer je njezina determinanta jednaka nuli. Stoga, po lemi 9, niti A nije regularna, jer je ekvivalentna matrici A_R . Ovo je kontradikcija s polaznom pretpostavkom u teoremu.

Prema tome, preostaje prvi slučaj. Matrica A_R nema niti jedan nul redak, dakle ima n stožernih elemenata. Zato je njezin rang n , čime je dokaz završen.



Neka je A kvadratna matrica punoga ranga. Iskažimo sad algoritam za nalaženje inverzne matrice. Taj se algoritam zasniva na gore navedenoj formuli: Inverzna matrica jednaka je produktu elementarnih matrica upotrebljenih da se matrica A svede na reduciranu formu $A_R = I$. Međutim, želimo ukazati na to da pri računu inverzne matrice nije potrebno ispisivati eksplicitno matrice E_i i računati njihove umnoške. Dovoljno se je prisjetiti da se elementarne matrice dobivaju iz jedinične matrice *istim transformacijama* koje su učinjene na matrici A . Također, uzastopna primjena dviju transformacija odgovara umnošku elementarnih matrica. Stoga možemo koristiti sljedeći algoritam:

Algoritam za računanje inverzne matrice
<i>Korak 1.</i> Napišimo matricu tipa $n \times 2n$ u kojoj je s desna matrice A napisana jedinična matrica I : $\left[\begin{array}{cccc cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$
<i>Korak 2.</i> Primijenimo elementarne transformacije na matrici A . Sve transformacije pritom vršimo i na desnoj strani proširene matrice. Elementarne transformacije daju niz matrica oblika $[A \mid I] \sim [A_1 \mid E_1] \sim [A_2 \mid E_2 E_1] \sim \dots \sim [A_R \mid E_n \cdots E_1].$ Rezultat je matrica oblika $[A_R \mid B]$. <i>Korak 3.</i> Ako je $A_R = I$, tad je matrica regularna i s njezine desne strane nalazi se inverzna matrica, t.j. $B = A^{-1}$. Ako je pak $A_R \neq I$, matrica nije regularna i ne postoji njoj inverzna matrica.



Zašto ovaj algoritam funkcionira? Pratimo jednu po jednu transformaciju. U početku imamo matricu oblika

$$[A \mid I].$$

Nakon prve transformacije (primijenimo na obje matrice!) imamo

$$[E_1 A \mid E_1 I].$$

Nastavimo s transformacijama. Svaka transformacija odgovara množenju s elementarnom matricom kako lijeve, tako i desne strane. Na koncu postupka ćemo imati, u slučaju regularne matrice

$$[I \mid B] = [A_R \mid B] = [E_r \cdots E_1 A \mid E_r \cdots E_1 I].$$

Vrijedi $B = E_r \cdots E_1$ i $I = E_r \cdots E_1 A$, pa zaključujemo da je upravo $B = A^{-1}$.

Primjer 12.	Određi inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
--------------------	---

► Iz proširene matrice $[A \mid I]$ elementarnim transformacijama nad retcima trebamo dobiti oblik $[I \mid A^{-1}]$:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{pomozićemo} \\ l, r, s \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{dodajmo } l, r \times (-1) \text{ drugom } r, \\ \text{dodajmo } l, r \times (-4) \text{ trećem } r \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\text{pomozićemo } 2, r, s \frac{2}{2} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{dodajmo } 2, r \times \frac{1}{2} \text{ prvom } r, \\ \text{dodajmo } 2, r \times (-2) \text{ trećem } r \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\text{pomozićemo } 3, r, s \frac{1}{10} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{dodajmo } 3, r \times \frac{2}{10} \text{ prvom } r, \\ \text{dodajmo } 2, r \times \frac{7}{10} \text{ drugom } r \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{8}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{array} \right] = [I \mid B].$$

Zaključujemo da je A regularna te da je njezina inverzna matrica iznosi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \\ -1 & -\frac{8}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & -\frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Primjer 13.	Određi inverz matrice $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
--------------------	--

► Postupimo kao u prošlom primjeru.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{pomozićemo} \\ l, r, s \frac{1}{3} \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{dodajmo } l, r \times (-1) \text{ drugom } r, \\ \text{dodajmo } l, r \times 2 \text{ trećem } r \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{pomozićemo} \\ 2, r, s \frac{3}{2} \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{dodajmo } 2, r \times \frac{1}{3} \text{ prvom } r, \\ \text{dodajmo } 2, r \times -\frac{1}{3} \text{ trećem } r \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right].$$

Dobili smo s lijeve strane reducirani oblik A_R matrice A koji nije jednak jediničnoj matrici I . Stoga matrica A nije regularna i nema inverza. \blacktriangleleft

3.6. Linearna nezavisnost vektora i rang matrice

Sa V^n ćemo označavati prostor svih vektor-stupaca duljine n . Taj se prostor samo u načinu zapisivanja elemenata razlikuje od prostora \mathbf{R}^n uređenih n -torki realnih brojeva.

Linearna kombinacija. Prostor razapet vektorima
Neka su $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ bilo koji vektori iz prostora V^n Linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ je vektor oblika $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k,$ pri čemu su $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ po volji odabrani skalari. Skup svih ovakvih linearnih kombinacija nazivamo prostorom razapetih vektora $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ i označavamo s $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad \lambda_i \in \mathbf{R} \}.$

Primjer 14.	Izaberimo u prostoru V^2 vektor $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Prostor razapet s ovim vektorom je $L(\mathbf{a}_1) = \{ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}_1, \lambda \in \mathbf{R} \} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$ Geometrijski, to je pravac kroz ishodište, određen vektorom \mathbf{a}_1 .
--------------------	---

Primjer 15.	Uz vektor $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ uzmimo još $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tad vrijedi $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}.$ Tvrdimo da je ovaj prostor jednak V^2 . To znači da se svaki vektor iz V^2 može napisati u obliku linearne kombinacije vektora \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 . Da se uvjerimo u to, uzet ćemo bilo koji vektor $\mathbf{x} \in V^2$. Jednadžbu $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$ možemo napisati u obliku linearnog sustava $\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = x_1 \\ \lambda_1 = x_2 \end{array}$ Odavde je $\lambda_1 = x_2$, $\lambda_2 = x_1 - x_2$. Dakle, za svaki vektor \mathbf{x} možemo pronaći odgovarajuće koeficijente λ_1 i λ_2 za koje će vrijediti (12).
--------------------	---

Ovaj primjer ukazuje da je pojam linearne kombinacije usko povezan s problemima rješavanja linearnih sustava. Ako se zadani vektor može postaviti na izabrane komponente $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, tad se koeficijenti u takvome rastavu određuju rješavanjem linearnih sustava. O tome će biti više riječi u narednome poglavlju.

Primjer 16.	Izaberimo u prostoru V^3 vektore $\mathbf{a}_1 = [1, 1, 0]^T$, $\mathbf{a}_2 = [1, 0, 0]^T$. Uvjeri se da je $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ prostor vektora u xOy ravini.
--------------------	--

Primjer 17.	Neka je sad $\mathbf{a}_1 = [1, 1, 0]^T$, $\mathbf{a}_2 = [1, 0, 1]^T$. Prostor $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ sadrži sve realne vektore koji leže u ravini određenju s \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 . Izaberimo $\mathbf{a}_3 = [0, 1, -1]^T$. Za ovakav vektor vrijedi pak $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ zato što se \mathbf{a}_3 nalazi u tom prostoru! Zaista, vrijedi $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ i stoga je \mathbf{a}_3 linearna kombinacija prvih dvaju vektora. Izaberimo $\mathbf{a}_4 = [0, 0, 1]^T$. Uvjeri se da je $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4) = V^3$.
--------------------	---

Ovi primjeri nameću potrebu za prolaženjem algoritma pomoću kojeg ćemo moći točno utvrditi kako izgleda prostor razapet izabranim skupom vektora. S obzirom na važnost ovoga pojma, ispišimo i tu definiciju eksplicitno: Vektori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ su linearno zavisni ako postoje skalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ od kojih barem jedan nije jednak nuli takvi da vrijedi

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Kažemo još da linearna kombinacija vektora *iščezava na netrivialan način*.

Primjer 18.	Dva su vektora \mathbf{a} i \mathbf{b} (različiti od nul-vektora) linearno zavisna onda i samo onda ako postoji $\lambda \neq 0$ takav da je $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. To znači da vektor \mathbf{b} leži u prostoru razapetom s vektorom \mathbf{a} , t.j., on je kolinearan s vektorom \mathbf{a} . U isto vrijeme i vektor \mathbf{a} leži u prostoru razapetom s \mathbf{b} .
--------------------	---

Primjer 19.	Vektori $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ linearno su nezavisni. Uvjeri se u to! Provjeri također (po definiciji!) da je trojka $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ iz primjera 17 linearno zavisna.
--------------------	--

Primjer 20.	Ovaj je primjer jednostavan, no važan. Izdvojimo sljedeće vektore iz prostora V^n : $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}.$ Oni su linearno nezavisni. Zaista, linearna kombinacija ovih vektora iznosi $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ i ona je jednaka nuli ako i samo ako je $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Primijeti da se svaki vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ može prikazati u obliku linearne kombinacije vektora $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Ta linearna kombinacija glasi $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$
--------------------	---

Primjer 21.	Neka je zadana reducirana forma neke matrice, recimo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Primijeti da su njezini ne-nul retci linearno nezavisni vektori. Zaista, linearna kombinacija tih vektora glasi $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \end{bmatrix}$ i ako je ona jednaka nuli, tad iz prvog, drugog i četvrtog retka zaključujemo da svi skalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ moraju biti jednaki nuli. Primijetimo nadalje da se svi <i>stupci</i> matrice mogu prikazati u obliku linearne kombinacije prvoga, drugoga i četvrtoga stupca (jer ti nalikuju vektorima \mathbf{e}_i iz prošloga primjera).
--------------------	---

Ovaj primjer je tipičan za svaku matricu. Sličan zaključak očevidno vrijedi za reducirani oblik bilo koje matrice.

Cilj nam je s najmanje povezati pojmove linearne zavisnosti redaka odnosno stupaca matrice s postojom njezinoga ranga.

Za zadane vektore $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ uvijek je jednoznačno određen najveći broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$. Taj broj nazivamo **dimenzijom** prostora $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Teorem 11.	Elementarnim transformacijama ne mijenja se broj linearno nezavisnih redaka matrice.
-------------------	--

Dokaz. Prikažimo regularna matricu A kao produkt elementarnih. Iz $A = E_r \cdots E_1$ i Teorema 11 slijedi tvrdnja jer se množenje s matricom A svodi na elementarne transformacije matrice B :

$$AB = E_r \cdots E_1 B.$$

Primjer 22.	Jesu li sljedeći vektori linearno nezavisni? A. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$; B. $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
--------------------	--

► **A.** Računamo rang matrice kojoj su zadani vektori retci: