Sadržaj:

Poglavlja koja ne ulaze u gradivo u školskoj godini 2021/2021: 6

1 Pogreške u postupcima analize

1.1 Za prikaz brojeva u IEEE 754 formatu na raspolaganju su, slijeva na desno, jedan bit za predznak, te određeni broj bitova za posmaknuti eksponent i frakciju. Koliko je minimalno bitova potrebno za eksponent i frakciju ako bez pogreške želimo predstaviti brojeve 24 i 25? Predstavite brojeve 15.5 i 0.75 u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja i dekodirajte rezultat.

frakcija 4 bita, eksponent 4 bita

1.2 Definirajte prikaz brojeva sa minimalnim brojem bitova po uzoru na IEEE 754 standard u kojemu se realne vrijednosti *9* i *-0.1875* mogu prikazati bez pogreške i napišite navedene brojeve u tom prikazu. Navedite najveću i najmanju apsolutnu vrijednost koja se može predstaviti u tom prikazu. Kako je potrebno promijeniti prikaz da prilikom zbrajanja navedenih vrijednosti ne dođe do pogreške (uz minimalni broj bitova)?

frakcija 3 bita, eksponent 3 bita; bilo bi potrebno proširiti frakciju na 7 bita

1.3 Po uzoru na IEEE 754 standard definiran je prikaz brojeva sa jednim bitom za predznak, 4 bita za eksponent i 4 bita za frakciju, s lijeva na desno. Ako je broj u tom prikazu napisan kao *100001100*, odredite njegovu vrijednost u domeni realnih brojeva.

$-2^{-6} * 0.75 = - 0.01171875$

1.4 Po uzoru na IEEE 754 zapis potrebno je definirati zapis za prikaz brojeva u području domene [-100,100]. Odredite najmanji potreban broj bitova za eksponent i frakciju ako najveća dopuštena apsolutna pogreška *u području domene* mora biti najviše 0.5 (bit za predznak se podrazumijeva). Predstavite brojeve -99 i 4.5 u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja i dekodirajte rezultat.

frakcija 6 bita, eksponent 4 bita

1.5 Za prikaz brojeva u IEEE 754 obliku na raspolaganju je osam bitova, od kojih desnih 5 bitova predstavljaju frakciju a lijeva tri bita eksponent (predznaka nema).

a) Izračunajte najmanju i najveću vrijednost (osim nule i beskonačno) koja se može zapisati u zadanom formatu.
b) Napišite kodove koji predstavljaju nulu i plus beskonačno.
c) Odredite najveću apsolutnu pogrešku u tome zapisu.

1.6 Za prikaz brojeva u IEEE 754 formatu na raspolaganju su, slijeva na desno, jedan bit za predznak, 4 bita za eksponent i 5 bitova za frakciju. Predstavite dekadske brojeve 249.5 i -25.25 u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja, dekodirajte rezultat i utvrdite kolika je pogreška pri tome nastala.

pogreška: 0.25 (sasvim slučajno)

1.7 Po uzoru na IEEE 754 standard definiran je prikaz brojeva sa jednim bitom za predznak, 3 bita za eksponent i 5 bitova za frakciju, s lijeva na desno. Ako je broj u tom formatu prikazan sa *010111100*, odredite njegovu vrijednost u domeni realnih brojeva.

7.5

1.8 Po uzoru na IEEE 754 standard definiran je prikaz brojeva sa jednim bitom za predznak, 3 bita za eksponent i 4 bita za frakciju, s lijeva na desno. U definiranom prikazu izračunajte izraze *(4.75+0.25)+10* i *4.75+(0.25+10)*. Dekodirajte rezultate i komentirajte dobivenu razliku.

1.9 Po uzoru na IEEE 754 zapis potrebno je definirati zapis za prikaz brojeva u području domene [-10,10]. Odredite najmanji potreban broj bitova za eksponent i frakciju ako najveća dopuštena apsolutna pogreška *u području domene* mora biti najviše 0.1 (bit za predznak se podrazumijeva). Predstavite brojeve -9.9 i 0.45 u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja i dekodirajte rezultat.

1.10 Po uzoru na IEEE 754 standard definiran je prikaz brojeva sa jednim bitom za predznak te nepoznatim brojevima bitova za eksponent i frakciju. Odredite nepoznate veličine ako je broj *5.625* u tom prikazu predstavljen kao "*0100101101*".

frakcija 5 bita, eksponent 4 bita

1.11 Po uzoru na IEEE 754 standard definiran je prikaz brojeva sa jednim bitom za predznak, 3 bita za eksponent i 4 bita za frakciju. Prikažite brojeve *5.75* i *-11* u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja i dekodirajte rezultat.

Rezultat: -5.5

1.12 Za prikaz brojeva u IEEE 754 formatu na raspolaganju su, slijeva na desno, jedan bit za predznak, te određeni broj bitova za eksponent i frakciju. Koliko je minimalno bitova potrebno ako bez pogreške želimo predstaviti brojeve 31.25 i 504? Predstavite brojeve 9.5 i -25.25 u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja i dekodirajte rezultat.

frakcija 6 bita, eksponent 5 bita

2 Rješavanje sustava lin. alg. jednadžbi

2.1 Zadani sustav riješite metodom LU dekompozicije (rješenja su cijeli brojevi).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

x = (3, 2, 1)

2.2 Zadanu matricu rastavite pomoću LUP dekompozicije. Napisati svaki korak postupka i označiti sve eventualne zamjene redaka matrice.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.3 Zadani sustav riješite metodom LU dekompozicije (rješenja su cijeli brojevi).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

x = (1, 2, 3)

2.4 Zadani sustav riješite metodom LUP dekompozicije (rješenja su cijeli brojevi).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x = (0, 0, 3)

2.5 Zadanu matricu sustava rastaviti metodom LUP dekompozicije. Napisati svaki korak postupka i označiti sve eventualne zamjene redaka matrice. *Napomena:* ne brinite se zbog ružnih vrijednosti u razlomcima.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.6 Zadanu matricu rastavite na L i U komponente metodom LU dekompozicije:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.7 Zadanu matricu 3x3 rastavite na gornju i donju trokutnu matricu metodom LU dekompozicije.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

2.8 Zadani sustav jednadžbi riješiti LUP dekompozicijom (LU s pivotiranjem po stupcima).

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x = (1, 0, 0)

2.9 Zadani sustav riješiti primjenom LUP dekompozicije:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

2.10 Zadani sustav riješite metodom LU dekompozicije. *Uputa:* rješenja su cjelobrojne vrijednosti.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

x = (0, 1, 0)

2.11 Definirajte i skicirajte djelomično i potpuno pivotiranje (stožerni razvoj).

2.12 Zadanu matricu rastavite pomoću LUP dekompozicije. Napisati svaki korak postupka i označiti sve eventualne zamjene redaka matrice.

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 & -9 \\ -4 & 6 & 6 & 3 \\ -8 & 4 & 2 & 6 \\ -4 & 8 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

2.13 Zadani sustav riješite metodom LUP dekompozicije (rješenja su cijeli brojevi).

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 41/2 \\ 22 \\ 22 \end{bmatrix}$$

x = (7, 4, 7)

2.14 Zadani sustav riješite metodom LU dekompozicije (rješenja su cijeli brojevi).

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

x = (1, 0, 2)

2.15 Zadanu matricu rastavite uz pomoć LU dekompozicije. Napisati svaki korak postupka.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & -5 & -6 \\ 12 & 12 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

2.16 Za zadani sustav provjerite može li se riješiti LU dekompozicijom! Nakon provjere, riješite sustav odgovarajućom metodom (rješenja su cijeli brojevi).

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & -4 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 42 \\ 56 \end{bmatrix}$$

x = (0, 0, 7)

3 Postupci nelinearnog optimiranja

Funkcije jedne varijable

3.1 Zadana je funkcija cilja $f(x) = (x+1)^2$ i granice unimodalnog intervala [-2, 2]. Reducirati interval metodom zlatnog reza (k=0.618) do veličine $\varepsilon \le 0.5$. Napisati vrijednosti a_i, b_i, c_i i d_i u svakom koraku.

Krajnji interval: [-1.193, -0.833]

3.2 Nad nepoznatom unimodalnom funkcijom *g*(*x*) proveden je postupak pronalaženja unimodalnog intervala za minimum funkcije. Uz početnu točku $x_o = 0$ i početni pomak *h* = 2, postupak je kao rješenje dao interval [-32,-8]. Na osnovu toga rezultata, za svaku od sljedećih relacija odredite je li istinita ili lažna ili se ne može odrediti:

a) g(2) < g(-2)
b) g(-5) > g(-10)
c) g(-10) > g(10)
d) g(0) < g(-30)

a) ne, b) da, c) ne, d) ?

3.3 Nad nepoznatom unimodalnom funkcijom *g*(*x*) proveden je postupak pronalaženja unimodalnog intervala za minimum funkcije. Uz početnu točku $x_o = 2$ i početni pomak *h* = 1, postupak je kao rješenje dao interval [6,18]. Na osnovu toga rezultata, za svaku od sljedećih relacija odredite je li istinita ili lažna ili se ne može odrediti:

a) g(1) < g(2)
b) g(5) > g(10)
c) g(6) > g(18)
d) g(10) < g(18)

a) ne, b) da, c) ?, d) da

3.4 Unimodalni interval funkcije jedne varijable je [0,10]. Koliko je iteracija Fibonaccijevog postupka potrebno da bi se interval smanjio na manje od 0.01?

3.5 Zadana je funkcija cilja $f(x) = (x-4)^2$, početna točka pretraživanja $x_0 = 20$ i korak h = 1. Pronađite granice unimodalnog intervala! Dobiveni interval reducirajte metodom zlatnog reza (k=0.618) do veličine $\varepsilon \le 1$. Napisati vrijednosti a_i, b_i, c_i i d_i u svakom koraku.

3.6 Zadana je optimizacijska funkcija $f(x) = (x-4)^2$, početna točka pretraživanja $x_0 = 0$ i korak *h* = 1. Pronađite granice unimodalnog intervala! Dobiveni interval reducirajte metodom zlatnog reza (k=0.618) do veličine $\varepsilon \le 1$. Napisati vrijednosti a_i, b_i, c_i i d_i u svakom koraku. Kojom bi se metodom redukcije intervala u ovom slučaju dobilo rješenje u prvoj iteraciji?

Interval [2, 8], krajnji interval [3.416, 4.292]

3.7 Zadana je funkcija $f(x) = (x-4)^2$ i granice unimodalnog intervala [-2, 6]. Reducirati interval metodom zlatnog reza (k=0.618) do veličine $\varepsilon \le 1$. Napisati vrijednosti a_i, b_i, c_i i d_i u svakom koraku.

3.8 Unimodalni interval funkcije jedne varijable je [-100,100]. Koliko iteracija postupka zlatnog reza je potrebno da bi se interval smanjio na manje od 0.001 (*k* = 0.618)?

26 iteracija

3.9 Zadana je funkcija $f(x) = (x-4)^2$ i granice unimodalnog intervala [-2,6]. Reducirati interval metodom Fibonacci do veličine $\varepsilon \le 1$. *Uputa:* za svaku iteraciju postupka pregledno (u tabličnom obliku) napisati vrijednosti *a, c, d, b*. Granice konačnog intervala mogu uključivati rješenje.

3.10 S kojom preciznošću je određen minimum funkcije jedne varijable postupkom zlatnog reza ako je početni unimodalni interval bio [-100,100] a provedeno je 15 iteracija (*k* = 0.618)?

ε = 0.0733

3.11 Zadana je funkcija cilja $F(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2$. Postupkom zlatnog reza pronađite minimum te funkcije na pravcu određenim smjerom $v = [2 \quad 1]^T$ i početnom točkom (0, 0). Prethodno je potrebno pronaći unimodalni interval uz početnu točku (0, 0) i početni pomak 1, a potom unimodalni interval reducirati do veličine $\varepsilon \leq 0.5$. Uputa: konačno rješenje prikazati u obliku intervala za parametar λ koji označava pomak od početne točke u smjeru v.

Krajnji interval [0.292, 0.764]

3.12 Zadana je optimizacijska funkcija $f(x) = 2 \cdot (x - 18)^2$, početna točka pretraživanja x_0 = 0 i korak *h* = 1. Pronađite granice unimodalnog intervala! Dobiveni interval reducirajte metodom Fibonacci do veličine ε ≤ 3. Napisati vrijednosti a_i, b_i, c_i i d_i u svakom koraku.

Funkcije više varijabli

3.13 Zadana je funkcija $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Provesti postupak pronalaženja minimuma zadane funkcije po Hooke-Jeeves algoritmu. Početna točka pretraživanja je (2,3,4), početni pomak je 1 a smanjujemo ga za faktor 2. Ispisati pregledno (u obliku tablice) točke $\mathbf{x_B}$ (bazna točka), $\mathbf{x_P}$ (početna točka pretraživanja), $\mathbf{x_N}$ (točka dobivena pretraživanjem) te trenutnu vrijednost pomaka **dx** za svaku iteraciju. Postupak provoditi dok vrijednost pomaka ne padne na 0.25 te *napisati dobiveno rješenje*.

(0, 0, 0), naravno...

3.14 Zadan je skup točaka (0,0), (2,0), (1,2) koji predstavlja trenutno stanje simpleksa u postupku po Nelderu i Meadu te funkcija cilja $F(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$. Odredite centroid te provedite refleksiju, ekspanziju i kontrakciju uz proizvoljne koeficijente tako da skicirate sve tri operacije i navedete točke koje se dobivaju u sva tri slučaja.

3.15 Zadana je funkcija cilja $F(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2$. U koordinatnoj ravnini x_1/x_2 skicirati postupak pronalaženja minimuma zadane funkcije postupkom traženja u smjerovima koordinatnih osi od početne točke (5,5). U koliko iteracija se dolazi do rješenja?

3.16 Za funkciju $F(x, y) = |(x - y) \cdot (x + y)| + \sqrt{(x^2 + y^2)}$ (s laboratorijskih vježbi) traži se minimum, a rješenje je točka (0,0). Ako se za rješavanje upotrijebi metoda najbržeg spusta uz početnu točku (2,0), opišite što će se dogoditi? (Hoće li postupak naći rješenje i zašto?).

hint: neće

3.17 Zadana je funkcija dvije varijable $F(\underline{x}) = (x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 2)^2$ te početna točka pretraživanja x_0=(0,0). Provedite jednu iteraciju metode najbržeg spusta uz zadane vrijednosti. Potrebno je izračunati smjer optimizacije v_0, parametar λ_0 te dobivenu točku x_1. Parametar λ pronađite analitičkim putem. Predložite postupak optimiranja kojim bi se do rješenja ovog problema došlo u prvoj iteraciji (jedna iteracija postupka definira se kao jedan prolaz vanjske petlje algoritma).

x_1 = (1.176, 2.353)

3.18 Za funkciju $F(x, y) = |(x - y) \cdot (x + y)| + \sqrt{(x^2 + y^2)}$ traži se minimum, a rješenje je točka (0,0). Ako se za rješavanje upotrijebi Hooke-Jeeves postupak uz početni Δx=1 po svakoj koordinati i uz početnu točku (1,1), opišite što će se dogoditi? (Hoće li postupak naći rješenje i zašto).

hint: neće

3.19 Zadana je optimizacijska funkcija $F(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ kojoj se traži minimum i skup točaka (1,2,3), (0,2,4), (-2,0,3) i (-4,0,1). Izračunajte centroid ovoga skupa točaka za primjenu u postupku po Nelderu i Meadu.

3.20 Za funkciju $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1^3$ navedite barem jednu točku koja predstavlja minimum ili maksimum ili sedlo funkcije.

(0, 1, 0)

3.21 Opišite i formulirajte operacije nad skupom točaka (simpleksom) koje se koriste u postupku po Nelderu i Meadu.

3.22 Navedite 5 postupaka nelinearnog optimiranja funkcija više varijabli bez uporabe derivacija.

3.23 Koliki je broj iteracija dovoljan za pronalaženje minimuma *n*-dimenzijske kvadratne funkcije više varijabli postupkom po Powellu?

3.24 Za zadani sustav nelinearnih jednadžbi definirati funkciju cilja koja će omogućiti rješavanje sustava nekim od postupaka nelinearne optimizacije.

$$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 5$$
$$(x_1 + x_2) \cdot x_2 = -2 \cdot x_1$$

3.25 Zadana je funkcija cilja $f(x) = x \cdot \ln(x)$. Do koje se vrijednosti dolazi u prvoj iteraciji Newton-Raphsonovog postupka ako je početna vrijednost $x_0 = 1$?

$x_1 = 0$

3.26 Zadana je funkcija dvije varijable $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Provesti postupak pronalaženja minimuma zadane funkcije po Hooke-Jeeves algoritmu. Početna točka pretraživanja je (7,3), početni pomak je 1 a smanjujemo ga za faktor 2. Ispisati pregledno (u obliku tablice) točke $\mathbf{x_B}$ (bazna točka), $\mathbf{x_P}$ (početna točka pretraživanja), $\mathbf{x_N}$ (točka dobivena pretraživanjem) te trenutnu vrijednost pomaka **dx** za svaku iteraciju. Postupak provoditi dok vrijednost pomaka ne padne na 0.25 te *napisati dobiveno rješenje*.

3.27 Za funkciju cilja $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2$ formirajte (nepravilni) simpleks sa potrebnim brojem točaka (za primjenu postupka po Nelderu i Meadu). Odredite centroid dobivenog skupa točaka i provedite operaciju refleksije uz $\alpha = 2$.

3.28 Navedite barem dva načina definiranja jedinstvene funkcije cilja $F(\underline{x})$ na osnovu n parcijalnih funkcija cilja $f_i(\underline{x})$.

3.29 Zadana je funkcija $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2$. Provesti postupak pronalaženja minimuma zadane funkcije po Hooke-Jeeves algoritmu. Početna točka pretraživanja je (4,3,2), početni pomak je 1 a smanjujemo ga za faktor 2. Ispisati pregledno (u obliku tablice) točke $\mathbf{x_B}$ (bazna točka), $\mathbf{x_P}$ (početna točka pretraživanja), $\mathbf{x_N}$ (točka dobivena pretraživanjem) te trenutnu vrijednost pomaka **dx** za svaku iteraciju. Postupak provoditi dok vrijednost pomaka ne padne na 0.25 te *napisati dobiveno rješenje*.

(1, 0, -2)

3.30 Odredite te u koordinatnoj ravnini skicirajte početni smjer traženja minimuma za funkciju $F(\underline{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 3)^2$ postupkom najbržeg spusta iz početne točke (0,0). Koliko iteracija postupka će biti dovoljno za pronalaženje minimuma (uz dovoljnu preciznost pronalaženja minimuma na pravcu)?

Smjer: (-1, 3)

3.31 Zadana je funkcija cilja $F(\underline{x}) = (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 2)^2$. U koordinatnoj ravnini x_1/x_2 skicirati postupak pronalaženja minimuma zadane funkcije postupkom traženja u smjerovima koordinatnih osi od početne točke (1,1). U koliko iteracija se dolazi do rješenja?

3.32 Odredite početni smjer traženja minimuma za funkciju $F(\underline{x}) = a \cdot (x_1 - 1)^2 + b \cdot (x_2 + 3)^2$ postupkom najbržeg spusta iz početne točke (2,0). U kakvom odnosu moraju biti parametri a i b kako bi dobiveni smjer pokazivao prema minimumu?

Smjer: (a, 3b)

3.33 Za zadanu kvadratnu funkciju $F(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2$ odredite konjugirani smjer smjeru $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Postupak provedite analitički i skicirajte u koordinatnoj ravnini.

Konjugirani smjer: (1, 0)

3.34 Funkcija cilja $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2$ optimira se simpleks postupkom po Nelderu i Meadu. Tvori li skup točaka (1,2,1), (2,1,1), (3,2,1) i (-1,0,1) simpleks? Ako je potrebno, promijenite točke tako da tvore simpleks, odredite centroid dobivenog skupa točaka i provedite operaciju refleksije uz α = 2.

Potrebno je promijeniti barem jednu točku.

Optimiranje uz ograničenja

3.35 Zadana je funkcija cilja dvije varijable $F(\underline{x}) = -x_1 \cdot x_2 \cdot |x_1 - x_2|$ kojoj se traži minimum, uz implicitno ograničenje $x_1 + x_2 - 8 \le 0$ te eksplicitna ograničenja $x_1, x_2 \in [-8, 8]$. Uz trenutni skup točaka (0,0), (1,3), (2,1), (3,2) te faktor refleksije α = 2, provedite jednu iteraciju postupka po Box-u. Na početku i na kraju iteracije napišite trenutni skup točaka i njihov centroid.

2. iteracija: (3, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 2)

3.36 Zadana je funkcija cilja dvije varijable $F(\underline{x})$ uz dva linearna ograničenja u obliku jednadžbi, $a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$ i $a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2$. Navedite i obrazložite (skicirajte) uvjet postojanja rješenja koje zadovoljava sva ograničenja. Formulirajte novu funkciju cilja koja uzima u obzir navedena ograničenja.

3.37 Zadana je funkcija cilja dvije varijable $F(\underline{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ uz sljedeća ograničenja:

$$x_1, x_2 \in [0, \infty\rangle$$
$$x_1 - 1 \ge 0$$

Za pronalaženje minimuma funkcije koristi se postupak po Box-u. Trenutni skup točaka je (1,0), (2,1), (2,3) i (1,3), faktor refleksije α = 2. Pronađite centroid i provedite dvije iteracije postupka. Na kraju svake iteracije napišite trenutni skup točaka i njihov centroid.

3. iteracija: (1, 0), (2, 1), (1, 1), (5/3, 1/3)

3.38 Zadana je funkcija dvije varijable $F(\underline{x}) = (x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 2)^2$ te sljedeća ograničenja:

$$x_2 - x_1 \ge 0$$
$$2 - x_1 \ge 0$$
$$x_1 + x_2 - 4 = 0$$

Transformirati zadani problem u problem bez ograničenja na mješoviti način.

3.39 Zadana je funkcija cilja dvije varijable $F(\underline{x}) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$ kojoj se traži minimum, uz implicitno ograničenje $|x_1 x_2| - 8 \le 0$ te eksplicitna ograničenja $x_1, x_2 \in [-10, 10]$. Uz trenutni skup točaka (2,4), (2,0), (4,2), (1,1) te faktor refleksije α = 2, provedite jednu iteraciju postupka po Box-u. Na početku i na kraju iteracije napišite trenutni skup točaka i njihov centroid.

3.40 Ako se transformacijom problema s ograničenjima na mješoviti način dobiva pomoćna funkcija $U(\underline{x}, t) = F(\underline{x}) - t[\ln(x_1 - x_2) + \ln(2 + x_2)] + \frac{1}{t}(x_1 + 4)^2$, navedite ograničenja toga optimizacijskog problema.

3.41 Navedite barem dvije transformacije parametara kojima se mogu izbjeći eksplicitna ograničenja oblika $x_i \le 0$.

3.42 Zadana je funkcija cilja dvije varijable $F(\underline{x}) = x_1^{\ 2} + (x_2 - 1)^2$ kojoj se traži minimum, uz implicitno ograničenje $|x_1 x_2| - 8 \leq 0$ te eksplicitna ograničenja $x_1, x_2 \in [-10,10]$. Uz trenutni skup točaka (2,4), (1,0), (4,2), (0,2) te faktor refleksije α = 2, provedite dvije iteracije postupka po Box-u. Na početku i na kraju iteracije napišite trenutni skup točaka i njihov centroid.

3.43 Zadana je funkcija cilja $f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2.5)^2$ kojoj se traži minimum, uz ograničenja $3x_1 - x_2 - 1 \geq 0$, $-x_1 - x_2 + 5 \geq 0$ i $x_2 < 2$ te početnu točku $x = (1,1)$. Korištenjem metode aktivnih ograničenja odredite minimum zadanog optimizacijskog problema. Provedite postupak ako je početna točka zadana kao $x = (0, -1)$.

4 Evolucijski algoritmi

4.1 U algoritmu CMA-ES zadana je srednja vrijednost iz prethodne iteracije *m* = (0, 0) i trenutni podskup najboljih rješenja u točkama (2,1), (1,2), (2,2). Odredite nove vrijednosti za parametre algoritma: srednju vrijednost i kovarijacijsku matricu.

4.2 Genetskim algoritmom pronalazi se minimum funkcije $f(x)=(x+2)^2$ u intervalu $x\in$[-5, 5]. Željena preciznost je jedna decimala. Koliko je bitova potrebno za predstavljanje varijable? Napišite pet slučajnih kromosoma. Nad tim jedinkama provedite jednu iteraciju genetskog algoritma sa 3-turnirskim odabirom, križanjem s jednom točkom prekida i jednostavnom mutacijom (pretpostavimo da će se mutacija obaviti, ostale slučajne parametre odredite sami). Uz svaki kromosom napišite i odgovarajuću realnu vrijednost!

4.3 Navedite barem četiri uvjeta zaustavljanja rada genetskog algoritma.

4.4 U nagradnoj igri sudjeluju svi korisnici koji su obavili barem jednu transakciju. Kod izvlačenja nagrada izvlače se brojevi transakcija, a nagradu dobiva korisnik koji je obavio dotičnu transakciju, tako da oni korisnici koji imaju više transakcija imaju veće šanse za dobitak. Postoji konačan broj nagrada, a svaki korisnik može dobiti samo jednu nagradu. Odgovara li opisana metoda odabira algoritmu jednostavne generacijske selekcije (*roulette wheel selection*), jednostavne eliminacijske selekcije ili eliminacijske turnirske selekcije? Obrazložite!

4.5 Genetskim algoritmom pronalazi se optimum funkcije dvije varijable. Interval za prvu varijablu je $x_1\in$[-5, 5], a za drugu $x_2\in$[0, 1]. Željena preciznost je dvije decimale. Koliko je bitova potrebno za predstavljanje pojedine varijable i kolika je ukupna duljina kromosoma u binarnom prikazu? Koliko iznosi ukupan broj mogućih rješenja u ovako definiranom prikazu? Napišite jedinke koje predstavljaju točke (-2, 0.2) i (0, 0.99). Provedite jednoliko križanje uz slučajni kromosom kao niz nula potrebne duljine i dekodirajte rezultat. Ako je vjerojatnost mutacije 0.01, koja je vjerojatnost da će barem jedan bit u kromosomu biti mutiran?

4.6 Navesti razlike između genetskog algoritma i simuliranog kaljenja s obzirom na:

a) broj rješenja s kojima algoritam radi,
b) vrste operatora koje algoritam primjenjuje na rješenja.

4.7 Navesti barem četiri parametra koja se mogu pojaviti u implementacijama genetskog algoritma.

4.8 Parametri genetskog algoritma su: binarni prikaz, duljina kromosoma 10 bita, područje realne varijable [-100, 100]. Zadani su kromosomi "0111010011" i "1100101001".

a) Dekodirajte zadane članove populacije.
b) Izvršite uniformno križanje zadanih kromosoma uz slučajni vektor R "1100011010".
c) Navedite i ukratko opišite tipove mutacije za prikaz kromosoma kao brojeva s pomičnom točkom.

4.9 Parametri genetskog algoritma su slijedeći: jednodimenzionalni vektor, područje [0,10], točnost na dvije decimale. Odrediti kromosome koji najtočnije predstavljaju vrijednosti 4.67 i 7.25. Provesti križanje ta dva kromosoma s jednom točkom prekida iza 4. bita i napisati i dekodirati oba rješenja.

4.10 Što je to elitizam (u kontekstu genetskih algoritama)?

4.11 Je li u postupku turnirskog odabira u GA održan elitizam? Objasniti!

4.12 Navedite i definirajte dva oblika mutacije u binarnom prikazu kromosoma.

4.13 Genetskim algoritmom traži se minimum funkcije $f(x)=x^2$. Područje pretraživanja je [-10, 10] a zadana preciznost je 10^{-2} (dvije decimale). Izračunajte potreban broj bitova u kromosomu za binarni prikaz. Prikažite realne vrijednosti -4.26 i 5.68 kao kromosome. Provedite jednoliko (uniformno) križanje tih kromosoma uz slučajni vektor koji je jednak nizu jedinica potrebne duljine i rezultat preslikajte u realnu domenu. Jesmo li križanjem dobili bolju ili lošiju jedinku u odnosu na početne dvije?

4.14 Genetskim algoritmom pronalazi se minimum funkcije $f(x)=(x-1/2)^2$ u intervalu $x\in[0,\ 1]$. Željena preciznost je dvije decimale (binarni prikaz kromosoma). Realne vrijednosti 0, 0.25, 0.35, 0.75 i 0.9 prikažite kao kromosome te za svaki kromosom izračunajte početnu vjerojatnost eliminacije za primjenu u postupku eliminacijske selekcije (pomoć: definirajte funkciju kazne). Eliminirajte jedinku sa najvećom vjerojatnošću eliminacije i nadomjestite je križanjem s jednom točkom prekida između dvije slučajno odabrane jedinke, te izračunajte realnu vrijednost i dobrotu nove jedinke.

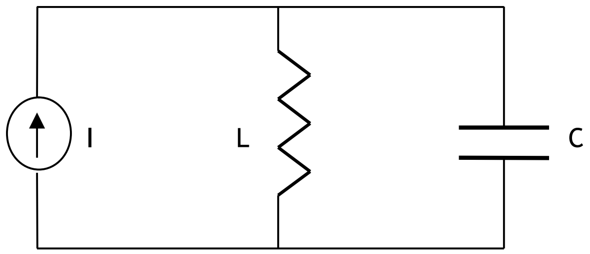
5 Analiza prijelaznih pojava

5.1 Za zadani sustav predložite odgovarajući postupak numeričke integracije po pitanju stabilnosti i definirajte dopuštene vrijednosti perioda integracije *T*. Nacrtajte područje stabilnosti odabranog postupka u λT ravnini.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Obrnuti Eulerov postupak, T >= 0.5

5.2 Zadanu mrežu opišite potrebnim brojem diferencijalnih jednadžbi. Ako su iznosi veličina u mreži L = 10mH, C = 1mF, I = 0.1A, provjerite stabilnost trapeznog postupka. Provedite prve dvije iteracije trapeznog postupka uz period integracije 0.1 i početne vrijednosti varijabli stanja jednake nuli.



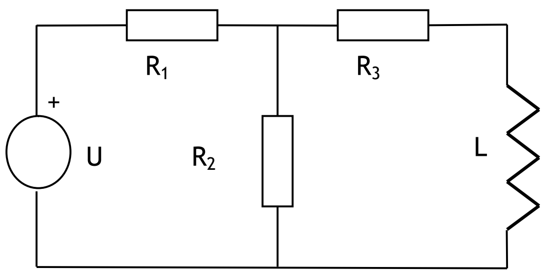
t = 0.2: i = 0.003, u = -0.08

5.3 Jabuka pada sa stabla. Opišite kretanje jabuke potrebnim brojem diferencijalnih jednadžbi.

5.4 Za zadani sustav odaberite odgovarajući postupak numeričke integracije (po pitanju stabilnosti) i obrazložite odabir!

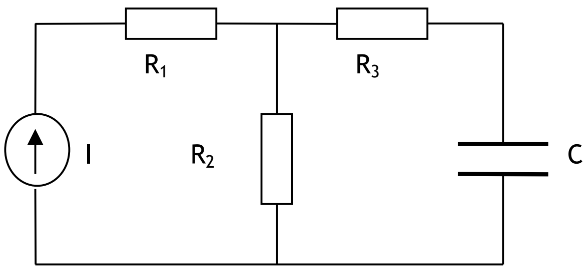
$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

5.5 Zadanu mrežu opišite potrebnim brojem diferencijalnih jednadžbi. Ako su iznosi veličina u mreži R1 = 100Ω, R2 = 50Ω, R3 = 100Ω, L = 1mH, U = 1V, provjerite stabilnost Heunovog postupka za korak integracije T = 10^{-5}. Ako je potrebno, podijelite korak integracije sa 10 i provedite prve dvije iteracije postupka, uz početne vrijednosti varijabli stanja jednake nuli.



*t = 2*10^{-5}: i = 1.73 mA*

5.6 Zadanu mrežu opišite potrebnim brojem diferencijalnih jednadžbi. Ako su iznosi veličina u mreži R1 = 100Ω, R2 = 100Ω, R3 = 50Ω, C = 100μF, I = 1mA, pronađite najveći dopušteni korak integracije po Eulerovom postupku. Provedite prve dvije iteracije postupka uz korak T = 0.01, ako su početne vrijednosti varijabli stanja jednake nuli.



t = 0.02: u = 0.08888 V

5.7 Objasnite kako se definiraju broj koraka (koračnost) i red postupka numeričke integracije?

5.8 Navedenim jednadžbama definiran je proizvoljni postupak numeričke integracije. Za zadani postupak pomoću ispitne jednadžbe odredite uvjet stabilnosti (u obliku nejednadžbe). Ako se zadanim algoritmom rješava sustav $\dot{x} = -2x$, hoće li postupak biti stabilan uz korak T = 0.75?

$$\hat{x}_{k+1} = x_k + T \cdot f(x_{k+1}, t_{k+1})$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2} \cdot [f(x_k, t_k) + f(\hat{x}_{k+1}, t_{k+1})]$$

5.9 Za zadani sustav provjerite stabilnost Heunovog postupka za korak integracije T = 0.1.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

5.10 Zadan je sustav u matričnom obliku. Odrediti maksimalni korak integracije *T* za rješavanje sustava po Euleru i naći vektor $\underline{x}(t = 0.8)$.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \underline{x}, \quad \underline{x}(t = 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

T_{MAX} = 0.5; t = 0.8: $\underline{x}$ = (-0.6, 0)

5.11 Odrediti (pomoću ispitne jednadžbe) i nacrtati područje stabilnosti obrnutog Eulerovog postupka. Izraziti *T* kao funkciju od λ.

5.12 Izvesti grešku i stabilnost trapeznog postupka.

5.13 Zadan je sustav u matričnom obliku. Naći $\underline{x}$*(t=0.02)* uz *T=0.01* s točnošću na 4 decimale izračunavanjem po obrnutoj Eulerovoj metodi.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix} \underline{x}, \quad \underline{x}(t = 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

t = 0.02: x_1 = 0.9612, x_2 = -1.9223

5.14 Za zadani sustav odredite najveći dopušteni korak integracije po Eulerovom postupku.

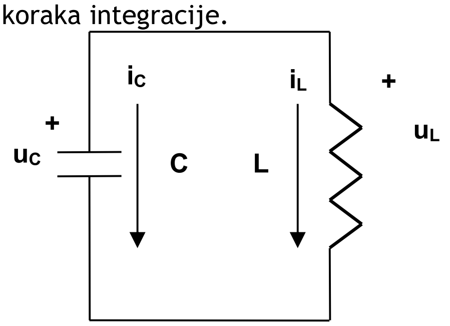
$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

5.15 Za sustav iz prethodnog zadatka provjerite stabilnost obrnutog Eulerovog postupka za korak integracije T = 0.1 te provedite prve dvije iteracije postupka uz početne vrijednosti $x_{1,0}$=1 i $x_{2,0}$=0.

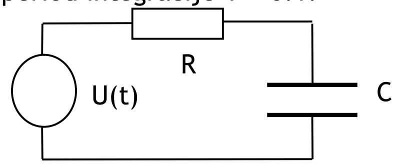
5.16 Sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi zadan je u matričnom obliku kao $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}$. Koristeći formulu za trapezni postupak, prevedite iterativnu formulu u eksplicitni oblik.

5.17 Navedite opću formulu Adams-Moultonovih postupaka te formule za postupak nultoga (*p*=0) i prvoga reda (*p*=1). Koji postupci koriste dobivene formule i kakvog su oni tipa?

5.18 Za mrežu na slici odredite varijable stanja i formulirajte sustav diferencijalnih jednadžbi u matričnom obliku ($\underline{\dot{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}$). Predznake napona i nazivne smjerove struja postavite kao na slici. Ako je induktivitet zavojnice L = 0.1H a kapacitet kondenzatora C = 1mF, provjerite može li se sustav rješavati Eulerovim postupkom i obrazložite. Predložite postupak kojim se sustav može rješavati i definirajte interval dozvoljenih vrijednosti koraka integracije.



5.19 Zadanu mrežu opišite potrebnim brojem diferencijalnih jednadžbi. Početne vrijednosti varijabli stanja su jednake nuli, R = 10kΩ, C = 10μF, naponski izvor daje pilasti napon koji se u vremenu [0,1] može izraziti kao U(t) = 2t [V]. Provedite dvije iteracije trapeznog postupka uz period integracije T = 0.1.



t = 0.2: u = 0.2222 V

5.20 Za zadani sustav provedite dvije iteracije Heunovog postupka uz početne vrijednosti varijabli stanja jednake 1 i period integracije T = 0.1.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

5.21 Navedenim jednadžbama definiran je proizvoljni postupak numeričke integracije. Za zadani postupak pomoću ispitne jednadžbe odredite uvjet stabilnosti (u obliku nejednadžbe). Ako se zadanim algoritmom rješava sustav $\dot{x} = -0.1 \cdot x$, hoće li postupak biti stabilan uz korak T = 1?

$$m_1 = x_k + T \cdot f(x_k, t_k)$$
$$m_2 = x_k + T \cdot f(x_{k+1}, t_{k+1})$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2} \cdot [f(m_1, t_k) + f(m_2, t_{k+1})]$$

Uvjet: kompliciran, ali bit će stabilno

5.22 Koristeći formule Eulerovog i *trapeznog* postupka, definirajte prediktorsko-korektorski postupak oblika $P(EC)^2E$. Provedite jednu iteraciju postupka za sustav $\dot{x} = -0.1 \cdot x + 2t$ uz $T = 1$ i $x_0(t_0 = 0) = 1$.

x_1=1.85475

5.23 Navedenim jednadžbama definiran je proizvoljni postupak numeričke integracije. Je li postupak implicitan ili eksplicitan? Provedite jednu iteraciju postupka za rješavanje sustava $\dot{x} = -0.1 \cdot x + 2t$ uz T = 1 i $x_0(t_0 = 0) = 1$.

$$m_1 = x_k + T \cdot f(x_k, t_k)$$
$$m_2 = x_k + T \cdot f(x_{k+1}, t_{k+1})$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2} \cdot [f(m_1, t_k) + f(m_2, t_{k+1})]$$

x_1 = 1.814

6 Složenost algoritama

6.1 Za algoritam na slici odredite broj operacija množenja i dijeljenja te definirajte složenost algoritma u O() notaciji.

```
pocetak(n)
   i = 1;
   dokje(i < n)
   {  j = i;  // pazi!
      dokje(j < n)
      {  k = 1;
         dokje(k < n)
         {  ako(k*k == i*i + j*j)
               ispisi(i,j,k);
            k++;
         }
         j++;
      }
      i++;
   }
kraj.
```

6.2 Algoritam `radi_nesto()` je složenosti *o*($2n^2$). Odredite složenost algoritma na slici u *O*() notaciji.

```
pocetak(n)
   i = n;
   dokje(i > 1)
      radi_nesto();
      za j = n do 1
         radi_nesto();
      i = (cjelobrojno)i/2;
kraj.
```

6.3 Odredite složenost algoritma na slici u O() notaciji s obzirom na broj operacija množenja i dijeljenja u ovisnosti o ulaznom parametru n. Napomena: nije potrebno izraziti točan broj operacija.

```
pocetak(n)
   i = 1; k = n*n - 1;
   funkcija(n,k,i);
kraj.
...
funkcija(n,k,i)
   k =(cjelobrojno)k/3;
   i = i*2;
   ako(k>0)
      funkcija(n,k,i);
   za i = 1 do n
      k = (k*2)+(i*3);
kraj(funkcija).
```

```
pocetak(n)
   i = 1; k = n-1;
   funkcija(n,k,i);
kraj.
...
funkcija(n,k,i)
   k = k-i;
   i = i*2;
   ako(k>=0)
      funkcija(n,k,i);
   za i = 1 do n
      k = (k*3)/(i*2);
kraj(funkcija).
```

6.4 Odredite složenost supstitucije unaprijed i supstitucije unazad s obzirom na broj operacija množenja i dijeljenja za zadanu dimenziju sustava n.

6.5 Odrediti složenost algoritma na slici u O() notaciji s obzirom na broj operacija množenja i dijeljenja u ovisnosti o parametru n.

```
procedura P(n)
|     x=1; y=1; z=1; k=0;
|     za i=1 do 100
|     |     x=x/0.99;
|     za i=1 do 2*n
|     |     y=y*x/i;
|     |     k=k+i;
|     |     j=k;
|     |     ponavljaj
|     |     |     z=z*y/x;
|     |     |     j=j-1;
|     |     svedo j=0;
```

6.6 Odrediti broj operacija množenja i dijeljenja kod svođenja na gornji trokutni oblik u Gaussovom postupku i izraziti složenost postupka u *O*-notaciji.

6.7 Broj operacija nekoga algoritma u ovisnosti o ulaznom parametru *n* jednak je $256 + 32 \cdot n \cdot \ln(n)$. Napisati ocjenu složenosti toga algoritma u O() notaciji.

6.8 Zadani su brojevi operacija algoritama u ovisnosti o ulaznom parametru *n*. Za svaki algoritam odredite složenost u *O*() notaciji.

a) $9\log_2(n) + 6n$

b) $15n^2 + 3n^{5/2}$

c) $3n^2 + n\log_2(n)$

d) $16n^2\log_2(n) + n$

6.9 Za niz prirodnih brojeva duljine n potrebno je odrediti je li u nizu jednak broj parnih i neparnih brojeva. Ako čitanje jednog elementa niza smatramo operacijom jedinične složenosti, odredite potreban broj operacija koje algoritam mora obaviti u najboljem i u najgorem slučaju te izrazite složenost u O() notaciji za oba slučaja.