Matematička analiza 1 - Poglavlje 9

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 16. PROSINCA 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

9 PRIMJENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA 5

9.1 Monotonost 5

9.2 Lokalni ekstremi 7

9.2.1 Određivanje karaktera lokalnih ekstrema iz intervala monotonosti 8

9.2.2 Karakter lokalnih ekstrema iz predznaka druge derivacije 9

9.3 Globalni ekstremi funkcije 11

9.4 Primjena ekstrema 14

9.5 Konveksnost, konkavnost i točke infleksije funkcije 20

9.6 Asimptote - ponavljanje 23

9.7 Crtanje kvalitativnog grafa funkcije 24

9.8 ZADACI 27

9.9 RJEŠENJA ZA VJEŽBE I ZADATKE 28

9.9.1 Rješenja za vježbe iz pogavlja 9. 28

9.9.2 Rješenja za zadatke iz poglavlja 9.8. 32

Kazalo 39

9. PRIMJENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Ključni pojmovi: monotonost i predznak prve derivacije 6, lokalni ekstremi i intervali monotonosti 8, lokalni ekstremi i druga derivacija 9, intervali konveksnosti i konkavnosti 20, točka infleksije 20, crtanje kvalitativnog grafa funkcije 24

9.1 Monotonost

Znamo da funkcija $f(x)$ raste (odnosno pada) na nekom intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ ako je $f(x_1) \leq f(x_2)$ (odnosno $f(x_1) \geq f(x_2)$) za sve točke $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 < x_2$. Ukratko, funkcija $f(x)$ je monotona na nekom intervalu $\langle a,b\rangle$ ako $f(x)$ raste na $\langle a,b\rangle$ ili pada na $\langle a,b\rangle$. Pri tome se kaže da je $\langle a,b\rangle$ interval monotonosti funkcije $f(x)$. Za elementarne funkcije nije teško odrediti intervale monotonosti, na primjer:

- eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ raste na $\mathbb{R}$;
- logaritamska funkcija $f(x) = \ln x$ raste na $\langle 0,\infty\rangle$;
- eksponencijalna funkcija $f(x) = e^{-x}$ pada na $\mathbb{R}$;
- linearna funkcija $f(x) = kx + l$ raste (odnosno pada) na $\mathbb{R}$ ako je $k > 0$ (odnosno $k < 0$);
- kvadratna funkcija $f(x) = kx^2 + lx + m$, $k > 0$ pada na $\langle -\infty, x_T\rangle$ i raste na $\langle x_T, \infty\rangle$, gdje je $x_T = -l/2k$ tjeme od $f(x)$;
- hiperbolna funkcija $f(x) = \operatorname{ch} x$ pada na $\langle -\infty, 0\rangle$ i raste na $\langle 0,\infty\rangle$;
- trigonometrijska funkcija $f(x) = \sin x$ raste na intervalima $\langle -\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2n\pi\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$ te pada na intervalima $\langle \pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$;
- trigonometrijska funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ raste na intervalima $\langle -\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$.

Međutim, za funkcije $f(x)$ koje su složenije od elementarnih funkcija nije lako provjeriti nejednakost između $f(x_1)$ i $f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 < x_2$, pa je za većinu takvih funkcija nemoguće na ovakav direktan način pronaći intervale monotonosti. Kao što su funkcije: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$, $f(x) = \sin x - x/2$, $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Zbog toga u sljedećem rezultatu ovaj problem rješavamo pomoću predznaka prve derivacije diferencijabilne funkcije $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$.

Teorem 9.1.1 Neka je $f(x)$ diferencijabilna funkcija na $\langle a,b\rangle$. Tada vrijedi:

$$f(x) \text{ raste na } \langle a,b\rangle \iff f'(x)\geq 0,\ \forall x\in\langle a,b\rangle;$$
$$f(x) \text{ pada na } \langle a,b\rangle \iff f'(x)\leq 0,\ \forall x\in\langle a,b\rangle.$$

Znamo da funkcija $f(x)$ strogo raste (odnosno strogo pada) na nekom intervalu $\langle a,b\rangle\subseteq\mathbb{R}$ ako je $f(x_1)<f(x_2)$ (odnosno $f(x_1)>f(x_2)$) za sve točke $x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$, $x_1<x_2$. Interval $\langle a,b\rangle$ zovemo *interval monotonosti* funkcije f. Primjetimo da su točke a i b ili rubovi domene ili stacionarne ili kritične točke funkcije f.

Problem 9.1 **Vrijede li tvrdnje Teorema 9.1.1 ako se "raste" i "$f'(x)\geq 0$" (odnosno "pada" i "$f'(x)\leq 0$") zamjene s "strogo raste" i "$f'(x)>0$" (odnosno "strogo pada" i "$f'(x)<0$")?**

Kao prvo, ponovimo tvrdnje Korolara 8.2.5 iz Poglavlja 8:

(i) $f'(x)>0$ na $\langle a,b\rangle \implies f(x)$ strogo raste na $\langle a,b\rangle$;
(ii) $f'(x)<0$ na $\langle a,b\rangle \implies f(x)$ strogo pada na $\langle a,b\rangle$.

Međutim, iz $f(x)$ strogo raste na $\langle a,b\rangle$ općenito ne slijedi da je $f'(x)>0$, $\forall x\in\langle a,b\rangle$. Primjer za ovo je funkcija $f(x)=x^3$ jer $f(x)$ strogo raste na $\langle -1,1\rangle$ ali $f'(x)>0$, $\forall x\in\langle -1,0\rangle$, $f'(0)=0$ i $f'(x)>0$, $\forall x\in\langle 0,1\rangle$. Prema tome, odgovor na pitanje iz Problema 10.1 je negativan! Potpuni odgovor na naše pitanje je sastavni dio sljedećeg rezultata, koji se u daljnjem gradivu neće koristiti: ako je $f(x)$ diferencijabilna funkcija na $\langle a,b\rangle$ i skup S označava skup svih stacionarnih točaka od $f(x)$ takav da ne sadrži u sebi interval, tada vrijedi:

$$f(x) \text{ strogo raste na } \langle a,b\rangle \iff f'(x)>0,\ \forall x\in\langle a,b\rangle\setminus S;$$
$$f(x) \text{ strogo pada na } \langle a,b\rangle \iff f'(x)<0,\ \forall x\in\langle a,b\rangle\setminus S.\ \square$$

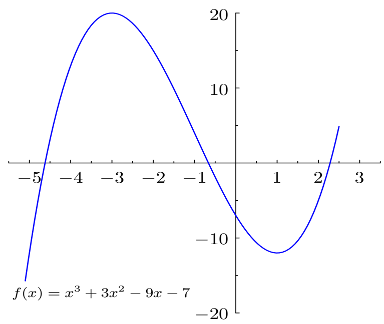
U sljedećim primjerima pokazujemo primjenu Teorema 9.1.1 za pronalaženje intervala monotonosti danih diferencijabilnih funkcija.

■ **Primjer 9.1** Intervale monotonosti funkcije $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$ tražimo u nekoliko koraka:

- $f(x)=x^3+3x^2-9x-7 \implies f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$;
- $f'(x)\geq 0 \iff x^2+2x-3\geq 0 \iff x\in\langle-\infty,-3\rangle\cup\langle 1,\infty\rangle$;
- $f'(x)\leq 0 \iff x^2+2x-3\leq 0 \iff x\in\langle -3,1\rangle$.

Sada po Teoremu 9.1.1 slijedi:

intervali	$\langle-\infty,-3\rangle$	$\langle -3,1\rangle$	$\langle 1,\infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$



Slika 9.1

■

■ **Primjer 9.2** Pronađimo intervale monotonosti funkcije $f(x) = \sin x - x/2$.

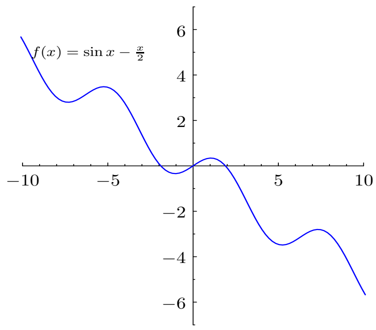
Postupak rješavanja:

• $f(x) = \sin x - x/2 \implies f'(x) = \cos x - 1/2$;

• $f'(x) \geq 0 \iff \cos x \geq 1/2 \iff x \in \langle -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{\pi}{3} + 2n\pi \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$;

• $f'(x) \leq 0 \iff \cos x \leq 1/2 \iff x \in \langle \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sada po Teoremu 9.1.1 slijedi da funkcija $f(x)$ raste na intervalima $\langle -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{\pi}{3} + 2n\pi \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$ te pada na intervalima $\langle \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$.



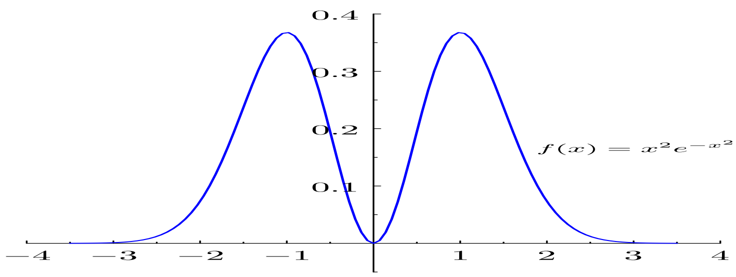
Slika 9.2

■

■ **Primjer 9.3** Pronađimo intervale monotonosti funkcije $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

Rješenje. Budući da je $f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$ predznak od $f'(x)$ tražimo pomoću sljedeće tablice:

intervali	$\langle -\infty, -1 \rangle$	$\langle -1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 1, \infty \rangle$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$



Slika 9.3

■

9.2 Lokalni ekstremi

Točke 1 do 3 iz sljedećeg pravila smo radili u Poglavlju 9.1. Pod 4. točkom "Određivanje karaktera lokalnih ekstrema" podrazumjevamo postupke koje ćemo objasniti u sljedeća dva podpoglavlja: određivanje karaktera lokalnih ekstrema iz intervala monotonosti (Poglavlje 9.2.1) i iz predznaka druge derivacije (Poglavlje 9.2.2).

Pravilo 1 Postupka za traženje lokalnih ekstrema fukcije f

1: Izračunamo $f'(x)$.
2: Teorem 9.2.1: odredimo stacionarne točke funkcije f odnosno riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$.
3: Nađemo tablicu monotonosti funkcije f.
4: Odredimo karakter lokalnih ekstrema funkcije f.

9.2.1 Određivanje karaktera lokalnih ekstrema iz intervala monotonosti

Za određivanje karaktera lokalnih ekstrema iz tablice monotonosti koristimo sljedeći jednostavan princip: neka su $\langle a,c\rangle$ i $\langle c,b\rangle$ dva intervala monotonosti funkcije $f(x)$ takva da je $\langle a,b\rangle \subseteq \mathscr{D}(f)$ (na primjer, ovo su dva intervala iz tablice monotonosti funkcije f); iz definicije lokalnog maksimuma i minimuma $f(x)$ (vidi Definiciju 9.2.1) lako zaključujemo sljedeće:

> ako $f(x)$ (strogo) raste na $\langle a,c\rangle$ i (strogo) pada na $\langle c,b\rangle$,
> tada je $x = c$ točka (strogog) lokalnog maksimuma od $f(x)$;
>
> ako $f(x)$ (strogo) pada na $\langle a,c\rangle$ i (strogo) raste na $\langle c,b\rangle$,
> tada je $x = c$ točka (strogog) lokalnog minimuma od $f(x)$.

Na primjer, ako primjenimo ovaj jednostavan princip određivanja karaktera lokalnih ekstrema iz intervala monotonosti, tada specijalno za funkcije iz Primjera 9.1, 9.2 i 9.3 dobivamo:

• znamo da $f(x) = x^3+3x^2-9x-7$ raste na intervalima $\langle -\infty,-3\rangle$ i $\langle 1,\infty\rangle$ i pada na intervalu $\langle -3,1\rangle$, iz čega slijedi:

$$\begin{cases} x=-3 \text{ je točka lokalnog maksimuma od } f(x), \\ x=1 \text{ je točka lokalnog minimuma od } f(x); \end{cases}$$

• znamo da $f(x) = \sin x - x/2$ raste na intervalima $\langle -\frac{\pi}{3}+2n\pi, \frac{\pi}{3}+2n\pi\rangle$, $n\in\mathbb{Z}$ te pada na intervalima $\langle \frac{\pi}{3}+2n\pi, \frac{5\pi}{3}+2n\pi\rangle$, $n\in\mathbb{Z}$, iz čega slijedi:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \text{ su točke lokalnog maksimuma od } f(x), \\ x=\frac{5\pi}{3}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \text{ su točke lokalnog minimuma od } f(x); \end{cases}$$

• znamo da $f(x) = x^2e^{-x^2}$ raste na intervalima $\langle -\infty,-1\rangle$ i $\langle 0,1\rangle$ te pada na intervalima $\langle -1,0\rangle$ i $\langle 1,\infty\rangle$, iz čega slijedi:

$$\begin{cases} x=-1 \text{ i } x=1 \text{ su točke lokalnog maksimuma od } f(x), \\ x=0 \text{ je točka lokalnog minimuma od } f(x). \end{cases}$$

■ **Primjer 9.4** Odredimo intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

Postupak rješavanja:

• $f(x) = x\sqrt{1-x^2} \implies \mathscr{D}(f) = [-1,1]$ i $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;
• $f'(x) \geq 0 \iff 1-2x^2 \geq 0 \iff x \in \langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\rangle$;
• $f'(x) \leq 0 \iff 1-2x^2 \leq 0 \iff x \in \langle -1, -\sqrt{2}/2\rangle \cup \langle \sqrt{2}/2, 1\rangle$.

Sada po Teoremu 9.1.1 slijedi

intervali	$\left\langle -1,-\sqrt{2}/2\right\rangle$	$\left\langle -\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right\rangle$	$\left\langle \sqrt{2}/2,1\right\rangle$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

što povlači:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}/2 \text{ je točka lokalnog maksimuma od } f(x), \\ x = -\sqrt{2}/2 \text{ je točka lokalnog minimuma od } f(x). \end{cases}$$

■

Vježba 9.1 Odrediti intervale monotonosti i lokalne ekstreme za sljedeće funkcije:

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$; **2.** $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{x^2-x-2}$;

3. $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}-2e^x+2}$; [postupak –> **KLIKNI**] .

9.2.2 Karakter lokalnih ekstrema iz predznaka druge derivacije

Osim iz intervala monotonosti, karakter lokalnih ekstrema funkcije $f(x)$ se može odrediti iz predznaka druge derivacije $f''(x)$. Kao prvo, po Fermatovom teoremu (Teorem 9.2.1) slijedi da lokalne ekstreme funkcije $f(x)$ pronalazimo među njenim stacionarnim točkama. Kao drugo, karakter ovih stacionarnih točaka, određujemo po sljedećem kriteriju:

Teorem 9.2.1 Neka je $f : \langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput neprekinuto diferencijabilna funkcija i $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Ako je x_0 stacionarna točka od $f(x)$, tada vrijedi:
- $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ je točka strogog lokalnog minimuma od $f(x)$;
- $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ je točka strogog lokalnog maksimuma od $f(x)$.

Dokaz. Pomoću Taylorove formule, Teorem 9.3.1 iz Poglavlja 9, te pretpostavki ovog teorema, u prvom slučaju dobivamo:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(c)(x-x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f(x_0),$$

dok u drugom slučaju dobivamo:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(c)(x-x_0)^2 < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f(x_0),$$

što nas zajedno s definicijom lokalnih ekstrema dovodi do dokaza istinosti tvrdnji ovog teorema. □

■ **Primjer 9.5** Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1$.

Postupak rješavanja:
- $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$ i $f'(x) = -6(x^2-x-2)$;
- $f'(x) = 0 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x_1 = -1, x_2 = 2$;
- $f''(x) = -12x + 6$,

što povlači:

$$\begin{cases} f''(-1) = 18 > 0 \implies x_0 = -1 \text{ je točka lokalnog minimuma od } f(x), \\ f''(2) = -18 < 0 \implies x_0 = 2 \text{ je točka lokalnog maksimuma od } f(x). \end{cases}$$

■

■ **Primjer 9.6** Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Postupak rješavanja:

- $\mathscr{D}(f) = (0, \infty)$ i $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$;
- $f'(x) = 0 \implies 1 - \ln x = 0 \implies x_1 = e$;
- $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$,

što povlači: $f''(e) = -1/e^3 < 0 \implies x_1 = e$ je točka lokalnog maksimuma od $f(x)$. ■

■ **Primjer 9.7** Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$.

Postupak rješavanja:

- $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$ i $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$;
- $f'(x) = 0 \implies x^2 - 2x - 1 = 0 \implies x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$;
- $f''(x) = \frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(1+x^2)^3} = \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(1+x^2)^3} = \frac{2(x+1)(x^2-2x-1-2x+2)}{(1+x^2)^3}$,

što povlači:

$$\begin{cases} f''(x_1) = \frac{2(x_1+1)(-2x_1+2)}{(1+x_1^2)^3} = \frac{4(1-x_1^2)}{(1+x_1^2)^3} < 0 \implies x_1 \text{ je točka lokalnog maksimuma od } f(x), \\ f''(x_2) = \frac{2(x_2+1)(-2x_2+2)}{(1+x_2^2)^3} = \frac{4(1-x_2^2)}{(1+x_2^2)^3} > 0 \implies x_2 \text{ je točka lokalnog minimuma od } f(x). \end{cases}$$

Primjetimo da smo u ovom primjeru zbog složenosti od $f''(x)$ lakše mogli odrediti karakter lokalnih ekstrema iz tablice monotonosti funkcije f. ■

Dodatak

■ **Primjer 9.8** Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$.

Postupak rješavanja. Lako se provjeri da je:

$$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \quad \text{i} \quad f'(x) = (x-1)^2 e^x.$$

Sada iz $f'(x) = 0$ slijedi $(x-1)^2 = 0$ odnosno ova funkcija ima samo jednu stacionarnu točku $x_0 = 1$. Na dalje, lako se provjeri da je: $f''(x) = (x^2-1)e^x$, što povlači da je $f'(1) = f''(1) = 0$. Zbog toga, ne možemo primijeniti Teorem 9.2.1. U ovakvoj situaciji, za stacionarnu točku $x_0 = 1$ možemo primjeniti ili argumente iz sljedeće:

> **Napomena 9.1** Lakše i neposrednije rješenje Primjera 9.8 dobivamo iz činjenice što je vrijednost derivacije $f'(x)$ pozitivna za sve $x \neq 1$, a nula samo za $x = 1$. Prema tome, funkcija f je svuda strogo rastuća, pa radi toga nema niti jedan lokalni ekstrem.

ili sljedeći profinjeni oblik Teorema 9.2.1:

> **Teorem 9.2.2** Neka je x_0 točka u kojoj funkcija $f(x)$ ima sve neprekidne derivacije reda $k = 1, 2, \ldots, n$, takve da je:
>
> $$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$
>
> Ako je n neparan prirodan broj, tada x_0 nije točka ekstrema. Ako je n paran prirodan broj, tada je x_0 točka ekstrema i vrijedi:
>
> $$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ je točka lokalnog minimuma od } f(x), \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ je točka lokalnog maksimuma od } f(x). \end{cases}$$

Sada nastavljamo s Primjerom 9.8. Budući da je: $f''(x) = (x^2-1)e^x$, to je:

$$f'''(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x,$$

pa zaključujemo da je $f'''(1) = 2e$. Prema tome dobili smo da je:

$$f'(1) = f''(1) = 0 \quad \text{i} \quad f'''(1) \neq 0.$$

Primjenom prethodnog teorema zaključujemo da stacionarna točka $x_0 = 1$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije $f(x)$, pa prema tome $f(x)$ nema niti jednu točku lokalnog ekstrema na svojoj domeni $\mathbb{R}$. ■

Dokaz Teorem 9.2.2. Pokažimo tvrdnju za n paran. Iz Taylorove formule (Teorem 9.3.1) i pretpostavke

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

slijedi da za svaki x postoji c sadržan između x_0 i x, takav da je:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-x_0)^n.$$

Budući da smo pretpostavili da je $f^{(n)}(x)$ neprekidna u x_0 i $f^{(n)}(x_0) > 0$ (prvi slučaj), tada je $f^{(n)}(x)$ isto tako pozitivno za sve x iz neke okoline oko x_0 odnosno postoji $\delta_0 > 0$ takav da je $f^{(n)}(x) > 0$ za svaki $x \in \langle x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0 \rangle$. Za svaki x iz tog intervala je odgovarajuća točka c također u njemu, pa je posebno $f^{(n)}(c) > 0$. Kako je n paran broj to je

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-x_0)^n > f(x_0), \ \forall x \in \langle x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0 \rangle,$$

iz čega slijedi da je $f(x) > f(x_0)$ na $\langle x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0 \rangle$, pa zaključujemo stoga da je x_0 točka lokalnog minimuma od $f(x)$. Analogno postupamo u slučaju kad je $f^{(n)}(x_0) < 0$.
Međutim ukoliko je n neparan, tada potencija $(x-x_0)^n$ mijenja predznak ovisno o poziciji broja x oko x_0, pa je onda $f(x) > f(x_0)$ za x-ove s jedne strane blizu x_0, a $f(x) < f(x_0)$ za x-ove s druge strane, odnosno tada x_0 nije točka ekstrema od $f(x)$. □

Vježba 9.2 Odrediti lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

1. $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. **2.** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. **3.** $f(x) = e^{\frac{x-2}{x-3}}$.

4. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x-1}}$; [postupak pomoću tablice monotonosti –> **KLIKNI**] ;
[postupak pomoću predznaka druge derivacije –> **KLIKNI**] .

5. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2-x}\right)$.

9.3 Globalni ekstremi funkcije

Definicija 9.3.1 Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$, gdje je A bilo koji neprazan skup, kažemo da u točki $a \in A$ (ako postoji) ima *globalni maksimum* ako je $f(a) \geq f(x)$ za sve $x \in A$. Slično se definira i *globalni minimum* funkcije f. Takve točke zovu se točke *globalnih ekstrema* funkcije f. ■

Na primjer, funkcija $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = 1 - x^2$ ima globalni maksimum u točki $a = 0$, ali nema točke globalnog minimuma. S druge strane, funkcija $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definirana s $g(x) = 1 - x^2$ ima ne samo globalni maksimum u točki $a = 0$, nego i dvije točke globalnog minimuma: $a_{1,2} = \pm 1$.

Jasno je da funkcija $f(x)$ koja je neprekinuta na $[a,b]$ i strogo raste na otvorenom intervalu $\langle a,b \rangle$ nema lokalne ekstreme u $\langle a,b \rangle$. Što više, na rubovima intervala $\langle a,b \rangle$ vrijedi:

$$f(a) = \min_{[a,b]} f(x) \quad \text{i} \quad f(b) = \max_{[a,b]} f(x).$$

U ovakvom slučaju $x = a$ je globalni minimum, a $x = b$ globalni maksimum od $f(x)$ na zatvorenom intervalu $[a,b]$ jer vrijedi:

$$f(a) \leq f(x), \ \forall x \in [a,b] \quad \text{i} \quad f(b) \geq f(x), \ \forall x \in [a,b].$$

Prema tome, $x = a$ i $x = b$ su globalni ekstremi od $f(x)$ na zatvorenom intervalu $[a,b]$, kao u sljedećem primjeru.

■ **Primjer 9.9** Funkcija $f(x) = e^x$ na intervalu $[0,1]$ postiže globalni minimum u $x = 0$ i globalni maksimum u $x = 1$, a funkcija $f(x) = \sin x$ na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ postiže globalni minimum u $x = -\frac{\pi}{2}$ i globalni maksimum u $x = \frac{\pi}{2}$. Primijetimo da obadvije funkcije na pripadnim otvorenim intervalima nemaju globalne ekstreme. ■

Međutim, funkcija može imati istovremeno u jednoj točki i lokalni i globalni ekstrem na $[a,b]$ koji se postiže unutar intervala $\langle a,b \rangle$ te pri tome na jednom rubu postiže a na drugom ne postiže globalni ekstrem, kao što je pokazano u sljedećem primjeru.

■ **Primjer 9.10** Funkcija $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1,3]$ ima u $x = 0$ istovremeno i lokalni i globalni minumum, dok u $x = 3$ postiže svoj globalni maksimum, jer je $f(3) = 9 \geq f(x)$ za sve $x \in [-1,3]$. Primjetimo da u rubnoj točki $x = -1$ funkcija f ne poprima globalni maksimum. ■

Prema Poglavlju 7.2 koji se bavi neprekinutim funkcijama na zatvorenom intervalu i Teoremu 7.2.3 znamo da za takve funkcije uvijek postoje globalni minimum i maksimum, što nam je ovdje bitno. Odnosno: ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija na $[a,b]$, tada funkcija $f(x)$ poprima minimum i maksimum na zatvorenom intervalu $[a,b]$, tj. postoje $x_m, x_M \in [a,b]$ takvi da vrijedi

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \ \forall x \in [a,b]\,.$$

Zbog ovog svojstva, za neprekinute funkcije vrijedi:

$$f([a,b]) = [f(x_m), f(x_M)].$$

U sljedeća 3 slučaja, neprekinuta fukcija $f(x)$ može poprimiti globalni ekstrem na $[a,b]$:

Pravilo 2 Nužni uvjeti za globalni ekstrem funkcije f u točki $x = c$

1: $c \in \langle a,b \rangle$ je stacionarna točka odnosno $f'(c) = 0$;
2: ili $c \in [a,b]$ je kritična točka odnosno točka u kojoj ne postoji derivacija $f'(x)$;
3: ili c je jedna od rubnih točaka odnosno $c = a$ ili $c = b$.

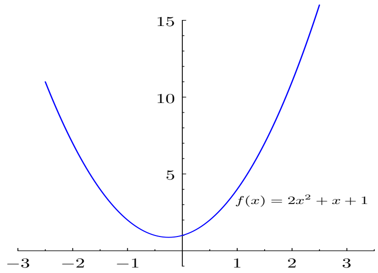
■ **Primjer 9.11** Odredimo globalne ekstreme funkcije $f(x) = -x^2 - x + 2$ na intervalu $[-2,3]$.

Rješenje.

• Stacionarne točke: $f'(x) = 0$ odnosno $-2x - 1 = 0 \implies x = -1/2$ je lokalni maksimum i $f(-1/2) = 9/4$.
• Vrijednosti od $f(x)$ u rubnim točkama: $f(-2) = 0$ i $f(3) = -10$.
• Usporedba vrijednosti: $f(-1/2) > f(-2)$, $f(-1/2) > f(3)$ i $f(3) < f(-2)$.
• Zaključak: $x = -1/2$ je točka globalnog maksimuma, a $x = 3$ je točka globalnog minimuma funkcije f. ■

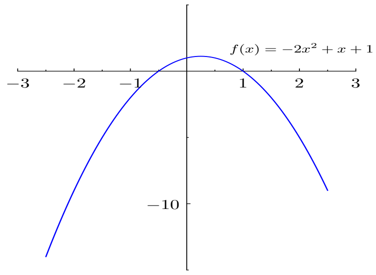
Prethodni primjer se može generalizirati kao što slijedi.

Vježba 9.3 Neka je $f(x) = kx^2 + mx + n$, $k \neq 0$ i $x_T = -m/2k$ tjeme ove parabole. Neka je $[a,b]$ interval takav da je $x_T \in \langle a,b \rangle$. Pokazati da vrijedi:
(i) ako je $k > 0$ tada je $x = x_T$ lokalni i globalni minimum od $f(x)$ na $[a,b]$, te $x = a$ je globalni maksimum ako je $f(a) > f(b)$, a $x = b$ je globalni maksimum ako je $f(a) < f(b)$; ako je $f(a) = f(b)$, tada su $x = a$ i $x = b$ dva globalna maksimuma od $f(x)$ na $[a,b]$;



Slika 9.4 Graf funkcije $f(x) = kx^2 + mx + n$, $k > 0$

(ii) ako je $k < 0$ tada je $x = x_T$ lokalni i globalni maksimum od $f(x)$ na $[a,b]$, te $x = a$ je globalni minimum ako je $f(a) < f(b)$, a $x = b$ je globalni minimum ako je $f(a) > f(b)$; ako je $f(a) = f(b)$, tada su $x = a$ i $x = b$ dva globalna minimuma od $f(x)$ na $[a,b]$.



Slika 9.5 Graf funkcije $f(x) = kx^2 + mx + n$, $k < 0$

■ **Primjer 9.12** Odredimo globalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ na intervalu $[-1,1]$.

Rješenje.

• Stacionarne točke: budući da je $f'(x) = 3x^2 + x - 2$ kvadratna funkcija to $f'(x) = 0$ odnosno $3x^2 + x - 2 = 0 \implies x_1 = -1$ i $x_2 = 2/3$ te $f'(x) > 0$ na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2/3, \infty\rangle$ i $f'(x) < 0$ na $\langle -1, 2/3\rangle$; prema tome $x_1 = -1$ je lokalni maksimum, a $x_2 = 2/3$ je lokalni miminum od $f(x)$ s vrijednostima $f(x_1) = 3/2$ i $f(x_2) = -22/27$.
• Vrijednosti od $f(x)$ u rubnim točkama: $f(-1) = 3/2$ i $f(1) = -1/2$.
• Usporedba vrijednosti: $f(-1) \geq f(1)$ i $f(2/3) \leq f(1)$.
• Zaključak: $x_1 = -1$ je točka globalnog maksimuma, a $x_2 = 2/3$ je točka globalnog minimuma funkcije f. ■

■ **Primjer 9.13** Odredimo globalne ekstreme funkcije $f(x) = 5\sqrt[5]{x^4} + 4x$ na intervalu $[-3,1]$.

Rješenje.

• Stacionarne i kritične točke: $f'(x) = 4x^{-1/5} + 4$ i $f'(x) = 0 \implies \sqrt[5]{x} = -1 \implies x = -1$; primjetimo da $f'(x)$ nije definirana u $x = 0$; prema tome $x_1 = -1$ je stacionarna, a $x_2 = 0$ je kritična točka od f.
• Tablica monotonosti:

intervali	$\langle -3,-1\rangle$	$\langle -1,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

prema tome, $x_1 = -1$ je lokalni maksimum, a $x_2 = 0$ je lokalni miminum od $f(x)$ s vrijednostima $f(x_1) = 1$ i $f(x_2) = 0$.
• Vrijednosti od $f(x)$ u rubnim točkama: $f(-3) = 5\sqrt[5]{81} - 12 \approx 0.08$ i $f(1) = 9$.
• Usporedba vrijednosti: $f(1) \geq f(x_1)$ i $f(x_2) \leq f(-3)$.
• Zaključak: rubna točka $x = 1$ je točka globalnog maksimuma, a $x_2 = 0$ je točka globalnog minimuma funkcije f. ■

Primjer 9.14 Odredimo sliku funkcije $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, gdje je

$$f(x) = x + 3\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Rješenje. Budući da je f neprekidna funkcija na intervalu $[0,2]$, iz prethodnih poglavlja znamo da je slika od $f([0,2])$ interval za koji vrijedi:

$$f([0,2]) = [f(x_{\min}), f(x_{\max})],$$

gdje su $x_{\min}$ i $x_{\max}$ točke globalnog minimuma i maksimuma funkcije $f(x)$, koje tražimo kao u prethodnim primjerima:

• Stacionarne i kritične točke.

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{\sqrt[3]{x-1}+2}{\sqrt[3]{x-1}}$$

iz čega slijedi da je $x = 1$ kritična točka od $f(x)$ jer $f'(x)$ nije definirana u $x = 1$; pri tome $f'(x) = 0$ je jedino u točki $x = -7$ što nije točka iz intervala $[0,2]$; prema tome $f(x)$ nema stacionarnih točaka u intervalu $(0,2)$.

• Tablica monotonosti:

intervali	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

iz čega slijedi da je $x = 1$ je lokalni minimum s vrijednosti $f(1) = 1$.

• Vrijednosti od $f(x)$ u rubnim točkama: $f(0) = 3$ i $f(2) = 5$.

• Usporedba vrijednosti: $f(2) \geq f(0)$ i $f(1) \leq f(0)$.

• Zaključak: rubna točka $x = 2$ je točka globalnog maksimuma, a kritična točka $x = 1$ je točka globalnog minimuma funkcije f. ■

Vježba 9.4 Na intervalu $[-1,1]$ odrediti globalne ekstreme funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Vježba 9.5 Na intervalu $[-4,-2]$ odrediti globalne ekstreme funkcije:

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2};$$ [postupak –> ↻**KLIKNI**↻] .

9.4 Primjena ekstrema

U ovom poglavlju rješavamo neke probleme maksimuma i minimuma funkcija pomoću kojih matematički modeliramo duljine, površine, oplošja, volumene i druge veličine vezane uz geometrijske oblike kao što su odsječak na pravcu, trokut, pravokutnik i valjak.

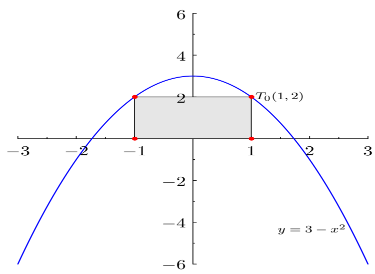
Štoviše, postupak traženja lokalnih ekstrema se koristi za rješavanje raznih problema i u drugim znanostima i tehničkim strukama kod kojih je potrebno pronaći maksimum ili minimum funkcije jedne varijable. Problem traženja ekstrema funkcije jedne varijable je ustvari najjednostavniji tip problema koje zovemo problemi optimizacije. Kod složenijih problema optimizacije promatramo funkcije više varijabli te problem sadrži i dodatne uvjete koji se moraju zadovoljiti. Takve složenije probleme optimizacije ćemo rješavati kod funkcija više varijabli u Matematičkoj analizi 2 te u Diskretnoj matematici, a susretat ćete ih i u ostalim stručnim kolegijima studija.

■ **Primjer 9.15** Odredimo pravokutnik maksimalne površine čija dva vrha leže na x-osi, a preostala dva vrha na paraboli $y = 3 - x^2$, $y > 0$ (ili drugim riječima, od svih pravokutnika upisanih u ravninski lik koji je omeđen parabolom $y = 3 - x^2$, $y > 0$ i x-osi odredimo onaj koji ima maksimalnu površinu).
Rješenje:

• prvo se nacrta skica koja se sastoji od parabole $y = 3 - x^2$, $y > 0$ te traženog pravokutnika s vrhom $T(x_0, y_0)$ u prvom kvadrantu ($x_0 > 0$, $x_0 > 0$) koji leži na zadanoj paraboli odnosno $y_0 = 3 - x_0^2$, vidi Sliku 10.9 dolje;
• iz geometrije znamo da je $P = ab$ površina pravokutnik duljine stranica a i b ;

• sa skice vidimo da za duljine stranica traženog pravokutnika vrijedi $a = 2x_0$ i $b = y_0$, što sve zajedno povlači da P ovisi o točki $T(x_0, y_0)$ na način da je: $P = ab = 2x_0y_0 = 2x_0(3 - x_0^2)$;

• prema tome, problem traženja ovakvog pravokutnika maksimalne površine se svodi na traženje maksimuma funkcije jedne varijable $P(x) = 2x(3 - x^2)$, $x \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$; budući da je $P(0) = P(\sqrt{3}) = 0$, to se traženi maksimum $x_{\max}$ nalazi unutar $\langle 0, \sqrt{3} \rangle$, pa je $x_{\max}$ istovremeno i globalni i lokalni maksimum funkcije $P(x)$ na $[0, \sqrt{3}]$;
• $P(x) = 6x - 2x^3$, $P'(x) = 6 - 6x^2$ i $P'(x) = 0 \implies x_0 = 1$, $y_0 = 3 - x_0^2 = 2 \implies T(x_0, y_0) = (1, 2)$;
• $P''(x) = -12x \implies P''(1) = -12 < 0 \implies x_{\max} = 1$ je točka globalnog maksimuma funkcije $P(x)$ na $[0, \sqrt{3}]$;
• prema tome traženi pravokutnik ima vrhove $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$ i $(-1, 0)$, sa površinom $P = 4$.



Slika 9.9

■

Vježba 9.6 Pokazati da pravokutnik s vrhovima $T_1(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3})$ i $T_2(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3})$ koji leže na grafu funkcije $f(x) = 4 - x^2$ a preostala dva vrha leže na segmentu $[-2, 2]$ na x-osi je pravokutnik maksimalne površine među svim pravokutnicima upisanim u ravninski lik koji je omeđen s parabolom $f(x) = 4 - x^2$, $x \in [-2, 2]$ i x-osi.

Vježba 9.7 U ravninski lik koji je omeđen s grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ i x-osi upisati pravokutnik maksimalne površine; [postupak –> ↺**KLIKNI**↻] .

■ **Primjer 9.16** Odredimo trokut maksimalne površine koji je upisan u kružnicu $x^2 - 2x + y^2 = 0$ tako da mu vrhovi baze leže na x-osi, a preostali vrh na zadanoj kružnici.
Rješenje:

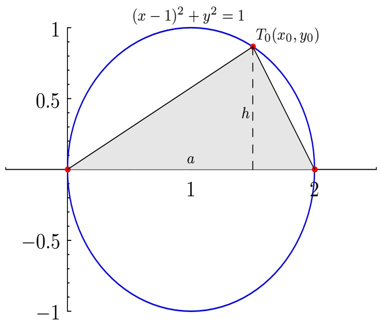
• iz geometrije znamo da je $P = ah/2$ površina trokuta s duljinama bazne stranice a i visine h spuštene na nju;

• neka je $T(x_0, y_0)$ proizvoljna točka u prvom kvadrantu ($x_0 > 0$, $x_0 > 0$) koja leži na zadanoj kružnici (vidi skicu dole) odnosno $y_0 = \sqrt{2x_0 - x_0^2}$;

• sa Slike 10.10 dolje vidimo da za duljine a i h vrijedi $a = 2$ i $h = y_0$, što sve zajedno povlači da P ovisi o točki $T(x_0, y_0)$ na način da je: $P = ah/2 = \sqrt{2x_0 - x_0^2}$;

• prema tome, problem traženja ovakvog pravokutnika maksimalne površine se svodi na traženje maksimuma funkcije $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle \implies f'(x) = (1-x)/\sqrt{2x-x^2}$, $f'(x) = 0 \implies x_0 = 1$; budući da je $f'(x)$ razlomak s pozitivnim nazivnikom te brojnikom $1-x$, to predznak $f'(x)$ oko točke $x_0 = 1$ samo ovisi o predznaku brojnika odnosno $f'(x) > 0$ za $x < 1$ i $f'(x) < 0$ za $x > 1$; prema tome $x_0 = 1$ je točka lokalnog maksimuma funkcije $f(x)$; budući da je $f(0) = f(2) = 0 < f(1) = 1$, točka $x_0 = 1$ je točka globalnog maksimuma funkcije $f(x)$ na intervalu $[0, 2]$;

• iz prethodnog slijedi da je $P_{\max} = 1$.



Slika 9.10

■

Vježba 9.8 Pokazati da za $x = \sqrt[6]{2}$, pravokutni trokut s katetama duljine x i $1/x^2$ ima najkraću hipotenuzu.

Vježba 9.9 U kružnicu polumjera $r = 1$ upisati jednakokračan trokut maksimalne površine. Potom, izračunati duljinu h visine ovog trokuta spuštene na njegovu osnovicu;
[postupak –> ↺**KLIKNI**↻] .

■ **Primjer 9.17** Oplošje O uspravnog valjka je 2π kvadratnih metara. Odrediti polumjer r baze ovog valjka tako da volumen V valjka bude maksimalan.
Rješenje:

• iz geometrije znamo da je volumen ovakvog valjka $V = r^2\pi v$, gdje je v duljina visine valjka;

• prema ovome, volumen V ovisi o dvije varijable: polumjera r i visine h, odnosno, $V = V(r, v)$; budući da mi radimo s funkcijama jedne varijable, potrebno je eliminarati visinu v iz zadanog uvjeta na oplošje O;

• iz geometrije znamo da je oplošje ovakvog valjka $O = 2r^2\pi + 2r\pi v$, pa iz uvjeta $O = 2\pi$ slijedi $r^2 + rv = 1$ odnosno $v = (1 - r^2)/r$, vidi Sliku 10.11 dolje;

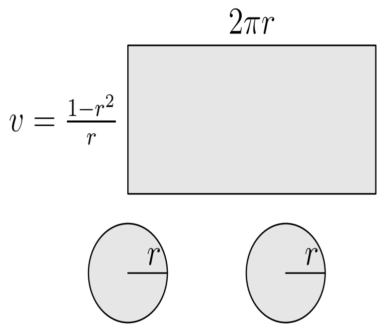
• iz prethodnog dobivamo: $V = V(r) = r^2\pi(1-r^2)/r = r\pi(1-r^2)$, $r > 0$;

• prema tome, problem traženja maksimalnog volumena V se svodi na traženje lokalnog maksimuma funkcije $V(r) = r\pi(1-r^2)$ za $r \in \langle 0, 1 \rangle$, jer je $V(r) < 0$ za $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ i $V(0) = V(1) = 0$;

• $V'(r) = \pi(1 - 3r^2)$ i $V'(r) = 0 \implies r^2 = 1/3 \implies r_1 = 1/\sqrt{3} \in \langle 0, 1 \rangle$;

• $V''(r_1) = -6r_1\pi > 0 \implies r_1$ je točka lokalnog i globalnog maksimuma od $V(r)$;

• zaključujemo da je maksimalna vrijednost volumena traženog valjka jednaka $V_{\max} = V(r_1) = r_1\pi(1 - r_1^2) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$;



Slika 9.11

■

Vježba 9.10 Pokazati da valjak minimalnog oplošja O i volumena $V = 1$ mora imati polumjer baze $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Vježba 9.11 U kutiji volumena $V = 72$ s duljinama stranicama a, b i c, za duljine stranica baze vrijedi $a : b = 1 : 2$. Pokazati da je oplošje ove kutije minimalno ako je $a = 3$, $b = 6$ i $c = 4$.

■ **Primjer 9.18** U kojoj točki na grafu funkcije $f(x) = 1/x$ treba postaviti tangentu tako da duljina odsječka kojeg na tangenti odsijecaju koordinatne osi bude minimalna?

Rješenje:

• neka je $T(x_0, y_0)$ proizvoljna točka na krivulji $f(x) = 1/x$; tada je $y_0 = 1/x_0$, $f'(x_0) = -1/x_0^2$;

• kao na Slici 10.12 dolje, neka su $A(m,0)$ i $B(0,n)$ točke presjeka tangente $t \ldots\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ redom s x-osi i y-osi; zbog toga je tražena duljina d iznosi $d = d(m,n) = \sqrt{m^2+n^2}$;

• budući da radimo ekstreme funkcije jedne varijable, potrebno je m i n izraziti pomoću x_0:

iz $A(m,0) = t \cap O_x$ slijedi da točku $A(m,0)$ pronalazimo uvrštavanjem $x = m$ i $y = 0$ u tangentu t odnosno

$$0 - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(m - x_0) \implies m = 2x_0;$$

iz $B(0,n) = t \cap O_y$ slijedi da točku $B(0,n)$ pronalazimo uvrštavanjem $x = 0$ i $y = n$ u tangentu t odnosno

$$n - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(0 - x_0) \implies n = 2/x_0;$$

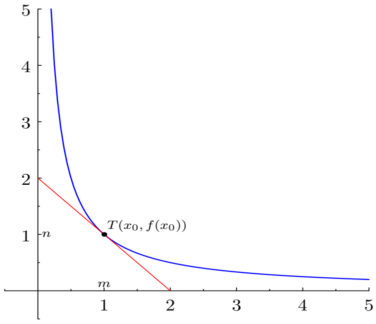
• iz prethodnog slijedi $d = d(m,n) = \sqrt{m^2+n^2} = 2\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}}$ odnosno $d = d(x_0) = 2\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}}$;

• prema tome, problem traženja minimalne udaljenosti se svodi na traženje minimuma funkcije

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \implies f'(x) = \frac{2x - \frac{2}{x^3}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2(x^4-1)}{x^3\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}},\ f'(x) = 0 \implies x^4 = 1 \implies x_1 = 1;$$

budući da je $f'(x)$ razlomak čiji predznak oko točke $x = 1$ samo ovisi o predzanku $x^4 - 1$, jer su ostali članovi od $f'(x)$ pozitivni oko $x = 1$, to imamo: $f'(x) < 0$ za $x < 1$ i $f'(x) > 0$ za $x > 1$, pa je $x_0 = 1$ točka lokalnog minimuma funkcije $f(x)$ na cijelom $\langle 0, \infty \rangle$;

• prema tome, zaključujemo da je $m = 2x_0 = 2$, $n = 2y_0 = 2$ i minimalna vrijednost tražene duljine je $d_{\min} = d(1) = 2\sqrt{2}$.



Slika 9.12

■

Vježba 9.12 Na graf funkcije $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ smo postavili tangentu u nekoj njenoj točki $T(x_0,y_0)$. Pokazati da je duljina odsječka kojeg na ovoj tangenti odsijecaju koordinatne osi minimalna za $x_0=\frac{1}{2}$.

Vježba 9.13 Iz točke $T(0,b)$, $b>1$ smo na graf funkcije $f(x)=1-x^2$ povukli dvije tangente tako da s x-osi zatvaraju trokut minimalne površine P. Pokazati da je $b=\frac{4}{3}$ i $P=\frac{8\sqrt{3}}{9}$; [postupak –> ↻**KLIKNI**↻] .

■ **Primjer 9.19** Spremnik za vodu se puni pomoću vodene pumpe tako da je volumen vode u spremniku dan formulom

$$V(d)=64+44d-3d^2$$

gdje su d dani, a volumen izražavamo u kilolitrama.
(a) Izračunajte brzinu promjene volumena četvrtog i osmog dana.
(b) Odredite trenutak u kojem je volumen vode najveći te izračunajte taj volumen.

Rješenje. (a) Brzina promjene volumena vode u spremniku je dana derivacijom funkcije V odnosno $V'(d)=44-6d$. Uvrštavanjem slijedi da je $V'(4)=20\,\mathrm{kl/dan}$ i $V'(8)=-4\,\mathrm{kl/dan}$. Pozitivna brzina promjene znači da se spremnik puni, a negativna da se spremnik prazni.

(b) Maksimalan volumen znači da tražimo lokalni maksimum funkcije V. Dakle, stacionarne točke dobivamo iz $V'(d)=44-6d=0$ odnosno $d=\frac{44}{6}=7\frac{1}{3}=7\mathrm{d}\,8\mathrm{h}$. Budući da je $V''(d)=-6<0$, zaključujemo da je dobivena stacionarna točka ujedno i točka lokalnog maksimuma funkcije V. Dakle, maksimalan volumen je $V(7\mathrm{d}8\mathrm{h})=225\frac{1}{3}\,\mathrm{kl}$. ■

■ **Primjer 9.20** Otpornik R je povezan s baterijom napona U s unutarnjim otporom r. Tada je snaga u vanjskom otporniku jednaka

$$P=\frac{U^2R}{(R+r)^2}.$$

Ako su U i r zadani, a otpor R se mijenja, kolika je maksimalna vrijednost snage P? Pokažite da se radi o maksimumu.

Rješenje. Zadano je da su U i r konstantni, a R se mijenja pa je P ustvari funkcija jedne varijable

$$P(R)=\frac{U^2R}{(R+r)^2}\quad\text{odnosno}\quad P(x)=\frac{U^2x}{(x+r)^2}.$$

Deriviranjem dobivamo

$$P'(x)=\frac{U^2(x+r)^2-U^2x\cdot 2(x+r)}{(x+r)^4}=\frac{U^2(r-x)}{(x+r)^3}.$$

Dobivamo stacionarnu točku $x=r$ te iz $f'(x)>0$ za $x<r$ i $f'(x)<0$ za $x>r$ slijedi da je to lokalni maksimum. Sada dobivamo $P(r)=\frac{U^2r}{(r+r)^2}=\frac{U^2}{4r}$. ■

■ **Primjer 9.21** Vlasnik seoskog imanja ima 2.4km ograde i želi ograditi pravokutno polje kojem je jedna stranica uz rijeku te ne treba ogradu. Koje će dimenzije biti ograđeno polje najveće površine? Izračunajte tu površinu te pokazite da se radi o maksimumu.

Rješenje. Funkcija površine pravokutnika sa stranicama a i b je $P = ab$. Primijetimo da je ovo funkcija s dvije varijable. Iz uvjeta da vlasnik ima 2.4 km ograde slijedi da je $2a+b = 2.4$ jer je jedna stranica pravokutnika uz rijeku i nema ogradu. Iz tog uvjeta slijedi da je $b = 2.4-2a$ te to ubacimo u funkciju površine i dobivamo funkciju jedne varijable

$$P(a) = a(2.4-2a) = 2.4a-2a^2$$

gdje je $a > 0$ jer je to stranica pravokutnika. Sada tražimo lokalni maksimum ove funkcije deriviranjem $P'(a) = 2.4-4a$ te iz $2.4-4a = 0$ slijedi da je stacionarna točka $a = 0.6\,\text{km}$. Iz druge derivacije $P''(0.6) = -4 < 0$ slijedi da je to lokalni maksimum. Maksimalna površina je $P(0.6) = 0.72\,\text{km}^2$. ■

Vježba 9.14 Potrošnja benzina u automobilu je dana formulom $P(v) = \frac{3}{80}v^2-6v+245$ gdje je v brzina automobila u km/h. Kojom brzinom trebamo voziti auto da bi potrošnja bila minimalna? Pokazite da se radi o maksimumu.

Vježba 9.15 Brzina odvijanja fotosinteze za jednu vrstu fitoplanktona se modelira funkcijom

$$P(I) = \frac{100I}{I^2+I+4}$$

gdje je I intenzitet svjetlosti. Za koji intenzitet svjetlosti I brzina reakcije P dostiže maksimum? Pokažite da se radi o maksimumu.

Diferencijalni račun možemo primijeniti i na probleme rješavanja složenijih nejednadžbi koje ne možemo rješavati nekim poznatim postupkom kao što možemo kvadratne i trigonometrijske nejednadžbe, odnosno eksponencijalne i logaritamske. Pogledajmo sada jedan takav primjer.

■ **Primjer 9.22** Pokažimo da vrijede nejednakosti: $x-x^2/2 < \ln(1+x) < x$, za svaki $x > 0$. ■

Rješenje. Prvo pokažimo da vrijedi $x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ za svaki $x > 0$. Definiramo funkciju f tako da sve prebacimo na desnu stranu: $f(x) = \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$. Sada želimo pokazati da je $f(x) > 0$ za svaki $x > 0$. Primijetimo da je $f(0) = 0$. Dakle, ako pokažemo da je f rastuća funkcija za $x > 0$, onda dobijemo da za sve $x > 0$ vrijedi da je $f(x) > f(0) = 0$. Računamo

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}-1+x = \frac{x^2}{1+x}.$$

Vidimo da je $f'(x) > 0$ za $x > -1$ te zaključujemo da f raste za $x > -1$ te raste i za $x > 0$. Time smo dokazali lijevu nejednakost.

Drugu nejednakost $\ln(1+x) < x$ dokazujemo analogno odnosno prebacimo sve na desnu stranu, definiramo $f(x) = x-\ln(1+x)$ te moramo pokazati da je $f(x) > 0$ za $x > 0$. Isto je $f(0) = 0$ te pokazujemo da je f rastuća. Sada iz

$$f'(x) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

slijedi da je f rastuća za $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$. Sada slijedi da je onda $f(x) > f(0) = 0$ za $x > 0$.

Primjetimo da se ove nejednakosti mogu pokazati i koristeći grafove funkcija.

9.5 Konveksnost, konkavnost i točke infleksije funkcije

Definicija 9.5.1 Neka je $f : \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija.

1. Za funkciju $f(x)$ kažemo da je *konveksna* na $\langle a, b\rangle$ ako je u svakoj točki grafa funkcije pripadajuća tangenta ispod grafa, odnosno: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
2. Za funkciju $f(x)$ kažemo da je *konkavna* na $\langle a, b\rangle$ ako je u svakoj točki grafa funkcije pripadajuća tangenta iznad grafa, odnosno: $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
3. Ako za svaku točku na grafu vrijedi da pripadna tangenta dodiruje graf samo u diralištu, onda je $f(x)$ *strogo* konveksna ili konkavna.

■

Dodatak

Općenita definicije konveksnosti odnosno konkavnosti funkcije $y = f(x)$ definirane na intervalu $\langle a, b\rangle$ može se definirati sljedećim Jensenovim nejednakostima. Za svaki $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ i $x, y \in \langle a, b\rangle$ vrijedi:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

ako i samo ako je $f(x)$ konveksna na $\langle a, b\rangle$ odnosno

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

ako i samo ako je $f(x)$ konkavna na $\langle a, b\rangle$.
Po ovoj definiciji, funkcija $y = |x|$ je konveksna, iako nije diferencijabilna.

■ **Primjer 9.23** Tipičan primjer za konveksnu funkciju na cijelom $\mathbb{R}$ je $f(x) = x^2$, dok za konkavnu funkciju na $\mathbb{R}$ je $f(x) = -x^2$. Ove dvije funkcije mogu poslužiti kao motivacija za sljedeći teorem, budući da vrijedi: $f''(x) = 2 > 0$ na $\mathbb{R}$ za $f(x) = x^2$, dok je $f''(x) = -2 < 0$ na $\mathbb{R}$ za $f(x) = -x^2$.
■

Teorem 9.5.1 Neka je $f : I = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna.

(A1) Funkcija f je konveksna ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$.

(A2) Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in I$, onda je f strogo konveksna.

(B1) Funkcija f je konkavna ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in I$.

(B2) Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in I$, onda je $f(x)$ strogo konkavna.

Dokazi za (A2) i (B2). Pomoću Taylorove formule (Teorem 9.3.1 iz Poglavlja 9) imamo da za svaki $x, x_0 \in I$ postoji $c \in \langle x_0, x\rangle$ ili $c \in \langle x, x_0\rangle$ takav da vrijedi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2.$$

Sada iz prethodne jednakosti i Definicije 9.5.1 se lako dokažu tvrdnje $(A2)$ i $(B2)$. □

Primijetimo da je $f(x)$ konkavna ako je $-f(x)$ konveksna funkcija.

Obrat tvrdnji (A2) i (B2) ne vrijedi općenito. Protuprimjer: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ je strogo konveksna, a vrijedi $f''(0) = 0$.

Definicija 9.5.2 Točka $x_0 \in I$ je *točka infleksije* funkcije $f : I = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ ako postoji $\delta > 0$ takav da je funkcija f strogo konveksna na $\langle x_0 - \delta, x_0\rangle$ i strogo konkavna na $\langle x_0, x_0 + \delta\rangle$ ili obratno. ■

Nužan uvjet za točku infleksije: ako je $f : I = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna i $x_0 \in I$ točka infleksije, onda je $f''(x_0) = 0$. Primjetimo da kod funkcija koje nisu dvaput diferencijabilne, kandidati za točke infleksije su i točke u kojima ne postoji $f''(x)$.

Teorem 9.5.2 Ako je $f : I = \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f''(x_0) = 0$ i $f''(x)$ mijenja predznak u x_0, onda je x_0 točka infleksije.

Pravilo 3 Određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti, te točaka infleksije funkcije $f(x)$

1: odredimo $f''(x)$;
2: tražimo kandidate za točke infleksije: rješenja jednadžbe $f''(x) = 0$ i točke u kojima f'' ne postoji;
3: promatramo predznak od $f''(x)$ na okolinama dobivenih točaka:

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ na } \langle a,b\rangle \Rightarrow f(x) \text{ je strogo konveksna na } \langle a,b\rangle, \\ f''(x) < 0 \text{ na } \langle a,b\rangle \Rightarrow f(x) \text{ je strogo konkavna na } \langle a,b\rangle. \end{cases}$$

4: točke infleksije su sve one točke x za koje je $f''(x) = 0$ i u njihovim okolinama $f''(x)$ mijenja predznak.

■ **Primjer 9.24** Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije za funkciju

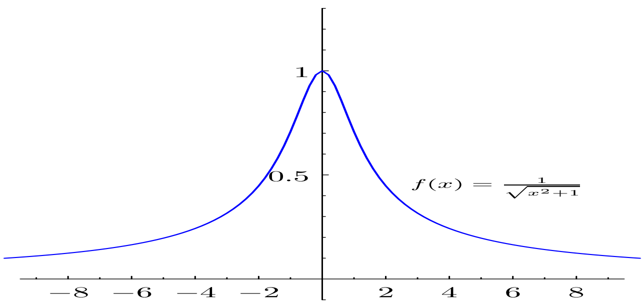
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Rješenje:

- $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ i $f''(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$;
- $f''(x) = 0 \implies 2x^2 - 1 = 0 \implies x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

intervali	$\left\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$	$\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$	$\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right\rangle$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna	konkavna	konveksna

Prema tome: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ su točke infleksije funkcije $f(x)$.



Slika 9.6

■

■ **Primjer 9.25** Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije za funkciju

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

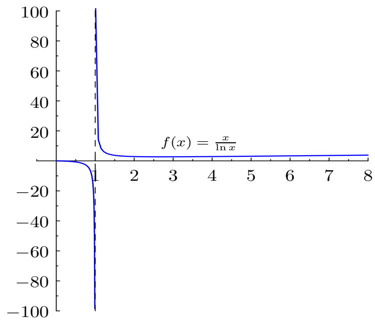
Rješenje:

- $\mathscr{D}(f) = \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$, $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ i $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}$;

- $f''(x) = 0 \implies \ln x = 2 \implies x = e^2$;
- $f''(x)$ ne postoj u $x = 0$ i $x = 1$;

intervali	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 1, e^2 \rangle$	$\langle e^2, \infty \rangle$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	konkavna	konveksna	konkavna

Prema tome: $x = e^2$ je točka infleksije funkcije $f(x)$.



Slika 9.7

■

■ **Primjer 9.26** Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije za funkciju

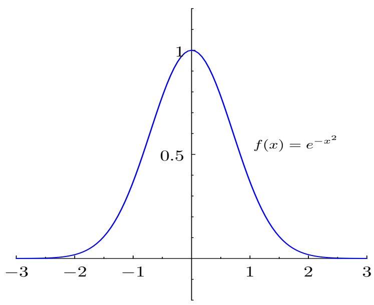
$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Rješenje: $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ i $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$;

- $f''(x) = 0 \implies 2x^2 - 1 = 0 \implies x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

intervali	$\left\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$	$\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$	$\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty \right\rangle$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna	konkavna	konveksna

Prema tome: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ su točke infleksije of $f(x)$.



Slika 9.8

■

Vježba 9.16 Za zadane funkcije $f(x)$ pronaći intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije:

1. $f(x) = e^{x \ln x}$; **2**. $f(x) = e^{-1/x^2}$; [postupak –> **KLIKNI**] ; **3**. $f(x) = \sin x + \frac{x^2}{4}$.

9.6 Asimptote - ponavljanje

Primjetimo da smo u jednom od prethodnih poglavlja, kao primjenu limesa funkcije, uveli pojmove vertikalne, horizontalne i kose asimptote. Kod crtanja kvalitativnog grafa funkcije ćemo isto tako određivati i crtati asimptote funkcija, pa ćemo se kroz sljedećih nekoliko primjera podsjetiti tih pojmova i postupka njihovog računanja.

■ **Primjer 9.27** Odredite sve asimptote funkcije $f(x) = x e^{\frac{x}{x+1}}$.

Rješenje. Prvo odredimo domenu funkcije, a to je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ zbog nazivnika u potenciji. Sada su rubovi domene kandidati za vertikalne asimptote, a to je u ovom slučaju samo $x = -1$. Sada računamo jednostrane limese:

$$\lim_{x\to -1^+} x e^{\frac{x}{x+1}} = -e^{\frac{-1}{0^+}} = -e^{-\infty} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -1^-} x e^{\frac{x}{x+1}} = -e^{\frac{-1}{0^-}} = -e^{+\infty} = -\infty,$$

te zaključujemo da je $x = -1$ vertikalna asimptota.

Sada tražimo kose asimptote oblika $y = kx + l$ gdje su:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e,$$

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{\frac{x}{x+1}} - e) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{x}{x+1}} - e}{\frac{1}{x}} = (\frac{0}{0}) = (L'H) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} \frac{x^2}{(x+1)^2} = -e.$$

Dakle, lijeva i desna asimptota je pravac $y = ex - e$. ■

■ **Primjer 9.28** Odredite desnu kosu asimptotu funkcija:

(a) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ (b) $f(x) = (2x+1)\operatorname{arctg} x$.

Rješenje. (a) Tražimo kose asimptote oblika $y = kx + l$ gdje su:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$l = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (x\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}x) = \lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}) = (\infty\cdot 0) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = (\frac{0}{0}) = (L'H) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = -1.$$

Dakle, desna asimptota je pravac $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

(b) Računamo limese:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} \operatorname{arctg} x = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi,$$

$$l = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} ((2x+1)\operatorname{arctg} x - \pi x) = \lim_{x\to\infty} x\Big((2 + \frac{1}{x})\operatorname{arctg} x - \pi\Big) = (\infty\cdot 0) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2+\frac{1}{x})\operatorname{arctg} x - \pi}{\frac{1}{x}} = (\frac{0}{0}) = (L'H) = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg} x + \frac{2x+1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \Big(\operatorname{arctg} x - \frac{(2x+1)x}{x^2+1}\Big) = \frac{\pi}{2} - 2.$$

Dakle, desna asimptota je pravac $y = \pi x + \frac{\pi}{2} - 2$. ■

■ **Primjer 9.29** Odredimo sve asimptote funkcije $f(x)=\frac{x}{\ln^2 x}$.

Rješenje. Prvo odredimo domenu funkcije. Zbog funkcije $\ln x$ je prvi uvjet $x\in\langle 0,\infty\rangle$, a zbog nazivnika $\ln x\neq 0$ slijedi da $x\neq 1$. Dobili smo domenu $D(f)=\langle 0,1\rangle\cup\langle 1,\infty\rangle$. Sada su rubovi domene kandidati za vertikalne asimptote, a to su $x=0$ i $x=1$. Sada računamo jednostrane limese u $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln^2 x}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln^2 x}=\frac{1}{0^+}=+\infty,$$

te zaključujemo da je $x=1$ vertikalna asimptota.

U rubu $x=0$ računamo samo desni limes:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln^2 x}=\frac{0}{+\infty}=0$$

te $x=0$ nije vertikalna asimptota funkcije.

Zbog domene tražimo samo desne kose asimptote oblika $y=kx+l$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\ln^2 x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln^2 x}=\frac{1}{\infty}=0,$$

$$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2 x}=(\frac{\infty}{\infty})=(L'H)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=(\frac{\infty}{\infty})=(L'H)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

Dakle, funkcija nema kose asimptote. ■

Vježba 9.17 Odredite sve asimptote funkcije $f(x)=x\,\mathrm{arctg}^2 x$.

Vježba 9.18 Odredite sve asimptote funkcije $f(x)=x\ln(e+\frac{1}{x})$; [postupak –> ↻**KLIKNI**↻] .

9.7 Crtanje kvalitativnog grafa funkcije

Na temelju svega prethodno naučenog o računanju i primjeni limesa i derivacija funkcija jedne varijable možemo iskazati sljedeći postupak.

Pravilo 4 Crtanje kvalitativno grafa funkcije $f(x)$

1: odredimo domenu $\mathscr{D}(f)$ od $f(x)$;
2: ispitamo ponašanje od $f(x)$ na rubu domene $\mathscr{D}(f)$;
3: odredimo kose i horizontalne asimptote od $f(x)$;
4: izračunamo $f'(x)$;
5: izračunamo stacionarne točke od $f(x)$;
6: odredimo intervale monotonosti od $f(x)$ i karakter lokalnih ekstrema;
7: izračunamo $f''(x)$;
8: izračunamo rješenja od $f''(x)=0$ - kandidati za točke infleksije;
9: odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $f(x)$ te točke infleksije;
10: nacrtamo sve asimptote, točke ekstrema i infleksije.

Pri tome konveksnost-konkavnost (prethodne točke 7, 8 i 9) se ne moraju raditi ukoliko u tekstu zadatka nije posebno naglašeno.

■ **Primjer 9.30** Odredimo domenu, ispitajmo ponašanje funkcije na rubu domene, nađimo asimptote, intervale monotonosti i lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}.$$

Rješenje.

• Zbog razlomka $\frac{1}{x-2}$, odredimo domenu iz uvjeta $x \neq 2 \implies \mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$.

• Ispitamo ponašanje funkcije $f(x)$ na rubu domene $\mathscr{D}(f)$ odnosno nađemo lijeve i desne limese funkcije $f(x)$ u okolini točke $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2+} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{\frac{1}{0+}} = e^{\infty} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2-} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{\frac{1}{0-}} = e^{-\infty} = 0.$$

Slijedi da je $x = 2$ desna vertikalna asimptota.

• Računamo kose asimptote:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = e^0 = 1; \\
l_1 &= \lim_{x\to\infty} \left(xe^{\frac{1}{x-2}} - x\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right) = (\infty \cdot 0) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{l'H} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} \frac{-1}{(x-2)^2}}{-1/x^2} = 1;
\end{aligned}$$

prema tome $y = x + 1$ je desna kosa asimptota;

• analogno se provodi račun za lijevu kosu asimptotu:

$$\begin{aligned}
k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{-x-2}} = 1; \\
l_2 &= \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} (-x)\left(e^{\frac{1}{-x-2}} - 1\right) = 1;
\end{aligned}$$

prema tome $y = x + 1$ je lijeva kosa asimptota.

• Tražimo lokalne ekstreme:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{\frac{1}{x-2}} - \frac{x}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{x-2}} \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}, \\
f'(x) = 0 &\iff x^2 - 5x + 4 = 0 \implies x_1 = 1 \text{ i } x_2 = 4, \\
f'(x) \geq 0 &\iff x^2 - 5x + 4 \geq 0 \implies x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle, \\
f'(x) \leq 0 &\iff x^2 - 5x + 4 \leq 0 \implies x \in \langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, 4\rangle,
\end{aligned}$$

intervali	$\langle -\infty, 1\rangle$	$\langle 1, 2\rangle$	$\langle 2, 4\rangle$	$\langle 4, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

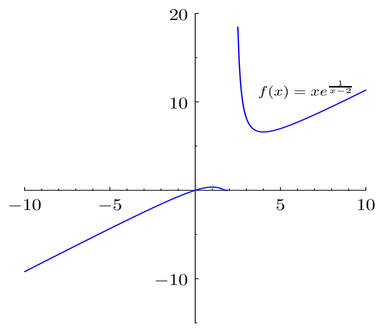
Iz tablice monotonosti slijedi da su: $T_{max}(1, \frac{1}{e})$ i $T_{min}(4, 4\sqrt{e})$.

• Tražimo intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije:

$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \frac{5x-8}{(x-2)^4} \implies$

intervali	$\langle -\infty, 8/5\rangle$	$\langle 8/5, 2\rangle$	$\langle 2, \infty\rangle$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	konkavna	konveksna	konveksna

• graf:



Slika 9.13

■

■ **Primjer 9.31** Odredimo domenu, ispitajmo ponašanje funkcije na rubu domene, nađimo asimptote, intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{x-2}.$$

Rješenje.
• Odredimo domenu iz uvjeta $x \neq 2$: $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$.
• Ispitamo ponašanje funkcije $f(x)$ na rubu domene $\mathscr{D}(f)$ odnosno nađemo lijeve i desne limese funkcije $f(x)$ u okolini točke $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^+} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{x-2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{4}{0+} = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2^-} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{x-2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{4}{0-} = -\frac{\pi}{2}.$$

Slijedi da $f(x)$ nema vertikalnih asimptota.
• Kose asimptote:

$$\begin{aligned}
k_{1,2} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{x-2}}{x} = \frac{\pm\pi/2}{\pm\infty} = 0;\\
l_1 &= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{x-2} = \pi/2;\\
l_2 &= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{(-x)^2}{-x-2} = -\pi/2;
\end{aligned}$$

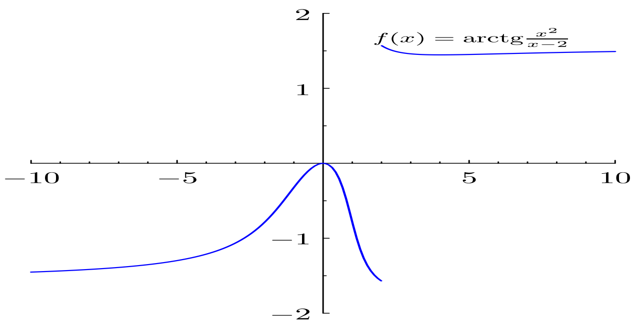
prema tome $y = \pi/2$ je desna horizontalna asimptota a $y = -\pi/2$ je lijeva horizontalna asimptota.
• Tražimo lokalne ekstreme:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\frac{x^4}{(x-2)^2}} \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2+x^4},\\
f'(x) = 0 &\iff x(x-4) = 0 \implies x_1 = 0 \text{ i } x_2 = 4,\\
f'(x) \geq 0 &\iff x^2-4x \geq 0 \implies x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle,\\
f'(x) \leq 0 &\iff x^2-4x \leq 0 \implies x \in \langle 0, 2\rangle \cup \langle 2, 4\rangle,
\end{aligned}$$

intervali	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2, 4\rangle$	$\langle 4, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Iz tablice monotonosti slijedi da su: $T_{max}(0,0)$ i $T_{min}(4, \operatorname{arc}\operatorname{tg} 8)$;

• graf:



Slika 9.14

■

Vježba 9.19 Odrediti domenu, ispitati ponašanje funkcije na rubu domene, naći asimptote, intervale monotonosti i lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

$$\mathbf{1.}\ f(x) = \frac{x}{2} + \arcsin\frac{1}{x}; \quad \mathbf{2.}\ f(x) = \ln(\operatorname{ch}(x+1)); \quad \mathbf{3.}\ f(x) = \frac{1}{x-4}e^{\frac{1}{x-2}}.$$

9.8 ZADACI

Zadatak 9.1 Odrediti intervale monotonosti i lokalne ekstreme za sljedeće funkcije:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$;

b) $f(x) = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{x-2}$;

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-x-2}}$;

d) $f(x) = \sqrt{\ln\dfrac{2x^2-2x-6}{x^2-x}}$; [postupak –> KLIKNI] .

Zadatak 9.2 Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije za sljedeće funkcije:

a) $f(x) = 2^{-x}x^2$;

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$;

d) $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; [postupak –> KLIKNI] .

Zadatak 9.3 Primjenom ekstrema u geometriji riješiti sljedeće probleme:

a) Dva vrha pravokutnika se nalaze na krivulji $y = \frac{x^2+2}{x^2+1}$, a druga dva na krivulji $y = \frac{x^2}{x^2+1}$. Odrediti vrhove pravokutnika tako da njegova površina bude maksimalna.

b) Naći pravokutnik najveće površine takav da mu po jedan vrh leži redom na krivuljama $y=\sqrt{x}$ i $y=\sqrt{4-x}$, a preostala dva vrha leže na x-osi.

c) U kojoj točki T na krivulji $y=\sqrt{4x-1}$ treba postaviti tangentu tako da duljina odsječka tangente između dirališta T i sjecišta tangente s y-osi bude minimalan.

d) Odrediti najmanju udaljenost točke $T(1,5/2)$ do parabole $y=x^2-2x+3/2$. U kojim točkama se ona dostiže? Naputak: iz T spustiti normalu (ili dvije normale) na parabolu.

Zadatak 9.4 Odrediti domenu, ispitati ponašanje na rubu domene, naći asimptote, intervale monotonosti i lokalne ekstreme za sljedeće funkcije:

a) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2-x}$;

b) $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x^2-x}$;

c) $f(x)=\operatorname{th}\frac{x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$;

d) $f(x)=x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

9.9 RJEŠENJA ZA VJEŽBE I ZADATKE

9.9.1 Rješenja za vježbe iz pogavlja 9.

Rješenja za vježbe iz pogavlja 9, osim za one vježbe u kojima su rješenja već napisan:

Vježba 9.1-1.:

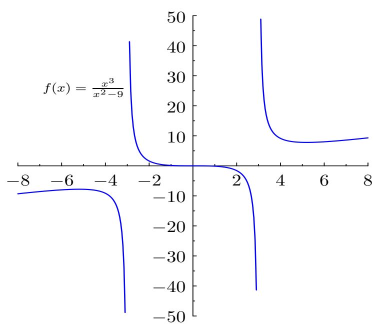
• $\mathscr{D}(f)=\mathbb{R}/\{-3,3\}$; stacionarne točke: $x_1=-3\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=3\sqrt{3}$;

• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle-\infty,-3\sqrt{3}\rangle$	$\langle-3\sqrt{3},-3\rangle$	$\langle-3,0\rangle$	$\langle 0,3\rangle$	$\langle 3,3\sqrt{3}\rangle$	$\langle 3\sqrt{3},\infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Longrightarrow\ T_{min}(3\sqrt{3},9\frac{\sqrt{3}}{2})$, $T_{max}(-3\sqrt{3},-9\frac{\sqrt{3}}{2})$;

• graf:



Slika 9.15

Vježba 9.1-2.:

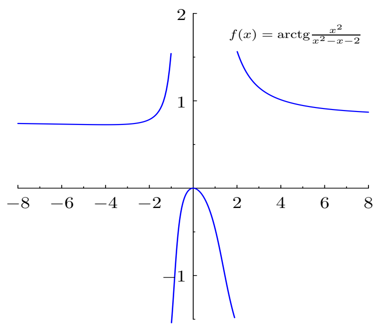
• $\mathscr{D}(f)=\mathbb{R}/\{-1,2\}$; stacionarne točke: $x_1=-4$, $x_2=0$;

• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle-\infty,-4\rangle$	$\langle-4,-1\rangle$	$\langle-1,0\rangle$	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 2,\infty\rangle$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$\Longrightarrow\ T_{min}(-4,\operatorname{arc\,tg}\frac{8}{9})$, $T_{max}(0,0)$;

• graf:

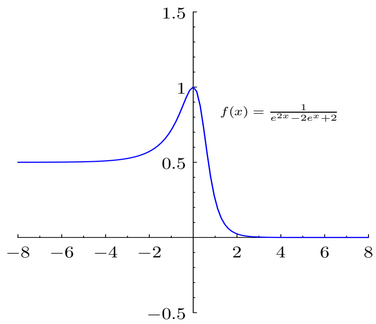


Slika 9.16

Vježba 9.1-**3.**:
• $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$; stacionarna točka: $x_1 = 0$;
• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

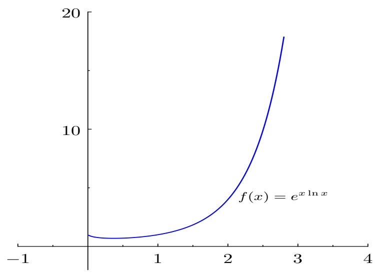
$\Longrightarrow$ $T_{max}(0,1)$;
• graf:



Slika 9.17

Vježba 9.2:
1. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $T_{max}(-1,0)$.
2. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$, $T_{min}(-1,-\frac{1}{2})$, $T_{max}(1,\frac{1}{2})$.
3. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f(x)$ nema ekstrema.
4. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $T_{min}(0,0)$, $T_{max}(\frac{1}{2},\frac{1}{4e^2})$, $T_{min}(2,4e)$.
5. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $T_{max}(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$.

Vježba 9.4 $f(x)$ na $[-1,1]$ ima globalni maksimum u $x=0$ i globalni minimum u $x=-1$ i $x=1$.
Vježba 9.14 Iz $f'(v) = \frac{3}{40}v - 6 = 0$ slijedi $v = 80\,\mathrm{km/h}$. Zbog $f''(80) = 6 > 0$ dobili smo lokalni minumum funkcije.
Vježba 9.15 $P'(I) = \frac{100(4-I^2)}{(I^2+I+4)^2}$, iz $P'(I) = 0$ dobivamo $I = \pm 2$. Iz tablice monotonosti se vidi da se za intenzitet $I = 2$ dostiže maksimum.
Vježba 9.16-**1.**: $f(x)$ je strogo konveksna na $\langle 0,\infty\rangle$ i $f(x)$ nema točaka infleksije.

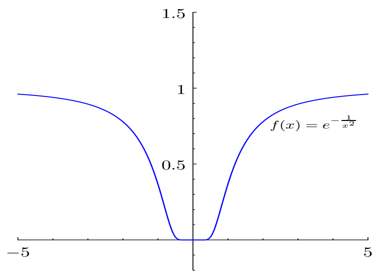


Slika 9.18

Vježba 9.16-**2.**:

intervali	$\left\langle -\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right\rangle$	$\left\langle -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right\rangle$	$\left\langle 0, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\rangle$	$\left\langle \sqrt{\frac{2}{3}}, \infty \right\rangle$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	konkavna	konveksna	konveksna	konkavna

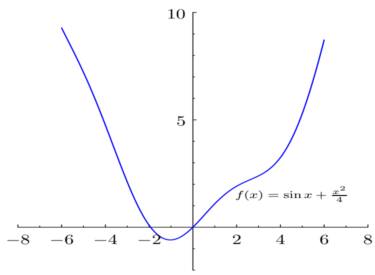
$\Longrightarrow$ $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ i $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ su točke infleksije of $f(x)$.



Slika 9.19

Vježba 9.16-**3.**:

$$\begin{cases} f(x) \text{ je strogo konkavna na } \langle 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rangle, \; k \in \mathbb{N}, \\ f(x) \text{ je strogo konveksna na } \langle 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{13\pi}{6} \rangle, \; k \in \mathbb{N}, \\ x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} \text{ su točke infleksije of } f(x). \end{cases}$$



Slika 9.20

Vježba 9.17 $f(x)$ nema vertikalnih asimptota, desna kosa asimptota je $y = \frac{\pi^2}{4}x - \pi$, lijeva kosa asimptota je $y = \frac{\pi^2}{4}x + \pi$.

Vježba 9.18 Vertikalna asimptota: $x = -\frac{1}{e}$, (lijeva i desna) kosa asimptota je $y = x + \frac{1}{e}$.

Vježba 9.19-**1.**: $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty \rangle$; ponašanje od $f(x)$ na rubu od $\mathscr{D}(f)$:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = f(1+) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1-) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2};$$

• $y = x/2$ je i desna i lijeva kosa asimptota;

• stacionarne točke:

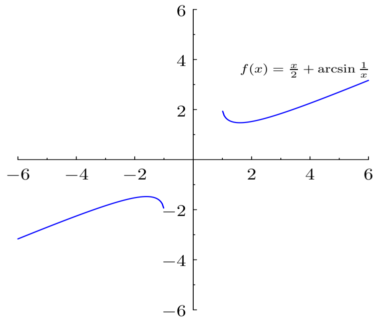
$$x_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}},\ x_2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}};$$

• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, x_1\rangle$	$\langle x_1, 1\rangle$	$\langle 1, x_2\rangle$	$\langle x_2, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\implies \quad T_{max}(x_1, f(x_1)),\ T_{min}(x_2, f(x_2))$;

• graf:



Slika 9.21

Vježba 9.19-2.:

• $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$;

• $y = x + 3 - \ln 2$ je desna kosa asimptota, a $y = -x - 3 - \ln 2$ je lijeva kosa asimptota;

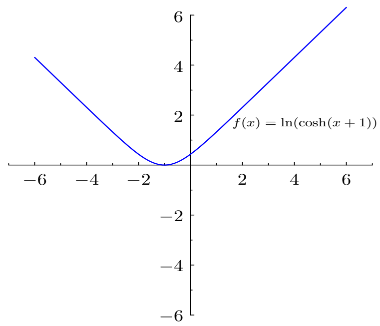
• stacionarna točka: $x_1 = -3$; intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle -3, \infty\rangle;$$
$$f'(x) \leq 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle -\infty, -3\rangle;$$

intervali	$\langle -\infty, -3\rangle$	$\langle -3, \infty\rangle$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

$\implies \quad T_{min}(-3, 0)$;

• graf:



Slika 9.22

Vježba 9.19-3.:

• $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, 4\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$; ponašanje od $f(x)$ na rubu od $\mathscr{D}(f)$:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{0-}} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2+} f(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{0+}} = -\infty,$$

$\Longrightarrow$ $x=2$ je desna vertikalna asimptota;

$$\lim_{x\to 4-} f(x) = \frac{1}{0-}e^{\frac{1}{2}} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 4+} f(x) = \frac{1}{0+}e^{\frac{1}{2}} = +\infty,$$

$\Longrightarrow$ $x=4$ je vertikalna asimptota;

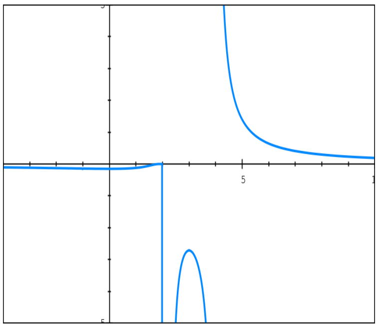
• $y=0$ je horizontalna asimptota;

• stacionarne točke: $x_1=0$, $x_2=3$; intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2, 3\rangle$	$\langle 3, 4\rangle$	$\langle 4, \infty\rangle$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$\Longrightarrow$ $T_{min}(0, f(0))$, $T_{max}(3, f(3))$;

• graf:



Slika 9.23

9.9.2 Rješenja za zadatke iz poglavlja 9.8.

Zadatak 9.1-a)

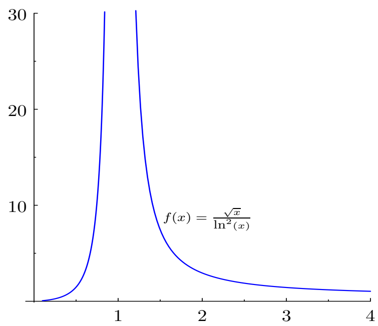
• $\mathscr{D}(f) = \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$; stacionarne točke: $x=e^4$;

• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 1, e^4\rangle$	$\langle e^4, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Longrightarrow$ $T_{min}(e^4, \frac{e^2}{16})$;

• graf:



Slika 9.24

Zadatak 9.1-b)

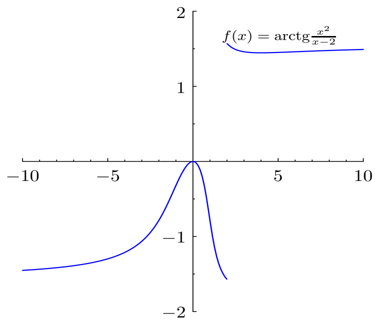
• $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}/\{2\}$;

• stacionarne točke: $x_1=0$, $x_2=4$;

• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2, 4\rangle$	$\langle 4, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Longrightarrow \quad T_{min}(4, \operatorname{arc\,tg} 8), \; T_{max}(0,0);$
• graf:

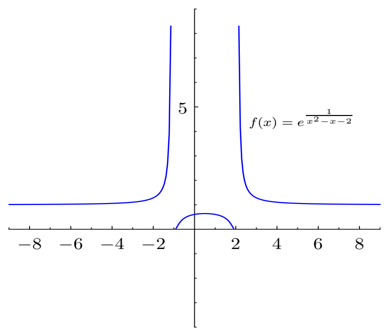


Slika 9.25

Zadatak 9.1-c)
• $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}/\{-1, 2\}$; stacionarne točke: $x = 1/2$;
• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 1/2\rangle$	$\langle 1/2, 2\rangle$	$\langle 2, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$\Longrightarrow \quad T_{max}(1/2, e^{-4/9});$
• graf:

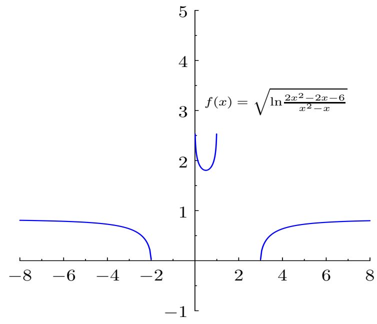


Slika 9.26

Zadatak 9.1-d)
• $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$; stacionarne točke: $x = 1/2$;
• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, -2\rangle$		$\langle 0, 1/2\rangle$	$\langle 1/2, 1\rangle$		$\langle 3, \infty\rangle$
$f'(x)$	$-$		$-$	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$

$\Longrightarrow \quad T_{min}(1/2, f(1/2));$
• graf:

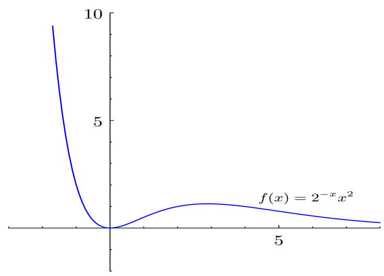


Slika 9.27

Zadatak 9.2-a):
$f''(x) = 0 \implies x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}$, $x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}$;

intervali	$\langle -\infty, x_1 \rangle$	$\langle x_1, x_2 \rangle$	$\langle x_2, \infty \rangle$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna	konkavna	konveksna

$\implies$ x_1 i x_2 su točke infleksije od $f(x)$.

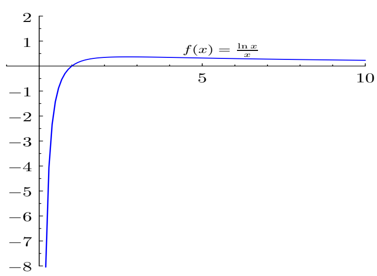


Slika 9.28

Zadatak 9.2-b): $f''(x) = 0 \implies x = e^{3/2}$;

intervali	$\langle 0, e^{3/2} \rangle$	$\langle e^{3/2}, \infty \rangle$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	konkavna	konveksna

$\implies$ $x = e^{3/2}$ je točka infleksije od $f(x)$.

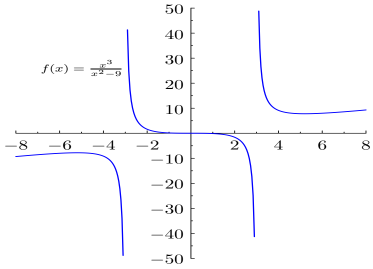


Slika 9.29

Zadatak 9.2-c): $f''(x) = 0 \implies x = 0$;

intervali	$\langle -\infty, -3 \rangle$	$\langle -3, 0 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 3, \infty \rangle$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	konkavna	konveksna	konkavna	konveksna

$\Longrightarrow\ x = 0$ je točka infleksije od $f(x)$.

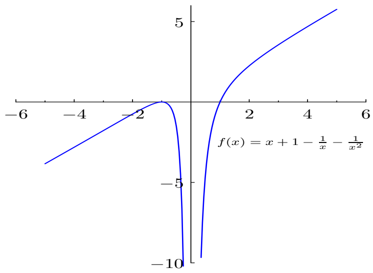


Slika 9.30

Zadatak 9.2-d): $f''(x) = 0 \Longrightarrow x = -3$;

intervali	$\langle -\infty, -3\rangle$	$\langle -3, 0\rangle$	$\langle 0, \infty\rangle$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	konveksna	konkavna	konkavna

$\Longrightarrow\ x = -3$ je točka infleksije od $f(x)$.



Slika 9.31

Zadatak 9.3:

a) vrhovi pravokutnika $ABCD$ su $A(1, \frac{1}{2})$, $B(1, \frac{3}{2})$, $C(-1, \frac{3}{2})$, $D(-1, \frac{1}{2})$;

b) vrhovi pravokutnika $ABCD$ su $A(\frac{2}{3}, 0)$, $B(\frac{10}{3}, 0)$, $C(\frac{10}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, $D(\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, $P_{\max} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$;

c) $T\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \sqrt{\sqrt{3} - 1}\right)$;

d) udaljenost $d = \frac{\sqrt{7}}{2}$, dvije točke $T_{1,2}(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, 2)$.

Zadatak 9.4-a):

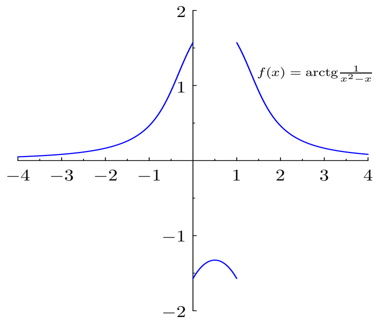
• $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$;
• ponašanje na rubu od $\mathscr{D}(f)$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to 1-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$\Longrightarrow\ f(x)$ nema vertikalne asimptote;
• $y = 0$ je horizontalna asimptota jer je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;
• stacionarne točke: $x = 1/2$;
• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 1/2\rangle$	$\langle 1/2, 1\rangle$	$\langle 1, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$\Longrightarrow\ T_{max}(1/2, f(1/2))$;
• graf:



Slika 9.32

Zadatak 9.4-b):

- $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$;
- ponašanje na rubu od $\mathscr{D}(f)$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to 1+} f(x) = \infty$$

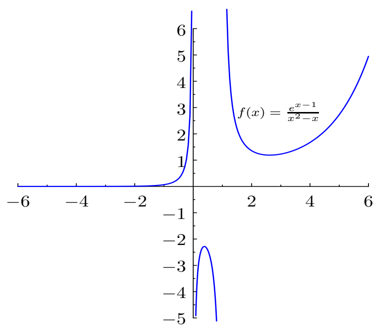
$\Longrightarrow$ $x = 0$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote;
- $y = 0$ je lijeva horizontalna asimptota jer je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; nema desne kose asimptote;
- stacionarne točke:

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

- intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, x_1\rangle$	$\langle x_1, 1\rangle$	$\langle 1, x_2\rangle$	$\langle x_2, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Longrightarrow$ $T_{max}(x_1, f(x_1))$, $T_{min}(x_2, f(x_2))$;
- graf:



Slika 9.33

Zadatak 9.4-c):

- $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, -1/2\rangle \cup \langle 1/2,\infty\rangle$;
- ponašanje na rubu od $\mathscr{D}(f)$:

$$\lim_{x\to -1/2-} f(x) = \lim_{x\to 1/2+} f(x) = 1$$

$\Longrightarrow$ $f(x)$ nema vertikalne asimptote;
- $y = 1$ je horizontalna asimptota;
- stacionarne točke:

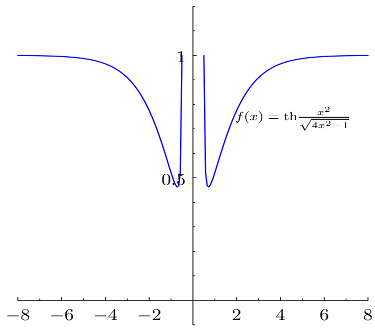
$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

- intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, x_1\rangle$	$\langle x_1, -1/2\rangle$		$\langle 1/2, x_2\rangle$	$\langle x_2, \infty\rangle$
$f'(x)$	$-$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

$\Longrightarrow$ $T_{min}(x_1, f(x_1))$, $T_{min}(x_2, f(x_2))$;

• graf:



Slika 9.34

Zadatak 9.4-d):

• $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$;

• ponašanje na rubu od $\mathscr{D}(f)$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$$

$\Longrightarrow$ $x = 0$ je vertikalna asimptota;

• $y = x + 1$ je lijeva i desna kosa asimptota;

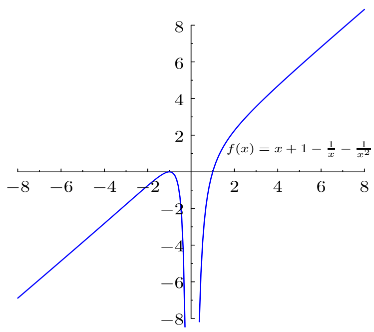
• stacionarne točke: $x = -1$;

• intervali monotonosti i lokalni ekstremi:

intervali	$\langle -\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 0\rangle$	$\langle 0, \infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Longrightarrow$ $T_{max}(-1, 0)$;

• graf:



Slika 9.35

Kazalo

asimptote, 23

ekstremi funkcija u geometriji, 14

globalni ekstremi funkcije, 11

intervali monotonosti, 8

konkavna funkcija, 20, 21
konveksna funkcija, 20, 21
kvalitativni graf funkcije, 24

monotonost funkcije, 6

rješenja za vježbe iz pogavlja 9, 28
rješenja za zadatke iz poglavlja 9.8, 32

točka infleksije, 20, 21
točka lokalnog maksimuma, 9, 10
točka lokalnog minimuma, 9, 10