Matematička analiza 1 - Poglavlje 6

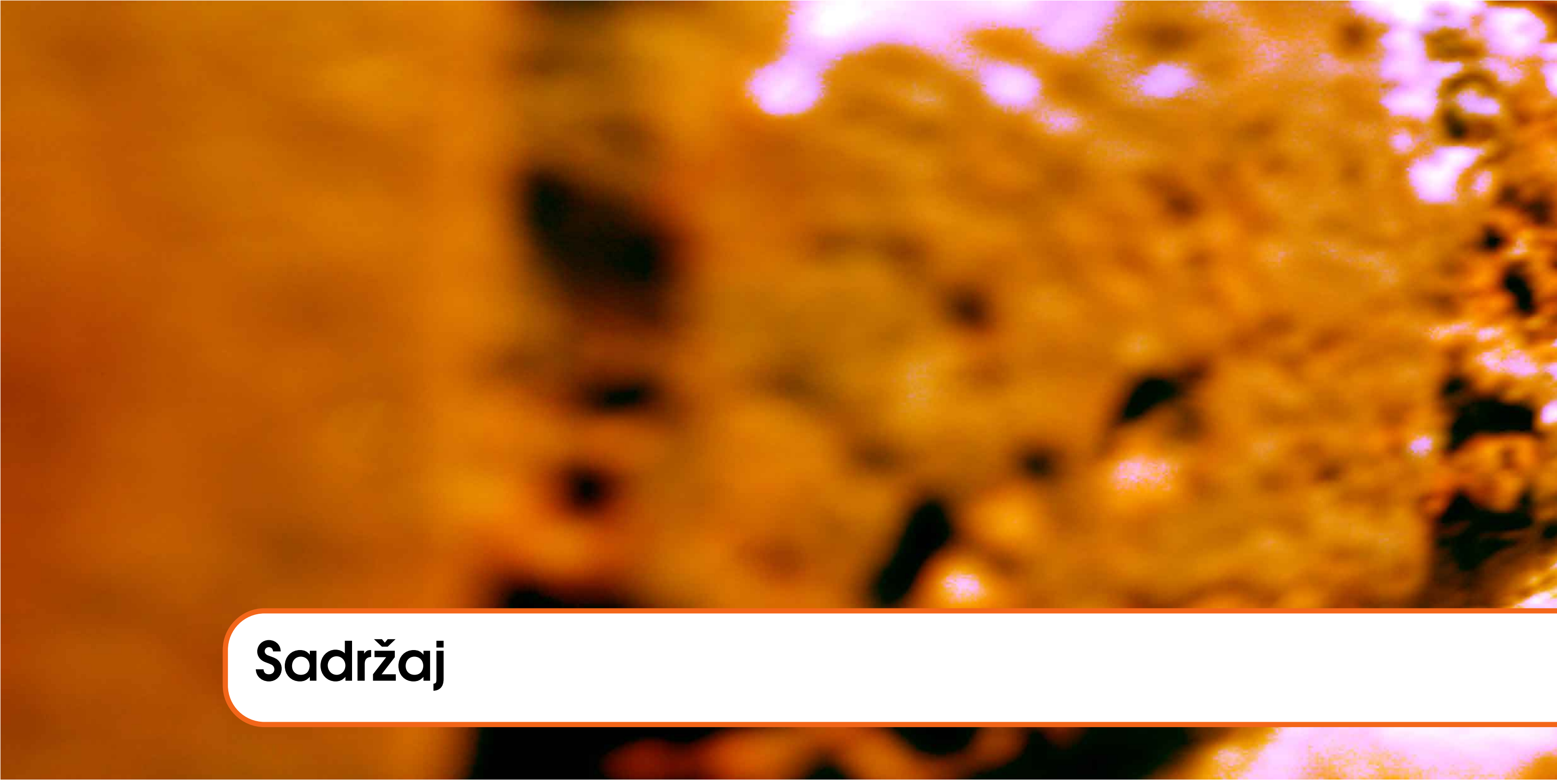
Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 17. RUJNA 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR



Sadržaj

6. Limes funkcije. Neprekinute funkcije.

Ovo poglavlje je uvodno poglavlje diferencijalnog i integralnog računa te u njemu objašnjavamo jedan od osnovnih pojmova matematičke analize - limes funkcije. Limes funkcije kao granična vrijednost funkcije opisuje ponašanje funkcije, a u narednim poglavljima ćemo pokazati da se na tome zasnivaju diferencijalni i integralni račun. Samim time limes funkcije ima široku primjenu u svim područjima matematičke analize. Što se tiče primjene, možemo reći da limes ima široku primjenu posebno zahvaljujući diferencijalnom i integralnom računu koji se na njemu zasnivaju. U sklopu ovog kolegija, limes funkcije će se koristiti za uvođenje pojma derivacije i integrala te za traženje asimptota i crtanje kvalitativnog grafa funkcije. Nadalje, u kolegiju Matematička analiza 2 ćemo proučavati limes funkcija više varijabli u sklopu diferencijalnog računa funkcija više varijabli.

Crtica

Iako se pojam limesa javio još u 17. i 18. stoljeću prilikom razvoja diferencijalnog računa, suvremenu ideju limesa funkcija je uveo Bolzano (1817.) s epsilon-delta definicijom neprekinutih funkcija. Pored toga, Cauchy je govorio o infinitezimalnom računu i limesima te je neprekinutost opisao kao infinitezimalnu promjenu u varijabli x koja dovodi do infinitezimalne promjene u varijabli y (knjiga Cours d'analyse, 1821.). Njemački matematičar K.T.W. Weierstrass (1815.-1897.) je prvi uveo epsilon-delta definiciju koju danas koristimo. Također je uveo oznake lim i $\lim_{x\to x_0}$ te dokazao Teorem srednje vrijednosti i Bolzano-Weierstrassov teorem zbog čega ga nekada zovu ocem moderne analize.

6.1 Limes funkcije

U Poglavlju 5 smo proučavali limes niza odnosno $\lim_{n\to\infty} a_n$ gdje je $a_n = a(n)$ funkcija sa $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Drugim riječima, limes niza je limes funkcije koja je definirana na diskretnom skupu vrijednosti. Kod limesa niza oznaka $n \to \infty$ znači da se n približava ∞ po diskretnom skupu vrijednosti $\{1,2,3,4,\ldots\}$. Dakle, glavni cilj proučavanja je bila konvergencija niza odnosno ponašanje funkcije $a(n)$ kada $n \to \infty$.

Za razliku od toga, u ovom poglavlju proučavamo limese realnih funkcija realne varijable kod kojih ne samo da je varijabla $x \in \mathbb{R}$ pa se u izrazu $x \to \infty$ varijabla x kontinuirano približava ∞ nego osim ponašanja u beskonačnosti promatramo i ponašanje funkcije u okolini neke fiksne točke

$x_0 \in \mathbb{R}$ te u okolini $-\infty$. Bez obzira na te razlike, limes niza i limes funkcije su povezani kroz Heineovu definiciju limesa koju ćemo predstaviti na kraju Poglavlja 7.1.1. te kod istih svojstava koje koristimo pri računanju.

6.1.1 Pojam limesa funkcije

Prije definiranja samog pojma, pogledat ćemo primjenu limesa na problem traženja brzine.

■ **Primjer 6.1** Trkač trči na dionici staze duljine 100 m. Kako izračunati brzinu u trenutku prolaska kroz cilj ukoliko je zadnju dionicu pretrčao za 12 s, a funkcija puta je $s(t) = t^2$?

Rješenje. Za $t > t_0$ prosječna brzina na intervalu $[t_0, t]$ je

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Trenutnu brzinu, koju ćemo označiti s $v(t_0)$ dobivamo kada se t približava (odnosno teži) vrijednosti t_0. To ćemo formalno zapisivati ovako:

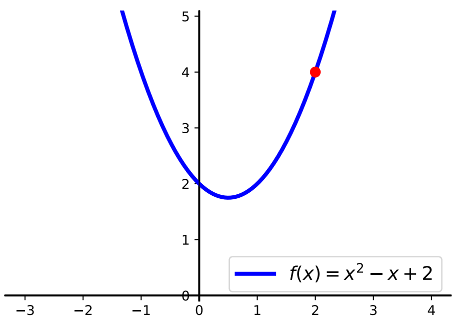
$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Sada je $v(12) = \lim\limits_{t \to 12} \dfrac{t^2 - 12^2}{t - 12} = \lim\limits_{t \to 12} (t + 12) = 24\,\mathrm{m/s}$.

■

U ovom ćemo poglavlju naučiti intinuitivnu i formalnu definiciju limesa funkcije te kako ga računati. Sljedeći primjer nam pokazuje kako limes možemo izračunati numerički i grafički.

■ **Primjer 6.2** Pogledajmo ponašanje funkcije $f(x) = x^2 - x + 2$ blizu točke $x = 2$.



Slika 6.1 - graf funkcije $f(x) = x^2 - x + 2$

Pogledajmo sada tablicu sa funkcijskim vrijednostima desno i lijevo od točke $x = 2$.

x	1.8	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	3.44	3.71	3.97	3.997

x	2.2	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	4.64	4.31	4.0301	4.003

Iz tablice i iz grafa funkcije vidimo da što je x bliže 2, to je $f(x)$ bliže 4. Zaključujemo da $f(x)$ može biti proizvoljno blizu 4 ako uzmemo x dovoljno blizu 2. Kažemo da je limes funkcije f kada x teži u 2 jednak 4 i pišemo

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

odnosno

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4.$$

■

Intuitivna definicija limesa. Pretpostavimo da je $f(x)$ definirana na otvorenom intervalu koji sadrži a, osim možda u a. Intuitivno, govorit ćemo da funkcija f ima **limes** L **kada** x **teži prema** a i pisat ćemo

$$L = \lim_{x\to a} f(x),$$

ako se vrijednosti od $f(x)$ približavaju vrijednosti L kada se x približava vrijednosti a. Preciznije, vrijednosti $f(x)$ mogu biti proizvoljno blizu L ako uzmemo x dovoljno blizu a i $x \neq a$.

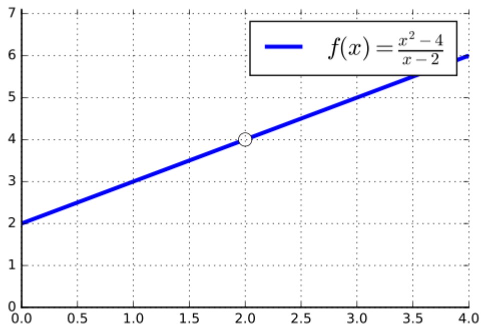
Alternativni zapis limesa glasi: $f(x) \to L$ kada $x \to a$ i čitamo ga: $f(x)$ teži prema L kada x teži prema x.

Napomena 6.1 Sada želimo razjasniti dio definicije koji kaže da je f definirana na otvorenom intervalu koji sadrži a, osim možda u a. Naime, dok tražimo limes of f kada $x \to a$ ne promatramo vrijednost od f u točki $x = a$ nego u točkama blizu a, tako da f u toj točki uopće ne mora biti definirana.

Pogledajmo sada jedan takav primjer.

Primjer 6.3 Pogledajmo limes funkcije $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ u točki $x = 2$.

Rješenje. Vidimo da je $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ no to neće utjecati na limes funkcije.



Slika 6.2 graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Pogledajmo sada tablicu sa funkcijskim vrijednostima desno i lijevo od točke $x = 2$:

x	1.5	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	3.5	3.9	3.99	3.999

x	2.5	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	4.5	4.1	4.01	4.001

Vrijednosti od $f(x)$ se približavaju vrijednosti 4 kada se vrijednosti od x približavaju vrijednosti 2. Pišemo

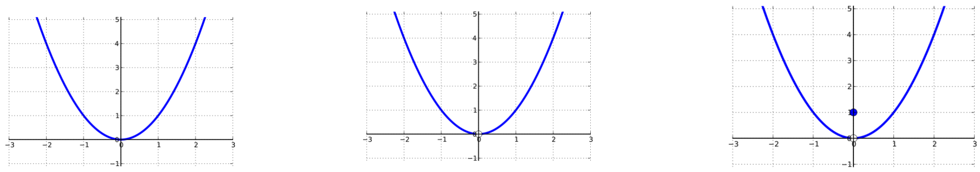
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

odnosno

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

■

Primjer 6.4 Pogledajmo sljedeće tri različite funkcije za koje je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.



$(a)\ f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ $(b)\ f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(c)\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Slika 6.3

Vidimo da je na Slici 6.3a točka $x = 0$ u domeni funkcije, na Slici 6.3b nije u domeni odnosno vrijednost funkcije u $x = 0$ nije definirana, a kod funkcije na Slici 6.3c je vrijednost funkcije u $x = 0$ definirana, ali različita od 0. No limesi od svih triju funkcija su u $x = 0$ jednaki 0. ∎

Pogledajmo sada kako intuitivnu definiciju zapisujemo koristeći formalni matematički jezik.

Koristeći da je $|f(x) - L|$ udaljenost od $f(x)$ do L, izraz "$f(x)$ je proizvoljno blizu L" možemo zapisati kao

Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ *možemo postići* $|f(x) - L| < \varepsilon$

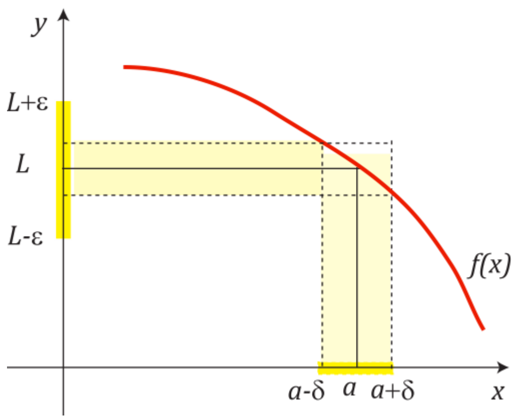
Također vidimo da izraz "ako je x dovoljno blizu točki $a \in \mathbb{R}$ $(x \neq a)$" drugim riječima znači "ako uzmemo x iz dovoljno male δ-okoline oko a" što možemo zapisati kao

ako uzmemo takve x *za koje je* $0 < |x - a| < \delta$

Cijela rečenica glasi:

Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ *možemo postići* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *ako uzmemo takve* x *za koje je* $0 < |x - a| < \delta$.

To možemo prikazati sljedećom slikom:



Slika 6.4 grafički prikaz definicije konačnog limesa u konačnoj točki

Dakle imamo sljedeću formalnu definiciju:

Definicija 6.1.1 — Konačan limes u konačnoj točki. Za $L \in \mathbb{R}$ kažemo da je limes funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$ i pišemo

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi:

$$\text{za svaki } x \in \mathscr{D}(f),\ x \neq a,\ \text{iz } |x - a| < \delta \text{ slijedi } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

■

Napomena 6.2 Možemo koristiti i kraći zapis pomoću kvantifikatora:
$$L = \lim_{x\to a} f(x) \text{ ako: } (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathscr{D}(f))(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon).$$

Napomena 6.3 Treba napomenuti da u ovoj definiciji limesa broj δ ovisi o ε te ga označavamo s $\delta(\varepsilon)$. Također, primijetimo da tvrdnja slijedi i za svaki δ^* koji je manji od dobivenog $\delta(\varepsilon)$.

Dodatak

Gornju definiciju mogli smo izreći i na sljedeći način:

Za $L \in \mathbb{R}$ kažemo da je limes funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$ ako za svaku ε- okolinu od L postoji δ-okolina od a tako da je
$$f(\langle a-\delta, a+\delta\rangle \setminus \{a\}) \subseteq \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$$

Uočimo da to znači da je
$$f(x) \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle, \quad \forall x \in \langle a-\delta, a+\delta\rangle \setminus \{a\}$$

■ **Primjer 6.5** Koristeći definiciju pokažite da vrijede sljedeći limesi:

(a) $\lim_{x\to a} c = c$, za $c \in \mathbb{R}$ (b) $\lim_{x\to a} x = a$ (c) $\lim_{x\to 3} (4x-5) = 7$

Rješenje.

(a) Moramo pokazati da $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon)$. Kada ubacimo $f(x) = c$ u zadnju nejednakost dobivamo $|c-c| < \varepsilon$, a to je zadovoljeno uvijek tj, za svaki ε neovisno o δ. Time smo pokazali da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji δ jer za δ možemo uzeti bilo koji pozitivan broj.

(b) Moramo pokazati da $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon)$. Kada ubacimo $f(x) = x$ u zadnju nejednakost dobivamo $|x-a| < \varepsilon$. Dakle, vidimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \varepsilon$ za koji vrijedi implikacija u definiciji.

(c) Moramo pokazati da $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)-7| < \varepsilon)$. Kada ubacimo $f(x) = 4x-5$ u zadnju nejednakost dobivamo $|4x-5-7| = |4x-12| = 4|x-3| < \varepsilon$. Dakle, vidimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ za koji vrijedi implikacija u definiciji. ■

Sljedeći rezultat povezuje pojam limesa niza i limesa funkcije i omogućava nam da kod računanja limesa funkcije koristimo poznate rezultate o konvergentnim nizovima.

Teorem 6.1.1 — Heineova definicija limesa. Broj L je limes funkcije f u točki $x = a$ ako i samo ako za svaki niz $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \neq a$ i $x_n \to a$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Skraćeni zapis:
$$L = \lim_{x\to a} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L \quad \text{za svaki niz} \quad x_n \to a.$$

Napomena 6.4 Ovaj rezultat nam omogućava da kod računanja limesa funkcije koristimo poznate rezultate iz limesa niza. Osim toga možemo ga koristiti za pokazivanje da limes funkcije ne postoji kao u sljedećem primjeru.

■ **Primjer 6.6** Neka je funkcija f definirana na način:
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0 \\ 10, & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Rješenje. Pokazat ćemo da ne postoji limes funkcije f u točki $x=0$. Zaista, neka su a_n i b_n dva niza definirana na sljedeći način:

$$a_n = \frac{1}{\pi/2+2n\pi} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{3\pi/2+2n\pi},\ n\in\mathbb{N}.$$

Nije teško provjeriti da $a_n \to 0$ te da je $f(a_n)=1$, za svaki $n\in\mathbb{N}$ odnosno da $b_n\to 0$ i da je $f(b_n)=-1$, $n\in\mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1 \text{ i } \lim_{n\to\infty} f(b_n) = -1.$$

Time smo pokazali da postoje dva niza sa različitim limesima te zaključujemo da limes funkcije $y=f(x)$ u točki $x=0$ ne postoji. ■

Što se tiče pitanja jedinstvenosti, vrijedi analogna tvrdnja kao kod limesa niza.

Teorem 6.1.2 — Teorem o jedinstvenosti limesa. Ako za funkciju f postoji limes u točki $x=a$, tada je on jednoznačno određen.

Dokaz. Da bi pokazali jednoznačnost limesa, pretpostavimo suprotno, odnosno neka funkcija $y=f(x)$ ima dva limesa $L_1=\lim_{x\to a} f(x)$ i $L_2=\lim_{x\to a} f(x)$. Tada po definiciji limesa, za svaki $\varepsilon>0$ postoje $\delta_1>0$ i $\delta_2>0$ takvi da za sve x za koje je $|x-a|<\delta_1$ i $|x-a|<\delta_2$ vrijedi $|f(x)-L_1|<\varepsilon/2$ i $|f(x)-L_2|<\varepsilon/2$. Iz ove dvije nejednakosti i nejednakosti trokuta slijedi da za sve x takve da je $|x-a|<\delta$, gdje je $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, imamo:

$$|L_1-L_2| = |(L_1-f(x))+(f(x)-L_2)| \le |L_1-f(x)|+|L_2-f(x)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Sada iz nejednakosti $|L_1-L_2|<\varepsilon$ za sve $\varepsilon>0$ slijedi da je $|L_1-L_2|=0$ odnosno $L_1=L_2$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. ■

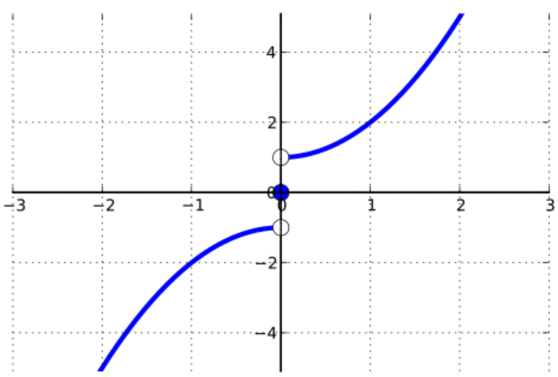
6.1.2 Jednostrani limesi

Do sada smo proučavali funkcije kojima limes nije ovisio o smjeru približavanja točki $x=a$. Pogledajmo sljedeći primjer.

■ **Primjer 6.7** Promotrimo graf funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$$

Zanima nas postoji li $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



Slika 6.5

Rješenje. Odgovor je ne jer na Slici 6.5 vidimo da dobijemo različite vrijednosti limesa ovisno o tome kojom se stranom približavamo točki $x = 0$. Primijetimo da:

- vrijednosti funkcije teže prema vrijednosti -1 kada se x približava točki $x = 0$ s lijeve strane.
- vrijednosti funkcije teže prema vrijednosti 1 kada se x približava točki $x = 0$ s desne strane.

U ovom slučaju možemo računati tzv. jednostrane limese, odnosno pisat ćemo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \ (desni\ limes) \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \ (lijevi\ limes).$$

Izraz $x \to 0^+$ znači da se nuli približavamo s desne strane, dok izraz $x \to 0^-$ znači da se nuli približavamo s lijeve strane. ■

Govorit ćemo da je $L \in \mathbb{R}$ **desni** (odnosno **lijevi**) limes funkcije f u točki $x = a$ ako se vrijednosti od $f(x)$ približavaju vrijednosti od L kada se x približava vrijednosti $a \in \mathbb{R}$ s **desne** (odnosno s **lijeve**) strane.

Analogno kao i u slučaju konačnog limesa u točki imat ćemo i formalnu definiciju jednostranih limesa. Razlika je što u ovim definicijama okolinu točke a predstavlja interval lijevo od točke a ($x \in \langle a-\delta, a\rangle$) odnosno desno ($x \in \langle a, a+\delta\rangle$). Dakle, za jednostrane limese možemo zapisati sljedeće formalne definicije.

Definicija 6.1.2 — Desni limes. Za $L \in \mathbb{R}$ kažemo da je **desni** limes funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$ uz oznaku

$$L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da:

$$\text{za svaki } x \in D(f), x > a, \text{ iz } |x-a| < \delta \text{ slijedi } |f(x)-L| < \varepsilon$$

■

Kraći zapis definicije glasi:
$L = \lim_{x\to a+} f(x)$ ako $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathscr{D}(f))(0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$

Definicija 6.1.3 — Lijevi limes. Za $L \in \mathbb{R}$ kažemo da je **lijevi** limes funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$ uz oznaku

$$L = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi:

$$\text{za svaki } x \in D(f), x < a, \text{ iz } |x-a| < \delta \text{ slijedi } |f(x)-L| < \varepsilon$$

■

Kraći zapis definicije glasi:
$L = \lim_{x\to a-} f(x)$ ako: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathscr{D}(f))(0 < a-x < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$

■ **Primjer 6.8** Za funkciju $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zada nu s

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

vrijedi

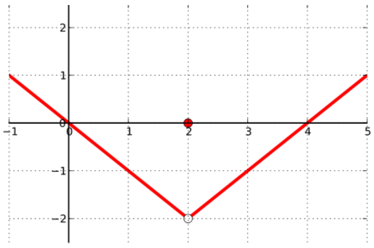
$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} H(t) = 1.$$

Uočimo da $\lim_{t\to 0} H(t)$ ne postoji.

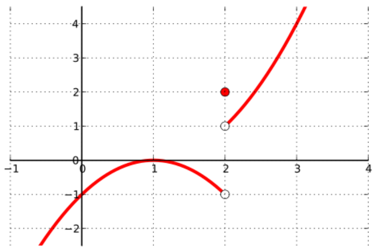
U primjenama se često susrećemo sa funkcijama čije se vrijednosti naglo mijenjaju u određenom vremenskom trenutku. Standardni primjer u osnovama elektrotehnike je uključivanje/isključivanje napona u električnom krugu u datom trenutku $t = t_0$. Ovakva situacija opisuje se jediničnom step-funkcijom danom formulom (6.1), pri čemu je uzeto da je $t_0 = 0$. Step funkcija se u literaturi često naziva Heavisideova funkcija prema samoukom znanstveniku Oliveru Heavisideu (1850.-1925.) ∎

Pogledajmo sljedeći primjer o povezanosti jednostranih limesa i običnog limesa u točki.

∎ **Primjer 6.9** Neka je $a = 2$. Ako postoje, pomoću grafova odredite limese i jednostrane limese u danoj točki.



Slika 6.6



Slika 6.7

Za funkciju prikazanu grafom na Slici 6.6 je vidljivo da je $f(2) = 0$ te da vrijedi

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -2 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2} f(x) = -2.$$

Dakle, funkcija ima sve limese u $x = 2$ koji su međusobno jednaki. Za funkciju prikazanu grafom na Slici 6.7 je vidljivo da je $f(2) = 2$ te da vrijedi:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2} f(x) \text{ ne postoji.}$$

∎

Iz intuitivne definicije (kao i formalne) je jasno da će vrijediti sljedeći teorem:

Teorem 6.1.3 — Postojanje limesa u konačnoj točki. Neka su $a, L \in \mathbb{R}$.

$$L = \lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Dokaz Teorema 6.1.3 se jednostavno izvede ako se Definicije 6.1.1, 6.1.2 i 6.1.3 napišu jedna ispod druge.

Napomena 6.5 Što govori gornji teorem?

(i) Ako postoji limes funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$ onda postoje i jednostrani limesi u toj točki i vrijedi

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

(ii) Ako postoje jednostrani limesi u točki $a \in \mathbb{R}$ i jednaki su, onda postoji i limes funkcije u toj točki.

(iii) Ako ne postoji nijedan ili jedan od jednostranih limesa ili ako je $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$, tada ne postoji limes od f u točki $a \in \mathbb{R}$.

∎ **Primjer 6.10** Ima li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

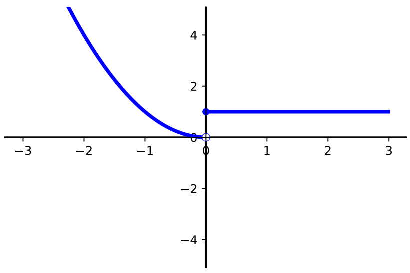
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

limes u $x = 0$?

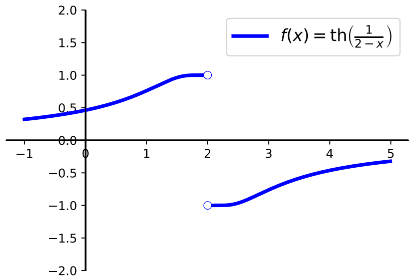
Rješenje. Iz grafa na Slici 6.8 vidimo da su

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

te zaključujemo da $\lim_{x \to 0} f(x)$ ne postoji. ∎



Slika 6.8



Slika 6.9

■ **Primjer 6.11** Postoji li $\lim_{x \to 2} \mathrm{th}\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$?

Rješenje. Iz grafa funkcije na Slici 6.9 vidimo da se vrijednosti funkcije $\mathrm{th}\left(\frac{1}{2-x}\right)$ kada se x približava s lijeve strane sve više približavaju vrijednosti 1. Slično vrijednosti funkcije $\mathrm{th}\left(\frac{1}{2-x}\right)$ se približavaju vrijednosti -1 kada $x \to 2^+$. Odavde vidimo da iz gornjeg teorema slijedi da traženi limes ne postoji. ∎

Vježba 6.1 Ispitajte postoje li sljedeći limesi: (a) $\lim_{x \to 3} |x-3|$, (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

Vježba 6.2 Ima li funkcija f limes u $x = 4$ ako je

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2, & x > 4 \\ 8-2x, & x < 4 \end{cases} ?$$

6.1.3 Računanje konačnih limesa

Podsjetimo se da smo u Primjeru 6.5 pokazali da je : $\lim_{x \to a} c = c$ i $\lim_{x \to a} x = a$. Sada ćemo prezentirati svojstva limesa kojima ćemo računati limese složenijih funkcija kao što su npr. polinomi i racionalne funkcije.

Teorem 6.1.4 — Svojstva limesa. Neka postoje konačni limesi funkcija f i g u točki $x = a$. Tada vrijedi

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, uz uvjet $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Dokaz. Sve navedene jednakosti su izravna posljedica Heineove definicije limesa i pravila za računanje limesa nizova, izvedenih u prethodnom poglavlju. Međutim, te jednakosti je moguće dokazati i direktno koristeći formalnu $\varepsilon-\delta$ definiciju limesa funkcije , što ćemo za ilustraciju pokazati na zbroju limesa. Neka je $L_1=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i $L_2=\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Trebamo pokazati da je

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=L_1+L_2.$$

Iz definicije brojeva L_1 i L_2 slijedi da za svaki $\varepsilon>0$ postoje $\delta_1>0$ i $\delta_2>0$ takvi da za sve x za koje je $|x-a|<\delta_1$ i $|x-a|<\delta_2$ vrijedi $|f(x)-L_1|<\varepsilon/2$ i $|g(x)-L_2|<\varepsilon/2$. Prethodne nejednakosti posebno vrijede za sve x takve da je $|x-a|<\delta$ gdje je $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Sada pomoću nejednakosti trokuta zaključujemo da za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ takav da za sve x za koje je $|x-a|<\delta$ vrijedi:

$$|(f(x)+g(x))-(L_1+L_2)|=|(f(x)-L_1)+(g(x)-L_2)|$$

$$\leq|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

■

Napomena 6.6 Koristeći produktno pravilo (ii), lako se pokaže da vrijedi:

$$\lim_{x\to a}\,[f(x)]^n=\left(\lim_{x\to a}\,f(x)\right)^n$$

Kada u formulu uvrstimo $f(x)=x$ dobijemo

$$\lim_{x\to a}\,x^n=\left(\lim_{x\to a}\,x\right)^n=a^n$$

Sada ćemo koristeći svojstva limesa izračunati dva primjera.

■ **Primjer 6.12** Izračunajte sljedeće limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 5}\,(2x^2-3x+4)$ (b) $\lim\limits_{x\to -2}\,\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

Rješenje.

(a) $\lim\limits_{x\to 5}\,(2x^2-3x+4)=\lim\limits_{x\to 5}2x^2-\lim\limits_{x\to 5}3x+\lim\limits_{x\to 5}4=2\lim\limits_{x\to 5}x^2-3\lim\limits_{x\to 5}x+\lim\limits_{x\to 5}4=2(5)^2-3\cdot 5+4=39$

(b) $\lim\limits_{x\to -2}\,\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}x^3+2\lim\limits_{x\to -2}x^2-\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}5-3\lim\limits_{x\to -2}x}=-\dfrac{1}{11}$

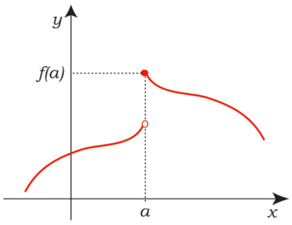
■

Vježba 6.3 Izračunajte limese: (a) $\lim\limits_{x\to -1}\,(x^4-3x)(x^2+5x+3)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^3-3x+5}\right)^2$.

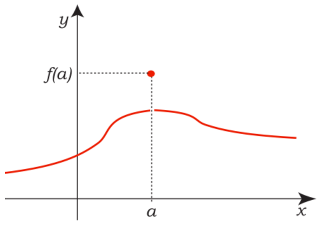
6.2 Neprekinute funkcije i limesi

U ovom poglavlju uvest ćemo još jedan važan pojam, a to je pojam neprekinutosti. Kao što sama riječ kaže, funkcije su neprekinute u točki ako nemaju prekid u toj točki. Poslije ćemo vidjeti kako se taj pojam i formalno definira.

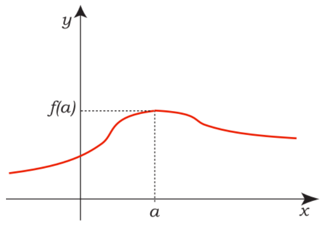
■ **Primjer 6.13** Za svaku od sljedećih funkcija zadanih grafom odgovorite na sljedeća pitanja: Je li funkcija neprekinuta u $x=a$? Postoji li $\lim\limits_{x\to a}f(x)$? Vrijedi li : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$?



Slika 6.10a



Slika 6.10b



Slika 6.10c

Rješenje.

- Slika 6.10a: Funkcija nema limes u $x=a$ jer je $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ te ima i prekid u $x=a$, .
- Slika 6.10b: Funkcija ima limes u $x=a$ jer je $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, ali ima i prekid u $x=a$ jer vrijedi $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.
- Slika 6.10c: Funkcija nema prekid u $x=a$ i vrijedi $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

■

Funkcije koje imaju svojstvo kao poput funkcije na Slici 6.10c, zvat ćemo neprekinutima u danoj točki. Konkretno, imamo sljedeću definiciju:

Definicija 6.2.1 — Neprekinutost funkcije u točki. Neka je funkcija f definirana na otvorenom intervalu koji sadrži točku a. Kažemo da je funkcija f **neprekinuta u točki** a ako vrijedi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Ako funkcija nije neprekinuta u točki $x=a$ onda kažemo da je **prekinuta** u toj točki.

Funkcija je **neprekinuta na otvorenom intervalu** $I \subseteq \mathbb{R}$ ako je neprekinuta u svakoj točki toga intervala. ■

■ **Primjer 6.14** Sve elementarne funkcije su neprekinute na svojim domenama:

- Polinomi su neprekinute funkcije na $\mathbb{R}$.
- Eksponencijalna funkcija $y=a^x$, $0<a\neq 1$, trigonometrijske funkcije $y=a\sin(bx+c)$, te hiperboličke funkcije $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{ch} x$ i $y=\operatorname{th} x$ su neprekinute na $\mathbb{R}$.
- Trigonometrijske funkcije $y=\operatorname{tg} x$ i $y=\operatorname{ctg} x$, te hiperboličke funkcije $y=\operatorname{cth} x$ su neprekinute na svojim domenama.
- Sve ciklometrijske i area funkcije su neprekinute na svojim domenama.
- Za sve realne brojeve p, funkcija $y=\frac{1}{x^p}$ je neprekinuta na skupu $\langle 0,\infty\rangle$.

■

Napomena 6.7 Osvrnimo se na definiciju neprekinutosti te primijetimo da je funkcija f neprekinuta u točki $a\in D(f)$ ako i samo ako vrijednosti $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ postoje i jednake su $f(a)$.

Pitanje. Koji su dovoljni uvjeti da je funkcija prekinuta u toči $x=a$?

Napomena 6.8 Funkcija f je prekinuta u točki $a\in D(f)$ ako i samo ako ima jedno od ova dva svojstva:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ne postoji
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ postoji, ali $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Dakle, sve funkcije koje nemaju limes u $a\in D(f)$ nisu ni neprekinute u $x=a$. Npr. Heavidiseova funkcija iz Primjera 6.8.

■ **Primjer 6.15** Za funkciju $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ vrijedi da je

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

odakle slijedi da ne postoji $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ pa je funkcija prekinuta u točki 0. Kažemo još da funkcija ima skok u $x = 0$. ■

Slično kao što smo definirali lijevi i desni limes, možemo govoriti i o neprekinutosti s lijeve i s desne strane. Dakle, imamo sljedeću definiciju:

Definicija 6.2.2 — Neprekinutost s lijeva i s desna. Neka je $D(f) \subset \mathbb{R}$ i $a \in D(f)$.

(i) Za funkciju definiranu na nekom intervalu oblika $[a, a+\delta\rangle$, $\delta > 0$ kažemo da je **neprekinuta s desna** u točki a ako je
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

(ii) Za funkciju definiranu na nekom intervalu oblika $\langle a-\delta, a]$, $\delta > 0$ kažemo da je **neprekinuta s lijeva** u točki a ako je
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

(iii) Funkcija je **neprekinuta na zatvorenom intervalu** (segmentu) $[c, d] \subseteq D(f)$ ako je neprekinuta u svakoj unutarnjoj točki intervala, neprekinuta s lijeva u točki d te neprekinuta s desna u točki c.

■

Kao što vidimo, u sklopu ove definicije smo uveli pojam neprekinute funkcije na zatvorenom intervalu.

■ **Primjer 6.16** Pokažite da je funkcija $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ neprekinuta na intervalu $[-1, 1]$.

Rješenje. Graf zadane funkcije je gornja polukružnica sa središtem u ishodištu radijusa 1 te lako vidimo da je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{za } a \in \langle -1, 1\rangle,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 1$$

i

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1.$$

■

Sljedeći teorem pokazuje kako se neprekinutost odnosi prema algebarskim operacijama funkcija, a posljedica je teorema za računanje s limesima:

Teorem 6.2.1 Neka je $a \in \mathbb{R}$. Neka su f i g neprekinute u točki a. Tada su i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ neprekinute u točki a.

Dokaz. Dokazat ćemo neprekinutost funkcije $f(x) + g(x)$ što se lako pokaže koristeći svojstvo limesa i neprekinutost od f i g na sljedeći način:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

■

Vježba 6.4 Dokažite tvrdnju za razliku, umnožak i kvocijent funkcija u prethodnom teoremu.

Sljedeći teorem pokazuje kako se limes i neprekinutost odnose prema kompoziciji.

Teorem 6.2.2 Neka je kompozicija $f \circ g$ dobro definirana.
(a) Ako je f neprekinuta u b i $\lim_{x \to a} g(x) = b$, tada vrijedi

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(b).$$

(b) Neka je g neprekinuta u točki a i f neprekinuta u točki $g(a)$. Tada je kompozicija $f \circ g$ neprekinuta u točki a.

Vježba 6.5 Dokažite tvrdnju pod (b) u prethodnom teoremu koristeći tvrdnju pod (a).

Sada možemo računati limese koristeći neprekinutost funkcija odnosno koristeći tvrdnju $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Znamo da to vrijedi za sve elementarne funkcije jer su neprekinute na svojoj domeni. Pogledajmo nekoliko rješenih primjera.

■ **Primjer 6.17** Izračunajte sljedeće limese:
(a) $\lim\limits_{x \to 1} \arcsin\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x \to 4} 3^{\sqrt{x^2-2x-4}}$ (c) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

Rješenje. (a) Koristimo činjenicu da su $f(x) = \arcsin x$ i $g(x) = \frac{1}{1+x}$ neprekinute funkcija te dobivamo

$$\lim_{x \to 1} \arcsin\left(\frac{1}{1+x}\right) = \arcsin\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+x}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

(b) Koristimo činjenicu da su $f(x) = 3^x$ i $g(x) = \sqrt{x^2-2x-4}$ neprekinute funkcije te slijedi

$$\lim_{x \to 4} 3^{\sqrt{x^2-2x-4}} = 3^{\lim_{x \to 4} \sqrt{x^2-2x-4}} = 3^2 = 9.$$

(c) Koristimo činjenicu da su $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ neprekinute funkcije te dobivamo

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{2+\cos x} = \frac{\lim_{x \to \pi} \sin x}{\lim_{x \to \pi}(2+\cos x)} = \frac{\sin \pi}{2+\cos \pi} = 0.$$

■

Vježba 6.6 Izračunajte sljedeće limese: (a) $\lim\limits_{x \to 2} x\sqrt{20-x^2}$, (b) $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\dfrac{5-x^2}{1+x}\right)$.

Sada ćemo pogledati nekoliko primjera dokazivanja neprekinutosti funkcije.

■ **Primjer 6.18** Je li funkcija $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ neprekinuta na $\mathbb{R}$?

Rješenje. Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ funkcija je neprekinuta jer je umnožak i kompozicija neprekinutih funkcija na tome skupu. Provjerimo neprekinutost u točki $x = 0$. Koristeći činjenicu da je $\sin x \in [-1, 1]$ za svaki x odnosno da je omeđena funkcija dobivamo:

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

pa je funkcija neprekinuta u $x = 0$. ■

Primjer 6.19 Ispitajte neprekinutost funkcije $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$.

Rješenje. Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ funkcija je neprekinuta jer su polinom i logaritamska funkcija neprekinute. Provjerimo neprekinutost u točki $x = 1$. Imamo:

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x^2) = 0 = f(0) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 1^+} \ln x = 0 = f(0)$$

pa je funkcija neprekinuta u $x = 1$. ■

Primjer 6.20 Odredite realne parametre a i b takve da je f svuda neprekinuta ako je

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b, & x \geq 3 \end{cases}.$$

Rješenje. Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{2,3\}$ funkcija je neprekinuta jer su polinomi i racionalna funkcija neprekinuta. Tražimo uvjet za neprekinutost u točki $x = 2$. Dobivamo

$$\lim_{x \to 2^+} (ax^2 - bx + 3) = 4a - 2b + 3 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (x+2) = 4$$

iz čega slijedi da mora vrijediti $4a - 2b + 3 = 4$ odnosno $4a - 2b = 1$. Sada tražimo uvjet za neprekinutost u točki $x = 3$ te slijedi

$$\lim_{x \to 3^+} (2x - a + b) = 6 - a + b \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = 9a - 3b + 3$$

iz čega slijedi da mora vrijediti $6 - a + b = 9a - 3b + 3$ odnosno $10a - 4b = 3$. Rješavanjem dobivenog sustava slijedi da je $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{1}{2}$. ■

Primjer 6.21 Pronađite sve točke u kojima funkcija f nije neprekinuta te u tim točkama ispitajte neprekinutost s lijeva i desna. Funkcija je zadana s

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

Rješenje. Prvo ispitujemo neprekinutost u točki $x = 1$ te dobivamo

$$\lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 1^-} 2^x = 2.$$

Zbog $f(1) = 2$ slijedi da je f neprekinuta u $x = 1$. Sada ispitujemo neprekinutost u točki $x = 4$ te slijedi

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x} = 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 4^-} (3 - x) = -1.$$

Zbog $f(4) = -1$ slijedi da je f neprekinuta s lijeva, a nije neprekinuta s desna u točki $x = 4$. ■

Vježba 6.7 Pronađite sve točke u kojima funkcija f nije neprekinuta te u tim točkama ispitajte neprekinutost s lijeva i desna. Funkcija je zadana s

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}.$$

Svojstva neprekinutih funkcija

Neprekinute funkcije imaju još neka važna svojstva koja glase:

- Neprekinuta funkcija na zatvorenom i omeđenom intervalu ima minimum i maksimum.
- Neprekinuta funkcija na zatvorenom i omeđenom intervalu poprima sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.

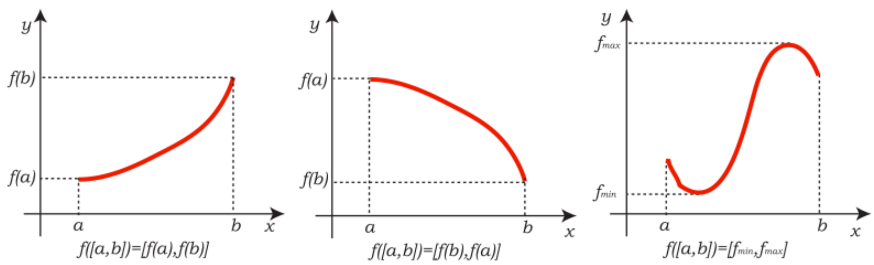
Navedena svojstva možemo formalno zapisati u obliku teorema.

Teorem 6.2.3 Neka je f neprekinuta funkcija na zatvorenom intervalu $[a,b]$.
(a) Tada na intervalu $[a,b]$ funkcija ima maksimum i minimum odnosno postoje $x_m, x_M \in [a,b]$ takvi da je $f(x_M) \geq f(x)$ i $f(x_m) \leq f(x)$ za sve $x \in [a,b]$.
(b) Za svaku vrijednost $y^* \in \langle f(x_m), f(x_M) \rangle$ postoji točka $x^* \in \langle a,b \rangle$ takva da je $f(x^*) = y^*$.

Napomena 6.9 Posljedica navedenih svojstava neprekinutih funkcija je da za neprekinutu funkciju f vrijedi:

$$f([a,b]) = [f(x_m), f(x_M)]$$

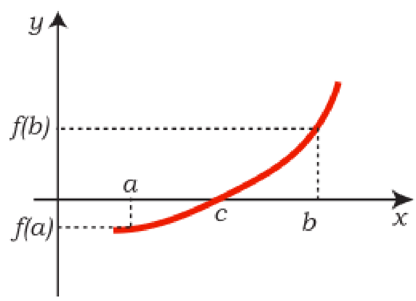
odnosno neprekinuta funkcija zatvoreni interval preslikava u zatvoreni interval. Slika 6.11 ilustrira sva tri slučaja koje pokriva ova tvrdnja.



Slika 6.11

Korolar 6.2.4 — Nultočke neprekinutih funkcija. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekinuta, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Ako f na I mijenja predznak ($f(a)f(b) < 0$), tada postoji $c \in I$ tako da je $f(c) = 0$.

Ova tvrdnja je posljedica prethodnog teorema, a koristimo ju u metodi bisekcije za traženje nultočaka funkcije f, odnosno za rješavanje nelinearnih jednadžbi oblika $f(x) = 0$.



Slika 6.12 Slučaj $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

Vježba 6.8 Dokažite tvrdnju korolara koristeći prethodni teorem.

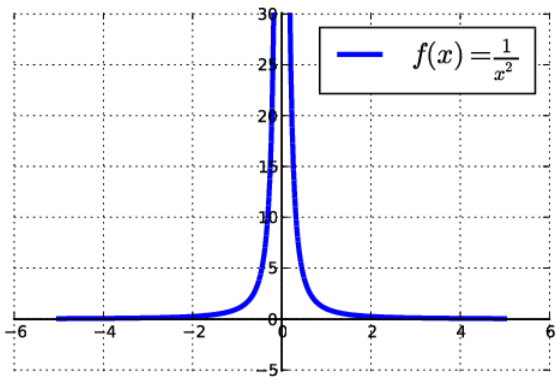
6.3 Limesi i asimptote

Do sada smo promatrali konačne limese funkcija $L \in \mathbb{R}$ u konačnoj točki $a \in \mathbb{R}$. U ovom poglavlju proučavamo beskonačne limese i limese u beskonačnosti. Beskonačni limesi su oni čija vrijednosti limesa je $L = \pm\infty$, a kod limesa u beskonačnosti je $a = \pm\infty$. U slučaju kada je i $a = \pm\infty$ i $L = \pm\infty$ limes zovemo beskonačni limes u beskonačnosti, i on predstavlja presjek ova dva tipa limesa.

6.3.1 Beskonačni limesi

Prvo promatramo limese koji teže u beskonačnost.

■ **Primjer 6.22** Pogledajmo graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$.



Slika 6.13

Iz grafa na Slici 6.13 vidimo da $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ ne postoji odnosno nema konačnu realnu vrijednost. Koristeći oznaku limesa pišemo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Ovaj izraz ne znači da limes postoji nego objašnjava specifični način na koji limes ne postoji: $f(x)$ može biti proizvoljno velik ako uzmemo x dovoljno blizu 0. ■

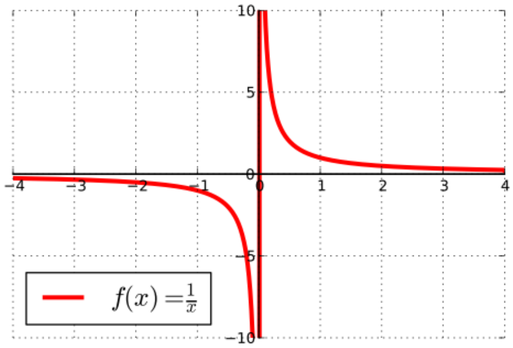
Intuitivna definicija. Neka je U neka okolina od a te neka je $D(f) = U \setminus \{a\}$.
- Tada $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ znači da $f(x)$ teži prema $+\infty$ kada x teži prema a.
- Tada $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ znači da $f(x)$ teži prema $-\infty$ kada x teži prema a.

Slijedi formalna definicija beskonačnog limesa u konačnoj točki u kojoj izraz $f(x) > M$ odnosno $f(x) \in \langle M, \infty\rangle$ predstavlja okolinu od $+\infty$, a izraz $f(x) < m$ odnosno $f(x) \in \langle -\infty, m\rangle$ okolinu od $-\infty$.

Definicija 6.3.1 — Beskonačan limes u konačnoj točki. Kažemo da je:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ako $(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathscr{D}(f))(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ako $(\forall m \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathscr{D}(f))(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < m)$. ■

I u slučaju beskonačnih limesa možemo promatrati jednostrane limese.

■ **Primjer 6.23** Pogledajmo graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$.



Slika 6.14

Iz grafa vidimo da se lijevi i desni limes u točki $x = 0$ razlikuju te pišemo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

■

U poglavlju o asimptotama ćemo vidjeti da je pravac $x = 0$ u oba prethodna primjera vertikalna asimptota funkcije.

Napomena 6.10 Limese iz gornjeg primjera često koristimo u praksi te ćemo uvesti skraćenu oznaku za njih:

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

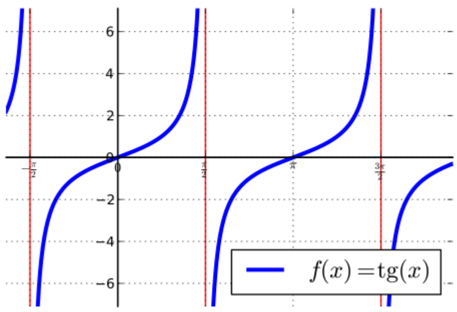
Sada ćemo analogno definirati lijeve i desne beskonačne limese:

Intuitivna definicija.

- Tada $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = +\infty$ znači da $f(x)$ teži prema $+\infty$ kada x teži k $a^\pm$.
- Tada $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = -\infty$ znači da $f(x)$ teži prema $-\infty$ kada x teži k $a^\pm$.

Vježba 6.9 Napišite formalnu definiciju lijevog i desnog beskonačnog limesa u konačnoj točki.

■ **Primjer 6.24** Pogledajmo graf funkcije $f(x) = \text{tg}(x)$



Slika 6.15

Vidimo da je

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \text{tg}(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \text{tg}(x) = -\infty.$$

■

Do sada smo beskonačne limese iščitavali iz grafa funkcije. Sada ćemo izračunati nekoliko primjera koristeći Napomenu 6.9.

■ **Primjer 6.25** Izračunajte limese $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}$ i $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}$.

Rješenje. Dobivamo

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=\frac{6}{0^-}=-\infty$$

■

■ **Primjer 6.26** Izračunajte limese: (a) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x}}{(x-3)^5}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$.

Rješenje.

(a) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x}}{(x-3)^5}=\dfrac{\sqrt{3}}{0^-}=-\infty$

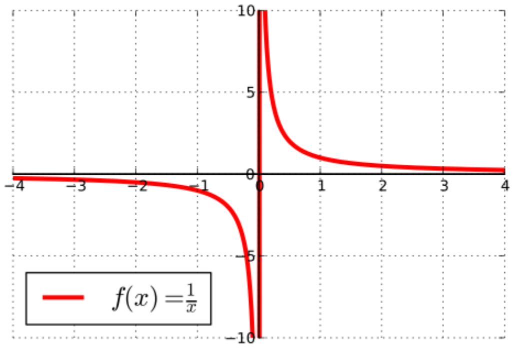
(b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x-8}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{-8}{0^+(-1)}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$ ■

Vježba 6.10 Izračunajte limese: (a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-x}{(x-1)^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3^+}\ln(x^2-9)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x}-\ln x)$

6.3.2 Limesi u beskonačnosti

Sada ćemo proučavati limese funkcije kada x ide u $\pm\infty$. Jasno je da to možemo proučavati kod funkcija čije su domene takve da to ima smisla.

■ **Primjer 6.27** Pogledajmo graf funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ na Slici 6.16.



Slika 6.16

Promotrimo kako se funkcija ponaša kada $x\to\pm\infty$ te zaključujemo da je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Uskoro ćemo vidjeti da u ovom slučaju pravac $y=0$ zovemo horizontalna asimptota. ■

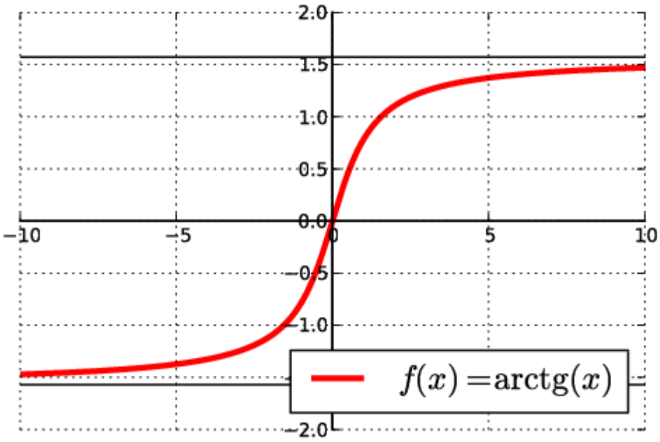
Napomena 6.11 Limese iz gornjeg primjera često koristimo u praksi te ćemo uvesti skraćenu oznaku za njih:

$$\frac{1}{\pm\infty}=0^{\pm}.$$

Intuitivna definicija.

- Neka je f definirana na intervalu $\langle a, \infty\rangle$. Tada $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ znači da $f(x)$ teži prema L kada x teži k $+\infty$.
- Neka je f definirana na intervalu $\langle -\infty, a\rangle$. Tada $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ znači da $f(x)$ teži prema L kada x teži k $-\infty$.

■ **Primjer 6.28** Pogledajmo graf funkcije $f(x) = \text{arctg}(x)$ na Slici 6.17.



Slika 6.17

Iz grafa zaključujemo da je

$$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} \text{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

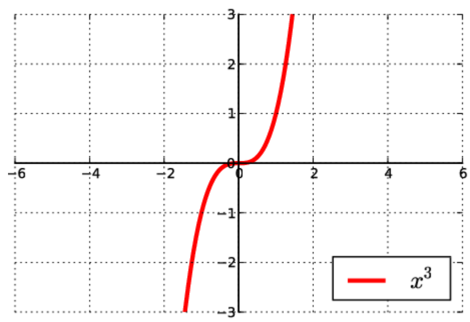
■

Slijedi formalna definicija limesa u beskonačnosti u kojoj izraz $x > M$ odnosno $x \in \langle M, \infty\rangle$ predstavlja okolinu od $+\infty$, a izraz $x < m$ odnosno $x \in \langle -\infty, m\rangle$ okolinu od $-\infty$.

Definicija 6.3.2 — Konačan limes u beskonačnosti. Kažemo da je:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathscr{D}(f))(x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathscr{D}(f))(x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$. ■

Sada ćemo navesti jedan primjer funkcije koja ima beskonačne limese u beskonačnosti.

■ **Primjer 6.29** Pogledajmo graf funkcije $f(x) = x^3$.



Slika 6.18

Vidimo da je

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

■

Vježba 6.11 Ispitajte da li vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x$. Obrazložite koristeći graf funkcije $f(x) = e^x$.

Vježba 6.12 Odredite $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$.

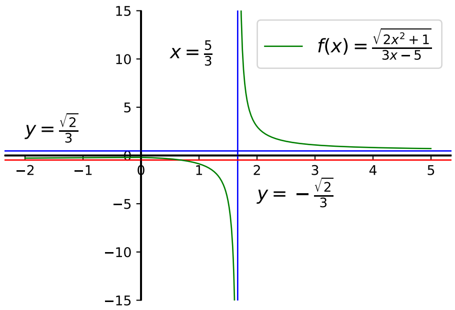
Vježba 6.13 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+2}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x)$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x}$

6.3.3 Asimptote

Do sada smo promatrali kako beskonačne limese i limese u beskonačnosti odrediti iz grafa funkcije. U ovom ćemo poglavlju pokazati kako nam beskonačne limese koristiti kod crtanja grafa funkcije. Naime, beskonačni limesi i limesi u beskonačnosti su povezani s asimptotama funkcija. Asimptota je pravac kojemu se približava dio grafa funkcije. Dakle, približavanje vrijednosti funkcije nekom određenom limesu će značiti da se graf funkcije približava pravcu.

■ **Primjer 6.30** Iz grafa funkcije odredite koliko asimptota ima funkcija $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$.



Slika 6.19

Na Slici 6.19 vidimo da ova funkcija ima tri različite asimptote. ■

Definicija 6.3.3 Ako se točka T neprekidno giba po grafu funkcije f tako da barem jedna od koordinata teži prema $\pm\infty$ te pritom njezina udaljenost od pravca teži k nuli, taj se pravac naziva asimptota funkcije f. ■

Sada ćemo definirati vertikalne, horizontalne i kose asimptote grafa funkcije. Ovo poglavlje će nam biti posebno važno kod crtanja kvalitativnog grafa funkcije u 9. poglavlju.

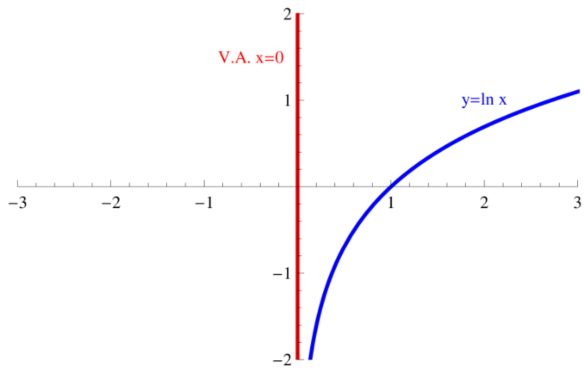
■ Vertikalne asimptote

Definicija 6.3.4 Pravac $x = a$ zovemo **vertikalna asimptota** funkcije f ako je barem jedna od sljedećih tvrdnji istinita:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Napomena 6.12 Primijetimo da točka a u gornjoj definiciji može i ne mora biti u domeni funkcije. Može postojati vertikalna asimptota u točki u kojoj je funkcija definirana, ali tada u toj točki nije neprekinuta. No najčešće, odnosno u svim našim primjerima, će točka a biti jedna od rubnih točaka domene. Dakle, traženje vertikalnih asimptota započinjemo traženjem domene funkcije, zatim računamo jednostrane limese u rubovima i donosimo zaključak u skladu sa definicijom.

■ **Primjer 6.31** Pogledajmo graf funkcije $f(x) = \ln x$ na Slici 7.20. Vidimo da je $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ te zaključujemo da je $x = 0$ vertikalna asimptota. ■



Slika 6.20

Također, u Primjerima 6.22 i 6.23 vidimo da je $x = 0$ vertikalna asimptota.

Algoritam 1 Traženje vertikalnih asimptota

1. određivanje domene funkcije
2. računanje lijevih i desnih limesa u rubovima domene
3. određivanje u kojim točkama postoje vertikalne asimptote

■ **Primjer 6.32** Pronađite vertikalne asimptote funkcija: (a) $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ (b) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

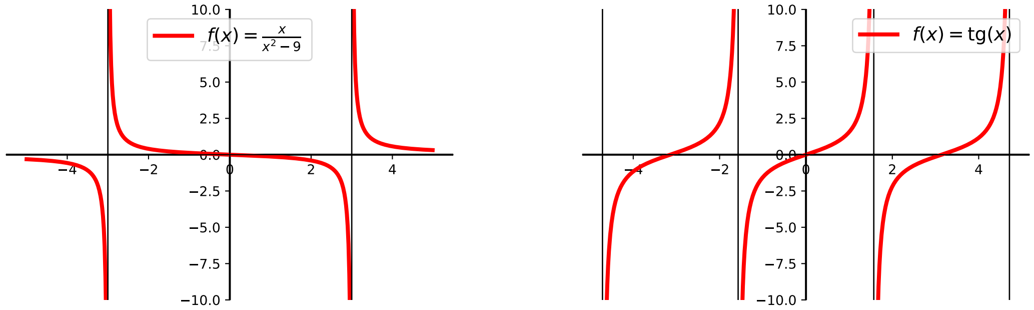
Rješenje.
(a) Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$. Prvo računamo lijevi i desni limes funkcije u $x = 3$ te dobivamo

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x}{(x-3)(x+3)} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{x}{(x-3)(x+3)} = -\infty.$$

Sada zaključujemo da je $x = 3$ vertikalna asimptota. Analogno za $x = -3$ dobijemo

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x}{(x-3)(x+3)} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -3^-} \frac{x}{(x-3)(x+3)} = -\infty.$$

Sada zaključujemo da je i pravac $x = -3$ vertikalna asimptota. Vidi Sliku 6.21.



Slika 6.21

(b) Domena funkcije f je $D(f) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. Računamo lijevi i desni limes funkcije u $x = \frac{\pi}{2}$ te dobivamo $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = -\infty$. Sada zaključujemo da je $x = \frac{\pi}{2}$ vertikalna asimptota. Analogno se pokaže da su svi pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ vertikalne asimptote. Vidi Sliku 6.21. ■

■ Horizontalne asimptote

Definicija 6.3.5 Pravac $y = l$ zovemo **desna horizontalna asimptota** funkcije f ako vrijedi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Pravac $y = l$ zovemo **lijeva horizontalna asimptota** funkcije f ako vrijedi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

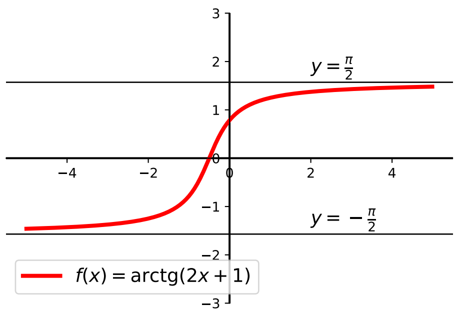
■

■ **Primjer 6.33** Odredite horizontalne asimptote funkcije $f(x) = \operatorname{arctg}(2x+1)$.

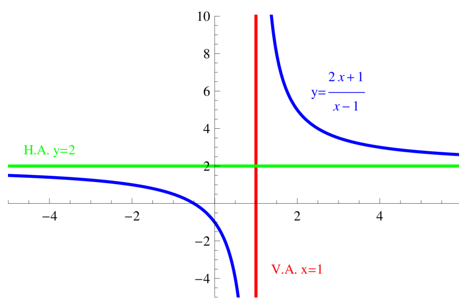
Rješenje. Dobivamo

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(2x+1) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(2x+1) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Sada zaključujemo da je $y = \frac{\pi}{2}$ desna, a $y = -\frac{\pi}{2}$ lijeva horizontalna asimptota. Vidi Sliku 6.22. ■



Slika 6.22



Slika 6.23

■ **Primjer 6.34** Odredite vertikalne i horizontalne asimptote funkcije $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Rješenje.
Domena funkcije je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ te računamo jednostrane limese u $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$$

te je $x = 1$ vertikalna asimptota. Sada računamo beskonačne limese

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

te zaključujemo da je $y = 2$ i desna i lijeva horizontalna asimptota. Vidi Sliku 6.23. ■

Vježba 6.14 Odredite vertikalne i horizontalne asimptote funkcija:
(a) $f(x) = \text{arctg}(-x+2)$ (b) $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2}$.

■ Kose asimptote

Neke krivulje imaju asimptote koje nisu niti horizontalne niti vertikalne nego kose odnosno oblika $y = kx + l$.

Definicija 6.3.6 Pravac $y = kx + l$ zovemo **desna kosa asimptota** funkcije f ako vrijedi:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - l) = 0.$$

Pravac $y = kx + l$ zovemo **lijeva kosa asimptota** funkcije f ako vrijedi:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - l) = 0.$$

■

Napomena 6.13 Naravno, u definiciji se podrazumijeva da su $k, l \in \mathbb{R}$ inače funkcija nema kosih asimptota.

Iz same definicije slijedi da je

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx).$$

Znači, koeficijent l računamo nakon što smo dobili koeficijent k. Nadalje, koristeći limes iz definicije slijedi da je $\lim_{x\to\pm\infty} (\frac{f(x)-kx-l}{x}) = \frac{0}{\pm\infty} = 0$. Kada to raspišemo dobijemo

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\frac{f(x)-kx-l}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0.$$

Sada slijedi da je $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Pitanje. Jesu li horizontalne i kose asimptote povezane? Da, horizontalne asimptote su ustvari kose sa koeficijentom $k = 0$.

Napomena 6.14 Kod crtanja grafova ćemo prvo tražiti vertikalne asimptote, a onda kose (horizontalne će se pojaviti u sklopu računa za kose). Ukoliko neki od limesa za k ili l ne postoji ili nije konačan, zaključujemo da nema kose asimptote.

Algoritam 2 Traženje kosih asimptota

1. računanje koeficijenata smjera pravaca : $k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
2. računanje odsječaka na osi: $l_1 = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k_1 x)$, $l_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x)$
3. određivanje jednadžbi desne i lijeve kose asimptote: $y = k_1 x + l_1$, $y_2 = k_2 x + l_2$

■ **Primjer 6.35** Odredite asimptote funkcije $f(x) = \frac{-x^3-x^2+x+5}{(x+1)^2}$.

Rješenje. Vidimo da je domena funkcije $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ te računamo jednostrane limese u $x = -1$:

$$\lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{-x^3-x^2+x+5}{(x+1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

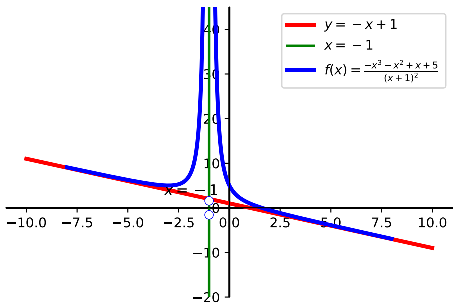
te je $x = -1$ vertikalna asimptota.
Sada računamo kose asimptote:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3-x^2+x+5}{x(x+1)^2} = -1$$

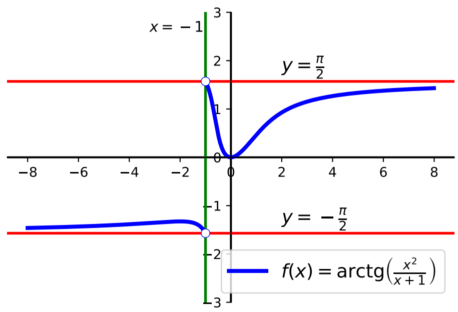
i

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^3-x^2+x+5}{(x+1)^2} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+5}{x^2+2x+1} = 1$$

te zaključujemo da je $y = -x + 1$ i desna i lijeva kosa asimptota. Vidi Sliku 6.24. ■



Slika 6.24



Slika 6.25

■ **Primjer 6.36** Odredite asimptote funkcije $f(x) = \mathrm{arctg}\,(\frac{x^2}{x+1})$.

Rješenje. Vidimo da je domena funkcije $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ te računamo jednostrane limese u $x = -1$:

$$\lim_{x\to-1^+} \mathrm{arctg}\,(\frac{x^2}{x+1}) = \mathrm{arctg}\,(\frac{1}{0^+}) = \mathrm{arctg}\,(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-1^-} \mathrm{arctg}\,(\frac{x^2}{x+1}) = \mathrm{arctg}\,(\frac{1}{0^-}) = \mathrm{arctg}\,(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

te zaključujemo da f nema vertikalnu asimptotu jer su svi limesi konačni.

Sada računamo koeficijente kosih asimptota. Vidimo da je

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,(\frac{x^2}{x+1})}{x} = \frac{\pm\frac{\pi}{2}}{\pm\infty} = 0.$$

Kada vidimo da je račun za limes analogan za k_1 i k_2, onda ih možemo računati istovremeno kao gore. Sada ćemo koeficijente l_1 i l_2 računati odvojeno:

$$l_1 = \lim_{x\to\infty}(f(x)-k_1x) = \lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(\frac{x^2}{x+1}) = \frac{\pi}{2}$$

$$l_2 = \lim_{x\to\infty}(f(x)-k_2x) = \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}(\frac{x^2}{x+1}) = -\frac{\pi}{2}$$

te zaključujemo da je $y=\frac{\pi}{2}$ desna horizontalna asimptota, a $y=-\frac{\pi}{2}$ je lijeva horizontalna asimptota. Vidi Sliku 6.25. ■

Vježba 6.15 Odredite sve asimptote funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.

6.4 Računanje limesa

Već smo i u sklopu prijašnjih poglavlja računali limese i to i konačne i beskonačne s konačnim i beskonačnim vrijednostima. Također smo koristili pravilo direktne zamjene za neprekinute funkcije:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

U ovom poglavlju ćemo to proširiti sa složenijim oblicima limesa. Prvo se prisjetimo teorema za računanje limesa kojeg smo sada proširili sa svojstvom (iv).

Teorem 6.4.1 — Računanje limesa. Neka postoje konačni limesi funkcija $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ u točki $x=a$. Tada vrijedi

(i) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, uz uvjet $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

(iv) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to a} f(x))^{\lim_{x\to a} g(x)}$.

Napomena 6.15 Sva svojstva limesa iz ovog teorema vrijede i za konačne limese u beskonačnosti tj. za $a=\pm\infty$ i $L\in\mathbb{R}$. No kod beskonačnih limesa ($L=\pm\infty$) moramo biti oprezni jer neka od navedenih pravila ne vrijede u tom slučaju. Također, moramo posebno promotriti slučaj kada je limes funkcije u nazivniku jednak 0 (vidi sljedeću napomenu). U nekim slučajevima ćemo dobiti određeni oblik limesa iz kojeg možemo zaključiti rezultat, a nekada dobijemo neodređeni oblik limesa iz kojeg ne možemo zaključiti rezultat bez korištenja nekih naprednijih tehnika računanja kao što je L'Hospitalovo pravilo koje ćemo raditi u 8. poglavlju. U sljedećoj tablici su navedeni određeni i neodređeni oblici kod kojih trebamo biti pažljivi.

Simbolički zapisi pravila za beskonačne limese i limese s nulom

- zbrajanje limesa (svojstvo (i)):
  $\infty + c = \infty$,
  $\infty + \infty = +\infty$,
  $(\infty - \infty)$ neodređeni oblik !!!
- množenje limesa (svojstvo (ii)):
  $c\cdot\infty = \pm\infty$ ovisno o predznaku od $c\neq 0$: $c>0$ $L=\infty$, $c<0$ $L=-\infty$
  $(0\cdot\infty)$ neodređeni oblik!!!

$\infty \cdot \infty = \infty$,

- kvocijent limesa (svojstvo (iii)):
  $\frac{\infty}{0^{\pm}} = \pm\infty$,
  $\frac{c}{\pm\infty} = 0$,
  $\frac{c}{0^{\pm}} = \pm\infty$
  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$ neodređeni oblici!!!
- potenciranje limesa (svojstvo (iv)):
  $0^{\infty} = 0$,$0^{-\infty} = \infty$
  $\infty^{\infty} = \infty$,
  (∞^0), (0^0), (1^{∞}) neodređeni oblici!!!

Napomena 6.16 Limesi kvocijenta dviju funkcija kod kojih je u nazivniku $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ imaju nekoliko slučajeva ovisno o limesu funkcije $\lim_{x\to a} f(x) = c$:
- $c \neq 0, \infty$: $L = \frac{c}{0^{\pm}} = c \cdot \frac{1}{0^{\pm}} = c \cdot \pm\infty$
- $c = 0$: $L = \left(\frac{0}{0}\right)$ neodređeni oblik!!!
- $c = \infty$: $L = \frac{\infty}{0^{\pm}} = \pm\infty$

6.4.1 Neodređeni oblici

Dakle, neodređeni oblici su:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ 1^{\infty}, \infty^0.$$

Pojam neodređeni oblik limesa znači da rezultat može poprimiti bilo koju vrijednost, npr. kod nekih primjera rezultat može biti broj, a kod nekih može biti ∞. Neodređene oblike rješavamo svođenjem na određene oblike koristeći neku tehniku računanja ili poznati limes. U 8. poglavlju ćemo naučiti koristiti jednu od važnijih tehnika za rješavanje neodređenih oblika koju zovemo l'Hospitalovo pravilo. S obzirom da l'Hospitalovo pravilo koristi derivacije funkcija, radit ćemo ga tek nakon što savladamo tehniku deriviranja.

Sada ćemo kroz riješene primjere prezentirati osnovne tehnike računanja limesa. Prvo se prisjetimo kako smo računali limese nizova u obliku racionalne funkcije te ćemo kod limesa funkcija koristiti istu tehniku odnosno dijeljenje brojnika i nazivnika s vodećom potencijom nazivnika. Također koristimo činjenicu da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0, \quad \text{za} \quad r \in Q.$$

Primjer 6.37 Izračunajte sljedeće limese:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+5}{3x^2-x+4}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-3x^2-2x}{x^3+2x^2-5}$ (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x^2+1}{2x^4-x^2+3}$

Rješenje.

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+5}{3x^2-x+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2-3x+5)/x^2}{(3x^2-x+4)/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-3/x+5/x^2}{3-1/x+4/x^2} = \frac{2}{3}.$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-3x^2-2x}{x^3+2x^2-5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(5x^4-3x^2-2x)/x^3}{(x^3+2x^2-5)/x^3} == \lim_{x\to\infty} \frac{5x-3/x-2/x^2}{1+2/x-5/x^3} = +\infty.$$

(c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x^2+1}{2x^4-x^2+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^3+4x^2+1)/x^4}{(2x^4-x^2+3)/x^4} == \lim_{x\to\infty} \frac{1/x+4/x^2+1/x^4}{2-1/x^2+3/x^4} = 0.$$

■

Ovaj primjer nam je pokazao da i kod limesa racionalnih funkcija kada $x \to \infty$ možemo koristiti analognu formulu koju smo koristili kod limesa niza, odnosno

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_n} & m=n\\ +\infty, & m>n \text{ i } a_mb_n>0\\ -\infty, & m>n \text{ i } a_mb_n<0\\ 0, & m<n\end{cases}$$

U gornjem primjeru je x težio u ∞, a u sljedećem primjeru ćemo pogledati šta je drugačije kada x teži u $-\infty$.

■ **Primjer 6.38** Odredimo sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2-3x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+3}}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+x+1}}$

Rješenje.

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2-3x+4}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^3+1)/x^2}{(3x^2-3x+4)/x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1/x^2}{3-3/x+4/x^2}=-\infty.$$

Primijetimo da bi limes iste funkcije kad $x\to+\infty$ bio jednak $+\infty$.

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+3}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)/x}{\sqrt{4x^2+3}/x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+1/x}{-\sqrt{4+3/x^2}}=-1.$$

Znate li zašto se pojavio $-$ ispred korijena? Zbog $x\to-\infty$ je $x<0$ pa kada ga ubacujemo pod korijen i kvadriramo moramo sačuvati taj predznak ispred korijena:

$$\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}=\frac{\sqrt{4x^2+3}}{-\sqrt{x^2}}=-\sqrt{\frac{4x^2+3}{x^2}}.$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+x+1}}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)/x}{\sqrt[3]{x^3+x+1}/x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+1/x}{\sqrt[3]{1+1/x^2+1/x^3}}=2.$$

Primijetimo da kod trećeg korijena nemamo problem s predznakom kao kod drugog korijena. ■

Napomena 6.17 Limese s $x\to-\infty$ možemo riješiti i supstitucijom $t=-x$ čime limes prelazi u $t\to\infty$. Npr. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+3}}=(t=-x)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(-2t+1)/t}{\sqrt{4t^2+3}/t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-2+1/t}{\sqrt{4+3/t^2}}=-1.$

Vježba 6.16 Supstitucijom $t=-x$ riješite podzadatke a) i c) u gornjem primjeru.

Nastavljamo sa računanjem limesa neodređenog oblika $(\infty-\infty)$.

■ **Primjer 6.39** Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-2x+3})$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2-x})$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\frac{x^2}{x+3})$

Rješenje.

a) $$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-2x+3})=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-2x+3})\frac{x+\sqrt{x^2-2x+3}}{x+\sqrt{x^2-2x+3}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x-3}{x+\sqrt{x^2-2x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x+\sqrt{x^2-2x+3}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)/x}{(x+\sqrt{x^2-2x+3})/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3/x}{1+\sqrt{1-2/x+3/x^2}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2-x}) = (\infty-\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2-x})\dfrac{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2-x}} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3-x^2+x}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)/x}{(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2-x})/x} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3/x}{\sqrt{1-3/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}} == \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\dfrac{x^2}{x+3}) = (\infty-\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^2-3x}{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x}{x+3} = -3.$

■

Sada ćemo prezentirati par zadataka s neodređenim oblikom $(\frac{0}{0})$ kod kojih skraćivanjem izraza riješimo problem jer a u koji x teži prestane biti nultočka nazivnika.

■ **Primjer 6.40** Izračunajte sljedeće limese: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{\sin 2x}$

Rješenje.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-5} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{5(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{5(x+1)} = \dfrac{3}{10}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{\sin 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{2\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2\cos x} = \dfrac{3}{2}.$

■

Prisjetimo se važnog limesa iz nizova koji će vrijediti i za $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Lako se pokaže da ovaj limes vrijedi i u sljedećem obliku:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

jer se supstitucijom $x=\frac{1}{t}$ gdje $t\to\pm\infty$ dobije: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t = e.$

Primijenimo navedene formule na nekoliko primjera.

■ **Primjer 6.41** Odredite sljedeće limese: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{4x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^x$

Rješenje.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{4x} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-4x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-4x} =$
$= \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{(-4)} = e^{-4}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^x = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2+3}{x-2}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^x =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{x-2}{3}\frac{3}{x-2}x} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}} = e^3.$ ■

■ **Primjer 6.42** Odredite sljedeće limese: a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}.$

Rješenje.

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}} = (1^{\infty}) = \lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 15} = e^{15}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$

■

Vježba 6.17 Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

Već smo u nekoliko primjera vidjeli kako se u limesima može ubaciti supstitucija. Slijedi još jedan takav primjer.

■ **Primjer 6.43** Odredite sljedeće limese: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

Rješenje.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} = \left[supst.x = t^6\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-t^3}{1-t^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \left[supst.y = e^x-1\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\ln(y+1)} = [\text{Pr}6.42b] = 1$

■

Prisjetimo se računanja jednostranih beskonačnih limesa.

■ **Primjer 6.44** Odredimo sljedeće jednostrane limese:

(a) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-x-2}$ i $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^2-x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$ i $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$

Rješenje.

a) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{1}{0^-(-3)} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{1}{0^+(-3)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$

■

Vježba 6.18 Ispitajte postoje li limesi: a) $\lim\limits_{x\to 4}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x-4}\right)^2$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$?

6.4.2 Sendvič teorem

Sljedeći teorem govori o još jednom svojstvu limesa kojeg možemo shvatiti kao neka vrsta usporednog kriterija za limese funkcija.

Teorem 6.4.2 — Teorem o sendviču za limes funkcije. Neka je h zadana funkcija za koju postoje funkcije f i g i broj $\delta > 0$ takve da vrijedi:

$$g(x) \leq h(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \langle a-\delta, a+\delta\rangle.$$

Ako je

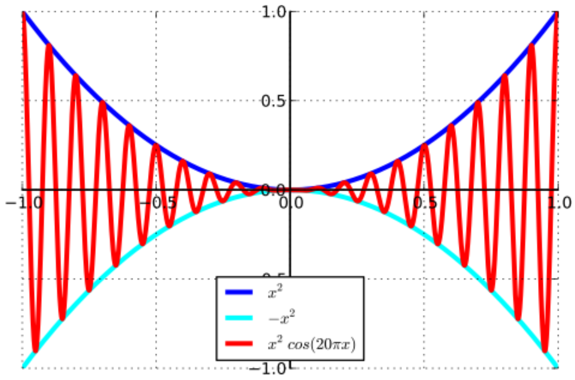
$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L,$$

onda je i $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Napomena 6.18 Teorem vrijedi i za $x \to a^{\pm}$ i $x \to \pm\infty$.

Primjer 6.45 Koristeći teorem o sendviču, pokažite da je $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(20\pi x) = 0$.

Rješenje. Na Slici 6.26 vidimo primjenu teorema na funkciju $h(x) = x^2\cos(20\pi x)$ u okolini nule. Vidimo da funkciju h možemo ukliještiti između $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$. Sada iz $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ slijedi da je $\lim_{x\to 0} x^2\cos(20\pi x) = 0$. ■

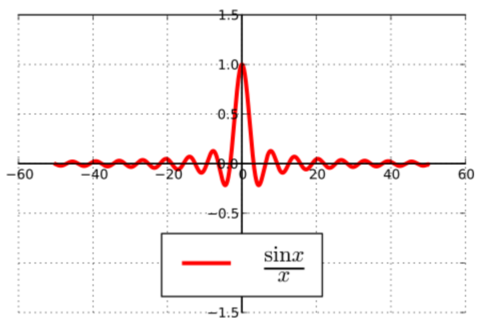


Slika 6.26

Vježba 6.19 Koristeći teorem o sendviču, pokažite da je $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$.

Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

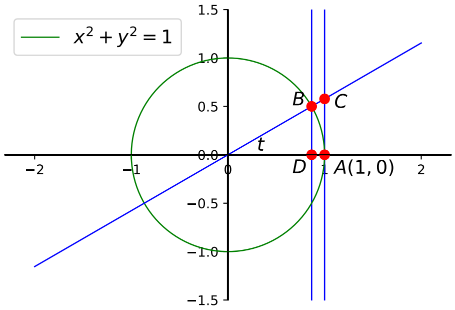
Promotrimo sada funkciju $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ koja se još naziva **prigušena sinusoida** jer joj amplituda $\frac{1}{x} \to 0$ kada $x \to \pm\infty$. Ova funkcija je od velike važnosti u elektrotehničkoj struci i obradi signala. Primijetimo da je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Slika 6.27

Iz Slike 6.27 možemo pretpostaviti da vrijedi sljedeća tvrdnja:

Teorem 6.4.3 Funkcija $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ima limes kada $x \to 0$ i vrijedi $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



Slika 6.28

Dokaz. Na Slici 6.28 je mjera kuta $\angle(AOB)$ označena u radijanima brojem t. Prema istoj slici za površine trokuta $\triangle(OAB)$, kružnog isječka $\angle(OAB)$ i trokuta $\triangle(OAC)$ vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{1\cdot\sin t}{2}\leq\frac{1\cdot t}{2}\leq\frac{1\cdot\mathrm{tg}t}{2},\ 0<t<\frac{\pi}{2}.$$

Budući da je $\sin t>0$ za $0<t<\frac{\pi}{2}$ vidimo da iz gornje nejednakosti množenjem sa $\frac{2}{\sin t}$, zatim prijelazom na recipročne vrijednosti (radi se s pozitivnim brojevima) dobivamo:

$$1\leq\frac{t}{\sin t}\leq\frac{1}{\cos t},\ 0<t<\frac{\pi}{2}.$$

Sada primjenom teorema o sendviču dobivamo:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\cos t}=1\implies\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Budući da je funkcija $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ parna odnosno graf joj je simetričan s obzirom na y-os slijedi da je i lijevi limes odnosno limes kada $t\to0^-$ jednak 1. Dakle vrijedi

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

■

Ovaj teorem nam je jako koristan kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.

■ **Primjer 6.46** Odredimo sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin(x)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}(x)}{x}$.

Rješenje.

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=(supst.y=2x)=2\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=2.$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=(supst.\ y=\arcsin x)=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=1.$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=(supst.\ y=\mathrm{arctg}x)=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\mathrm{tg}\,y}=1.$

■

6.4.3 Ekvivalentne neizmjerno male veličine

Prisjetimo se da smo u Poglavlju 5. definirali neizmjerno velike veličine i ekvivalentne neizmjerno velike veličine koje povezuju ponašanje funkcija u beskonačnosti. Sada ćemo definirati neizmjerno male veličine koje povezuju ponašanje funkcija u okolini neke točke.

Definicija 6.4.1 — Neizmjerno male veličine. Kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **neizmjerno male veličine istog reda** kada $x \to a$ ako je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

i

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \in \mathbb{R}^+$$

Dodatno kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **ekvivalentne neizmjerno male veličine** ako je $C = 1$ i tada pišemo $f(x) \sim g(x)$ kad $x \to a$.

Napomena 6.19 Kod korištenja ekvivalentnih neizmjerno malih veličina moramo biti oprezni jer ih možemo koristiti samo u slučaju limesa umnoška ili kvocijenta funkcija.

Pretpostavimo, $f(x) \sim h(x)$ kada $x \to a$. Onda vrijedi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} \lim_{x\to a} h(x)g(x) = \lim_{x\to a} (h(x)\cdot g(x))$$

ukoliko navedeni limesi postoje i konačni su.

U Teoremu 6.4.3 smo pokazali da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, u u Primjeru 6.46 smo dobili isti rezultat za limese pod b), c) i d). Također se prisjetimo limesa iz Primjera 6.42 b) i 6.43 b). Sada prema prethodnoj definiciji možemo zaključiti sljedeće:

Primjeri ekvivalentnih neizmjerno malih veličina

- $\sin x \sim x$ kad $x \to 0$
- $\operatorname{tg} x \sim x$ kad $x \to 0$
- $\arcsin x \sim x$ kad $x \to 0$
- $\operatorname{arctg} x \sim x$ kad $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ kad $x \to 0$
- $\ln(x+1) \sim x$ kad $x \to 0$

Štoviše, svake dvije funkcije su međusobno ekvivalentne.

Primjer 6.47 Izračunajte limese:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)\cdot\sin(3x)}{\sin^2(4x)}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg}(2x)}$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{-4x}}$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$

Rješenje.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)\cdot\sin(3x)}{\sin^2(4x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = [\,\sin(\alpha x) \sim \alpha x,\ x \to 0] = \lim_{x\to 0} \frac{5x\cdot 3x}{(4x)^2} = \frac{15}{16}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg}(2x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = [\,\operatorname{arctg}(2x) \sim 2x,\ x \to 0] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^{-4x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-(e^{-4x}-1)} = \left[\,(e^{-4x}-1)\sim -4x,\ x\to 0\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-(-4x)} = \dfrac{1}{4}.$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \left[\,\ln(1-x^2)\sim -x^2\,\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{x^2} = 1$ ■

Napomena 6.20 U Primjeru 6.47 d) ste mogli dobiti krivi rezultat da ste odmah iskoristili $\ln(1+x)\sim x$ i $\ln(1-x)\sim -x$ te ubacivanjem u limes dobijete rezultat 0. Smijemo li to učiniti u ovom zadatku? Zašto dobijemo drugačiji rezultat? Odgovor leži u činjenici da ekvivalentne neizmjerno male veličine ne smijemo koristiti kod zbroja i razlike funkcija nego samo kod umnoška i kvocijenta.

Vježba 6.20 Odredite sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{e^{2x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{x}\arcsin\left(\dfrac{e^x}{2}\right)\right)$

Napomena 6.21 Koristeći činjenicu da $\frac{1}{x}\to 0$ kada $x\to\infty$, dobijemo sljedeće ekvivalentne veličine:

- $\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$ kada $x\to+\infty$
- $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$ kada $x\to+\infty$
- $\ln(1+\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}$ kada $x\to+\infty$

■ **Primjer 6.48** Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+4}{\sqrt{x^5+x^2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Rješenje.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left[\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x},x\to\infty\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x},x\to\infty\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+4}{\sqrt{x^5+x^2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}},x\to\infty\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+4}{\sqrt{x^6+x^3}} = 1$ ■

■ **Primjer 6.49** Odredite $a,b\in\mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x)$ bude neprekinuta u točki $x=0$.
Rješenje: Moramo odrediti a i b tako da bude zadovoljen uvjet neprekinutosti

$$\lim_{x\to 0+}f(x) = \lim_{x\to 0-}f(x) = f(0).$$

Imamo

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{\frac{1}{2}+\sin(ax)}{x}\right) = \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(ax)}{x} = \frac{1}{2}+a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sh}x}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{e^x-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0+}\frac{e^{2x}-1}{2xe^x} = \lim_{x\to 0+}\frac{2x}{2xe^x} = 1$$

Iz uvjeta neprekinutosti imamo

$$\frac{1}{2}+a = b = 1.$$

Funkcija je neprekinuta u točki $x=0$ za $a=\frac{1}{2}$ i $b=1$. ■

Time smo završili s gradivom ovoga poglavlja.

6.5 Pitanja za ponavljanje gradiva

1. Intuitivno, funkcija f ima limes L kada x teži prema a ($L = \lim_{x\to a} f(x)$,) ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ približavaju vrijednosti L kada se x približava vrijednosti a. Povežite ovu "intuitivnu" definiciju s definicijom konačnog limesa u konačnoj točki.
2. Navedite primjer i napišite definiciju za
   a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty,\ a \in \mathbb{R}$
   b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty,\ a \in \mathbb{R}$
   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R}$
   d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R}$
3. a) Napišite definiciju za konačan desni limes funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$. Navedite primjer funkcije koja ima konačan desni limes u točki $a \in \mathbb{R}$.
   b) Napišite definiciju za konačan lijevi limes funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$. Navedite primjer funkcije koja ima konačan lijevi limes u točki $a \in \mathbb{R}$.
4. Napišite definiciju i navedite primjer funkcija za koje je:
   a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.
   b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.
   c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.
   d) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.
5. Napišite teorem o postojanju limesa u točki $a \in \mathbb{R}$. (povezanost limesa s jednostranim limesima)
6. Navedite neodređene oblike. Jesu li $0^{+\infty}$, $0^{-\infty}$ $\frac{+\infty}{0^+}$, $\frac{+\infty}{0^-}$ neodređeni oblici? Ako nisu navedite čemu su ti oblici jednaki.
7. Jesu li sljedeće tvrdnje točne ili netočne te napišite zašto:
   a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ može postojati i ako točka a nije u domeni funkcije f.
   b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ i $a \in D(f)$, tada je $L = f(a)$.
   c) Ako funkcija ima lijevi i desni limes u točki $a \in \mathbb{R}$ tada postoji limes funkcije u toj točki.
   d) Ako funkcija ima limes u točki $a \in \mathbb{R}$, onda ima i jednostrane limese u toj točki.
   e) Postoje situacije kada funkcija ima limes u točki $a \in \mathbb{R}$, ali je pri tome desni limes funkcije u toj točki jednak $+\infty$ a lijevi je konačan.
8. Iskažite teorem o sendviču za limese funkcija. Pomoću navedenog teorema dokažite da je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
9. Definirajte ekvivalentne neizmjerno male veličine istog reda. Navedite primjere nekih ekvivalentnih neizmjerno malih veličina kada $x \to 0$.
10. Navedite koje su tvrdnje točne, a koje netočne te objasnite zašto?
    a) $\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$, kada $x \to +\infty$.
    b) $\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$, kada $x \to 0^+$.
    c) $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, kada $x \to 0$.
    d) $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, kada $x \to +\infty$.
    e) $\sin(x^2 - 4x + 4) \sim (x-2)^2$, kada $x \to 0$.
    f) $\sin(x^2 - 4x + 4) \sim (x-2)^2$, kada $x \to 2$.
11. Napišite definiciju za neprekinutost funkcije f u točki $a \in D(f)$. Kada kažemo da je funkcija neprekinuta na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$?
12. Navedite primjere funkcija za koje je u nekoj točki $a \in D(f)$ vrijedi sljedeće:

a) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to a^-} f(x)$ postoje i jednaki su $+\infty$.
b) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to a^-} f(x)$ postoje i različiti su.
c) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to a^-} f(x)$ postoje, konačni su i jednaki, ali su različiti od $f(a)$.
d) Vrijednosti $\lim_{x\to a+} f(x)$ i $\lim_{x\to a-} f(x)$ i $f(a)$ sve postoje i jednake su.

Koji od gornjih primjera su primjeri neprekinutih funkcija u točki $a \in \mathbb{R}$?

13. Definirajte asimptotu funkcije.
14. Navedite sve vrste asimptota te objasnite kako glase njihove jednadžbe.
15. Navedite po jedan primjer funkcije koja:
    (a) ima vertikalnu asimptotu x = 0;
    (b) ima vertikalnu asimptotu x = 2;
    (c) ima horizontalnu asimptotu (lijevu i desnu) y = 0.
16. Može li funkcija imati dvije vertikalne asimptote? Navedite primjer.
17. Može li funkcija imati tri horizontalne asimptote? Obrazložite.

6.6 Zadatci za vježbu

Zadatak 1. Izračunati: a. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^3+x^2+x+1}{(x+2)^2}\right)$; b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Zadatak 2. Izračunati: a. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; b. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+\sqrt{4x^2+1}}$.

Zadatak 3. Izračunati a. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; b. $\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$.

Zadatak 4. Izračunati
a. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4+1})$; b. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{(x-\sqrt{x^2+3x})(x+2)}$; c. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$.

Zadatak 5. Izračunati: a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; b. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; c. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

Zadatak 6. Izračunati
a. $\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{3x^2+1}$; b. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin(2x)}$; c. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x\cos x}{(3x+1)(1-3x)}$; d. $\lim_{x\to-\infty}\arcsin(e^{\frac{1}{x}})$.

Zadatak 7. Izračunajte $\lim_{x\to\infty}\left[x^2-\frac{(x+1)^6}{x^4+ax^3}\right]$ u ovisnosti o realnom parametru a.

Zadatak 8. Izračunajte $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x^2+x+1}\right)x^a$ u ovisnosti o realnom parametru a.

Zadatak 9. Izračunati

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}.$$

Zadatak 10. Izračunati
a. $\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}$; b. $\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}$; c. $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}$; d. $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2-x}$.

Zadatak 11. Izračunati
a. $\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x+1}$; b. $\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x+1}$; c. $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-4x+3}$; d. $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-4x+3}$.

Zadatak 12. Izračunati

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$, b. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$, c. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$, d. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$.

Zadatak 13. Izračunati

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} \operatorname{arctg}(\dfrac{x-3}{x-2})$, b. $\lim\limits_{x\to 2^+} \operatorname{arctg}(\dfrac{x-3}{x-2})$.

Zadatak 14. Izračunati

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} e^{\frac{x-3}{x-2}}$; b. $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{\frac{x-3}{x-2}}$; c. $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}}$; d. $\lim\limits_{x\to 2^+} \operatorname{th}\dfrac{1}{2-x}$.

Zadatak 15. Postoje li limesi

a. $\lim\limits_{x\to 4} \operatorname{arctg}(\dfrac{x}{x-4})^2$; b. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg}(\dfrac{x}{1-x})^3$?

Zadatak 16. Postoji li limes funkcije $f(x) = \operatorname{cth}\frac{3}{x^2-9}$ u točki $x = 3$?

Zadatak 17. Postoji li

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1}\right)?$$

Obrazložite!

Zadatak 18. Izračunati a. $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x}}$; b. $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}$; c. $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)$;
d. $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)$; e. $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{ctg}(x^2-x)$; f. $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{ctg}(x^2-x)$.

Zadatak 19. Izračunati: a. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x$; b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{2x+1}$.

Zadatak 20. Izračunati

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$; b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^x$; c. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{2x+2}{x^2+1}}$; d. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-3}{x^2+2}\right)^{3x^2+1}$.

Zadatak 21. Izračunati: a. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}}$; b. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x+3}{3}\right)^{\frac{3-2x}{x}}$.

Zadatak 22. Izračunati: a. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{2x+3}\right)^x$; b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

Zadatak 23. Izračunati

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{3\operatorname{ctg} x}.$$

Zadatak 24. Izračunati a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(2x+1)}$, b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{3x}-1}$,

Zadatak 25. Izračunati a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(2x)}{\arcsin(3x)}$, b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Zadatak 26. Izračunati a. $\lim\limits_{x\to 2} (x-1)^{\frac{x}{x-2}}$; b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{1-e^x}$.

Zadatak 27. Izračunati

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x^2}-1}{\sin^2(5x)}$; b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x^2)}{\sin^2(2x)}$; c. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x+1}{x^2-4x-5}\sin(x+1)$; d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$.

Zadatak 28. Izračunati: a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x+1}\operatorname{arctg} x$; b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x+1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Zadatak 29. Izračunati: a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x+1} \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$; b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{arsh} x - \ln x\right)$.

Zadatak 30. Izračunati
a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{3(x^2+2x)}(\ln(2+x)-\ln 2)$; b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x^2}\sin x$.

Zadatak 31. Izračunati
a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin(3x)\cos(2x)}$; b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1}$; c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;
d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)\arcsin(2x)}{x}$; e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x^2+1)\operatorname{arctg}(3x)}{2x}$; f. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\ln(1+2x)}{x} \arcsin(\dfrac{e^x}{2})\right]$.

Zadatak 32. Izračunati
a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-3}{x} \arcsin(\dfrac{1}{x})$; b. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^4-x^3}-x^2)\sin(\dfrac{1}{x})$;
c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3}{3x^2+1} \sin(\dfrac{1}{x})$; d. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

Zadatak 33. Izračunati: a. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}\right)$; b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{x^2}$.

Zadatak 34. Odredite parametar a tako da funkcija f definirana s $f(x) = a\cos(2x)$, za $x \le 0$ i $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$, za $x > 0$ bude neprekinuta u točki $x = 0$.

Zadatak 35. Odredite parametar a tako da funkcija definirana s $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, za $x < 2$ i $f(x) = \sqrt{a+x^2}$, za $x \ge 2$ bude neprekinuta na $\mathbb{R}$.

Zadatak 36. Odredite parametar a tako da funkcija definirana s $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg}(2x)}$, za $x \ne 0$ i $f(x) = a + \cos(2x)$, za $x = 0$ bude neprekinuta u $x = 0$.

Zadatak 37. Odredite parametar a tako da funkcija definirana s $f(x) = x^2 + a^2x - 7$, za $x \ge -3$ i $f(x) = a\operatorname{th}\left(\frac{x+8}{x+3}\right)$, za $x < -3$ bude neprekinuta na $\mathbb{R}$.

Zadatak 38. Odredi parametre a i b tako da funkcija f definirana s $f(x) = 1 + \dfrac{\sin(ax)}{x}$, za $x > 0$, $f(0) = 2$, i $f(x) = \dfrac{\sin(bx)}{x}$, za $x < 0$, bude neprekinuta.

Zadatak 39. Odredi parametre a i b tako da funkcija f definirana s $f(x) = a + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, za $x < 0$, $f(0) = 0$ i $f(x) = b + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, za $x > 0$ bude neprekinuta.

Zadatak 40. Odredite sve asimptote funkcija:
a. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ b. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ c. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ d. $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$

Zadatak 41. Odredite sve asimptote funkcija:
a. $f(x) = x + \sqrt{x}$ b. $f(x) = \sqrt{x^2+4x}$ c. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + x$

Zadatak 42. Odredite sve asimptote funkcija:
a. $f(x) = \operatorname{arctg}(e^x)$ b. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

6.7 Rješenja zadataka

6.7.1 Rješenja zadataka za vježbu iz Poglavlja 7.6

1. a. $\lim_{x\to\infty} \left(x - \frac{x^3+x^2+x+1}{(x+2)^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x^2+4x-(x^3+x^2+x+1)}{(x+2)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3x-1}{(x+2)^2} = 3.$

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-1.$

2. a. 1; **b.** $\frac{1}{3}$.

3. a. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-(x^2+x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{-x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-1-\frac{1}{x}}=-2.$

b. $\frac{2}{3}$.

4. a. 1; **b.** $\frac{4}{3}$; **c.** $-\frac{1}{2}$

5. a. supst. $1+x=t^6$, $L=\frac{3}{2}$; **b**. supst. $\sqrt{x}=t$, $L=\frac{1}{2}$; **c.** supst. $\sqrt[3]{x}=t$, $L=\frac{1}{9}$.

6. a. 0; **b.** 1; **c.** 0; **d.** $\frac{\pi}{2}$.

7. za $a>6$ $L=+\infty$; za $a=6$ $L=-15$; za $a<6$ $L=-\infty$.

8. za $a>\frac{1}{2}$ $L=+\infty$; za $a=\frac{1}{2}$ $L=\frac{1}{4}$; za $a<\frac{1}{2}$ $L=0$.

9. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-2}=-1.$

10. a. $-\infty$; **b.** ∞; **c.** ∞; **d.** $-\infty$.

11. a. ∞; **b.** $-\infty$. **c.** $\lim_{x\to1-}\frac{1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1-}\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\infty.$

d. $\lim_{x\to1+}\frac{1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1+}\frac{1}{(x-1)(x-3)}=-\infty.$

12. a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $+\infty$ **d.** $-\infty$

13. a. $\frac{\pi}{2}$ **b.** $-\frac{\pi}{2}$

14. a. $+\infty$; **b.** 0; **c.** 1; **d.** -1.

15. a. da; **b.** ne.

16. Ne postoji jer lijevi i desni limesi nisu jednaki.

17. Vrijedi $\lim_{x\to1-}\operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1}\right)=-1$ i $\lim_{x\to1+}\operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1}\right)=1$, i zato $\lim_{x\to1}\operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ ne postoji.

18. a. ∞; **b.** 0; **c.** $\frac{\pi}{2}$; **d.** $-\frac{\pi}{2}$;

e. $\lim_{x\to0-}\operatorname{ctg}\big(x^2-x\big)=\lim_{x\to0-}\operatorname{ctg}\big(x(x-1)\big)=\infty$;

f. $\lim_{x\to0+}\operatorname{ctg}\big(x^2-x\big)=\lim_{x\to0+}\operatorname{ctg}\big(x(x-1)\big)=-\infty$.

19. a. e^{-1}; **b.** e^{-8}.

20. a. e^2; **b.** $e^{-\frac{3}{2}}$; **c.** 1; **d.** e^{-15}.

21. a. e^{-6}; **b.** e^2.

22. a. 0; **b.** 2.

23. e^3

24. a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3}$

25. a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{1}{2}$

26. a. $\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{x}{x-2}}=\lim_{x\to2}\left(\big(1+(x-2)\big)^{\frac{1}{x-2}}\right)^x=e^2.$

b. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{1-e^x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{-x}=-3$, jer za $x\to0$, $\sin(3x)\sim3x$ i $1-e^x\sim-x$.

27. a. $\frac{3}{25}$; **b.** 1; **c.** $-\frac{1}{2}$; **d.** 1.

28. a.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}\operatorname{arctg}x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

b. Vrijedi
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+x}=\frac{1}{2},$$
jer za $x\to\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$, pa za $x\to\infty$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$.

29. a. Vrijedi
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}\cdot\ln\frac{x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x+1)(x+1)}=\frac{1}{2},$$
jer za $x\to\infty$, $\frac{1}{x+1}\to 0$, pa za $x\to\infty$, $\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\sim\frac{1}{x+1}$.

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{arsh}x-\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\ln 2.$

30. a. $\frac{1}{12}$; **b.** $\frac{1}{2}$; **c.** 3.

31. a. 0; **b.** $\frac{1}{2}$; **c.** $\frac{1}{4}$; **d.** 2; **e.** $\frac{3}{2}$; **f.** $\frac{\pi}{3}$.

32. a. ∞; **b.** $-\frac{1}{2}$; **c.** $\frac{1}{3}$; **d.** 1.

33. a. $\lim_{x\to1}\arcsin\left(\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\arcsin\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, jer za $x\to1$, $\sin(x-1)\sim x-1$.

b. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left((1-x)(1+x)\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}=-1$, jer za $x\to0$, $\ln(1-x^2)\sim -x^2$.

34. $f(0)=\lim_{x\to0-}f(x)=a$, $\lim_{x\to0+}f(x)=2$. Da bi f bila neprekinuta u točki $x=0$, mora biti $a=2$.

35. $\lim_{x\to2^-}f(x)=12$, $f(2)=\sqrt{a+4}=12$; $a=140$.

36. $a=-\frac{1}{2}$.

37. $f(-3)=2-3a^2$, $\lim_{x\to-3^-}f(x)=-a$, $2-3a^2=-a$, $a_1=1$, $a_2=-\frac{2}{3}$.

38. $a=1$, $b=2$

39. $a=\frac{\pi}{2}$, $b=-\frac{\pi}{2}$

40. a. V.A. $x=\pm1$, H.A. $y=2$; **b.** V.A. nema, K.A. $y=x$;
c. V.A. $x=1$, K.A. $y=x+1$; **d.** V.A. $x=0$, K.A. $y=x$.

41. a. nema asimptote; **b.** D.K.A. $y=x+2$, L.K.A. $y=-x-2$;
c. V.A. nema, D.K.A. $y=2x+\frac{1}{2}$, L.H.A. $y=-\frac{1}{2}$;

42. a. V.A. nema, D.H.A. $y=\frac{\pi}{2}$, L.H.A. $y=0$; **b.** V.A. nema, K.A. $y=x\pm\frac{\pi}{2}$;

6.7.2 Rješenja vježbi iz Poglavlja 7

Vježba 7.1. a. Da b. Ne

Vježba 7.2. Da

Vježba 7.3. a. L$=-4$ b. L$=\frac{4}{49}$

Vježba 7.6. a. L$=8$ b. L$=\ln 2$

Vježba 7.7. Funkcija f nije neprekinuta u $x=0$ i $x=1$, ali je u $x=0$ neprekinuta s desna, a u $x=1$ je neprekinuta s lijeva.

Vježba 7.10. a. L$= +\infty$ b. L$= -\infty$ c. L$= +\infty$

Vježba 7.11. Ne vrijedi jer je $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$, a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Vježba 7.12. Limes ne postoji.

Vježba 7.13. a. $+\infty$ b. 0 c. $+\infty$ d. 0 e. 0

Vježba 7.14. a. nema V.A., desna H.A.: $y = -\frac{\pi}{2}$; lijeva H.A.: $y = \frac{\pi}{2}$ b. V.A.: $x = 1, x = -2$; H.A.: $y = 2$

Vježba 7.15. V.A: $x = 0$, K.A. $y = -x+1$

Vježba 7.17. a. e^2 b. e^{-8} c. e^{15}

Vježba 7.18. a. Da b. Ne

6.8 Literatura

[1] A. Aglić Aljinović, I. Brnetić, V. Ćepulić, N. Elezović, Lj. Marangunić, M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović, Matematika 1, Element, Zagreb, 2013.

[2] J. Stewart, Single variable calculus, Cengage learning, USA, 2014