Operacijska istraživanja

2. predavanje: Dualnost i analiza osjetljivosti
Dualna simpleksna metoda
Analiza osjetljivosti u matričnom obliku

Sažetak predavanja

- Uvod u teoriju dualnosti
- Dualna simpleksna metoda
- Analiza osjetljivosti u matričnom obliku

Operacijska istraživanja
4. predavanje: Dualnost i analiza osjetljivosti

Dualnost

28. listopada 2020.

Teorija dualnosti

- Slijedi iz proširenja **Lagrangeovih** množitelja

min $x^2 + y^2$
ako je: $x+y=1$

- Relaksacijom čvrstog ograničenja uvođenjem Lagrangeovog množitelja p, dobije se Langrangeova funkcija koja sada čini Lagrangeovu relaksaciju:
- $L(x,y,p) = x^2 + y^2 + p(1-x-y)$
- Pretvoreno u optimizacijski problem bez ograničenja
- Sustav koji slijedi iz $\nabla L(x, y, p) = 0$ vodi do rješenja

Teorija dualnosti

- Što sa ≥ i ≤ ograničenjima?

$$\begin{array}{ll} \textbf{max} & c^T x \\ \text{ako je:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Standardna ili proširena forma LP-a

- Ovo se zove **primalni** problem i neka je njegov optimum x*
- Relaksirana verzija problema:

$$\begin{array}{ll} \textbf{max} & c^T x + \mathrm{p}^{\mathrm{T}}(\mathrm{b} - \mathrm{Ax}) \\ \text{ako je:} & x \geq 0 \end{array}$$

Teorija dualnosti

- Relaksirana verzija problema:

$$\begin{array}{ll} \textbf{max} & c^T x + \mathrm{p}^{\mathrm{T}}(\mathrm{b} - \mathrm{Ax}) \\ \text{ako je:} & x \geq 0 \end{array}$$

- Optimalni trošak za relaksirani problem:

$$g(p) = max_{x \geq 0}[\, c^T x + \mathrm{p}^{\mathrm{T}}(\mathrm{b} - \mathrm{Ax})] \geq c^T x^* + \mathrm{p}^{\mathrm{T}}(\mathrm{b} - \mathrm{A}x^*) = c^T x^*$$

- **Gornja granica** za stvarni trošak!

Teorija dualnosti

- Nađimo najbolju gornju granicu!

min g(p)

- **Dualni problem**

$$g(p) = max_{x \geq 0}[\, c^T x + \mathrm{p}^\mathrm{T}(\mathrm{b} - \mathrm{Ax})] = \mathrm{p}^\mathrm{T}\mathrm{b} + max_{x \geq 0}\overbrace{(c^T - \mathrm{p}^\mathrm{T}\mathrm{A})}^{\text{Trivijalno za sve osim} \leq 0}\mathrm{x}$$

- Dualni problem kao linearni program

min $p^T b$

ako je: $A^T p \geq c$

Izvođenje duala iz primala

primal	dual
broj ograničenja	broj varijabli
broj varijabli	broj ograničenja
rhs	funkcija cilja
funkcija cilja	rhs
A matrica koeficijenata	$\mathbf{A}^T$
jednakost	urs varijabla
urs varijabla	jednakost
<= ograničenje	>= varijabla
>= ograničenje	<= varijabla
>= varijabla	>= ograničenje
<= varijabla	<= ograničenje

Primjer (izvedite za vježbu)

- Primalni problem

$$\begin{array}{ll} \textbf{max} & z = c^T x \\ \text{ako je:} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Kanonska forma LP-a

- Pripadajući dualni problem

$$\begin{array}{ll} \textbf{min} & w = y^T b \\ \text{ako je:} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Primal i dual

- primal

$$\begin{array}{lll} \textbf{max.} & z = 6x_1 + 5x_2 & \\ \text{ako je:} & x_1 + x_2 \leq 5 & (1) \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 & (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

- dual

$$\begin{array}{lll} \textbf{min.} & w = 5y_1 + 12y_2 & \\ \text{ako je:} & y_1 + 3y_2 \geq 6 & (1) \\ & y_1 + 2y_2 \geq 5 & (2) \\ & y_1, y_2 \geq 0 & \end{array}$$

- Dual nastao je kao novi linearni problem koji nalazi minimalnu gornju granicu primala.

Odnos primala i duala

- **Teorem slabe dualnosti**
- Ako je primal problem maksimizacije, svako izvedivo rješenje duala ima funkciju cilja veću ili jednaku od bilo kojeg izvedivog rješenja primala.
- Ako primal i dual imaju izvediva rješenja takva da je w = z, onda su ona optimalna i za primal i za dual.
- Ako primal i dual imaju izvediva rješenja, takva da je w = z, onda za ta rješenja vrijedi w* = z*:
  - optimum
  - neograničeno
  - neizvedivo

Komplementarnost

- **Komplementarnost (engl. complementary slackness)**: Ako su x i y izvediva rješenja primala i duala, onda su ***optimalna*** **ako i samo ako** vrijedi:

$$x_i\underbrace{(c_i - y^T A_i)}_{\text{Faktor redukcije varijable } x_i} = 0, \forall i$$

$$y_j\underbrace{\left(a_j^T x - b_j\right)}_{\text{Dopunjenje j-tog ograničenja primala}} = 0, \forall j$$

- U optimumu, varijabla odluke ili njena „pripadna”dopunska varijabla su 0
  - Za primal – svaka varijabla ≠ 0 ima faktor redukcije 0
  - Za dual – samo aktivna ograničenja primala imaju cijenu ≠ 0

Matematička interpretacija duala

- primal

$$\begin{aligned} \textbf{max.} \quad & z = 6x_1 + 5x_2 \\ \text{ako je:} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- optimalno rješenje primala: $z = 27$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

- dual

$$\begin{aligned} \textbf{min.} \quad & z = 5y_1 + 12y_2 \\ \text{ako je:} \quad & y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- optimalno rješenje duala: $z = 27$, $y_1 = 3$, $y_2 = 1$

Osjetljivost fje cilja na promjene parametara

- primal

$$\begin{aligned} \textbf{max.} \quad & z = 6x_1 + 5x_2 \\ \text{ako je:} \quad & x_1 + x_2 = 5 + \boldsymbol{\delta} \\ & 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 10 + 2\delta$$
$$x_1 = 2 - 2\delta$$
$$x_2 = 5 + \delta - x_1 = 3 + 3\delta$$
$$z = 6(2 - 2\delta) + 5(3 + 3\delta) = 27 + \mathbf{3\delta}$$

  - optimalno rješenje primala: $z = 27,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$

- dual

$$\begin{aligned} \textbf{min.} \quad & z = 5y_1 + 12y_2 \\ \text{ako je:} \quad & y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

  - optimalno rješenje duala: $z = 27$, $\mathbf{y_1 = 3}$, $y_2 = 1$

- **U točki optimuma** dual se može interpretirati kao **marginalna** vrijednost resursa
- Pretp. baza ostaje ista za male perturbacije

Ekonomska interpretacija duala

- primal **max.** $z = 6x_1 + 5x_2$
  ako je: $x_1 + x_2 = 5 + \boldsymbol{\delta}$
  $3x_1 + 2x_2 = 12$

  $z = 27 + \mathbf{3}\boldsymbol{\delta}$

- dual **min.** $z = 5y_1 + 12y_2$
  ako je: $y_1 + 3y_2 \geq 6$
  $y_1 + 2y_2 \geq 5$
  $y_1, y_2 \geq 0$

  - optimalno rješenje primala: $z = 27$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
  - optimalno rješenje duala: $z = 27$, $\mathbf{y_1 = 3}$, $y_2 = 1$

  - ako dodatna jedinicu resursa 1 ($5 + \boldsymbol{\delta}$) nosi dodatni profit 3 ($27 + \mathbf{3}\boldsymbol{\delta}$) spremni smo platiti za nju ≤ 3.
  - Zero-sum igra kupca i prodavača. **Primal** problem rješava **kupac**, a **dual** problem rješava **prodavatelj.** Rješenje igre je u ravnotežnoj točki gdje iščezava marginalna vrijednost za kupca.

Što predstavlja dualna varijabla vrijednosti 0

max. $z = 3x_1 + 4x_2$

ako je: $x_1 + x_2 \leq 12$ y_1

$2x_1 + 3x_2 \leq 30$ y_2

$x_1 + 4x_2 \leq 36$ y_3

- $x_1 = 6$, $x_1 = 6$, $\mathbf{u_3 = 6}$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $z = 42$ (**u** su dopunske varijable primala)
- $v_1 = 0$, $x_1 = 0$, $\mathbf{y_3 = 0}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $w = 42$ (**v** su dopunske varijable duala)
- Marginalna cijena resursa kojeg ionako nismo potrošili (**redundantan**) je 0. Fja cilja neosjetljiva na povećanje takvih resursa.
- Resurs koji je **usko grlo** ima marginalnu vrijednost >0

Operacijska istraživanja
4. predavanje: Analiza osjetljivosti i dualnost

Dualna simpleksna metoda

28. listopada 2020.

Simpleksna metoda i dual

- Simpleksna metoda pronalazi izvedivo rješenje primala, te spada u kategoriju, tzv. primalnih algoritama.
- Metodom **komplementarnosti** u svakoj iteraciji također se evaluira dual.
- U iteraciji u kojoj dual postane izvediv, pronađen je optimum.
- Simpleksna metoda istovremeno rješava i primal i dual

Dualna simpleksna metoda

min. $z = 4x_1 + 7x_2$
ako je: $2x_1 + 3x_2 \geq 5$
$x_1 + 7x_2 \geq 9$
$x_1, x_2 \geq 0$

max. $-z = -4x_1 - 7x_2$
ako je: $-2x_1 + -3x_2 \leq -5$
$-x_1 - 7x_2 \leq -9$
$x_1, x_2 \geq 0$

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	basic
1	4	7	0	0	0	$z = 0$
0	-2	-3	1	0	-5	$s_1 = -5$
0	-1	-7	0	1	-9	$s_2 = -9$

- Narušeno je pravilo da desna strana mora biti pozitivna.
- Također, polazno rješenje nije bazično izvedivo, ali je dual izvediv.

Računanje ulazne i izlazne varijable

- Izlazna varijabla je ona koja ima najnegativniji rhs: s_2
- Računa se ratio z-redak/izlazna-varijabla-redak.
- Ulazna varijabla je ona koja ima min. ratio: x_2

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	basic
1	4	**7**	0	0	0	$z = 0$
0	-2	**-3**	1	0	-5	$s_1 = -5$
0	**-1**	**-7**	**0**	**1**	**-9**	$\mathbf{s_2 = -9}$
ratio	4/(-1)	**7/(-7)**				

Nakon 1. iteracije

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	basic
1	**3**	0	0	1	-9	z = -9
0	**-11/7**	**0**	**1**	**-3/7**	**-8/7**	**s_1 = -8/7**
0	**1/7**	1	0	-1/7	9/7	x_2 = 9/7
ratio	**-21/11**			-7/3		

- izlazna varijabla: s_1
- ulazna varijabla: x_1

2. iteracija

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	basic
1	0	0	21/11	2/11	-123/11	z = -123/11
0	1	0	-7/11	3/11	8/11	x_1 = 8/11
0	0	1	1/11	-2/7	13/11	x_2 = 13/11

- optimum postignut za primal: $z = 123/11$, $x_1 = 8/11$, $x_2 = 13/11$
- optimum postignut za dual: $w = 123/11$, $y_1 = 21/11$, $y_2 = 2/11$
- prikladna metoda za minimizaciju sa nejednakostima tipa $\geq$

Dualna simpleksna metoda

- Zove se dualna simpleksna metoda jer je u svakoj iteraciji dual problema izvediv, a primal nije, te spada u kategoriju dualnih algoritama.
- Za simpleksnu metodu, u svakoj iteraciji primal je izvediv, a dual nije.
- Ako se može naći izlazna, a ne može naći ulazna varijabla (neograničenost u simpleksnoj metodi), u dualnoj simpleksnoj metodi = neizvedivost (engl. infeasibility).

Operacijska istraživanja
4. predavanje: Analiza osjetljivosti i dualnost

Analiza osjetljivosti u matričnom obliku

28. listopada 2020.

Model linearnog programiranja

- Ako je x vektor varijabli odlučivanja, maksimizirati linearnu funkciju (1):

$$\max c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax=b$$

$$x \geq 0$$

gdje su A, b, c zadane konstante, te $x \geq 0$

Matrični prikaz inicijalne simpleksne tablice

- $\mathrm{BV_i}$, bazična varijabla i-retka optimalne tablice
- $\mathrm{BV} = \{\mathrm{BV_1}, \mathrm{BV_2}, \ldots, \mathrm{BVm}\}$, skup bazičnih varijabli optimalne tablice
- $\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{BV}_1} \\ \vdots \\ x_{\mathrm{BV}_m} \end{bmatrix}$, vektor bazičnih varijabli
- $\mathrm{NBV} = \{\mathrm{NBV_1}, \mathrm{NBV_2}, \ldots, \mathrm{NBV_{n-m}}\}$, skup nebazičnih varijabli optimalne tablice
- $\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{NBV}_1} \\ \vdots \\ x_{\mathrm{NBV}_{n-m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, vektor nebazičnih varijabli
- $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}} = [c_{\mathrm{BV}_1} \quad \cdots \quad c_{\mathrm{BV}_m}]$, koeficijenti funkcije cilja optimalne tablice (bazični)
- $\mathbf{c}_{\mathrm{NBV}} = [c_{\mathrm{NBV}_1} \quad \cdots \quad c_{\mathrm{NBV}_{n-m}}]$, koeficijenti funkcije cilja optimalne tablice (nebazični)

Matrični prikaz inicijalne tablice

- **B**, matrica čiji je j-stupac BV_j iz (1)
- $\mathbf{A_j}$, stupac iz ograničenja za varijablu x_j iz (1)
- **N**, matrica čiji su stupci nebazične varijable (u NBV poretku) iz (1)
- **b**, vektor vrijednosti desnih strana ograničenja iz (1)
- funkcija cilja: $z = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}}$
- ograničenja: $\mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{b}$
- **Za bilo koju tablicu simpleksne metode, B^{-1} je m x m matrica čiji su stupci skup bazičnih varijabli iz inicijalne tablice.**

Simpleks tablica (za maksimizaciju)

- Za odabranu bazu se složi matrica B

$\boldsymbol{c_B^T B^{-1} A - c^T}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1} b}$
$B^{-1}A$	$B^{-1}b$

Formule za računanje optimalne tablice

- stupac $\mathbf{x}_j$ u optimalnoj tablici = $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$
- desna strana optimalne tablice = $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
- koeficijent od x_j u z-retku optimalne tablice $\overline{c_j} = \mathbf{c_{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j - c_j$
- desna strana optimalnog z-retka (iznos fje cilja) = $\mathbf{c_{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Potencijalne promjene

- Promjene parametara
  - Koeficijenti u fji cilja (u **c**)
  - Desne strane ograničenja (u **b**)
  - Koeficijenti ograničenja u **A**
- Dodavanje nove varijable odluke
- Dodavanje novog ograničenja

Optimalna baza

- Simpleksna tablica (za max. problem) je optimalna ako i samo ako ispunjava oba uvjeta:
  I. $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ (izvedivost, provjera desne strane ograničenja)
  II. $\mathbf{c}_{\mathbf{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\mathrm{j}}$ - $\mathrm{c}_{\mathrm{j}} \geq 0$ (optimalnost, provjera z-retka)
- Za optimalnu bazu BV...
- Hoće li neka promjena parametara promijeniti optimalnu bazu BV?
- **1. korak:** Odrediti pomoću formula kako promjene parametara mijenjaju I. i II. u optimalnoj tablici.
- **2. korak:** Ako su nakon promjene I. i II. zadovoljeni, onda je baza BV još uvijek optimalna.

Promjena optimalne baze

- Ako dođe do promjene parametara LP modela, kako to utječe na optimalnu bazu BV?

- Ako varijabla u z-retku dobije negativan koeficijent (uvjet II. nezadovoljen), onda se može dobiti bolji bfs (basic feasible solution). BV postaje **suboptimalna baza.**

- Ako ograničenje dobije negativnu desnu stranu (uvjet I. nezadovoljen), BV postaje **neizvediva baza** (engl. infeasible basis).

Primjer: Dakota Furniture

- x_1, broj proizvedenih klupa
- x_2, broj proizvedenih stolova
- x_3, broj proizvedenih stolica
- Maksimizirati: $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

$$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$$

- uz ograničenja:

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 = 8$$

Optimalno rješenje

- $z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$, ako je:

$$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$$

$$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$$

$$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$$

- BV = $\{s_1, x_3, x_1\}$, NBV = $\{x_2, s_2, s_3\}$.
- optimalni bfs: $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$

Promjena c_i nebazične varijable – 1.

- Ne mijenja se $\mathbf{B}^{-1}$ niti **b** pa uvjet I. ✓
- Treba provjeriti novi reducirani trošak varijable (uvjet II. **?**)
- Ako se za x_2 promijeni c_2 na $c_2 = 30 + \Delta$
  - RHS = $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ostaje nepromijenjen (uvjet I.)
  - $\mathbf{c}_{\mathbf{BV}}$ ostaje isti
  - promijenit će se samo koeficijent uz c_2
- baza ostaje optimalna za $\bar{c_2} \geq 0$, a suboptimalna za $\bar{c_2} \leq 0$

Promjena c_i nebazične varijable – 2.

- za $\bar{c_2} \leq 0$, z se može popraviti ulaskom x_2 u bazu
- $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{c_{BV}B^{-1}} = [0 \quad 10 \quad 10]$
- $\bar{c_2} = \mathbf{c_{BV}B^{-1}A_2} - c_2 = [0 \quad 10 \quad 10]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) = 5 - \Delta$
- Slijedi: $5 - \Delta \geq 0$, tj. za $\Delta \leq 5$ optimalna baza ostaje ista, a za $\Delta > 5$ postaje suboptimalna

Promjena c_i nebazične varijable – 3.

- Ako BV ostaje optimalna, vrijednosti varijabli odlučivanja i optimalni z se ne mijenjaju.

- **Reducirani trošak** nebazične varijable (za max. problem) = maksimalna promjena koeficijenta varijable u funkciji cilja prije nego baza postane suboptimalna
  - U slučaju x_2 je reducirani trošak 5$

Promjena c_i bazične varijable – 1.

- Ne mijenja se **B**, **B**$^{-1}$niti **b** pa uvjet I. ✓
- Treba provjeriti novi reducirani trošak svih varijabli (uvjet II. **?**)

- Bazične varijable odlučivanja su x_1 i x_3 s koeficijentima $c_1 = 60$ i $c_3 = 20$.
- Ako se c_1 promijeni na $c_1 = 60 + \Delta$, mijenja se $\mathbf{c_{BV}}$ na $[0 \quad 20 \quad 60+\Delta]$.

Promjena c_i bazične varijable – 2.

- $\mathbf{c_{BV}B^{-1}} = [0 \quad 20 \quad 60 + \Delta]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} = [0 \quad 10 - 0.5\Delta \quad 10 + 1.5\Delta]$
- koeficijenti nebazičnih varijabli u z-retku:
- $\overline{c_2} = \mathbf{c_{BV}B^{-1}A_2} - c_2 = [0 \quad 10 - 0.5\Delta \quad 10 + 1.5\Delta]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 5 + 1.25\Delta$
- koeficijent od s_2: $10 - 0.5\Delta$
- koeficijent od s_3: $10 + 1.5\Delta$

Promjena c_i bazične varijable – 3.

BV ostaje optimalna ako (uvjet II.):

- $5 + 1.25\Delta \geq 0$
- $10 - 0.5\Delta \geq 0$
- $10 + 1.5\Delta \geq 0$
- Slijedi: $-4 \leq \Delta \leq 20$ odnosno $60 - 4 \leq c_1 \leq 60 + 20$
- Ako baza ostaje optimalna, varijable odlučivanja se ne mijenjaju jer se ne mijenja $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, ali se mijenja optimalni z.
- Ako bilo koja varijabla u z-retku dobije negativan koeficijent, onda trenutna baza više nije optimalna.

Promjena b_i - 1.

- Promjena b_i ne utječe na z-redak optimalne tablice (uvjet II. ✓)

- Uvjet I. ?

Promjena b_i - 2.

- RHS = $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$'

$$= \mathrm{B}^{-1}\begin{bmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+2\Delta \\ 8+2\Delta \\ 2-0.5\Delta \end{bmatrix}$$

- optimalna baza ostaje ista za:
- $\begin{bmatrix} 24+2\Delta \\ 8+2\Delta \\ 2-0.5\Delta \end{bmatrix} \geq 0$
- slijedi $-4 \leq \Delta \leq 4$, tj. $20-4 \leq \mathrm{b}_2 \leq 20+4$, tj. $16 \leq \mathrm{b}_2 \leq 24$

Promjena b_i - 3.

- Vrijednosti varijabli odlučivanja i z se mijenjaju
- neka je novi $b_2 = 22$
- $\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$
- optimalni z se računa iz $\mathbf{c_{BV}B^{-1}b}$
- novi z = $\begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = 300$

Promjena A_i nebazične varijable

- Ne utječe na $\mathbf{B}^{-1}$ i **b**. (uvjet I. ✓)
- Uvjet II. **?**
- Za x_2, novi $\bar{c_2} = \mathbf{c_{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A_2}$ - c_2
- $\mathbf{c_{BV}}\mathbf{B}^{-1} = [0 \quad 10 \quad 10]$, novi c_2 = 43, novi $A_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
- slijedi: $\bar{c_2} = \mathbf{c_{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A_2} - c_2 = -3$, čime trenutna baza više nije optimalna jer sad proizvodnja stolova povećava prihod za $3 pa x_2 treba ući u bazu.
- novo optimalno rješenje je: $z = 283$, $s_1 = 31$, $x_3 = 12$, $x_2 = 1$, $x_1 = s_2 = s_3 = 0$

Promjena A_i bazične varijable

- Teži slučaj, **sve** se mijenja (uvjet I. **?**, uvjet II. **?**)

- Utječe na **B** (dakle, $\mathbf{B}^{-1}$) i $\mathbf{c}_{\mathbf{BV}}$

Dodavanje nove aktivnosti

- Dodamo li stupac x_4 problemu, dodajemo **novu aktivnost.**
- Uvjet I. ✓
- Uvjet II. **?** $\bar{c_4} \geq_? 0.$
- npr. $c_4 = 15$, $a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\bar{c_4} = \mathbf{c_{BV}B^{-1}a_4} - c_4 = 5 \geq 0$ pa je baza još uvijek optimalna
- Reducirani trošak novog proizvoda je \$5 pa se po proizvodnji svake jedinice smanjuje prihod za \$5.

Primjer: Dakota Furniture

- Neka cijena klupe poraste na \$70, cijena stolice padne na \$18.
- Ostaje li baza optimalna? Koliki je novi optimalni z?
- $\Delta c_1 = 70 - 60 = 10$, $I_1 = 20$, te je $r_1 = 10/20$
- $\Delta c_3 = 18 - 20 = -2$, $D_3 = 5$, te je $r_3 = 2/5$
- $\Delta c_2 = 0$, te je $r_1 = 0$
- $r_1 + r_2 + r_3 = 0.9 \leq 1$, baza ostaje optimalna
- Prihod od svake klupe se poveća za \$10, a od svake stolice se smanji za \$2. Dakota proizvodi 2 klupe i 8 stolica, pa se prihod uvećava za $2 \cdot 10 - 8 \cdot 2 = \$4$ pa je $z = 280 + 4 = \$284$.

Rješenje problema Gurobi alatom

```
Solved in 2 iterations and 0.00 seconds
Optimal objective  2.800000000e+02
Obj: 280.0
proizvodnje_0 2.0000000000000004
proizvodnje_1 0.0
proizvodnje_2 7.999999999999999
   Name   Cost
0  Cost  280.0
            Name  Final Value  Reduced Cost  Objective Coefficient  Allowable Coeff Increase  Allowable Coeff Decrease  Lower Bound    Upper Bound
0  proizvodnje_0          2.0           0.0                   60.0                      80.0              5.600000e+01          0.0  1.000000e+100
1  proizvodnje_1          0.0          -5.0                   30.0                      35.0            -1.000000e+100          0.0  1.000000e+100
2  proizvodnje_2          8.0           0.0                   20.0                      22.5              1.500000e+01          0.0  1.000000e+100
           Name  Shadow Price  RHS Coeff  Slack  Lower Range    Upper Range
0  constraint_0           0.0       48.0   24.0    24.000000  1.000000e+100
1  constraint_1          10.0       20.0    0.0    16.000000   2.400000e+01
2  constraint_2          10.0        8.0    0.0     6.666667   1.000000e+01
```

pulp_dakota.py

Interpretacija ispisa

- Za varijable se dobije:
  - interval koeficijenata fje u kojem analiza vrijedi (Allowable Coeff Increase i Decrease)
- Za ograničenja se dobije:
  - zalihost do aktiviranja ograničenja (Slack)
  - Granice intervala u kojem analiza vrijedi (Lower i Upper range)
  - Utjecaj mijenjanja RHS na fju cilja (Shadow price)

Primjer – NCAA karte

- *NCAA planira prodaju karata za nadolazeće regionalno košarkaško prvenstvo. 10,000 postojećih sjedala se raspoređuju između medija, sveučilišnih navijača i opće javnosti. Mediji dobivaju karte besplatno, a cijene preostalih karata su $45 po karti za gostujuće navijače i $100 po karti za opću javnost. Barem 500 karata mora biti rezervirano za medije. Također, karata rezerviranih za sveučilišne navijače mora biti barem 50% od karata za opću javnost. NCAA traži alokaciju koja maksimizira prihode.*

Izvor: Rardin, Optimization in Operations Research (2nd Ed)

Primjer - NCAA karte

- *(a) Koji je marginalni trošak NCAA-u svakog sjedala za medije?*
- *(b) Pretpostavimo da imamo 15000 sjedala. Kolika bi bila dodatna zarada nakon takvog proširenja? A za 20000 sjedala?*
- *(c) Kako prava za TV prijenose donose većinu prihoda NCAA-u, postoji prijedlog navijača da se cijena karte za opću javnost smanji na 50$. Koliki bi bio gubitak prihoda nakon ovakve promjene? Što ako je cijena 30$?*
- *(d) Trener Sobby Day, nesklon medijima, traži da se ograniči broj sjedala za medije na 20% sjedala alociranih sveučilištima. Može li ovakva razdioba promijeniti optimalno rješenje? Što ako je limit stavljen na 10%?*
- *(e) Da zadovolji potražnju za kartama među studentima sveučilišta, NCAA razmatra uvođenje novih „budžet sjedala" koja zauzimaju samo 80% regularnog sjedala, ali se računa jednako za ograničenje omjera sveučilišnih i javnih sjedala Može li optimalno rješenje alocirati takva sjedala po cijeni od 35$? A po cijeni od 25$?*

pulp_ncaa.py