7. Vektorski prostori

Sadržaj poglavlja

7.1. Baza i dimenzija vektorskoga prostora

7.1.1. Vektorski prostor

S pojmom vektorskoga prostora[1] već smo se susreli, govorili smo o vektor-stupcima prostora $\mathbf{R}^n$, o dvodimenzionalnom, trodimenzionalnom prostoru vektora itd.

Vektorski prostor

Neprazni skup X na kojemu su definirane operacije $+ : X \times X \to X$ (**zbrajanje vektora**) i $\cdot : \mathbf{R} \times X \to X$ (**množenje skalara i vektora**) naziva se **vektorski prostor** ako vrijede sljedeća svojstva:

VP_1) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X)\quad \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$ (komutativnost).

VP_2) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X)\quad \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$ (asocijativnost).

VP_3) $(\exists \mathbf{0} \in X)(\forall \mathbf{x} \in X)\quad \mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (postojanje nul-vektora).

VP_4) $(\forall \mathbf{x} \in X)(\exists \mathbf{x}' \in X)\quad \mathbf{x}+\mathbf{x}' = \mathbf{x}'+\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (postojanje suprotnoga vektora).

VP_5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x} \in X)\quad \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (kompatibilnost množenja).

VP_6) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X)\quad \alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ (distributivnost množenja prema zbrajanju u X).

VP_7) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x} \in X)\quad (\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ (distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}$).

VP_8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (netrivijalnost množenja).

Govorimo preciznije da je vektorski prostor uređena trojka $(X, +, \cdot)$. Kažemo još da je to vektorski prostor *nad poljem* realnih brojeva $\mathbf{R}$, jer se u definiciji množenja sa skalarom koriste realni brojevi. Umjesto polja $\mathbf{R}$ može se koristiti i drugo polje skalara, na primjer polje kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Tad bismo govorili o vektorskom prostoru nad poljem $\mathbf{C}$ ili naprosto o kompleksnom vektorskom prostoru.

Budući da za svaki vektor $\mathbf{x}$ vrijedi
$$\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x} = (1-1)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
vidimo da je $(-1)\mathbf{x}$ suprotan vektor vektora $\mathbf{x}$. Zato ćemo umjesto oznake $\mathbf{x}'$ uvijek pisati $-\mathbf{x}$.

Neke smo primjere vektorskih prostora promatrali u prethodnim poglavljima.

U prvom smo poglavlju pokazali da skup $\mathscr{M}_{mn}$ svih matrica tipa $m \times n$ čini vektorski prostor, uz operacije matričnoga zbrajanja i množenja skalara s matricom.

Tako i vektor-stupci, odnosno vektor retci duljine n čine vektorski prostor, jer su to matrice tipa $n \times 1$ odnosno $1 \times n$.

Prostori V^1, V^2, V^3 vektora na pravcu, ravnini i u prostoru E^3, uz standardno definirane operacije zbrajanja i množenja sa skalarom također su vektorski prostori. Nazivamo ih klasičnim vektorskim prostorima.

Vektorski prostor mogu činiti i funkcije. Neka je X skup svih funkcija definiranih na intervalu $[a, b]$ s vrijednostima u $\mathbf{R}$. Operacije definiramo na način
$$(x+y)(t) := x(t)+y(t),$$
$$(\alpha x)(t) := \alpha x(t).$$

Svojstva $VP_1 - VP_8$ vrijede jer se svode na analogna svojstva za skup realnih brojeva. Za detalje pogledaj Zadatak 1.

7.1.2. Vektorski potprostor

Mnogi vektorski prostori su u naravi podskupovi drugih. S tim je u vezi sljedeća definicija.

Potprostori vektorskih prostora

Neka je $(X, +, \cdot)$ vektorski prostor. Podskup $W \subseteq X$ čini **vektorski potprostor** prostora X ako je on vektorski prostor uz iste operacije koje su definirane na prostoru X.

Je li neki skup vektorski potprostor, možemo provjeriti na sljedeći jednostavni način:

Teorem 1. Neka je X vektorski prostor. $W \subseteq X$ je potprostor ako i samo ako vrijedi

(1) $\quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W)(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})\quad \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y} \in W.$

Dokaz. Činjenica da je W podskup vektorskoga prostora dozvoljava nam da ne provjeravamo posebno vrijede li svojstva VP_1, VP_2, VP_5, VP_6, VP_7 i VP_8 u prostoru W: ona su ispunjena *jer vrijede u većem prostoru* X. Potrebno je samo provjeriti da li nul-element iz X leži u W te da li suprotni element svakoga elementa iz W i sam leži u W.

Ako je $\mathbf{x} \in W$, tad po pretpostavci u W leži i kombinacija $1\cdot\mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Također, čim je $\mathbf{x} \in W$, u tom prostoru leži i kombinacija $0\cdot\mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Time smo pokazali da je W vektorski prostor.

Obratna tvrdnja je očevidna, ako je W vektorski prostor, on mora sadržavati linearni spoj svaka svoja dva elementa.

Uvjet (1) iz Teorema 1 može se zamijeniti s ekvivalentnim:

Vektorski potprostor

W je potprostor vektorskog prostora X ako i samo ako vrijedi

(1′) $\quad (\forall x, y \in W)(\forall \alpha \in \mathbf{R})\ \alpha\mathbf{x}+\mathbf{y} \in W$

ili, ako vrijedi

(2a) $\quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W)\ \mathbf{x}+\mathbf{y} \in W,$

(2b) $\quad (\forall \mathbf{x} \in W)(\forall \alpha \in \mathbf{R})\ \alpha\mathbf{x} \in W.$

Ove tvrdnje čitatelj može lako sam provjeriti.

7.1.3. Potprostor razapet skupom vektora

Neka je X vektorski prostor te $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ bilo koji vektori iz X. Tvrdimo da je skup
$$W = \{\mathbf{a} \in X : \mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n,\ \lambda_i \in \mathbf{R}\}$$
vektorski potprostor. Da se uvjerimo u to, uzmimo dva elementa $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ovoga skupa:
$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n, \qquad \mathbf{b} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \mu_n\mathbf{a}_n.$$
Tad je njihova linearna kombinacija oblika
$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b} = (\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)\mathbf{a}_1 + \ldots + (\alpha\lambda_n+\beta\mu_n)\mathbf{a}_n$$
i ona ponovo pripada skupu W. Stoga je W vektorski potprostor od X.

Potprostor razapet skupom vektora

Neka su $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ elementi vektorskog prostora X. Skup svih linearnih kombinacija tih vektora
$$W = \{\mathbf{a} \in X : \mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n,\ \lambda_i \in \mathbf{R}\}$$
naziva se **potprostor generiran (razapet) vektorima** $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ i označava s $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Primjer 1. Neka je X prostor svih funkcija definiranih na $\mathbf{R}$. Izdvojimo sljedeće funkcije
$$\mathbf{x}_0(t) = 1,$$
$$\mathbf{x}_1(t) = t,$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{x}_n(t) = t^n.$$
Tad je $L(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathscr{P}_n$, prostor svih polinoma stupnja $\leqslant n$.

Primjer 2. Neka je $\mathbf{a} \in V^3$ zadani vektor. $L(\mathbf{a})$ je vektorski potprostor koji čine svi vektori kolinearni s $\mathbf{a}$. Ako $\mathbf{b}$ nije takav, tad $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ predstavlja skup svih vektora u ravnini razapetoj s $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Primjer 3. Neka je $\mathbf{w}_1 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{i}-\mathbf{k}$. Odredi geometrijsku interpretaciju skupa $L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \subset \mathbf{R}^3$.

► Skupu pripadaju svi vektori oblika
$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$
Uvrštavanjem dobivamo
$$\mathbf{w} = (\alpha+2\beta)\mathbf{i} + 2\alpha\mathbf{j} + (\alpha-\beta)\mathbf{k}.$$
Stavimo $\mathbf{w} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Onda je
$$x = \alpha+2\beta,$$
$$y = 2\alpha,$$
$$z = \alpha-\beta$$
Eliminacijom parametara α i β dobivamo
$$2x-3y+4z = 0.$$
To je jednadžba ravnine koja prolazi ishodištem. Potprostor $L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ je skup svih radijvektora točaka te ravnine. ◄

7.1.4. Baza i dimenzija prostora

Pojam dimenzije vektorskoga prostora intuitivno je jasan. Mi smo navikli govoriti o dvo ili tro-dimenzionalnom prostoru. Primjeri takvih prostora su $\mathbf{R}^2$, V^2, $\mathbf{R}^3$, V^3 itd, broj u oznaci prostora upravo označava njegovu dimenziju. Općenita definicija dimenzije je kako slijedi.

Dimenzija vektorskoga prostora

Dimenzija prostora maksimalan je broj linearno-nezavisnih vektora u tome prostoru.

Svi se prostori u prethodnim primjerima mogu podijeliti u dvije bitno različite skupine. Prvu čine **konačno-dimenzionalni** a drugu **beskonačno-dimenzionalni** prostori.

Tako na primjer, prostor $\mathscr{P}$ svih polinoma zasigurno je beskonačno-dimenzionalan jer su za svaki n vektori $1, t, t^2, \dots, t^n$ linearno nezavisni: njihov linearni spoj jednak je nul-funkciji ako za svaki t vrijedi
$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n = 0$$
što je moguće samo ako su svi koeficijenti jednaki nuli.

Jednako tako, beskonačno-dimenzionalni su prostor neprekinutih funkcija (jer sadrži sve polinome!), prostor *svih* funkcija itd.

Područje matematike koje izučava beskonačno-dimenzionalne vektorske prostore naziva se *funkcionalna analiza*. Linearna algebra bavi se konačno-dimenzionalnim prostorima. *Stoga će svi vektorski prostori u nastavku biti konačno-dimenzionalni.*

Kod složenijih primjera dimenziju prostora je nešto teže utvrditi. Posebice, pri određivanju dimenzije raznih potprostora moramo koristiti aparat linearne algebre.

Prije no što nastavimo s navođenjem primjera, korisno je definirati još jedan pojam koji se prirodno nastavlja na ovo razmatranje. To je pojam *baze* vektorskoga prostora.

Baza vektorskoga prostora. Neka je X vektorski prostor dimenzije n. To znači da u njemu možemo pronaći skup $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linearno nezavisnih vektora, takav da — dodamo li mu bilo koji novi element $\mathbf{x}$ — novodobiveni skup više neće biti linearno nezavisan. Stoga postoje skalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda$ od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da vrijedi
$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n + \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$
Pri tom je sigurno $\lambda \neq 0$, inače bi iščezavala linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Dijeljenjem s brojem $-\lambda$ vektor $\mathbf{x}$ prikazujemo u obliku spoja vektora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$:
$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\mathbf{v}_n.$$

Prema tome, svaki se vektor prostora može napisati u obliku linearne kombinacije $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Ova dva svojstva definiraju bazu prostora.

Baza vektorskog prostora

Neka je X vektorski prostor. **Baza** u X je svaki skup $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ koji ima sljedeća dva svojstva

(B_1) vektori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ su linearno nezavisni, i

(B_2) svaki drugi vektor $\mathbf{x} \in X$ može se napisati u obliku linearne kombinacije vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

Skup svih linearnih kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ označili smo s $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Svojstvo ($B_2$) kaže da za bazu vrijedi
$$X = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n).$$
Kažemo još da vektori baze *razapinju čitav prostor*.

Teorem 2. Prikaz svakoga vektora u bazi vektorskog prostora je jedinstven.

Dokaz. Zaista, iz pretpostavke da $\mathbf{x}$ ima dva različita prikaza,
$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_n\mathbf{v}_n$$
slijedi
$$(\lambda_1-\mu_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_n-\mu_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$
a odavde, zbog linearne nezavisnosti, svi koeficijenti moraju biti jednaki nuli, te je $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$.

7.1.5. Svojstva baze vektorskog prostora

U prethodnom opisu promatrali smo bazu prostora kod koje se broj vektora podudara s dimenzijom prostora. Tu smo bazu dobili na temelju definicije dimenzije: ako je prostor dimenzije n, u njemu postoji baza koja sadrži točno n vektora. No, različitih baza ima beskonačno mnogo i nije očito da će svaka imati isti broj elemenata. Tu tvrdnju moramo dokazati.

Teorem 3. Svake dvije baze u vektorskom prostoru X imaju isti broj elemenata. Taj se broj podudara s dimenzijom prostora.

Dokaz. Neka je n dimenzija prostora. Broj vektora u bazi mora biti manji ili jednak n jer su njezini elementi linearno nezavisni vektori. Pretpostavimo da postoji baza $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ kod koje je $m < n$.

Neka su $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ linearno nezavisni vektori toga prostora. (Takav skup postoji jer je n dimenzija prostora.) Budući da je $X = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, postoje brojevi (a_{ij}) takvi da vrijedi
$$\mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{m1}\mathbf{v}_m,$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{mn}\mathbf{v}_m.$$
Promotrimo sad linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$. Ona ima oblik
$$x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_n\mathbf{w}_n = (x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n})\mathbf{v}_1 + \ldots + (x_1a_{m1} + \ldots + x_na_{mn})\mathbf{v}_m$$
(pomnožimo gornje jednakosti redom s $x_1, \dots x_n$ i zbrojimo ih). Može li ova kombinacija iščezavati na netrivijalan način? Promotrimo sustav jednadžbi
$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0.$$
Ovo je homogeni sustav s m jednadžbi i n nepoznanica. Vrijedi $m < n$ pa takav sustav uvijek ima netrivijalno rješenje $(x_1, \dots, x_n)$. To znači da postoji linearna kombinacija
$$x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_n\mathbf{w}_n$$
koja iščezava na netrivijalan način, pa su $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ linearno zavisni, protivno pretpostavci.

Time smo dobili proturječje. Pretpostavka $m < n$ nije stoga istinita i mora biti $m = n$.

Iskažimo odmah i jednu važnu posljedicu ovoga teorema.

Teorem 4. Neka je X vektorski prostor dimenzije n. Tad svaki skup $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ od n linearno nezavisnih vektora čini bazu.

Dokaz. Prvo svojstvo (B_1) je ispunjeno po pretpostavci. Da dokažemo drugo, dovoljno je primijetiti da je za svaki vektor $\mathbf{x}$ skup $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{x}\}$ linearno zavisan, inače bi dimenzija prostora bila veća od n. No, odavde slijedi da se $\mathbf{x}$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, te oni razapinju cijeli prostor.

Ovaj teorem je izrazito koristan, jer za većinu prostora s kojima baratamo mi unaprijed znamo kolika im je dimenzija (recimo stoga što smo jednom pronašli neku bazu u njima). Želimo li odrediti neku drugu bazu, dovoljno je izabrati određen broj linearno nezavisnih vektora; nismo dužni provjeravati razapinje li taj skup čitav prostor.

Primjer 4. U prostoru $\mathscr{P}_n$ polinoma stupnja $\leqslant n$ bazu čine vektori
$$\mathbf{e}_0(t) = 1,$$
$$\mathbf{e}_1(t) = t,$$
$$\mathbf{e}_2(t) = t^2,$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e}_n(t) = t^n,$$
stoga je njegova dimenzija $n+1$.

Promotrimo sljedeći skup:
$$\mathbf{e}'_0(t) = 1,$$
$$\mathbf{e}'_1(t) = t-1,$$
$$\mathbf{e}'_2(t) = (t-1)^2,$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e}'_n(t) = (t-1)^n.$$
Tvrdimo da i ovaj skup čini bazu. Broj elemenata u njemu je $n+1$. Oni su linearno nezavisni zato što svaki polinom ima veći stupanj od prethodnih i ne može se prikazati kao njihova linearna kombinacija. Stoga, po Teoremu 4, ovaj skup čini bazu.

Zaključujemo da se svaki polinom $P(t)$ može napisati u obliku
$$P(t) = \lambda_0 + \lambda_1(t-1) + \ldots + \lambda_n(t-1)^n.$$

— ◆ —

Interesantno je da vrijedi i obrat Teorema 4. Ako ne želimo provjeravati linearnu nezavisnost, tad možemo iskoristiti ovaj teorem:

Teorem 5. Neka je X vektorski prostor dimenzije n. Ako za vektore $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vrijedi $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = X$, tad oni čine bazu.

Dokaz. Moramo dokazati da su ovakvi vektori linearno nezavisni. Pretpostavimo suprotno. Izbacimo iz poredanog skupa $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sve vektore koji su linearno zavisni s prethodnima. Dobit ćemo skup koji će sadržavati $m < n$ vektora, biti će linearno nezavisan i *još uvijek* će razapinjati isti prostor. Takav skup je baza prostora, s manjim brojem elemenata od dimenzije prostora — proturječje. Zato su početni vektori linearno nezavisni.

— ◆ —

Zaključke Teorema 5 i Teorema 5 možemo sažeti u sljedeću tvrdnju.

Dimenzija prostora, baza i linearna nezavisnost

Skup $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ je baza u prostoru X dimenzije n ako vrijede bilo koja dva od sljedeća tri uvjeta:

(1) $k = n$,

(2) vektori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ su linearno nezavisni,

(3) vektori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ razapinju prostor X.

Treće je svojstvo u tom slučaju posljedica odabrana dva.

7.1.6. Nadopunjavanje do baze

Sljedeći teorem je izuzetno koristan u konstrukciji baze vektorskog prostora.

Teorem 6. Neka je $v_1, \dots, v_k$ bilo koji skup linearno nezavisnih vektora prostora X dimenzije n. Onda se taj skup može nadopuniti do baze — postoje vektori $v_{k+1}, \dots, v_n$ takvi da dodani početnom skupu čine bazu.

► Dokažimo ovaj teorem. Možemo pretpostaviti da je $k < n$, inače nemamo što dokazivati. Prema Teoremu 3 skup $\{v_1, \dots, v_k\}$ ne čini bazu jer mu je broj elemenata manji od dimenzije prostora. Zato taj skup ne razapinje prostor X. To znači da postoji element $v_{k+1} \in X$ koji se ne može prikazati kao linearna kombinacija prethodno odabranih elemenata $v_1, \dots, v_k$, pa je skup $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ linearno nezavisan.

Ako je $k+1 = n$, završili smo postupak. Ako nije, ponavljamo ga onoliko puta dok broj elemenata u dobivenom skupu ne postane jednak n. Onda će taj skup činiti bazu, po Teoremu 4. ◄

Dokaz ovog teorema je egzistencijalan, a ne konstruktivan. Naime, znamo da uz navedene pretpostavke *postoji* element v_{k+1}, ali ne znamo kako bismo ga u konkretnom slučaju pronašli. Zato se u konstrukciji baze koristi drukčiji pristup. Umjesto dodavanja jednog po jednog elementa, lakše je dodati odmah dovoljan broj elemenata i nakon toga izbaciti višak. Taj postupak izgleda ovako:

Nadopunjavanje linearno nezavisnog skupa vektora do baze

1. Krenemo od zadanog skupa $\{v_1, \dots, v_k\}$ linearno nezavisnih vektora.
2. Tom skupu dodamo *bilo koju* bazu $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ prostora X.
3. U skupu $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, krenuvši od elementa $\mathbf{e}_1$, izbacujemo redom sve one za koje se pokaže da su zavisni o prethodnim elementima.
4. Postupak prekidamo kad dobijemo n linearno nezavisnih vektora, izostavljajući ostatak iz skupa.

Naime, ovako uvećan skup sigurno razapinje čitav prostor:
$$L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = X$$
jer to svojstvo ima njegov podskup $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Ako iz tog skupa izbacimo linearno zavisne vektore koji su višak, na koncu postupka dobit ćemo bazu.

Primjer 5. Neka je $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0, 2)$. Nadopunimo ovaj skup do baze prostora $\mathbf{R}^4$.

► Dodajmo skupu još i vektore kanonske baze:
$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1).$$
Provjerite da je $\mathbf{e}_1$ linearno nezavisan s $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Zato njega dodajemo skupu. Vektor $\mathbf{e}_2$ je zavisan s prethodnima:
$$\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$
i njega izbacujemo s popisa. Lako je vidjeti da je $\mathbf{e}_3$ nezavisan od prethodnih, jer svi prethodni imaju nulu na mjestu treće koordinate. Time smo dobili četiri linearno nezavisna vektora pa odbacujemo $\mathbf{e}_4$ i završavamo postupak. Bazu čine vektori
$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 2), \quad \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0). \ ◄$$

7.2. Promjena baze

7.2.1. Matrica prijelaza iz jedne baze u drugu

Neka je X bilo koji vektorski prostor dimenzije n te $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ dvije po volji odabrane baze u tome prostoru. Prvu ćemo zvati *stara*, a drugu *nova* baza.

Vektor $\mathbf{x}$ ima u te dvije baze prikaz
$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n.$$

U ovakvoj situaciji prirodno se nameće pitanje: na koji su način povezane komponente vektora u staroj i novoj bazi? Da bismo odgovorili na nj, potrebno je pronaći vezu između vektora stare i nove baze. Ta se veza može izraziti na dva načina. S obzirom da su obje baze ravnopravne, možemo prikazati vektore nove baze kao spoj vektora stare i obratno. Odaberimo prvu mogućnost.

Matrica prijelaza iz stare baze u novu.

Vektore nove baze prikažemo preko vektora stare baze:
$$\mathbf{e}'_1 = t_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n,$$
$$\vdots \tag{1}$$
$$\mathbf{e}'_n = t_{1n}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n.$$
Načinimo matricu
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$
Njeni stupci predstavljaju komponente vektora nove baze prikazanih pomoću vektora stare baze. Relaciju (6) možemo simbolički zapisivati na način
$$(\mathbf{e}') = \mathbf{T}^\top(\mathbf{e}).$$
Još je pogodnije transponirati ovu relaciju: $(\mathbf{e}')^\top = (\mathbf{e})^\top\mathbf{T}$, što zapisujemo pregledno na način
$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

— ◆ —

Pređimo sad na izračun komponenti vektora u ove dvije baze.
$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x'_j\mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^n x'_j\Bigl(\sum_{i=1}^n t_{ij}\mathbf{e}_i\Bigr) = \sum_{i=1}^n\Bigl(\sum_{j=1}^n t_{ij}x'_j\Bigr)\mathbf{e}_i.$$
Odavde zaključujemo da vrijedi
$$x_i = \sum_{j=1}^n t_{ij}x'_j \tag{3}$$
ili, u matričnom zapisu
$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'. \tag{4}$$
Drugim riječima, tražene komponente $x'_1, \dots, x'_n$ rješenje su linearnoga sustava
$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$
Matrica sustava je regularna jer je punoga ranga (stupci su linearno nezavisni), stoga ovaj sustav uvijek ima (jedinstveno) rješenje.

Komponente vektora u novoj bazi

Neka je $\mathbf{x}$ vektor zapisan preko stare baze. Ako je $T = (t_{ij})$ matrica prijelaza iz stare baze u novu:
$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$
onda komponente vektora u novoj bazi dobivamo rješavanjem sustava
$$\mathbf{T}\mathbf{x}' = \mathbf{x},$$
odnosno, vrijedi
$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}.$$

Primjer 6. Polinomi
$$\mathbf{v}_0(t) = 1,$$
$$\mathbf{v}_1(t) = t,$$
$$\mathbf{v}_2(t) = t(t+1),$$
$$\mathbf{v}_3(t) = t(t+1)(t+2)$$
čine bazu u prostoru $\mathscr{P}_3$. Prikaži u toj bazi polinom
$$\mathbf{x}(t) = t^3+t^2+4t-3.$$

► Računanje ćemo provoditi pomoću standardne baze koju čine polinomi
$$\mathbf{e}_0(t) = 1, \quad \mathbf{e}_1(t) = t, \quad \mathbf{e}_2(t) = t^2, \quad \mathbf{e}_3(t) = t^3.$$
Prikaz vektora $\mathbf{x}$ u toj bazi je
$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_0$$
a veza stare i nove baze glasi
$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_0,$$
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1.$$
Matrica prijelaza je
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
i da bismo odredili koordinate x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 u novoj bazi moramo riješiti sustav
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
U tu svrhu preostaje u Gaussovom postupku izvršiti samo obrnuti hod:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$
Dakle, $\mathbf{x}' = [-3\ \ 4\ \ {-2}\ \ 1]^\top$ pa je odgovor:
$$\mathbf{x}(t) = t(t+1)(t+2) - 2t(t+1) + 4t - 3. \ ◄$$

Matrica prijelaza iz nove baze u staru.

Dosad smo radili s matricom prijelaza T iz stare baze u novu i izveli temeljne veze:
$$(\mathbf{e}') = \mathbf{T}^\top(\mathbf{e}),$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'.$$
Stara i nova baza su ravnopravne, pa ove jednadžbe pokazuju što bi se dogodilo da smo se odlučili za prijelaz u drugom smjeru, iz nove baze u staru. Jednadžbe onda glase
$$(\mathbf{e}) = (\mathbf{T}^{-1})^\top(\mathbf{e}'),$$
$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}.$$
Označimo ovu inverznu matricu sa $\mathbf{S}$, dakle, $\mathbf{S} = T^{-1}$. Određivanje nepoznatih koordinata vektora $\mathbf{x}'$ svodi se sad na računanje inverzne matrice i na množenje tom matricom, umjesto starog postupka određivanja same matrice $\mathbf{T}$ i rješavanja linearnog sustava. Međutim, postoje situacije kad je inverz matrice $\mathbf{T}$ jednako lako (ili teško) odrediti kao i samu matricu, pa je onda ovaj obrnuti postupak prikladniji.

Komponente vektora u novoj bazi

Vektore stare baze prikažemo preko vektora nove baze:
$$\mathbf{e}_1 = s_{11}\mathbf{e}'_1 + \ldots + s_{n1}\mathbf{e}'_n,$$
$$\vdots \tag{6}$$
$$\mathbf{e}_n = s_{1n}\mathbf{e}'_1 + \ldots + s_{nn}\mathbf{e}'_n.$$
Načinimo matricu
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$
Onda je
$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x}.$$

Primjer 7. Polinomi
$$\mathbf{v}_0(t) = 1,$$
$$\mathbf{v}_1(t) = t-1,$$
$$\mathbf{v}_2(t) = (t-1)^2,$$
$$\mathbf{v}_3(t) = (t-1)^3$$
čine bazu u prostoru $\mathscr{P}_3$. Prikaži polinome $p(t) = t^3-4t^2+8t-3$ i $q(t) = at^3+bt^2+ct+d$ u toj bazi.

► Sad ćemo vektore kanonske baze
$$\mathbf{e}_0(t) = 1, \quad \mathbf{e}_1(t) = t, \quad \mathbf{e}_2(t) = t^2, \quad \mathbf{e}_3(t) = t^3$$
prikazati pomoću nove, jer je taj postupak jednako složen kao i obratan:

$\mathbf{e}_0(t) = 1 \qquad\qquad \mathbf{e}_0 = \mathbf{v}_0,$

$\mathbf{e}_1(t) = t = 1+(t-1) \qquad\qquad \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1,$

$\mathbf{e}_2(t) = t^2 = [1+(t-1)]^2 \qquad\qquad \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_0+2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,$

$\mathbf{e}_3(t) = t^3 = [1+(t-1)]^3 \qquad\qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_0+3\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3.$

Dakle, matrica prijelaza iz nove baze u staru je
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Sada ovu matricu množimo sa $[-3\ \ 8\ \ {-4}\ \ 1]$ (koeficijenti polinoma u staroj bazi). Imamo
$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}_0 + 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$
Slično je i
$$q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+c+b+a \\ c+2b+3a \\ b+3a \\ a \end{bmatrix}$$
$$= (d+c+b+a)\mathbf{v}_0 + (c+2b+3a)\mathbf{v}_1 + (b+3a)\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3. \ ◄$$

Primjetite da smo ovim postupkom funkciju $p(t)$ razvili u Taylorov red oko točke 1. Izvedite taj rezultat pomoću diferencijalnog računa.

7.2.2. Baze u prostoru $\mathbf{R}^n$

O elementima prostora $\mathbf{R}^n$ možemo govoriti kao o vektor-stupcima, ili pak o vektor-retcima: to je samo stvar zapisivanja vektora. Mi ćemo ovdje zapisivati elemente prostora kao *uređene n-torke*. Operacije su definirane na način:
$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n),$$
$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Kanonska baza prostora $\mathbf{R}^n$

Kanonsku bazu u prostoru $\mathbf{R}^n$ čine vektori:
$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$
$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Pokažimo da ovaj skup zaista čini bazu prostora. Linearna kombinacija tih vektora ima oblik:
$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \lambda_1(1, \dots, 0) + \ldots + \lambda_n(0, \dots, 1) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
i ona iščezava onda i samo onda kad su svi skalari λ_i jednaki nuli. Nadalje, bilo koji element $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ može se napisati u obliku
$$\mathbf{x} = (x_1 \dots, x_n) = x_1(1, \dots, 0) + \ldots + x_n(0, \dots, 1) = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots x_n\mathbf{e}_n$$
te je on spoj vektora $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Time smo utvrdili da je dimenzija prostora $\mathbf{R}^n$ jednaka n.

— ◆ —

Baza u svakom vektorskom prostoru ima beskonačno mnogo, sve su one među sobom ravnopravne. Mi smo slobodni birati bazu po vlastitome izboru, ovisno o problemu koji rješavamo. U prostoru $\mathbf{R}^n$ je za većinu problema najpogodnija kanonska baza, jer su koeficijenti vektora u toj bazi jednaki njegovim koordinatama. Međutim, u nekim je problemima nužno preći i na neku drugu bazu. Općeniti postupak prijelaza opisali smo u prethodnoj točki. No, ako je jedna od bazi kanonska, tad se taj postupak pojednostavnjuje.

Neka je dakle $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ kanonska, a $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ neka druga baza. Vektor $\mathbf{x}$ ima u te dvije baze prikaz
$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n.$$

Olakšanje prema općenitoj situaciji sastoji se u tome što je prikaz vektora nove baze preko vektora stare iznimno jednostavan: koordinate vektora jednake su komponentama u tome prikazu: Neka je
$$\mathbf{e}'_1 = (t_{11}, \dots, t_{n1}) = t_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n,$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e}'_n = (t_{1n}, \dots, t_{nn}) = t_{1n}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n,$$
zapis vektora druge baze. Tad imamo sljedeću vezu:
$$\mathbf{T}\mathbf{x}' = \mathbf{x}. \tag{7}$$
odnosno
$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}. \tag{8}$$

Primjer 8. Vektori $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ čine bazu u prostoru V^2. Kako glase koordinate točke $T(2, 3)$ kartezijevoga sustava u sustavu $(O; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$?

Sl. 7.1.

► Pitanje je ekvivalentno ovome: Kako glasi rastav radij-vektora točke T po bazi $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$? Po formuli (7), koordinate dobivamo rješavajući sustav
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Odavde:
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \ ◄$$

[1] engl. *vector space*, njem. *Vektorraum*, franc. *l'espace vectoriel*, rus. векторное пространство.