Operacijska istraživanja

1. predavanje: Primjene simpleksne metode

Sažetak predavanja

- Posebni slučajevi simpleksne metode

Rezime simpleksne metode

- efikasna za rješavanje linearnih programa (s milijunima varijabli)
- jedan od rijetkih slučajeva optimizacije u kojem se može pronaći globalni optimum iterativnim lokalnim poboljšanjima
- može biti polazišna točka za rješavanje nelinearnih problema
- moguće je da ne može naći optimum, no to se rijetko događa
- **Fundamentalni teorem**: Svaki LP je izvediv (engl. feasible), neograničen (engl. unbounded) ili neizvediv (engl. infeasible).
  – Ako je LP izvediv, onda ima bazično izvedivo rješenje.
  – Ako LP ima optimalno rješenje, ono je bazično izvedivo.

Rezime simpleksne metode

- Kod rješavanja se koristi problem u standardnoj formi

$$\max c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax=b$$

$$x \geq 0$$

  - U operacijskim istraživanjima : max
  - U matematičkoj optimizaciji: min
- Ostali LP problemi se mogu transformirati u standarnu formu
- I neki naizgled nelinearni problemi se mogu transformirati u LP!

Transformacije

- >=, <= ograničenja
- Minimizacija?
- Ne-nenegativne varijable (tj. nisu ≥0)
- Apsolutne vrijednosti
- Minimax/maximin
- Ograničenja omjera

>= i <= ograničenja

- Transformacije potrebne za standardnu formu
- $a_j^T x \leq b_j$ (j-to ograničenje)
  - Dopunska varijabla se **pribraja**
  - $a_j^T x + y = b_j,\ y \geq 0$
- $a_j^T x \geq b_j$ (j-to ograničenje)
  - Dopunska varijabla se **oduzima**
  - $a_j^T x - y = b_j,\ y \geq 0$

Minimizacija

- min z $\Leftrightarrow$ max -z

$$\begin{array}{ll} \textbf{min.} & z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{ako je:} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Rješenje problema je točka (x_1, x_2) u području izvedivosti u kojoj je funkcija **z** minimalna.
- Ekvivalentno, optimalno rješenje problema je točka za koju je funkcija **–z** maksimalna, tj. rješavamo početni problem rješavajući sljedeće:

$$\begin{array}{ll} \textbf{max.} & -z = -2x_1 + 3x_2 \\ \text{ako je:} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ne-nenegativne varijable

- Varijable koje nisu ≥0
- Jednostrano ograničene
  - Odozgo $x_i \leq c$
    - Transformacija supstitucijom $x_i = -x_i{}' + c,$ pri čemu $x_i{}' \geq 0$
      - Slijedi iz $x_i - c \leq 0$, $-x_i + c \geq 0$,$x_i{}' = -x_i + c$
  - Odozdo $x_i \geq c$
    - Transformacija supstitucijom $x_i = x_i' + c,$ pri čemu $x_i{}' \geq 0$
      - Slijedi iz $x_i - c \geq 0$, $x_i' = x_i - c$
- Slobodne varijable
  - $x_i \epsilon (-\infty, \infty)$
  - Transformacija supstitucijom: $x_i = x_i{}' - x_i''$, pri čemu $x_i{}' \geq 0, x_i{}'' \geq 0$

Apsolutne vrijednosti

- Pogledati http://lpsolve.sourceforge.net/5.1/absolute.htm
- f i g su linearne funkcije
- U ≤ ograničenjima
  - $|f(x)| + g(x) \leq z$
    - Dva nova ograničenja: $f(x) + g(x) \leq z, -f(x) + g(x) \leq z$
- U funkciji cilja u slučajevima (min,+) i (max,-)
  - Npr. $\min|f(x)| + g(x)$
  - Uvođenje varijable, promjena funkcije cilja i uvođenje dva nova ograničenja
    - min z+g(x)
    - $z \geq f(x)$
    - $z \geq -f(x)$

Minimax/maximin

- Neka su f i g linearne funkcije

- min max{f(x),g(x)}
  - Uvođenje nove varijable, promjena funkcije cilja i dodavanje ograničenja
    - min z
    - $z \geq f(x)$
    - $z \geq g(x)$

- max min{f(x),g(x)}
  - Uvođenje nove varijable, promjena funkcije cilja i dodavanje ograničenja
    - max z
    - $z \leq f(x)$
    - $z \leq g(x)$

Ograničenja omjera

- Pogledati http://lpsolve.sourceforge.net/5.1/ratio.htm
- Neka su f i g linearne funkcije, c je konstanta
- Ograničenje $\frac{f(x)}{g(x)} \geq c$, uz pretpostavku $g(x) > 0$ za svaki x u izvedivom području
  - $f(x) \geq c \cdot g(x)$
  - Ako je $g(x) < 0$ onda može sa okretanjem ograničenja
  - Rubni uvjet za =0, nekad je transformacija OK, nekad je kriva (posebna analiza)
- Slično za ≤ varijantu ograničenja
  - Za g(x)>0
  - Za g(x)<0 sa okretanjem ograničenja

Primjer (strojno učenje)

- U tablici su zabilježene cijene zaključenih prodaja nekretnina u Zagrebu

Prodajna cijena (C_i) [€]	Površina nekretnine (P_i) [m^2]	Nadmorska visina (N_i) [m]
1,550,000	1,200	350
1,200,000	1,000	300
1,000,000	900	130
700,000	800	200
600,000	600	130
1,000,000	900	200

- Agent nekretninama želi napraviti model za predviđanje cijena drugih nekretnina u tom području te smatra da je linearni model razuman.

Primjer (strojno učenje)

- Dakle,cilja se model oblika:
  - $C=w_0+w_1P+w_2N$
  - Iz poznatih podataka se optimizacijskim postupkom treba naći parametre modela $\mathbf{w=(w_0,w_1,w_2)}$
- Neka su C_i stvarne vrijednosti prodaja, a C_i' predviđene od strane modela. Formulirajte matematički program koji pronalazi „najbolje" vrijednosti **w*** minimizirajući sljedeće kriterije

a) $\sum_{i=1}^{6}(C_i - C_i')^2$

b) $\sum_{i=1}^{6}|C_i - C_i'|$

c) $max_{1\le i\le 6}|C_i - C_i'|$

- b i c se mogu svesti na linearne programe, a je poznati slučaj linearne regresije

Primjer (strojno učenje)

- SVM sa L1 normom
  - $||x||_1 = \sum_{r=1}^{n} |x_r|$
  - SVM sa L2 normom je kvadratni program
  - U slučaju L1 norme jest LP
- Link na članak

Operacijska istraživanja
3. predavanje: Primjene simpleksne metode

Dvofazna metoda

16. listopada 2019.

Problem početne baze

- Ako LP ima $\geq$ ili = ograničenja, početno bazično izvedivo rješenje (engl. basic feasible solution, bfs) **ne mora biti očito**.
- Ako LP ima $\leq$ ograničenja, dodaju se dopunske varijable koje se automatski kvalificiraju za bazične.
- Za $\geq$ ili = ograničenja, dodaju se **negativne dopunske varijable** koje ne mogu biti u inicijalnoj bazi.
- Uvodi se minimalan broj **umjetnih varijabli** (engl. artificial variable) da se dobije početno bazično izvedivo rješenje (bfs).

Postupak rješavanja: 1. faza

- **1. korak:** Modificirati ograničenja tako da su sve desne strane nenegativne.
- **2. korak:** Preobličiti svaku nejednakost u standardni oblik.
- **3. korak:** Ako je i-to ograničenje $\geq$ ili $=$, onda dodati umjetne varijable a_i, te ograničenja predznaka $a_i \geq 0$. (ishodište postaje izvedivo)
- **4. korak:** Umjesto originalne funkcije cilja riješiti LP čija je funkcija cilja <u>**minimizirati**</u> $w=\sum_i a_i$. Ovime završava **1. faza**.

Mogući slučajevi: 2. faza

- Zbog $a_i \geq 0$, rješavanje 1. faze rezultirat će u jednome od sljedećih slučajeva:
- **1. slučaj.** Optimalna vrijednost $w > 0$, originalni LP nema izvedivo rješenje.
- **2. slučaj.** Optimalna vrijednost $w = 0$, i nema umjetnih varijabli optimalnoj bazi 1. faze. ***Izbaciti*** sve stupce umjetnih varijabli iz optimalne tablice. Te ***ubaciti*** originalnu fju cilja u optimalnu tablicu 1. faze. Počinje **2. faza**.
- **3. slučaj.** Optimalna vrijednost $w = 0$, ali je najmanje jedna umjetna varijabla u optimalnoj bazi nakon 1. faze. Izbacimo iz tablice sve nebazične umjetne varijable i varijable iz originalnog problema sa negativnim koeficijentom u z-retku optimalne tablice 1. faze.

Primjer dvofazne metode

min. $2x_1 + 3x_2$

ako je: $1/2x_1 + 1/4x_2 \leq 4$

$x_1 + 3x_2 \geq 20$

$x_1 + x_2 = 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

- nakon dodavanja umjetnih varijabli te njihove eliminacije iz z-retka:

$w' - a_2 - a_3 = 0$

$1/2x_1 + 1/4x_2 + s_1 = 4$

$x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20$

$x_1 + x_2 + a_3 = 10$

→ pribrajanje redaka s umjetnim varijablama z-retku:

$w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 = 30$

1. faza: inicijalna tablica

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	basic	ratio
1	2	**4**	0	-1	0	0	30	$w' = 30$	
0	½	**¼**	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	**1**	**3**	**0**	**-1**	**1**	**0**	**20**	**$a_2 = 20$**	**20/3**
0	1	**1**	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10

- ulazna varijabla: x_2
- izlazna varijabla: a_2

1. faza: nakon 1. iteracije

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	basic	ratio
1	**2/3**	0	0	1/3	-4/3	0	10/3	w' = 10/3	
0	**5/12**	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1 = 7/3	28/5
0	**1/3**	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2 = 20/3	20
0	**2/3**	**0**	**0**	**1/3**	**-1/3**	**1**	**10/3**	**a_3 = 10/3**	**5**

- ulazna varijabla: x_1
- izlazna varijabla: a_3

1. faza: optimalna tablica

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	basic
1	0	0	0	0	-1	-1	0	$w' = 0$
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	$s_1 = 1/4$
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	$x_1 = 5$

- pronađen je optimum pa 2. faza ne mora tražiti pivot
- ako z-redak 2. faze nije optimalan, nastavi se s metodom dok se ne postigne optimum

Operacijska istraživanja
3. predavanje: Primjene simpleksne metode

Alternativna optimalna rješenja

16. listopada 2019.

Primjer za alternativni optimum

- Ako LP ima više od jednog optimalnog rješenja, onda kažemo da ima alternativna optimalna rješenja.

max. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

ako je:

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \\
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 \\
x_2 &\leq 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Inicijalna tablica

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	basic	ratio
1	**-60**	-35	-20	0	0	0	0	0	$z = 0$	
0	**8**	6	1	1	0	0	0	48	$s_1 = 48$	48/8 = 6
0	**4**	2	1.5	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$	20/4 = 5
0	**2**	**1.5**	**0.5**	**0**	**0**	**1**	**0**	**8**	$\mathbf{s_3 = 8}$	**8/2 = 4**
0	**0**	1	0	0		0	1	5	$s_4 = 5$	5/0

- ulazna varijabla: x_1
- izlazna varijabla: s_3

Nakon 1. iteracije

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	basic	ratio
1	0	10	**-5**	0	0	30	0	240	z = 240	
0	0	0	**-1**	1	0	-4	0	16	s_1 = 16	
0	**0**	**-1**	**0.5**	**0**	**1**	**-2**	**0**	**4**	**s_2 = 4**	**4/.5 = 8**
0	1	0.75	**0.25**	0	0	0.5	0	4	x_1 = 4	4/.25 = 16
0	0	1	**0**	0	0	0	1	5	s_4 = 5	

- ulazna varijabla: x_3
- izlazna varijabla: s_2

Nakon 2. iteracije

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	basic
1	0	0	0	0	10	10	0	280	**z = 280**
0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	**s_1 = 24**
0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	**x_3 = 8**
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2	**x_1 = 2**
0	0	1	0	0	0	0	1	5	**s_4 = 5**

- postignut optimum z = 280
- No, što se dogodi ako ipak uvedemo x_2 u bazu?

Uvođenje varijable s koeficijentom 0 u bazu

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	basic	ratio
1	0	**0**	0	0	10	10	0	280	z = 280	
0	0	**-2**	0	1	2	-8	0	24	s_1 = 24	
0	0	**-2**	1	0	2	-4	0	8	x_3 = 8	
0	**1**	**1.25**	**0**	**0**	**-0.5**	**1.5**	**0**	**2**	**x_1 = 2**	**2/1.25**
0	0	**1**	0	0	0	0	1	5	s_4 = 5	5/1

- ulazna varijabla: x_2
- izlazna varijabla: x_1

Nakon 3. iteracije

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	basic
1	0	0	0	0	10	10	0	280	**$z = 280$**
0	1.6	0	0	1	1.2	-5.6	0	27.2	**$s_1 = 27.2$**
0	1.6	0	1	0	1.2	-1.6	0	11.2	**$x_3 = 11.2$**
0	0.8	1	0	0	-0.4	1.2	0	1.6	**$x_2 = 1.6$**
0	-0.8	0	0	0	0.4	-1.2	1	3.4	**$s_4 = 3.4$**

- ostaje isti optimum $z = 280$
- no, drukčija je kombinacija dobivenih proizvoda

Optimalne ekstremne točke

- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + (1 - c) \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix}$
- za $0 \ \leq c \leq 1$
- Osim ova dva rješenja, zapravo je beskonačno mnogo optimalnih rješenja.
- Bilo koja točka na **segmentu linije** koja se spaja dvije optimalne ekstremne točke, također je optimalna.

- Ako postoji nebazična varijabla s koeficijentom nula u z-retku optimalne tablice, moguće je (ali nije nužno!) da LP ima alternativna optimalna rješenja.

pplex primjer

- optimal_edge.lps

$$\textbf{max.} \quad z = -2x + 4y$$

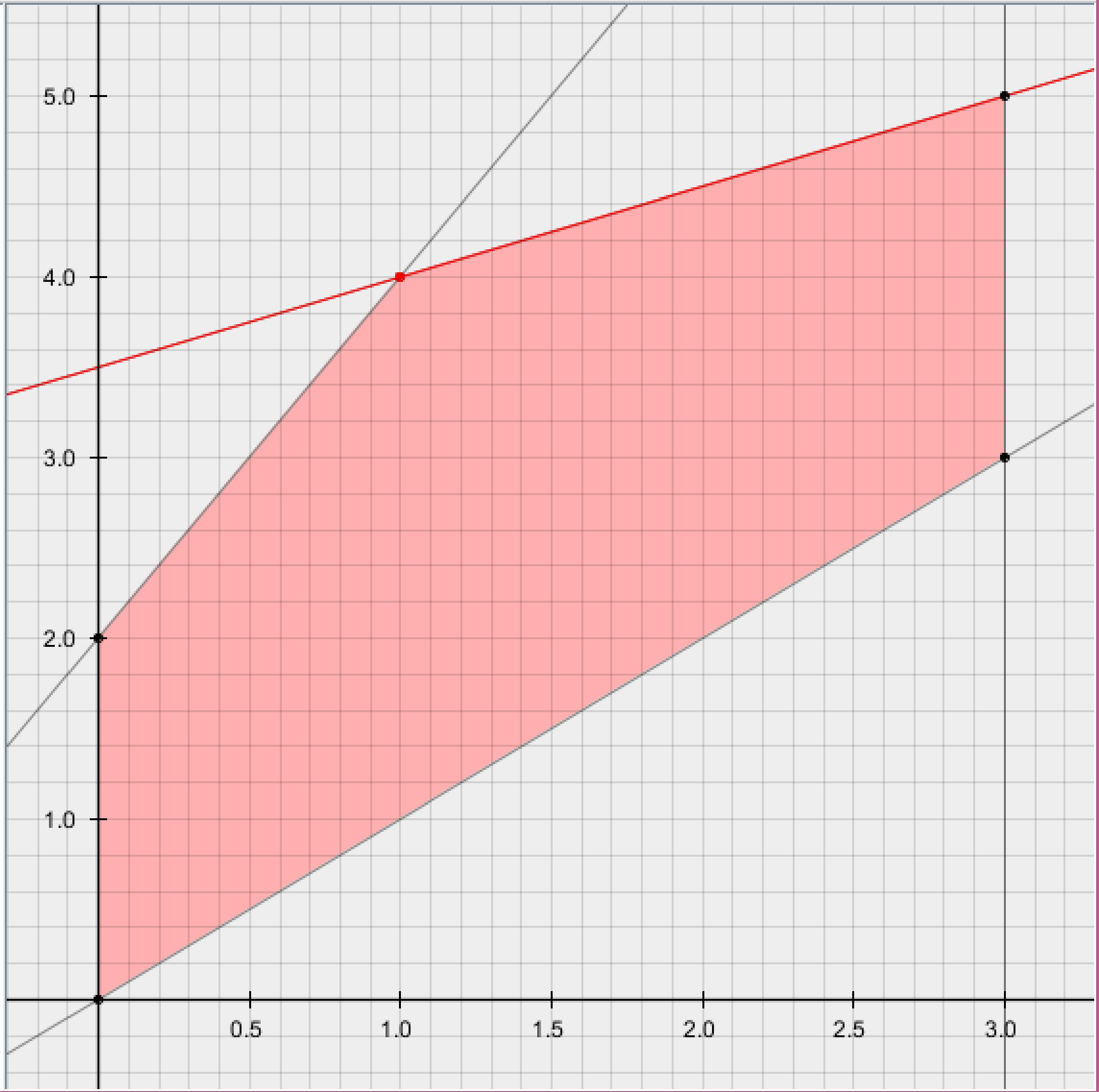
$$\text{ako je:} \quad \begin{aligned} -2x + y &\leq 2 \\ -x + 2y &\leq 7 \\ x - y &\leq 0 \\ x &\leq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

pplex

File View Help

```
pplex version 0.5.2, Copyright(C) 2012-2014 Andreas Halle
This program comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type `warranty'. This is free software, and you are welcome
to redistribute it under certain conditions; type `conditions'
for details.

Welcome to pplex. Type 'help' for a list of available commands.
> read input/optimal_edge.lps
Read input/optimal_edge.lps OK.
> pivot
 ζ = 8  + 6 x - 4 w1
 y = 2  + 2 x -   w1
w2 = 3  - 3 x + 2 w1
w3 = 2  +   x -   w1
w4 = 3  -   x
> pivot
 ζ = 14  -   2 w2
 y =  4  - 2/3 w2 + 1/3 w1
 x =  1  - 1/3 w2 + 2/3 w1
w3 =  3  - 1/3 w2 - 1/3 w1
w4 =  2  + 1/3 w2 - 2/3 w1
> pivot
pivot: Incumbent basic solution is optimal.
```



Operacijska istraživanja
3. predavanje: Primjene simpleksne metode

Neograničeno područje rješenja

16. listopada 2019.

Primjer neograničenog rješenja

- Neograničen LP (engl. unbounded) - postoje smjerovi neograničenog rasta fje cilja u izvedivom prostoru (za maksimizaciju).

max. $z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4$

ako je: $x_1 + x_2 - x_3 \leq 5$

$6x_1 + 5x_2 - x_4 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Inicijalna tablica

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	rhs	basic	ratio
1	**-36**	-30	3	4	0	0	0	$z = 0$	
0	**1**	1	-1	0	1	0	5	$s_1 = 5$	5/1
0	**6**	**5**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**10**	$s_2 = 10$	**10/6**

- ulazna varijabla: x_1
- izlazna varijabla: s_2

1. iteracija

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	rhs	basic	ratio
1	0	0	3	**-2**	0	6	60	$z = 60$	
0	**0**	**1/6**	**-1**	**1/6**	**1**	**-1/6**	**10/3**	$s_1 = 10/3$	**20**
0	1	5/6	0	**-1/6**	0	1/6	5/3	$x_1 = 5/3$	

- ulazna varijabla: x_4
- izlazna varijabla: s_1

2. iteracija

z	x_1	x_1	x_3	x_4	s_1	s_2	rhs	basic	ratio
1	0	2	**-9**	0	12	4	100	z = 100	
0	0	1	**-6**	1	6	-1	20	x_4 = 20	neg.
0	1	1	**-1**	0	1	0	5	x_1 = 5	neg.

- ulazna varijabla: x_3
- izlazna varijabla: ?

Kako simpleks prepoznaje neograničenost

- Neograničeno područje rješenja (engl. unbounded LP)
  - nebazična varijabla s negativnim koeficijentom u z-retku, ali nema ograničenja na njezinu vrijednost, (u svim ograničenjima su nepozitivni koeficijenti).

- Ako je nemoguće odabrati pivot redak, rješenje je neograničeno.

pplex primjer

- unbounded.lps

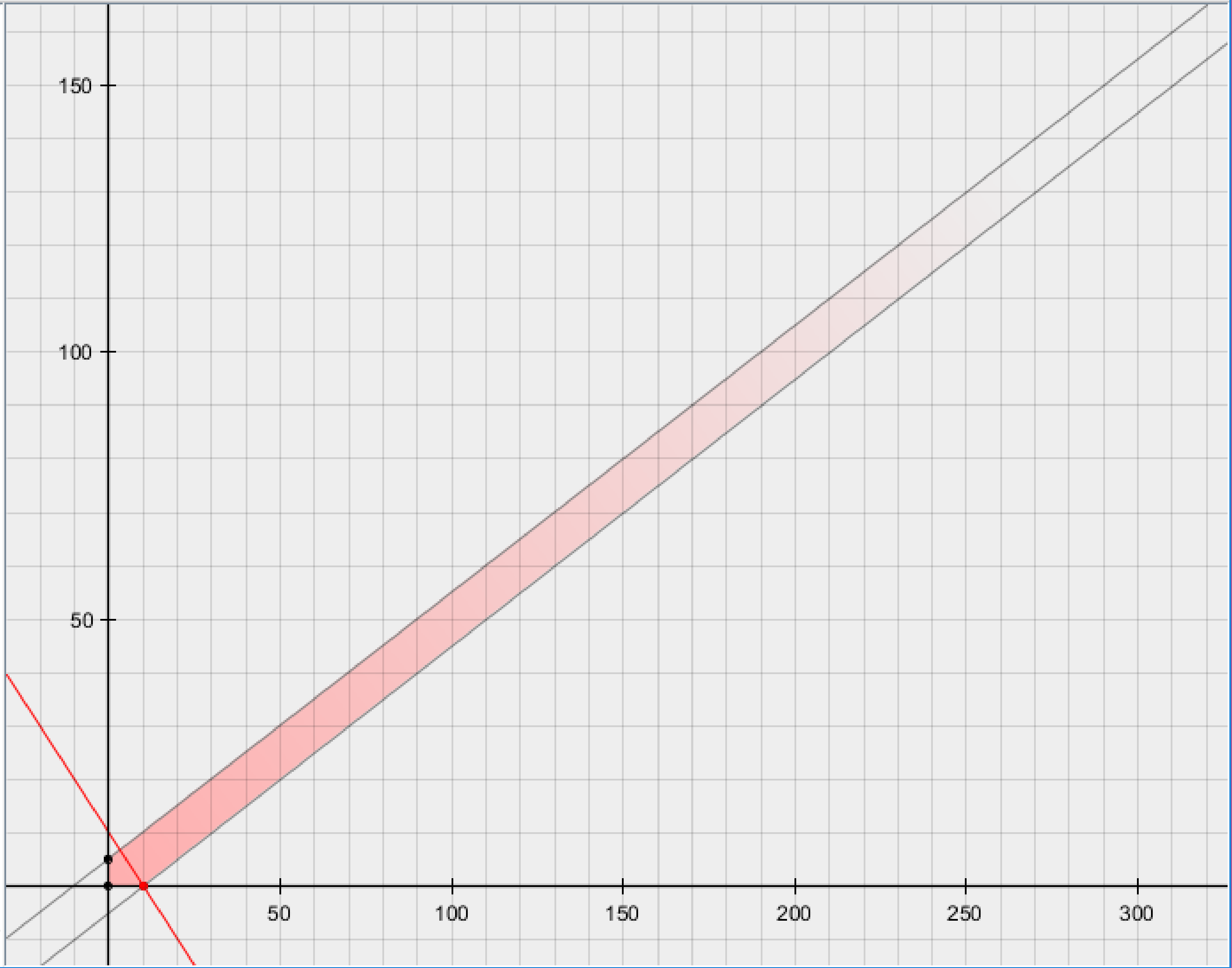
$$
\begin{array}{ll}
\textbf{max.} & z = x + y \\
\text{ako je:} & x - 2y \leq 10 \\
 & -x + 2y \leq 10 \\
 & x, y \geq 0
\end{array}
$$

pplex

File View Help

```
pplex version 0.5.2, Copyright(C) 2012-2014 Andreas Halle
This program comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type `warranty'. This is free software, and you are welcome
to redistribute it under certain conditions; type `conditions'
for details.

Welcome to pplex. Type 'help' for a list of available commands
.
> read input/unbounded.lps
Read input/unbounded.lps OK.
> pivot
 ζ = 10  - w1 + 3 y
 x = 10  - w1 + 2 y
w2 = 20  - w1
> pivot
pivot: Program is unbounded
```



Operacijska istraživanja
3. predavanje: Primjene simpleksne metode

Degeneracija

16. listopada 2019.

Definicija degeneracije

- Ako su za svako bazično izvedivo rješenje (bfs), sve bazične varijable pozitivne, kaže se da LP nije degeneriran(engl. nondegenerate)**.**
- LP jest degeneriran (engl. degenerate) ako ima najmanje jedno bazično izvedivo rješenje (bfs) u kojem **<u>bazična varijabla ima vrijednost nula</u>**.
- Ako za izbor pivot stupca i retka ima više jednako dobrih kandidata, dolazi do degeneracije.

Primjer degeneracije

max. $z = 5x_1 + 2x_2$
ako je: $x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1 - x_2 \leq 0$
$x_1, x_2 \geq 0$

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	basic	ratio
1	**-5**	-2	0	0	0	$z = 0$	
0	**1**	1	1	0	6	$s_1 = 6$	6/1
0	**1**	**-1**	**0**	**1**	**0**	$s_2 = 0$	**0/1**

- u inicijalnom bfs, bazična varijabla $s_2 = 0$ pa je rješenje degenerirano
- ulazna varijabla: x_1
- izlazna varijabla: s_2

Nakon 1. iteracije

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	basic	ratio
1	0	**-7**	0	5	0	$z = 0$	
0	**0**	**2**	**1**	**-1**	**6**	$s_1 = 6$	**6/2**
0	1	**-1**	0	1	0	$x_1 = 0$	

- z i vrijednosti varijabli su ostale iste pa je i ovo rješenje degenerirano
- ulazna varijabla: x_2
- izlazna varijabla: s_1

Nakon 2. iteracije

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	basic
1	0	0	7/2	3/2	21	**z = 21**
0	0	1	1/2	-1/2	3	**x_2 = 3**
0	1	0	1/2	1/2	3	**x_1 = 3**

- nakon 2. iteracije nema negativnih koeficijenta u z-retku pa je potignut optimum, z = 21

pplex primjer

- degeneracy_1.lps

max. $z = x + 10y$

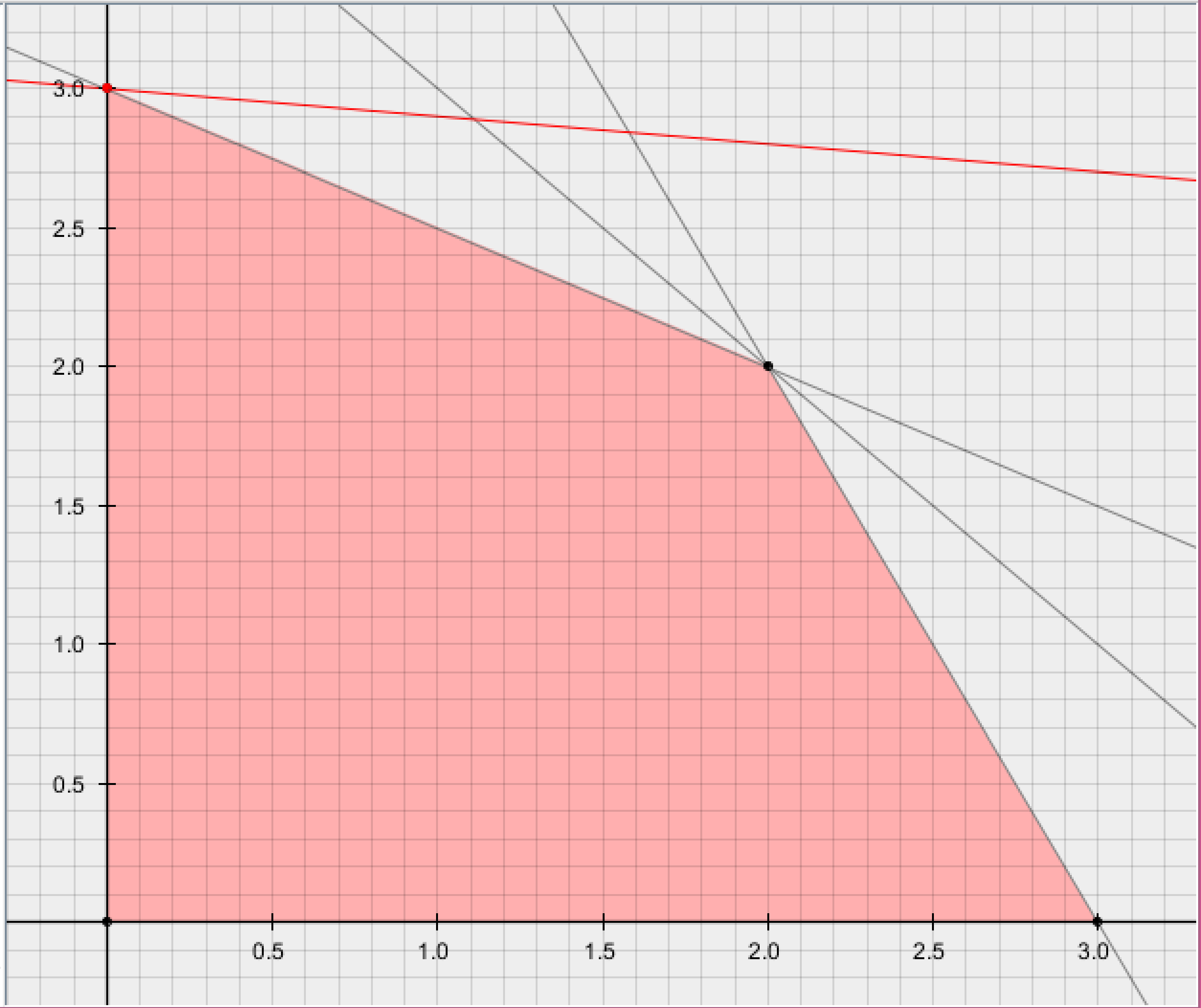
ako je:
$$
\begin{aligned}
2x + y &\leq 6\\
x + 2y &\leq 6\\
x + y &\leq 4
\end{aligned}
$$

pplex

File View Help

```
pplex version 0.5.2, Copyright(C) 2012-2014 Andreas H
alle
This program comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for d
etails
type `warranty'. This is free software, and you are w
elcome
to redistribute it under certain conditions; type `co
nditions'
for details.

Welcome to pplex. Type 'help' for a list of available
 commands.
> read input/degeneracy_1.lps
Read input/degeneracy_1.lps OK.
> pivot
 ζ = 30  -   4 x -   5 w2
w1 =  3  - 3/2 x + 1/2 w2
 y =  3  - 1/2 x - 1/2 w2
w3 =  1  - 1/2 x + 1/2 w2
> pivot
pivot: Incumbent basic solution is optimal.
> pivot
pivot: Incumbent basic solution is optimal.
```



Cikličko ponavljanje

- Ako LP ima mnogo degeneriranih baričnih izvedivih rješenja sa mnogo baričnih varijabli jednakih nuli, simpleksna metoda nije efikasna.
- LP sa n varijabli odlučivanja ima degenerirano rješenje ako njegovih n + 1 ili više ograničenja (uključujući restrikcije nenegativnosti, tj. $x_i \geq 0$) određuje istu ekstremnu točku, tj. ta ista točka je određena različitim kombinacijama baričnih i nebaričnih varijabli.
- Pojava višestrukog iteriranja simpleksa sa istom vrijednošću z (iako se mijenja pivot odnosno baza) zove se **cikličko ponavljanje** (engl. cycling).
- Zbog cikličkog ponavljanja, neće se moći postići optimum, no moguće je modificirati simpleksnu metodu da se ta pojava spriječi. (npr. **Blandovo pravilo**)

Specijalni slučajevi simpleksa

- **Degeneracija** – bazična varijabla ima vrijednost 0
  - Cikliranje – Blandovo pravilo

- **Alternativni optimum** – nebazična varijabla sa 0 koef. u z (i ako nije degeneracija)

- **Neograničeno rješenje** – nebazična varijabla sa oportunim koef. u z, ali omjeri ograničenja su negativni ili ∞

- **Neizvedivi LP** – Potrebna 1. faza završava sa w>0