4.

Linearni sustavi

Sadržaj poglavlja

4.1. Gaussova metoda eliminacije

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi najvažniji je problem linearne algebre. Opći oblik linearnog sustava m jednadžbi s n nepoznanica glasi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Rješenje ovoga sustava je svaka n-torka $(x_1, \ldots, x_n)$ koja uvrštena u (1) identički zadovoljava sve jednadžbe.

Sustav može imati jedinstveno rješenje, može biti bez ijednoga rješenja, ali može imati i beskonačno mnogo rješenja. Ilustrirajmo to na primjerima sustava tipa 2×2. (Tu je uobičajeno imena nepoznanica označavati s x i y.)

Primjer 1.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -x + y = 3 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$.

Sustav (a) ima jedinstveno rješenje $(x, y) = (-1, 2)$. Sustav (b) nema rješenja, dok sustav (c) ima beskonačno mnogo rješenja. Jednu nepoznanicu, recimo y, možemo odrediti po volji dok se druga računa zatim iz veze $x = 2 - \frac{2}{3}y$.

Sustav (1) može se napisati u obliku matrične jednadžbe

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

gdje smo označili

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

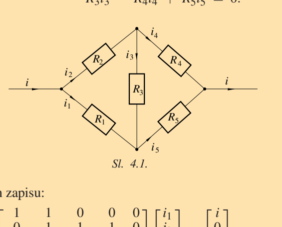
Matrica $\mathbf{A}$ naziva se **matrica koeficijenata sustava**, $\mathbf{x}$ je **vektor nepoznanica**, $\mathbf{b}$ **desna strana** sustava. Matrica $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$ naziva se **proširena matrica sustava**.

Matrica koeficijenata sustava proširena s vektorom desne strane naziva se **proširena matrica sustava** i označava s $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$.

Primjer 2.

Za strujni krug na slici po Kirchhoffovim zakonima možemo postaviti sljedeće jednadžbe

$$\begin{array}{rcl} i_1 + i_2 & = & i, \\ i_2 - i_3 - i_4 & = & 0, \\ i_1 + i_3 - i_5 & & 0, \\ R_1 i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 & = & 0, \\ R_3 i_3 - R_4 i_4 + R_5 i_5 & = & 0. \end{array}$$



Sl. 4.1.

U matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Opišimo **Gaussovu metodu**.Ona se sastoji u tome da se sustav (1) *elementarnim transformacijama* svede na ekvivalentan, iz kojega ćemo moći odrediti njegovo rješenje. Dva sustava nazivamo **ekvivalentnim** ukoliko imaju isti skup rješenja.

Pri svođenju sustava na ekvivalentan koristit ćemo se istim elementarnim transformacijama kao i pri određivanju reducirane forme matrice. Prisjetimo se, to su operacije

- zamjena dvaju redaka,
- množenje retka skalarom različitim od nule,
- dodavanjem nekom retku drugoga retka pomnoženog skalarom različitim od nule.

Ako je $(x_1, \ldots, x_n)$ rješenje sustava (1), tad je očito ta n-torka rješenje i sustava dobivenog bilo kojom od ovih transformacija (i obratno!). Dakako da ćemo transformacije primjenjivati ne samo na lijevoj strani sustava (1), već istovremeno i na desnoj strani. Pritom se pokazuje da je nepotrebno ispisivati jednadžbe u obliku (1), *dovoljno je ispisati samo matrične koeficijente*, budući da položaj tih koeficijenata određuje i imena nepoznanica koje dolaze uz odgovarajući koeficijent.

Primjer 3.

Riješi sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= -4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned}$$

► Napišemo proširenu matricu sustava i svedimo matricu $\mathbf{A}$ na reducirani oblik:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo prvi r. drugom r.} \\ \textit{dodajemo prvi r.} \times(-2) \textit{ trećem r.} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{množimo} \\ \textit{drugi r. s } \frac{1}{5} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -5 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo drugi r.} \times(-3) \textit{ prvom r.} \\ \textit{dodajemo drugi r.} \times 5 \textit{ trećem r.} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{23}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{množimo} \\ \textit{treći r. s } \frac{1}{5} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{23}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo treći r.} \times \frac{11}{5} \textit{ prvom r.} \\ \textit{dodajemo treći r.} \times -\frac{2}{5} \textit{ drugom r.} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Ovim je postupak transformacija završen i treba još očitati rješenje. Dobiveni sustav ekvivalentan je početnome, uz matrične koeficijente leže odgovarajuće varijable. Matrica slijeva svedena je na jediničnu. Tako gornji matrični zapis daje ove jednadžbe:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3,$$

iz kojih zapravo očitavamo traženo rješenje. ◄

4.2. Homogeni sustavi

Pri rješavanju linearnih sustava prirodno se postavljaju sljedeća dva pitanja

- Kada sustav (1) ima rješenje?
- Ako rješenje postoji, je li ono jednoznačno određeno?

Da bismo pojednostavnili odgovor na ova pitanja, promotrit ćemo najprije specijalni oblik linearnoga sustava koji uvijek ima rješenje. To je tzv. **homogeni sustav** linearnih jednadžbi, okarakteriziran time da mu je desna strana jednaka nuli:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ uvijek ima rješenje! Naime, nul vektor zadovoljava sve njegove jednadžbe. Pokazali smo u prošlom poglavlju da je to i jedino rješenje, u slučaju kad je $\mathbf{A}$ regularna matrica.

Preostaje nam proučiti situaciju kad $\mathbf{A}$ nije regularna (ili pak nije kvadratna) matrica.

Sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ zapisujemo u matričnom obliku na način $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{0}]$ i elementarnim transformacijama svodimo ga na oblik $[\mathbf{A}_R \,|\, \mathbf{0}]$.

Ako je $\mathbf{A}_R$ jedinična matrica, ili pak ako je oblika jedinične matrice koja je nastavljena s nekoliko nul redaka, tad sustav ima samo jedno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Primjer takve matrice je, recimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

U ovom je slučaju rang matrice jednak broju njezinih stupaca.

Što se događa ako je rang matrica manji od broja stupaca? Tad će u reduciranom obliku matrice postojati neki stupci koji neće sadržavati stožerni element. Primjer takve matrice je

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ovdje samo prvi i treći stupac sadrže stožerne elemente. Primjeti da je rang ove matrice 2.

Prema tome ćemo razlikovati dvije vrste stupaca

- stupci sa stožernim elementom. Nazivamo ih **vezanim stupcima** i pripadne nepoznanice **vezanim nepoznanicama**. Njihov je broj jednak rang (A).
- stupci bez stožernoga elementa. Njih nazivamo **slobodnim stupcima** a pripadne nepoznanice **slobodnim nepoznanicama**. Njihov je broj jednak $n -$ rang (A).

U posljednjoj matrici, prvi i treći stupac je vezan, a drugi i četvrti slobodan.

Utvrdimo na primjeru uvedenu terminologiju i promotrimo kako ćemo postupiti u nastavku rješavanja.

Primjer 4.

Riješi homogeni sustav

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

► Napišimo odgovarajuću proširenu matricu i svedimo je na reducirani oblik.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \textit{dodajmo 1. redak} \times(-1) \\ \textit{drugom retku} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{dodajmo 2. redak} \times(-1) \\ \textit{prvom retku} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] = [\mathbf{A}_R \,|\, \mathbf{0}].$$

Matrica je svedena na reducirani oblik. Prva i druga nepoznanica (kao i stupci) su vezane, treća nepoznanica je slobodna.

U sljedećem koraku trebamo iskazati vezane nepoznanice preko slobodnih. To je jednostavno, veza slijedi iz svakoga retka matrice.

Iz prvoga retka dobivamo $x_1 + 3x_3 = 0$, odakle je $x_1 = -3x_3$.

Iz drugoga retka dobivamo $x_2 - 2x_3 = 0$, te je $x_2 = 2x_3$.

Treća nepoznanica x_3 je slobodna. To znači da njezinu vrijednost možemo odabrati po volji. Da to naglasimo, stavimo $x_3 = \alpha$. Tad za vezane nepoznanice slijedi $x_1 = -3\alpha$, $x_2 = 2\alpha$. Tako rješenje sustava možemo napisati u vektorskom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Označimo li $\mathbf{w} = [-3,\ 2,\ 1]^\top$, svako se rješenje sustava može dobiti u obliku $\alpha\mathbf{w}$, gdje je $\alpha \in \mathbf{R}$ bilo koji broj. ◄

Primjer 5.

Riješi sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 &= 0. \end{aligned}$$

► Proširena matrica glasi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right],$$

a njegova reducirana forma ima oblik

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Odavde čitamo da su vezane nepoznanice x_1 i x_3, a slobodne x_2, x_4 i x_5. Svaku od njih biramo po volji. Stavimo $x_2 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$. Iz prve jednakosti čitamo

$$x_1 = -2x_2 - 3x_4 - 2x_5 = -2\alpha - 3\beta - 2\gamma.$$

Iz druge jednakosti čitamo

$$x_3 = x_4 - x_5 = \beta - \gamma.$$

Sad možemo zapisati rješenje sustava u obliku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha-3\beta-2\gamma \\ \alpha \\ \beta-\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da se u rješenju pojavljuju tri nezavisna parametra α, β i γ. Opće rješenje sustava može se napisati u obliku $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 + \gamma\mathbf{w}_3$, gdje su $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ vektori u gornjem prikazu.

Skup svih rješenja sustava je prostor $L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ razapet s tim vektorima. Primijetimo da je njegova dimenzija 3. Primijetimo nadalje da ta dimenzija odgovara broju slobodnih nepoznanica. Taj je broj jednak razlici između broja stupaca matrice $\mathbf{A}$ i broja nezavisnih redaka u njezinom reduciranom obliku.

Teorem 1. Ako je u sustavu s n nepoznanica rang matrice sustava jednak r, onda vrijedi

$$\text{dimenzija prostora rješenja} = n - r.$$

Dokaz. Prethodni primjer točno ilustrira i općenitu situaciju. Nakon svođenja na reducirani oblik, broj slobodnih varijabli jednak je broju stupaca n umanjenom za broj vezanih varijabli. Taj je pak broj jednak broju stožernih elemenata, dakle rangu r matrice $\mathbf{A}$.

U slučaju $n = r$, ova je dimenzija jednaka nuli, što znači da sustav ima jednoznačno rješenje. ◄

Navedimo još jednom koje korake trebamo primjeniti pri rješavanju homogenog sustava.

Algoritam za rješavanje homogenog sustava

Korak 1.
Sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ napišemo u matričnom obliku $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{0}]$.

Korak 2.
Elementarnim transformacijama svodimo sustav na njemu ekvivalentan $[\mathbf{A}_R \,|\, \mathbf{0}]$. Nepoznanice u stupcu sa stožernim elementom nazovemo vezanima, ostale su slobodne.

Korak 3.
Vrijednost slobodnih nepoznanica određujemo po volji, jednu nezavisnu od druge. Vezane nepoznanice određujemo preko slobodnih, iz redaka reducirane matrice.

Korak 4.
Rješenje zapisujemo u vektorskom obliku, kao linearnu kombinaciju $n - r$ vektora.

U općem slučaju rješenje će imati sljedeći oblik. Pretpostavimo da su (zbog jednostavnosti zapisa!) nepoznanice $x_1, \ldots, x_r$ vezane, a $x_{r+1}, \ldots, x_n$ slobodne. Stavimo $x_{r+1} = \alpha_1, \ldots x_n = \alpha_{n-r}$. Tad opće rješenje ima oblik

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{n-r} \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_{n-r}\mathbf{w}_{n-r}.$$

Tu se na mjestu zvjezdica nalaze koeficijenti pročitani iz reduciranog oblika matrice.

4.3. Nehomogeni sustavi

Promotrimo sad sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Prva (dramatična) promjena prema homogenome sustavu je u tome što ovaj sustav uopće ne mora imati rješenja! Zaista, već spomenuti primjer

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases},$$

daje jedan jednostavni sustav koji nema rješenja. Što Gaussov algoritam daje u ovom slučaju?

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Iz drugoga retka reducirane matrice čitamo jednadžbu

$$0x_1 + 0x_2 = -1,$$

koja dakako nema rješenja. Stoga nema rješenja niti početni sustav.

Korisno je navesti još jednu interpretaciju ovoga slučaja. Gornji sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ekvivalentan je s ovim zapisom

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Odrediti njegovo rješenje isto je što i odrediti koeficijente x i y tako da vektor $\mathbf{b}$ bude linearna kombinacija vektor-stupaca matrice $\mathbf{A}$! Ti su stupci proporcionalni (= linearno zavisni!), pa je svaka linearna kombinacija oblika

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

za neki skalar λ, a vektor $\mathbf{b}$ nije takvoga oblika. Zato sustav nema rješenja.

Ovaj nam primjer daje naslutiti zbog čega (i kada!) sustav nema rješenja. Problemi mogu nastati samo u jednoj situaciji, koju možemo opisati na sljedeće načine:

- nakon dovođenja na reducirani oblik, matrica $\mathbf{A}_R$ ima redak ispunjen nulama ali takav da se s desne strane jednakosti ne nalazi nula, ili
- vektor $\mathbf{b}$ desne strane ne može se napisati u obliku linearne kombinacije vektor-stupaca $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ matrice $\mathbf{A}$.

U protivnom će sustav imati rješenje. Broj linearno nezavisnih redaka jednak je broju linearno nezavisnih stupaca matrice, pa taj protivni slučaj opisuje ovaj teorem (koji smo ovom pričom objasnili).

Teorem 2. [Kronecker–Capelli] Sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima rješenje onda i samo onda kad je rang matrice $\mathbf{A}$ jednak rangu proširene matrice $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$.

Koji je oblik toga rješenja? Mogli bismo analizirati postupak rješavanja kao i u slučaju homogenog sustava, no brže ćemo do odgovora doći ukoliko naprosto iskoristimo taj rezultat. Evo teorema.

Teorem 3. Opće rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima oblik

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$$

gdje je $\mathbf{x}_h$ opće rješenje pripadnoga homogenog sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, a $\mathbf{x}_p$ jedno rješenje nehomogenog sustava.

Dokaz. Dokažimo oba smjera. Dokazi su jednostavni i skoro trivijalni, međutim poruka ovoga teorema je dalekosežna i valja je upamtiti.

Pretpostavimo da je $\mathbf{x}$ rješenje nehomogenog sustava i neka je $\mathbf{x}_p$ jedno (neko konkretno, fiksirano, čvrsto) rješenje početnog sustava. Takvo rješenje nazivamo **partikularnim**, odatle i oznaka $\mathbf{x}_p$. Onda je $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ rješenje homogenog sustava. Zaista

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{Ax} - \mathbf{Ax}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Stavimo $\mathbf{x}_h := \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$. Vidimo da $\mathbf{x}$ zaista ima oblik $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$.

Obratno, neka je $\mathbf{x}$ toga oblika. Onda vrijedi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p) = \mathbf{Ax}_h + \mathbf{Ax}_p = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

i tvrdnja je dokazana. ◄

Algoritam za rješavanje nehomogenog sustava

Korak 1.
Sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ napišimo u matričnom obliku: $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$.

Korak 2.
Matricu $\mathbf{A}$ svedimo na reducirani oblik $\mathbf{A}_R$. Time dobivamo ekvivalentni sustav $[\mathbf{A}_R \,|\, \mathbf{b}']$. Ako je rang $(\mathbf{A}) <$ rang $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$, zaustavimo se: sustav nema rješenja. Inače označimo slobodne i vezane varijable.

Korak 3.
Odredimo vrijednosti slobodnih varijabli po volji i pročitajmo iz redaka proširene matrice vrijednosti vezanih varijabli.

Korak 4.
Rješenje sustava napišemo u vektorskom obliku.

To će rješenje imati sljedeći oblik. Pretpostavimo opet da su prvih r nepoznanica vezane, a preostale $n - r$ slobodne, tad rješenje glasi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{n-r} \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{b}' + \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_{n-r}\mathbf{w}_{n-r}.$$

Tu je $\mathbf{b}'$ vektor desne strane u reduciranoj matrici, a na mjestu zvjezdica se ispisuju elementi pročitani iz reducirane matrice, uz odgovarajuće slobodne nepoznanice.

Primjer 6.

Gaussovom metodom riješi sustav

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5, \\ 2x - y - z &= 1, \\ x + 3y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

► Sustav pišemo u matričnom obliku koristeći proširenu matricu $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$. Nakon toga matricu $\mathbf{A}$ svodimo na reducirani oblik.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Rang matrice jednak je rangu proširene matrice i iznosi 3. Rješenje sustava je jednoznačno. Čitamo ga direktno iz reduciranog oblika: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$. ◄

Primjer 7.

Gaussovom metodom riješi sustave:

A. $\begin{cases} 3x - y + 3z = 4, \\ 6x - 2y + 6z = 1, \\ 5x + 4y = 2. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ -2x + z = -2, \\ x + 2y - z = 3, \\ -x + 2y + 12z = 1. \end{cases}$

► **A.** Pri postupku svođenja na reduciranu formu nije obvezno na mjestu stožernog elementa imati broj jednak 1. Dovoljno je zadržati bilo koji ne-nul element. U ovom primjeru zadržavamo broj 3:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & \frac{17}{3} & -5 & -\frac{14}{3} \end{array}\right].$$

Iz drugoga retka čitamo da sustav nema rješenja. Rang matrice $\mathbf{A}$ je 2, rang proširene 3.

B.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 12 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Postupak svođenja na reducirani oblik u ovom se primjeru neznatno razlikuje od dosadašnjih. Opredijelili smo se da u prvom koraku *matricu* $\mathbf{A}$ *svedemo na gornji trokutasti oblik*, kako bismo uz minimalni broj operacija ustanovili da li sustav uopće ima rješenja.

Iz ovoga oblika čitamo rang $(\mathbf{A}) = 3$, baš kao i rang proširene matrice. Sada nastavljamo postupak svođenja matrice $\mathbf{A}$ na reducirani oblik. Taj se korak naziva *obratni hod*. Posljednji redak matrice (ispunjen nulama) ne moramo prepisivati.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rješenje sustava glasi $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$. ◄

Primjer 8.

U zavisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ riješi sustave:

A. $\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 4, \\ 2x + y + 2z = 5, \\ 3x + 2y + 3z = 12. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$

► **A.** Zamijenimo 1. i 3. stupac. To odgovara zamjeni varijabli x i z.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \overset{3}{1} & \overset{2}{2} & \overset{1}{\lambda} & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 4 \\ 0 & -3 & 2-2\lambda & -3 \\ 0 & -4 & 3-3\lambda & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & -4 & 3-3\lambda & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -12 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\lambda+2 & 10 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \overset{3}{1} & \overset{2}{0} & \overset{1}{1} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -12 \end{array}\right].$$

Razlikujemo slučajeve:

1) Za $\lambda = 1$ rang matrice je 2, a rang proširene matrice 3 pa sustav u tom slučaju nije rješiv.

2) Za $\lambda \neq 1$ rang matrice i rang prošorene matrice se podudaraju i iznose 3 pa je sustav rješiv. Rješenje je (zamijenili smo na početku x i z!):

$$x = \frac{12}{1-\lambda}, \qquad y = 9, \qquad z = -2 - x = -2 - \frac{12}{1-\lambda}.$$

B. Zamijenimo prvi i treći redak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^2 \end{array}\right].$$

1) Ako je $\lambda = 1$ sustav se svodi na $x + y + z = 1$ čije rješenje je dvoparametarsko: $y = \alpha, z = \beta, x = 1 - \alpha - \beta$.

Za $\lambda \neq 1$ nastavljamo dalje sa elementarnim transformacijama. Sada smijemo podijeliti drugi redak sa $\lambda - 1$ i treći sa $1 - \lambda$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1+\lambda \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1+\lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1+\lambda \end{array}\right].$$

Nadalje imamo slučajeve:

2) Za $\lambda = -2$ rang matrice je 2, rang proširene matrice je 3 i sustav nije rješiv.

3) Za $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq -2$ rang matrice i proširene matrice su 3 pa je rješenje:

$$z = \frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \qquad y = z = \frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \qquad x = -1 + z = -1 + \frac{1+\lambda}{2+\lambda} = \frac{-1}{2+\lambda}. \ ◄$$

4.4. Cramerovo pravilo

Sad ćemo proučiti alternativnu metodu za rješavanje linearnih sustava n jednadžbi s n nepoznanica.

Teorem 4. Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica. Za po volji odabran vektor $\mathbf{b}$ sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ imat će točno jedno rješenje onda i samo onda kad je $\mathbf{A}$ regularna matrica.

Ovaj je teorem do sad već skoro dokazan. No njegova je važnost tolika da je korisno taj dokaz upotpuniti.

Dokaz. Neka je $\mathbf{A}$ regularna. Njezin je rang n, dakle jednak rangu proširene matrice, pa sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima rješenje. Opće rješenje tog sustava može se dobiti u obliku $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$. Partikularno rješenje čitamo iz reducirane forme proširene matrice, ono je jednako desnoj strani proširene matrice. Homogeno rješenje može biti samo nul vektor, kako je pokazano u Teoremu §3.14. Zato je rješenje jednoznačno.

Pretpostavimo sad da sustav ima točno jedno rješenje. To znači da homogeni sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ima također jednoznačno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Po istom teoremu zaključujemo da je $\mathbf{A}$ regularna matrica.

Rješenje nehomogenog sustava može se eksplicitno napisati. Matrica $\mathbf{A}$ je regularna. To znači da postoji njezina inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ i ona je jednoznačno određena. Jednako tako je jednoznačno rješenje sustava linearnih jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Množenjem s inverznom matricom dobivamo

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Ovo rješenje možemo prikazati u eksplicitnom obliku, koristeći prikaz pomoću determinanti. Pokazali smo da za elemente inverzne matrice vrijedi

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = a'_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Iz formule (4) možemo napisati i-tu komponentu vektora $\mathbf{x}$ na način

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}} \right) b_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j}{\det \mathbf{A}}.$$

Izraz u brojniku nalikuje Laplaceovom razvoju determinante (po i-tom stupcu). Zaista, da su na mjestu broja b_j matrični elementi a_{ji}, tad bi suma $\sum_j A_{ji} a_{ji}$ predstavljala rastav determinante po i-tom stupcu i bila bi jednaka determinanti matrice $\mathbf{A}$. Sad zaključujemo da ta suma i sama predstavlja neku determinantu, međutim, ne determinantu matrice $\mathbf{A}$ već matrice u kojoj je i-ti stupac zamijenjen vektorom $\mathbf{b}$.

Na taj način dobivamo teorem, poznat u literaturi kao **Cramerovo pravilo**.

Teorem 5. Neka je $\mathbf{A}$ regularna matrica. Svaka komponenta x_i rješenja sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ može se napisati u obliku razlomka kojemu je u nazivniku determinanta matrice $\mathbf{A}$, a u brojniku determinanta matrice u kojoj je i-ti stupac zamijenjen s vektorom $\mathbf{b}$.

Cramerovo pravilo obično zapisujemo u sljedećem obliku. Označimo s $\mathbf{D}_i$ determinantu matricu koju dobijemo tako da se u matrici $\mathbf{A}$ zamijeni i-ti stupac s vektorom $\mathbf{b}$, a s D determinantu matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D}_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Onda za i-tu komponentu rješenja vrijedi

$$x_i = \frac{D_i}{D}. \tag{4}$$

Primjer 9.

Rješenje sustava reda 2 možemo zapamtiti. Ako je

$$\begin{aligned} ax + by &= e, \\ cx + dy &= f, \end{aligned}$$

i ako je $ad - bc \neq 0$, po Cramerovom pravilu imamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{de - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Primjer 10.

Riješi sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= -4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned}$$

► Potrebno je najprije izračunati determinantu. Ako je ona jednaka nuli, Cramerovo je pravilo neprimjenjivo. Sustav napisan u matričnom obliku glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Determinanta iznosi 25. Zato je

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{25} = \frac{50}{25} = 2, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{25} = \frac{-25}{25} = -1$$

i slično $x_3 = 3$. ◄

Kao i za inverznu matricu, Cramerovo pravilo numerički je efikasno za matrice reda 2 i (ponekad) za matrice reda 3. Za sustave većega reda svakako ga treba izbjegavati. Međutim, njegova važnost ostaje u tome što daje eksplicitni izraz za rješenja sustava.