# Matematička analiza 2 - predavanja

## 7.poglavlje - *Diferencijalne jednadžbe višeg reda*

Tomislav Burić, Lana Horvat Dmitrović, Domagoj Kovačević, Mervan Pašić, Mate Puljiz, Tomislav Šikić, Igor Velčić, Ana Žgaljić Keko

PUBLISHED BY UNIZG-FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Verzija: 25.svibnja 2022.

# Sadržaj

# 7. Diferencijalne jednadžbe višeg reda

## 7.1 Rješenja diferencijalnih jednadžbi višeg reda

Prisjetimo se općeg oblika diferencijalne jednadžbe 1. reda koju smo promatrali u prethodnom poglavlju:

$$F(x,y,y') = 0 \quad \text{ili} \quad y' = f(x,y).$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe 1. reda je oblika

$$y = \varphi(x,C_1) \quad \text{ili} \quad \Phi(x,y,C_1) = 0.$$

Analogno, opći oblik diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda je

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$$

ili

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}).$$

Opće rješenje te jednadžbe možemo zapisati u eksplicitnom obliku

$$y = \varphi(x,C_1,\dots,C_n)$$

ili u implicitnom obliku

$$\Phi(x,y,C_1,\dots,C_n) = 0$$

gdje su $C_1,\dots,C_n$ proizvoljne realne konstante.

Problem traženja rješenja opće diferencijalne jednadžbe višeg reda je složen. Naime, ne postoji općenita metoda za traženje rješenja nego samo određene metode za specijalne oblike diferencijalnih jednadžbi višeg reda. Jedna od metoda je metoda snižavanja reda kojom jednadžbu pokušavamo svesti na jednadžbu prvog reda koju znamo riješiti. U ovom poglavlju ćemo se najviše baviti linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima za koje postoji algoritam za traženje općeg rješenja. U praksi je raširena upotreba numeričkih metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi kroz razne programske pakete kao što su MATLAB, Scilab, jLab, SageMath, Maple, Mathematica i mnogi drugi.

### 7.1.1 Snižavanje reda jednadžbe

Kratko ćemo se osvrnuti na dva najjednostavnija tipa jednadžbi višeg reda koje možemo rješavati postupcima snižavanja reda.

- Prvi tip su jednadžbe oblika

$$y^{(n)} = f(x).$$

Njih rješavamo uzastopnim integriranjem $n$ puta. Pogledajmo sada jedan primjer.

■ **Primjer 7.1** Riješite jednadžbu: $\qquad y''' = \sin x - \cos x.$

**Rješenje.** Nakon jednog integriranja jednadžbe po $x$ dobivamo

$$y'' = -\cos x - \sin x + C_1,$$

a nakon drugog slijedi da je

$$y' = -\sin x + \cos x + C_1 x + C_2.$$

Trećim integriranjem dobijemo opće rješenje jednadžbe:

$$y = \cos x + \sin x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

■

- Drugi tip su jednadžbe oblika

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

za neki $k \in \{1, \ldots, n\}$. Rješavamo ih supstitucijom $z = y^{(k)}$ kojom snižavamo red jednadžbi. Tu je $z$ u supstituciji ustvari $z = z(x)$ odnosno funkcija jedne varijable.

■ **Primjer 7.2** Riješite jednadžbu: $\qquad y'' + y'^2 + 1 = 0.$

**Rješenje.** Supstitucijom $z = y'$ jednadžba postaje

$$z' + z^2 + 1 = 0.$$

To je diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama te slijedi

$$\frac{dz}{1+z^2} = -dx$$

odnosno

$$\operatorname{arctg} z = -x + C_1.$$

Sada je $z = \operatorname{tg}(-x + C_1)$ pa integriranjem jednadžbe $z = y'$ slijedi

$$y = \int \operatorname{tg}(-x + C_1)dx + C_2 = \ln|\cos(-x + C_1)| + C_2.$$

■

■ **Primjer 7.3** Riješite jednadžbu: $y''' + y'' \operatorname{tg} x = 0.$

**Rješenje.** Supstitucijom $z = y''$ jednadžba postaje

$$z' + z \operatorname{tg} x = 0.$$

To je diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama te slijedi

$$\frac{dz}{z} = -\operatorname{tg} x \, dx$$

za $z \neq 0$. Dobivamo

$$\ln|z| = \ln|\cos x| + C_1.$$

Sada je dobiveno opće rješenje $z = C_1 \cos x$ za $C_1 \neq 0$ . Vidimo da je i $z = 0$ također rješenje koje se dobije iz općeg rješenja za $C_1 = 0$. Dakle, opće rješenje je

$$z = C_1 \cos x, \; C_1 \in \mathbb{R}.$$

Sada dva puta uzastopno integriramo jednadžbu $z = y''$ i dobivamo

$$y = -C_1 \cos x + C_2 x + C_3, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

■

Postoje još mnoge metode za snižavanje reda, ali njima se nećemo baviti u sklopu ovog kolegija.

### 7.1.2 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Kao i kod diferencijalnih jednadžbi prvog reda, postoje dva osnovna pitanja: postoji li rješenje zadane diferencijalne jednadžbe (problem egzistencije) i je li ono jedinstveno (problem jedinstvenosti)?

Prisjetimo se, Cauchyjev problem je diferencijalna jednadžba s početnim uvjetima. Dakle, Cauchyjev problem za jednadžbu $n$-tog reda glasi:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7.1}$$

uz početne uvjete

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Broj početnih uvjeta Cauchyjevog problema jednak je redu jednadžbe. Dakle, jednadžba $n$-tog reda mora imati $n$ početnih uvjeta. Za navedeni Cauchyjev problem ćemo navesti Picardov teorem koji nam daje egzistenciju i jedinstvenost rješenja.

**Teorem 7.1.1** Neka je $f$ definirana na nekoj okolini $D$ točke $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{(n-1)})$ i na $D$ zadovoljava sljedeće uvjete:
1) $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ je neprekinuta funkcija;
2) postoji $M > 0$ takav da je

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M, \ \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| \leq M, \ \ldots, \ \left|\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right| \leq M.$$

Tada postoji interval $(x_0 - h, x_0 + h)$ oko točke $x_0$ u kojem jednadžba (7.1) ima jedinstveno rješenje $y = y(x)$ koje zadovoljava početne uvjete (7.2).

■ **Primjer 7.4** Postoji li jedinstveno rješenje sljedećeg Cauchyjevog problema:

$$y''' = yy'' + y^2 - 4x^2,$$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \\ y''(x_0) &= y_2. \end{aligned}$$

za po volji odabrane brojeve $x_0$, $y_0$, $y_1$ i $y_2$?

**Rješenje.** Provjerimo uvjete teorema. Funkcija

$$f(x, y, y', y'') = yy'' + y^2 - 4x^2$$

je neprekinuta na čitavom $\mathbb{R}^4$. Parcijalne derivacije po zadnje tri varijable koje glase

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y'' + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y''} = y$$

su neprekinute funkcije. Iz toga slijedi i da su omeđene na nekoj okolini točke $(x_0, y_0, y_1, y_2)$. Znači zaključujemo da postoji interval na kojem jednadžba ima jedinstveno rješenje. Možete sami provjeriti da je npr. $y = 2x$ rješenje koje zadovoljava uvjete $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ i $y''(0) = 0$. ■

## 7.2 Linearna diferencijalna jednadžba $n$-tog reda

U ovom ćemo poglavlju detaljnije promatrati linearnu diferencijalnu jednadžbu $n$-tog reda

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_1(x)y' + A_0(x)y = h(x). \tag{7.3}$$

gdje su funkcije $A_n$, ..., $A_0$ neprekinute te $A_n(x) \neq 0$. Diferencijalna jednadžba je linearna ako su koeficijenti uz $y^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n$ i desna strana jednadžba funkcije koje ovise samo o $x$. Dijeljenjem jednadžbe (7.3) s $A_n(x) \neq 0$ dobivamo sljedeći oblik linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda koji najčešće koristimo

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{7.4}$$

gdje su funkcije $a_0, \ldots, a_{n-1}$ neprekinute.

■ **Primjer 7.5** Sada ćemo primijeniti Picardov teorem na linearnu diferencijalnu jednadžbu $n$-tog reda. Vidimo da se jednadžba može zapisati u obliku

$$y^{(n)} = f_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

gdje funkcija $f$ glasi

$$f_1(x, y, y'', \dots, y^{(n-1)}) = -a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \dots - a_1(x)y' - a_0(x)y + f(x).$$

Sada parcijalne derivacije iz Picardovog teorema izgledaju ovako:

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right| = |a_0(x)|, \quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right| = |a_1(x)|, \quad \dots, \quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}\right| = |a_{n-1}(x)|$$

i to su neprekinute funkcije pa time i omeđene na okolini neke točke $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{(n-1)})$. Dakle, Cauchyjev problem za LDJ n-tog reda na nekoj okolini točke $x_0$ ima točno jedno rješenje za bilo koji izbor početnih uvjeta $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. ■

Za linearnu diferencijalnu jednadžbu (7.4) kažemo da je **homogena** ako joj je desna strana jednaka nuli ($f(x) = 0$), inače je **nehomogena**. Rješenja $y$ linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda tražimo među funkcijama koje su $n$ puta diferencijabilne i derivacije su im neprekinute jer jedino za takve funkcije jednadžba ima smisla. Takve funkcije su sadržane u prostoru $n$ puta neprekinuto diferencijabilnih funkcija na $[a, b]$ koji označavamo s $C^{(n)}[a, b]$ . Koristit ćemo činjenicu da je taj prostor vektorski prostor te da deriviranje funkcija možemo opisati kao djelovanje linearnog operatora na funkcije iz tog prostora. Prisjetimo se definicije vektorskog prostora i linearnog operatora iz kolegija Linearna algebra.

Dodatak

**Vektorski prostor** je prostor na kojem su definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom koji zadovoljavaju svojstva (V1)-(V8). Detaljnije vidi u Poglavlju 1.1 knjižice Funkcije više varijabla.

■ **Primjer 7.6** Prostor $C[a, b]$ je prostor svih neprekinutih funkcija na intervalu $[a, b]$. To je vektorski prostor uz sljedeće operacije

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

Analogno vrijedi i za prostore $C^{(n)}[a, b]$. ■

Dodatak

**Linearni operator** je preslikavanje $A : X \to Y$ ($X, Y$ vektorski prostori) za koje vrijedi

$$A(\alpha_1 x + \alpha_2 x) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

■ **Primjer 7.7** Prostor neprekinuto diferencijabilnih funkcija na $[a, b]$ označavamo s $C^1[a, b]$. Diferencijalni operator

$$\frac{d}{dx} : C^1[a, b] \to C[a, b]$$

je linearan operator. To lako slijedi iz svojstva deriviranja koje smo radili u Matematičkoj analizi 1 odnosno znamo da vrijedi

$$\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x).$$

■

**Definicija 7.2.1** Ako s $C^{(n)}[a,b]$ označimo prostor $n$ puta neprekinuto diferencijabilnih funkcija na $[a,b]$, tada operator

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n} : C^n[a,b] \to C[a,b]$$

zovemo **diferencijalni operator reda** $n$. ■

Lako se pokaže da je diferencijalni operator linearan za svaki prirodan broj $n$.

**Definicija 7.2.2** Neka je zadana funkcija

$$P(x,\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}(x)\lambda^{n-1} \ldots + a_1(x)\lambda + a_0(x)$$

koja je polinom $n$-tog stupnja u varijabli $\lambda$. Tada linearan operator $L(x)$ sa $C^{(n)}[a,b]$ u $C[a,b]$ definiran s

$$L(x) = P(x,D) := D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)$$

zovemo **linearni diferencijalni operator reda** $n$. ■

Ako s $L$ označimo linearni diferencijalni operator oblika

$$L(x) = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x),$$

tada diferencijalnu jednadžbu

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

možemo zapisati u obliku operatorske jednadžbe

$$Ly = f$$

gdje je $L$ diferencijalni operator, $f$ zadana funkcija, a $y$ rješenje diferencijalne jednadžbe koje tražimo. Ovu jednadžbu zovemo operatorska jednadžba.

Da bi mogli preciznije opisati kako izgledaju rješenja diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda, malo ćemo se detaljnije pozabaviti pojmom operatorske jednadžbe.

**Definicija 7.2.3** Neka su $Y$ i $Z$ vektorski prostori, $L : Y \to Z$ je linearan operator i $f \in Z$ je zadano. Jednadžbu $Ly = f$ zovemo **nehomogena operatorska jednadžba**, a jednadžbu $Ly = 0$ zovemo **homogena operatorska jednadžba**.

- Vektor $y_h \in Y$ je rješenje homogene operatorske jednadžbe ako vrijedi $Ly_h = 0$.
- Vektor $y_p \in Y$ je partikularno rješenje nehomogene jednadžbe ako je $Ly_p = f$.

■

Operatorska jednadžbe daje jednakost funkcija što znači da jednakost vrijedi za svaki $x$. Dakle, homogenu operatorsku jednadžbu možemo pisati u obliku

$$(Ly)(x) = 0$$

a nehomogenu u obliku

$$(Ly)(x) = f(x).$$

**Vježba 7.1** Ako je $y_h$ bilo koje rješenje homogene jednadžbe, tada pokažite da je $y_h + y_p$ rješenje pripadne nehomogene operatorske jednadžbe!

Sada imamo sljedeći teorem koji govori o obliku rješenja operatorske jednadžbe.

**Teorem 7.2.1** Neka je $y_p$ neko partikularno rješenje operatorske jednadžbe $Ly = f$. Tada se svako rješenje te operatorske jednadžbe može zapisati u obliku

$$y = y_h + y_p,$$

gdje je $y_h$ rješenje homogene jednadžbe $Ly = 0$.

*Dokaz.* Neka je $y_0$ bilo koje rješenje navedene jednadžbe, a $y_p$ neko partikularno rješenje. Tada je

$$L(y_0 - y_p) = Ly_0 - Ly_p = f - f = 0.$$

Zato je $y_h = y_0 - y_p$ rješenje pripadne homogene jednadžbe $Ly = 0$. Iz toga slijedi da je $y_0 = y_h + y_p$. ■

Dakle, Teorem 7.2.1 kaže da ako je $y_h$ rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

i $y_p$ neko partikularno rješenje pripadne nehomogene jednadžbe

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

tada se svako rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe može zapisati u obliku

$$y = y_h + y_p.$$

## 7.2.1 Homogena LDJ $n$-tog reda

U ovom se poglavlju bavimo homogenom linearnom diferencijalnom jednadžbom $n$-tog reda

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

čija pripadna operatorska jednadžba glasi

$$(Ly)(x) = 0.$$

Prije nego što ćemo pokazati da je skup svih rješenja ove homogene linearne diferencijalne jednadžbe potprostor prostora $C^{(n)}[a,b]$, prisjetit ćemo se pojmova linearne zavisnosti i nezavisnosti vektora te baze i dimenzije prostora.

Dodatak

Vektori $y_1, \ldots, y_n$ su **linearno nezavisni** ako iz jednakosti $\alpha_1 y_1 + \ldots \alpha_n y_n = 0$ slijedi da je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Vektori su **linearno zavisni** ako nisu linearno nezavisni odnosno ako se svaki vektor može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.

Sada ćemo navedenu definiciju zapisati u kontekstu funkcija.

**Definicija 7.2.4** Funkcije $y_1(x),\dots,y_n(x)$ su **linearno zavisne** na $I$ ako postoje $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ od kojih je barem jedan različit od nule takvi da vrijedi $\alpha_1 y_1(x)+\dots\alpha_n y_n(x)=0$ za svaki $x\in I$. Funkcije $y_1(x),\dots,y_n(x)$ su **linearno nezavisne** ako nisu linearno zavisne odnosno ako iz jednakosti $\alpha_1 y_1(x)+\dots\alpha_n y_n(x)=0$ za svaki $x\in I$ slijedi da je $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$. ■

■ **Primjer 7.8** Ispitajte jesu li sljedeće funkcije linearno nezavisne:
a) $y_1(x)=1$, $y_2(x)=x+1$, $y_3(x)=x^2-2x+3$
b) $y_1(x)=1$, $y_2(x)=2x$, $y_3(x)=x-3$

**Rješenje.**
a) Prema definiciji tražimo za koje $\alpha_1$, $\alpha_2$ i $\alpha_3$ vrijedi

$$\alpha_1+\alpha_2(x+1)+\alpha_3(x^2-2x+3)=0$$

odnosno dobivamo

$$\alpha_3x^2+(\alpha_2-2\alpha_3)x+\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0.$$

Koristeći činjenicu da je polinom jednak nuli ako su mu svi koeficijenti nula, dobivamo sustav: $\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0$, $\alpha_2-2\alpha_3=0$ i $\alpha_3=0$ koji ima jedinstveno rješenje $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$. Dakle, funkcije su nezavisne.

b) U ovom se slučaju lako vidi da je $y_3=\frac{1}{2}y_2-3y_1$ te su funkcije linearno zavisne. ■

Sada ćemo definirati bazu i dimenziju vektorskog prostora funkcija.

**Definicija 7.2.5** Funkcije $y_1,\dots y_n$ čine **bazu vektorskog prostora** funkcija $X$ ako
- su linearno nezavisne
- razapinju prostor $X$ tj. svaka se funkcija $y\in X$ može zapisati u obliku linearne kombinacije
$$y=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\dots\alpha_ny_n.$$

Tada broj $n$ zovemo **dimenzija prostora**.
■

■ **Primjer 7.9** Pokažite da polinomi $y_0(x)=1$, $y_1(x)=x$,$\dots$, $y_n(x)=x^n$ čine bazu prostora svih polinoma $n$-tog stupnja.

**Rješenje.** Prvo ćemo pokazati da su linearno nezavisni. Iz

$$\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\dots+\alpha_1x+\alpha_0=0$$

direktno slijedi da su $\alpha_n,\dots,\alpha_0=0$. Znamo da se svaki polinom $n$-tog stupnja može zapisati kao linearna kombinacija potencija te zaključujemo da čine bazu prostora svih polinoma $n$-tog stupnja. ■

■ **Primjer 7.10** Pokažite da su funkcije $y_1=e^{r_1x}$, $y_2=e^{r_2x}$,$\dots$, $y_n=e^{r_nx}$, $r_i\neq r_j$ linearno nezavisne.

**Rješenje.** Pokazat ćemo da tvrdnja vrijedi za $n = 3$. Generalna tvrdnja bi se mogla pokazati indukcijom. Pretpostavimo da nisu svi $a_i$ jednaki 0. Bez smanjena općenitosti uzmimo da je $\alpha_3 \neq 0$. Sada dijelimo s $e^{r_1 x}$ izraz

$$\alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x} + \alpha_3 e^{r_3 x} = 0$$

dobivamo

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(r_2 - r_1)x} + \alpha_3 e^{(r_3 - r_1)x} = 0.$$

Deriviranjem po $x$ dobijemo izraz

$$\alpha_2 (r_2 - r_1) e^{(r_2 - r_1)x} + \alpha_3 (r_3 - r_1) e^{(r_3 - r_1)x} = 0.$$

Sada dijelimo s $e^{(r_2 - r_1)x}$ i opet deriviramo te dobivamo

$$\alpha_3 (r_3 - r_1)(r_3 - r_2) e^{(r_3 - r_2)x} = 0.$$

Budući da su $r_i$-ovi međusobno različiti, iz ove jednadžbe slijedi da je $\alpha_3 = 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, zaključujemo da svi $\alpha_i$ moraju biti jednaki nula odnosno da su funkcije linearno nezavisne. ∎

Primijetimo da je dokazivanje linearne nezavisnosti većeg broja funkcija preko definicije dosta zahtjevno. Sada ćemo pokazati drugi kriterij nezavisnosti funkcija koji je praktičniji za uporabu.

**Definicija 7.2.6** Neka su $y_1, \ldots, y_n \in C^{(n-1)}[a,b]$. **Determinanta Wronskoga (Wronskijana)** definira se s

$$W(y_1, \ldots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

∎

**Napomena 7.1** Uočite da je Wronskijana neprekinuta realna funkcija na $[a,b]$ odnosno $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)$ je realan broj za svaki $x_0 \in [a,b]$.

Dodatak

Kažemo da je funkcija identički jednaka nuli (nul-funkcija) i pišemo $f(x) \equiv 0$ ako je jednaka nuli za svaki $x$ iz svoje domene. Ako postoji barem jedan $x$ iz domene funkcije takav da je $f(x) \neq 0$ tada $f$ nije identički jednaka nuli odnosno $f(x) \not\equiv 0$.

**Napomena 7.2** Wronskijana nije identički jednaka nuli ustvari znači da postoji $x_0$ takav da je $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$.

Sljedeći teorem daje kriterij za linearnu nezavisnost funkcija koristeći Wronskijanu.

**Teorem 7.2.2** Ako Wronskijana nije identički jednaka nuli, tada su funkcije $y_1,\dots,y_n$ linearno nezavisne.

*Dokaz.* **1. način:** Pretpostavimo da su $\alpha_i$ takvi da je $\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_n y_n=0$ za svaki $x$. Deriviranjem ove jednakosti $n-1$ puta dobivamo sustav

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 y_1 & +\ldots & +\alpha_n y_n & =0 \\ \alpha_1 y_1' & +\ldots & \alpha_n y_n' & =0 \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} & +\ldots & +\alpha_n y_n^{(n-1)} & =0 \end{array}$$

što je homogeni sustav od $n$ jednadžbi i $n$ nepoznanica $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Primijetimo da je determinanta ovog sustava ustvari Wronskijana $W(y_1,\dots,y_n)$. Pretpostavka teorema je da postoji $x_0$ takav da je $W(y_1,\dots,y_n)(x_0)\neq 0$. Znamo da homogeni sustav ima jedinstveno trivijalno rješenje ako je determinanta sustava različita od nule. Dakle, postoji $x_0$ za koju ovaj sustav ima samo trivijalno rješenje $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$. Dakle, zaključujemo da su funkcije $y_1,\dots,y_n$ linearno nezavisne.

**2. način:** Dokazujemo obratom po kontrapoziciji: Ako su funkcije $y_1,\dots,y_n$ linearno zavisne onda je Wronskijana identički jednaka nuli $W(y_1,\dots,y_n)\equiv 0$.
Pretpostavimo da su $\alpha_i$ takvi da je barem jedan različit od nule i vrijedi $\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_n y_n=0$ za svaki $x$. Deriviranjem ove jednakosti $n-1$ puta dobivamo sustav

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 y_1 & +\ldots & +\alpha_n y_n & =0 \\ \alpha_1 y_1' & +\ldots & \alpha_n y_n' & =0 \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} & +\ldots & +\alpha_n y_n^{(n-1)} & =0 \end{array}$$

što je homogeni sustav od $n$ jednadžbi i $n$ nepoznanica $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Primijetimo da je determinanta ovog sustava ustvari Wronskijana $W(y_1,\dots,y_n)$. Pretpostavili smo da sustav ima netrivijalno rješenje $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ za svaki $x$ te slijedi da je matrica sustava singularna odnosno $W(y_1,\dots,y_n)\equiv 0$. ■

**Napomena 7.3** Primijetimo da obrat teorema ne vrijedi. Primjer funkcija za koje obrat ne vrijedi su funkcije $y_1(x)=x^2$ i $y_2(x)=x|x|$ koje su linearno nezavisne, a $W(y_1,y_2)(x)=0$ za svaki $x$. Također primijetimo da ako je Wronskijana identički jednaka nula, tada ne znamo ništa o nezavisnosti i zavisnosti funkcija.

■ **Primjer 7.11** Koristeći determinantu Wronskog, pokažite linearnu nezavisnost funkcija:
a) $y_1=e^{r_1x}$, $y_2=e^{r_2x}$, $y_3=e^{r_3x}$ gdje su $r_1$, $r_2$ i $r_3$ različiti realni brojevi
b) $y_1=e^{x}$, $y_2=e^{-2x}$, $y_3=e^{3x}$
c) $y_1=e^{x+1}$, $y_2=e^{1-x}$, $y_3=e^{2x}$

**Rješenje.**
a) Računamo pripadnu Wronskijanu

$$W(y_1,y_2,y_3):=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} & e^{r_3x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} & r_3e^{r_3x} \\ r_1^2e^{r_1x} & r_2^2e^{r_2x} & r_3^2e^{r_3x} \end{vmatrix}=\left(2.r-r_1x1.r,3.r-r_1^2x1.r\right)=$$

$$= \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} & e^{r_3x} \\ 0 & (r_2-r_1)e^{r_2x} & (r_3-r_1)e^{r_3x} \\ 0 & (r_2^2-r_1^2)e^{r_2x} & (r_3^2-r_1^2)e^{r_3x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2+r_3)x}((r_2-r_1)(r_3^2-r_1^2)-(r_3-r_1)(r_2^2-r_1^2)) =$$

$$= e^{(r_1+r_2+r_3)x}(r_2-r_1)(r_3-r_1)(r_3-r_2).$$

Vidimo da je za različite $r_i$-ove Wronskijana uvijek različita od nul-funkcije te su funkcije linearno nezavisne.
**Drugi način:** Budući da je dovoljno da pokažemo da je Wronskijana različita od nule za neki $x_0$, možemo u izraz Wronskijane odmah uvrstiti neki $x_0$ koji će pojednostavniti račun kao npr. $x_0 = 0$ te dobivamo:

$$W(y_1,y_2,y_3)(0) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix} = \ldots = (r_2-r_1)(r_3-r_1)(r_3-r_2).$$

b) Sada možemo u izraz pod a) uvrstiti $r_1 = 1$, $r_2 = -2$ i $r_3 = 3$ te dobivamo da je

$$W(y_1,y_2,y_3) = -30e^{2x}$$

što je različito od nule za svaki $x$ (što je i više nego što nam treba). Ili izračunamo samo $W(y_1,y_2,y_3)(0) = -30 \neq 0$.

c) Računamo Wronskijanu

$$W(y_1,y_2,y_3) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x+1} & e^{1-x} & e^{2x} \\ e^{x+1} & -e^{1-x} & 2e^{2x} \\ e^{x+1} & e^{1-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = (2.r-1.r, 3.r-1.r) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{x+1} & e^{1-x} & e^{2x} \\ 0 & -2e^{1-x} & e^{2x} \\ 0 & 0 & 3e^{2x} \end{vmatrix} = -6e^{x+1+1-x+2x} = -6e^{2x+2}$$

i zaključujemo da su funkcije linearno nezavisne. Opet smo mogli samo izračunati $W(y_1,y_2,y_3)(x_0)$ za npr. $x_0 = 0$ ili $x_0 = 1$ ili $x_0 = -1$. ■

**Definicija 7.2.7** Neka je $X$ vektorski prostor. Skup $W \subset X$ je **potprostor** vektorskog prostora $X$ ako vrijedi

$$f_1, f_2 \in W, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in W.$$

■

Sljedeći teorem opisuje prostor kojeg razapinju rješenja homogene LDJ n-tog reda.

**Teorem 7.2.3** Prostor rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda $Ly = 0$ je $n$-dimenzionalan vektorski potprostor prostora $C^{(n)}[a,b]$.

*Dokaz.* Ovo je dio dokaza jer ćemo pokazat samo dio tvrdnje teorema odnosno pokazat ćemo da je prostor rješenja vektorski potprostor prostora $C^{(n)}[a,b]$. Jasno je da su sva rješenja linearne diferencijalne jednadžbe $n$ puta neprekinuto diferencijabilne funkcije odnosno $y \in C^{(n)}[a,b]$. Prema Definiciji 11.2.7 moramo pokazati da je linearna kombinacija svaka dva rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe $Ly = 0$ također rješenje. Lako se vidi da to slijedi iz linearnosti diferencijalnog operatora $L$. Neka su $y_1$ i $y_2$ dva rješenja odnosno vrijedi $Ly_1 = 0$ i $Ly_2 = 0$, tada je

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L y_1 + \alpha_2 L y_2 = 0.$$

Dakle, zaključujemo da je prostor rješenja vektorski potprostor od $C^{(n)}[a,b]$. Dio dokaza da je dimenzija prostora točno $n$ ćemo ovom prilikom izostaviti. ■

■ **Primjer 7.12** Pokažite da je skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

potprostor prostora $C^2[a,b]$.

**Rješenje.** Jasno je da svako rješenje mora biti iz $C^2[a,b]$. Pokažimo da ako su $y_1$ i $y_2$ dva rješenja tada je i $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ također rješenje. Uvrstimo u jednadžbu:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + p(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' + q(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) =$$

$$= \alpha_1 (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \alpha_2 (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0.$$

■

**Vježba 7.2** Pokažite da ako su $y_1$ i $y_2$ dva rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tada je i funkcija $y_1 + y_2$ također rješenje iste jednadžbe. To svojstvo zovemo svojstvo aditivnosti.

Budući da su rješenja homogene LDJ $n$-tog reda elementi $n$-dimenzionalnog vektorskog prostora svako se rješenje može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz baze toga prostora.

**Definicija 7.2.8** Skup $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linearno nezavisnih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda naziva se **baza rješenja** ili temeljni sustav rješenja. Tada **opće rješenje** te jednadžbe možemo zapisati u obliku

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

■

■ **Primjer 7.13** Ako je poznato da su funkcije $y_1(x) = e^x + x + 1$ i $y_2(x) = e^{-x} + x - 2$ dva linearno nezavisna rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda, nađite ono rješenje te jednadžbe čiji graf siječe os ordinata u točki $T(0,1)$ pod kutem od $\frac{\pi}{6}$.

**Rješenje.** Opće rješenje je oblika

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Iz zadanih početnih uvjeta ćemo naći koeficijente $C_1$ i $C_2$. Uvjet da rješenje prolazi točkom $T(0,1)$ ustvari znači da je $y(0) = 1$. Uvjet da je kut tangente u $T(0,1)$ s osi ordinata jednak $\frac{\pi}{6}$ ustvari znači da je kut tangente s osi $x$ jednak $\frac{\pi}{3}$ odnosno da je $y'(0) = \sqrt{3}$. Sada uvrstimo $x = 0$ i $y = 1$ u funkciju i dobijemo

$$C_1(1+0+1) + C_2(1+0-2) = 1$$

iz čega slijedi da je $2C_1 - C_2 = 1$. Sada deriviramo $y$ i dobijemo $y'(x) = C_1(e^x + 1) + C_2(-e^{-x} + 1)$. Uvrstimo $x = 0$ i $y'(0) = \sqrt{3}$ i imamo

$$C_1(1+1) + C_2(-1+1) = \sqrt{3}.$$

Sada slijedi da je $C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $C_2 = \sqrt{3} - 1$. ■

Možemo li pokazati da su rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda linearno nezavisna ili zavisna koristeći determinantu Wronskog? Odgovor na to nam daju sljedeći teoremi.

**Teorem 7.2.4** Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rješenja homogene LDJ $n$-tog reda za koja vrijedi

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = 0$$

za neki $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Tada su rješenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno zavisne funkcije.

*Dokaz.* Napišimo sustav

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_1 y_1(x_0) & +\alpha_2 y_2(x_0) & +\ldots & +\alpha_n y_n(x_0) & = 0 \\
\alpha_1 y_1'(x_0) & +\alpha_2 y_2'(x_0) & +\ldots & +\alpha_n y_n'(x_0) & = 0 \\
\vdots & & \ldots & \vdots & \\
\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & +\alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & +\ldots & +\alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = 0.
\end{array}$$

Determinanta ovog sustava je $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = 0$ i zato on ima netrivijalno rješenje $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$. Netrivijalno rješenje znači da je barem jedan $\alpha_i^* \neq 0$.

Tada definiramo funkciju $y_*(x) = \alpha_1^* y_1(x) + \ldots + \alpha_n^* y_n(x)$ kao linearnu kombinaciju navedenih rješenja. Vidimo da je tako definirana funkcija također rješenje iste jednadžbe i zadovoljava početne uvjete $y_*(x_0) = y_*'(x_0) = \ldots = y_*^{(n-1)}(x_0) = 0$. No iste uvjete zadovoljava i funkcija $y = 0$. Sada zbog jedinstvenosti rješenja Cauchyjevog problema slijedi da je

$$y_*(x) = \alpha_1^* y_1(x) + \ldots + \alpha_n^* y_n(x) = 0.$$

Jer je barem jedan $\alpha_i$ različit od nule iz definicije linearno zavisnih funkcija zaključujemo da su funkcije $y_1, \ldots, y_n$ linearno zavisne. ■

**Napomena 7.4** Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rješenja homogene LDJ $n$-tog reda. Ako je $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = 0$ za neki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ onda je $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv 0$ (odnosno $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$).

**Vježba 7.3** Napisati ekvivalentnu tvrdnju tvrdnji koja stoji u napomeni koristeći obrat po kontrapoziciji.

Sada imamo jaču vezu između Wronskijana i linearne nezavisnosti za rješenja homogene LDJ n-tog reda.

**Teorem 7.2.5** Rješenja $y_1, \ldots, y_n$ homogene LDJ $n$-tog reda su linearno nezavisna ako i samo ako vrijedi

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

*Dokaz.* Smjer da iz pretpostavke $W(y_1, \ldots, y_n) \not\equiv 0$ slijedi da su rješenja linearno nezavisna je dokazan u Teoremu 7.2.2.
Smjer da iz pretpostavke da su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rješenja slijedi da $W(y_1, \ldots, y_n) \not\equiv 0$ ćemo pokazati koristeći prethodni teorem. Naime, kontrapozicijom te implikacije dobijemo sljedeću implikaciju:

$$W(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y_1, \ldots, y_n \quad \text{linearno zavisne}$$

Sada vidimo da tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema. ■

■ **Primjer 7.14** Ako su funkcije $y_1$, $y_2$ i $y_3$ rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe, provjerite jesu li linearno nezavisne ako je:
(a) $y_1 = 5$, $y_2 = 2\cos x$ i $y_3 = \sin x$
(b) $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = 5 - 3\cos x$
(c) $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = (2x - 5)e^x$

**Rješenje.**
(a) Računamo Wronskijan

$$W(y_1, y_2, y_3) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2\cos x & \sin x \\ 0 & -2\sin x & \cos x \\ 0 & -2\cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= 5\begin{vmatrix} -2\sin x & \cos x \\ -2\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 5(2\sin^2 x + 2\cos^2 x) = 10.$$

i zaključujemo da su funkcije linearno nezavisne. Mogli smo i izračunati $W(y_1, y_2, y_3)(0) = 10$.
b) Računamo Wronskijan

$$W(y_1, y_2, y_3) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 5 - 3\cos x \\ 0 & -\sin x & 3\sin x \\ 0 & -\cos x & 3\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} -\sin x & 3\sin x \\ -\cos x & 3\cos x \end{vmatrix} = -3\sin x\cos x + 3\sin x\cos x = 0.$$

Dobili smo da je Wronskijana jednaka nuli za svaki $x$ te zaključujemo da su funkcije linearno zavisne. Mogli smo i bez računanja Wronskijana vidjeti da je $y_3 = 5y_1 - 3y_2$ ili smo mogli izračunati $W(y_1, y_2, y_3)(0) = 0$.
c) Izračunamo Wronskijan

$$W(y_1,y_2,y_3) = \begin{vmatrix} x & e^x & (2x-5)e^x \\ 1 & e^x & (2x-3)e^x \\ 0 & e^x & (2x-1)e^x \end{vmatrix}$$

te uvrstimo $x_0 = 0$ i dobivamo

$$W(y_1,y_2,y_3)(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+5) = -4.$$

Dakle, Wronskijan je različit od nule te zaključujemo da su funkcije linearno nezavisne. ■

## 7.3 Homogena LDJ $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima

Homogena linearna diferencijalna jednadžba $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima je dana s

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0. \tag{7.5}$$

gdje su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Znamo da je opće rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

gdje su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisne funkcije koje čine bazu rješenja.

**Pitanje** Kako odrediti bazu rješenja $\{y_1, \ldots, y_n\}$ homogene jednadžbe?

Prisjetimo se da homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu možemo prikazati u obliku homogene operatorske jednadžbe

$$Ly = 0.$$

Svakoj homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi $n$-tog reda oblika (7.5) možemo pridružiti polinom $n$-tog stupnja oblika

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_0$$

koji zovemo **karakteristični polinom diferencijalne jednadžbe** (7.5).

Primijetimo da za funkciju oblika $y = e^{rx}$ vrijedi sljedeće:

$$L(e^{rx}) = r^n e^{rx} + \ldots + a_1 re^{rx} + a_0 e^{rx} = e^{rx}P(r)$$

Dakle, vrijedi

$$L(e^{rx}) = 0 \Longleftrightarrow P(r) = 0.$$

Drugim riječima, ako je $e^{rx}$ rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe, tada je $r$ nultočka pripadnog karakterističnog polinoma $P(r)$. Budući da je $P(r)$ polinom $n$-tog stupnja, on ima najviše $n$ nultočaka uključujući njihovu kratnost. Sada imamo tri moguća slučaja: različite realne nultočke, realne nultočke višestruke kratnosti i kompleksne nultočke.

### Različite realne nultočke

Ako su sve nultočke međusobno različite, tada su funkcije oblika $e^{r_1 x}$,..., $e^{r_n x}$ rješenja pripadne homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima. U Primjeru 7.7 pokazali da su dobivene funkcije linearno nezavisne te one onda čine bazu rješenja homogene jednadžbe. Opće rješenje homogene jednadžbe tada glasi

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$$

gdje su $C_1, \ldots, C_n$ realne konstante.

### Višestruke realne nultočke

Sada ćemo pokazati što vrijedi za višestruke nultočke karakterističnog polinoma.

**Teorem 7.3.1** Ako karakteristični polinom ima višestruke nultočke i vrijedi $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$, onda je

$$L(x^j e^{r_1 x}) = 0, \text{ za } j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Dokaz ne radimo.

Uočimo da gornji teorem kaže da ako je $r_1$ nultočka kratnosti $k$ tada su

$$y_0 = e^{r_1 x},\ y_1 = x e^{r_1 x}, \ldots, y_{k-1} = x^{k-1} e^{r_1 x}$$

rješenja homogene jednadžbe odnosno pripadno rješenje glasi

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{r_1 x}.$$

**Vježba 7.4** Pokažite da su funkcije $e^{r_1 x}$, $x e^{r_1 x}$ i $x^2 e^{r_1 x}$ linearno nezavisne.

### Kompleksne nultočke karakterističnog polinoma

Ostaje nam slučaj kada su nultočke karakterističnog polinoma kompleksni brojevi. Tada vrijedi:

- Ako karakteristični polinom ima kompleksne nultočke $r_i$ onda su $e^{r_i x}$ kompleksna rješenja homogene jednadžbe.
- Teorem 7.3.1 u tom slučaju vrijedi i za višestruke kompleksne nultočke!

Bavimo se realnim rješenjima, odnosno želimo realnu bazu rješenja te ćemo ove kompleksne funkcije zamijeniti realnima. To možemo načiniti koristeći sljedeći teorem.

**Teorem 7.3.2** Ako je kompleksna funkcija $y$ rješenje jednadžbe $Ly = 0$ s realnim koeficijentima, tada su $\mathrm{Re}\, y$ i $\mathrm{Im}\, y$ realna rješenja te jednadžbe.

*Dokaz.* Neka je kompleksna funkcija $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ rješenje jednadžbe $Ly = 0$. Tada vrijedi

$$Ly(x) = L(y_1(x) + iy_2(x)) = Ly_1(x) + iLy_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ly_1(x) = 0,\ Ly_2(x) = 0.$$

Dakle, slijedi da su $\mathrm{Re}\, y$ i $\mathrm{Im}\, y$ također rješenja iste homogene jednadžbe. ■

**Kompleksne nultočke karakterističnog polinoma**

- Neka je $r = \alpha + i\beta$ kompleksni korijen karakterističnog polinoma višestrukosti $k$. (Tada je i $\bar{r} = \alpha - i\beta$ korijen višestrukosti $k$.)
- Svaki par rješenja $x^s e^{(\alpha+i\beta)x}$ i $x^s e^{(\alpha-i\beta)x}$ za $s = 0, 1, \ldots, k-1$ možemo zamijeniti realnim funkcijama

$$x^s e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{i} \quad x^s e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

koje su linearno nezavisne.

### 7.3.1 Homogena LDJ drugog reda

Sada ćemo detaljno zapisati metodu rješavanja homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

**Algoritam 1** Rješavanje homogene LDJ

**Korak 1.** Odredimo nultočke $r_1$ i $r_2$ karakterističnog polinoma odnosno riješimo **karakterističnu jednadžbu**: $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$.
**Korak 2.** Ako su rješenja $r_1$ i $r_2$ realna i različita tada svakom rješenju odgovara po jedno rješenje:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}.$$

■ **Primjer 7.15** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' = 0$.

**Rješenje** Karakteristični polinom je oblika

$$r^2 - 2r = 0 \implies r_1 = 0, r_2 = 2.$$

Imamo dvije realne nultočke te odatle slijedi da je opće rješenje dano sa

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

■

**Korak 3.** Ako je rješenje dvostruka realna nultočka $r_1$ tada njoj odgovaraju dva linearno nezavisna rješenja oblika:

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = xe^{r_1 x}.$$

**Korak 4.** Paru kompleksno konjugiranih nultočaka $\alpha \pm \beta i$ odgovaraju dva linearno nezavisna rješenja oblika:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

**Korak 5. Opće rješenje** homogene jednadžbe je linearna kombinacija dva rješenja:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

---

■ **Primjer 7.16** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 6y' + 9y = 0$.
**Rješenje** Karakteristični polinom je oblika

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \implies r_1 = r_2 = 3.$$

Imamo dvostruku realnu nultočku te slijedi da je opće rješenje dano sa

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

■

■ **Primjer 7.17** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + 6y = 0$.
**Rješenje** Karakteristični polinom je oblika

$$r^2 + 6 = 0 \implies r_1 = \sqrt{6}i, \quad r_2 = -\sqrt{6}i.$$

U slučaju kompleksno-konjugiranih rješenja opće rješenje je dano sa

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Uvrstimo $\alpha = 0$ i $\beta = \sqrt{6}$ i dobivamo

$$y = C_1\cos(\sqrt{6}x) + C_2\sin(\sqrt{6}x).$$

■

## Početni (Cachyjevi) problemi

Početni problemi se sastoje od traženja rješenja diferencijalne jednadžbe koja zadovoljavaju početne uvjete:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

■ **Primjer 7.18** Riješite Cauchyjev problem $y'' - y' - 2y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.
**Rješenje** Karakteristični polinom je oblika

$$r^2 - r - 2 = 0 \implies r_1 = -1, r_2 = 2.$$

Opće rješenje je oblika

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Rješenje deriviramo i uvrstimo početne uvjete te dobivamo sustav

$$C_1e^{-1} + C_2e^2 = 2, \quad -C_1e^{-1} + 2C_2e^2 = 0,$$

čije rješenje su koeficijenti $C_1 = \frac{4}{3}e$, $C_2 = \frac{2}{3}e^{-2}$. Koeficijente uvrstimo u opće rješenje te dobivamo jedinstveno rješenje zadanog Cauchyjevog problema

$$y = \frac{4}{3}e^{1-x} + \frac{2}{3}e^{2x-2}.$$

■

**Vježba 7.5** Riješite Cauchyjev problem $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

**Vježba 7.6** Riješite Cauchyjev problem $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

#### ■ Rubni problemi

Rubni problemi se sastoje od traženja rješenja diferencijalne jednadžbe koja zadovoljavaju rubne uvjete:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

gdje su $x_0$ i $x_1$ rubovi domene na kojoj tražimo rješenje.

Za razliku od početnog problema, rubni problem nema uvijek rješenje. Rubni problemi se često pojavljuju u praksi (vidi poglavlje 7.6).

■ **Primjer 7.19** Riješite rubni problem $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3$.

**Rješenje.** Karakteristični polinom je

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \implies r_1 = r_2 = -1.$$

Opće rješenje je dano sa

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}.$$

Rubni uvjet povlači

$$C_1 = 1$$
$$C_1e^{-1} + C_2e^{-1} = 3.$$

Odavde slijedi $C_2 = 3e - 1$. Dakle, rješenje rubnog problema je jedinstveno i glasi:

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}.$$

■

### 7.3.2 Homogena LDJ višeg reda

Sada ćemo navesti algoritam za rješavanje homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0y = 0.$$

**Algoritam 2** Rješavanje homogene LDJ

**Korak 1.** Odredimo nultočke karakterističnog polinoma $r_i$ i njihove višestrukosti $n_i$:

$$P(r) = (r - r_1)^{n_1} \dots (r - r_k)^{n_k}$$

**Korak 2.** Svakoj realnoj nultočki $r_i$ višestrukosti $n_i$ odgovara $n_i$ linearno nezavisnih rješenja oblika:

$$e^{r_i x}, xe^{r_i x}, \dots, x^{n_i - 1} e^{r_i x}$$

**Korak 3.** Svakom paru kompleksno konjugiranih nultočaka $r_i = \alpha + i\beta$ i $r_{i+1} = \alpha - i\beta$ višestrukosti $n_i$ odgovara $2n_i$ linearno nezavisnih rješenja odnosno:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{n_i - 1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{n_i - 1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

**Korak 4. Opće rješenje** homogene jednadžbe je linearna kombinacija svih $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ rješenja:

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

---

■ **Primjer 7.20** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y^{(iv)} - y = 0$

**Rješenje.** Karakteristični polinom je

$$r^4 - 1 = 0 \implies r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = i, r_4 = -i.$$

Dobili smo dvije realne nultočke i jedan par kompleksno-konjugiranih rješenja te je opće rješenje oblika

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

■

■ **Primjer 7.21** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y^{(v)} + 8y''' + 16y' = 0$.

**Rješenje.** Karakteristični polinom je

$$r^5 + 8r^3 + 16r = 0 \implies r_1 = 0, r_2 = r_3 = 2i, r_4 = r_5 = -2i.$$

Imamo jedno realno rješenje te par kompleksno-konjugiranih rješenja kratnosti dva. Opće rješenje je oblika

$$y = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x) + C_4 x \cos(2x) + C_5 x \sin(2x).$$

■

**Vježba 7.7** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

**Vježba 7.8** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y^{(iv)} - 6y'' + 9y = 0$.

■ **Primjer 7.22** Nađite homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu najmanjeg stupnja kojoj su funkcije $e^{3x}, \sin x, \cos x$ rješenja.

**Rješenje.** Karakteristični polinom mora imati nultočke $r_1 = 3$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$. Polinom najmanjeg stupnja koji to zadovoljava je oblika

$$(r^2+1)(r-3) = r^3 - 3r^2 + r - 3.$$

Dakle, tražena diferencijalna jednadžba ima oblik

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = 0.$$

■

**Vježba 7.9** Nađite homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu najmanjeg stupnja kojoj su funkcije $y_1 = 1$, $y_2 = \sin 2x$ i $y_3 = \cos 2x$ rješenja.

**Vježba 7.10** a) Dokažite linearnu nezavisnost funkcija $y_1(x) = e^{6x}$, $y_2(x) = \cos(x)$, $y_3(x) = \sin(x)$ koristeći determinantu Wronskog.
b) Napišite homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima čija su rješenja $y_1(x)$, $y_2(x)$ i $y_3(x)$ iz a) dijela zadatka.

## 7.4 Nehomogena LDJ $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima

Pokazali smo kako nađemo rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. U Teoremu 7.1.1 smo vidjeli da se **opće rješenje** linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda može zapisati u obliku:

$$y = y_h + y_p$$

gdje je $y_h$ rješenje pripadne homogene jednažbe, a $y_p$ neko partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.

Dakle, sada promatramo nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f.$$

Pripadna homogena linearna diferencijalna jednadžba $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima glasi

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0.$$

U prethodnom poglavlju smo naučili pronaći opće rješenje ove homogene jednadžbe $y_h$.

Sada trebamo pronaći partikularno rješenje linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f.$$

Postoje dva postupka za rješavanje nehomogene jednadžbe: metoda oblika desne strane jednadžbe kojom tražimo jedno partikularno rješenje te metoda varijacije konstanti koja pronalazi opće rješenje.

### 7.4.1 Metoda varijacije konstanti

Metoda varijacije konstanti se može primijeniti na nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu $n$-tog reda s nekonstantnim koeficijentima oblika

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x).$$

Oopće rješenje je oblika

$$y = y_h + y_p$$

gdje je $y_H$ rješenje homogene jednadžbe, a $y_p$ neko partikularno rješenje nehomogene jednadžbe. Nadalje, ako je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ baza rješenja homogene jednadžbe, tada je rješenje homogene jednadžbe dano s

$$y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

> **Napomena 7.5** Vidjet ćemo da prije primjene metode varijacije konstanti moramo prvo naći opće rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe. Budući da mi to rješenje znamo naći samo u slučaju homogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, mi ćemo ovu metodu primijenjivati isključivo na te tipove jednadžbi u zadacima. No općenito, metoda se može koristiti i na linearne jednadžbe s nekonstantnim koeficijentima.

**Metoda varijacije konstanti** je metoda za traženje općeg rješenja $y$ nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe $Ly = f$. Zove se metoda varijacije konstanti jer konstante iz zapisa homogenog rješenja $y_h$ pretvaramo u funkcije varijable $x$.

Dakle, postupak je sljedeći. Nakon što smo pronašli rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe, pretpostavljamo da je opće rješenje nehomogene jednadžbe oblika

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

Zatim ga deriviramo $n$ puta. Time dobivamo izraze za derivacije i dodatne uvjete kako slijedi:

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i'(x) \quad uvjet: \quad \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i(x) = 0$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i''(x) \quad uvjet: \quad \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i'(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n-1)}(x) \quad uvjet: \quad \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) = 0$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)}(x) \quad uvjet: \quad \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x)$$

Sada možemo dobivene izraze, uz zahtjev da su ispunjeni svi ovi uvjeti, uvrstiti u nehomogenu jednadžbu na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=\\
&=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i^{(n)}+f+a_{n-1}\sum_{i=1}^{n}C_iy_i^{(n-1)}+\ldots+a_0\sum_{i=1}^{n}C_iy_i=\\
&=\sum_{i=1}^{n}C_i(y_i^{(n)}+a_{n-1}y_i^{(n-1)}+\ldots+a_1y_i'+a_0y_i)+f=f
\end{aligned}
$$

Dobili smo da je uz zadane uvjete funkcija $y$ rješenje nehomogene jednadžbe $Ly=f$. Sada ćemo te uvjete iskoristiti da dobijemo konstante $C_i(x)$. Naime, kada ih zapišemo zajedno vidimo da navedeni uvjeti čine sustav $n$ jednadžbi i $n$ nepoznanica $C_1'(x),\ldots,C_n'(x)$ koji zovemo **sustav uvjeta**. Sustav glasi:

$$
\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x)+\ldots+C_n'(x)y_n(x)&=0\\
C_1'(x)y_1'(x)+\ldots+C_n'(x)y_n'(x)&=0\\
&\vdots\\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)&=0\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)&=f(x)
\end{aligned}
$$

Sada se rješavanjem ovog sustava dobiju tražene promjenjive konstante $C_1(x),C_2(x),\ldots,C_n(x)$. Uvrstimo ih i dobijemo opće rješenje nehomogene jednadžbe:

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x).$$

**Napomena 7.6** Zašto dobiveni sustav uvjeta uvijek ima rješenje?
Zato jer je determinanta sustava upravo Wronskijana! Budući da $y_1,\ldots,y_n$ čine bazu rješenja homogene LDJ $n$-tog reda to je $W(y_1,\ldots,y_n)\not\equiv 0$ za svaki $x$. Znači za svaki $x$ je matrica sustava regularna te za svaki $x$ sustav ima jedinstveno rješenje $(C_1'(x),\ldots,C_n'(x))$. Time su definirane funkcije $C_1,\ldots C_n$.

U slučaju nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y(x)=f(x),$$

rješenje homogene jednadžbe je $y_h=C_1y_1+C_2y_2$ te navedeni sustav uvjeta glasi:

$$
\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)&=0\\
C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)&=f(x)
\end{aligned}
$$

Pogledajmo sada dva primjera.

■ **Primjer 7.23** Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

a) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ b) $y''+9y=\dfrac{3}{\sin 3x}$

**Rješenje.**

(a) Prvo riješimo pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

te dobivamo dvostruko realno rješenje $r = 1$. Rješenje homogene jednadžbe glasi

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Sada opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo metodom varijacije konstanti. Dakle, iz $y_h = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ dobijemo sustav uvjeta

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0$$

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^2+1}$$

Oduzimanjem jednadžbi dobivamo da je

$$C_2'(x)e^x = \frac{e^x}{x^2+1}$$

te integriranjem slijedi da je $C_2(x) = \operatorname{arctg} x + C_2$. Sada taj koeficijent uvrstimo u prvu jednadžbu sustava uvjeta i dobijemo da je $C_1'(x) = -\frac{x}{x^2+1}$. Integriranjem dobijemo da je $C_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1$.

Dakle, opće rješenje glasi:

$$y = (-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1)e^x + (\operatorname{arctg} x + C_2)xe^x.$$

(b) Prvo riješimo pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + 9y = 0$$

te dobivamo kompleksna rješenja $r_{1,2} = \pm 3i$. Homogeno rješenje glasi

$$y_h = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Sada opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo metodom varijacije konstanti. Dakle, iz $y_h = C_1(x)\cos(3x) + C_2(x)\sin(3x)$ dobijemo sustav uvjeta

$$C_1'(x)\cos(3x) + C_2'(x)\sin(3x) = 0$$

$$-3C_1'(x)\sin(3x) + 3C_2'(x)\cos(3x) = \frac{3}{\sin(3x)}$$

Izlučimo $C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$ iz prve jednadžbe i uvrstimo u drugu te dobijemo

$$3C_2'(x)\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\sin(3x) + 3C_2'(x)\cos(3x) = \frac{3}{\sin(3x)}.$$

Sredimo u

$$C_2'(x) = \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}$$

te integriranjem dobijemo $C_2(x) = \frac{1}{3}\ln|\sin(3x)| + C_2$. Sada taj koeficijent uvrstimo u jednadžbu za drugi koeficijent i dobijemo da je $C_1'(x) = -1$. Integriranjem dobijemo da je $C_1(x) = -x + C_1$.

Dakle, opće rješenje glasi:

$$y = (-x + C_1)\cos(3x) + (\frac{1}{3}\ln|\sin(3x)| + C_2)\sin(3x).$$

■

**Vježba 7.11** (a) Koristeći determinantu Wronskog pokažite da su rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe $y'' + y = 0$ linearno nezavisna.
(b) Metodom varijacije konstanti pronađite opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe:

$$y'' + y = \frac{2}{\cos^2 x}$$

**Vježba 7.12** a) Neka je $\{y_1, y_2\}$ baza rješenja diferencijalne jednadžbe

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana funkcija. Objasnite zašto sustav

$$\begin{aligned} A(x)y_1 + B(x)y_2 &= 0, \\ A(x)y_1' + B(x)y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

ima za rješenje točno jedan par funkcija A(x) i B(x).
b) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'' - 2y' + y = -\frac{1}{x^2}.$$

■ **Primjer 7.24** Riješite diferencijalnu jednadžbu: $y''' + y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

**Rješenje.** (b) Prvo riješimo pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$y''' + y' = 0.$$

Karakteristična jednadžba glasi

$$r^3 + r = 0$$

te dobivamo jedno realno rješenja $r_1 = 0$ i dva kompleksna rješenja $r_{2,3} = \pm i$. Homogeno rješenje glasi

$$y_h = C_1 + C_2\cos(x) + C_3\sin(x).$$

Sada opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo metodom varijacije konstanti. Dakle, iz $y_h = C_1 + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$ dobijemo sustav uvjeta

$$C_1' + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0$$

$$-C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0$$

$$-C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Treću jednadžbu dodamo prvoj te dobivamo

$$C_1'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

odnosno $C_1(x) = \operatorname{tg} x + C_1$. Druge dvije jednadžbe riješimo metodom suprotnih koeficijenata te dobivamo $C_2'(x) = -\frac{1}{\cos x}$ i $C_3'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Integriranjem dobijemo $C_2(x) = \frac{1}{2}\ln|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}| + C_2$ i $C_3(x) = -\frac{1}{\cos x} + C_3$. Dakle, opće rješenje glasi:

$$y = \operatorname{tg} x + C_1 + (\frac{1}{2}\ln(|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}|) + C_2)\cos(x) + (-\frac{1}{\cos x} + C_3)\sin(x) =$$

$$= C_1 + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x + \frac{1}{2}\ln(|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}|)\cos x.$$

■

### 7.4.2 Metoda oblika desne strane

Sljedeću metodu oblika desne strane možemo primijenjivati u slučaju kada je desna strana oblika:

$$f(x) = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$$

gdje su $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ polinomi. Ako $f$ nije gore navedenog oblika, tada opće rješenje određujemo metodom varijacije konstanti.

---

**Algoritam 3** Metoda oblika desne strane

---

**Korak 1.** Iz desne strane oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$$

iščitavamo koef. $\alpha$, $\beta$, polinome $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ i stupanj $p = \max\{\operatorname{st}(Q_1), \operatorname{st}(Q_2)\}$.

**Korak 2.** Tada jednadžba ima partikularno rješenje oblika:

$$y_p = x^m e^{\alpha x}[R_1(x)\cos(\beta x) + R_2(x)\sin(\beta x)]$$

gdje je

- **m**=višestrukost broja $\alpha + i\beta$ kao nultočke karakterističnog polinoma. (ako $\alpha + i\beta$ nije nultočka onda je $m = 0$.)
- $R_1(x)$ i $R_2(x)$ su polinomi stupnja $p$ čije koeficijente određujemo uvrštavanjem $y_p$ u jednadžbu.

---

**Korak 3.** Ako je desna strana u obliku sume funkcija

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

i $y_{p_i}$ su partikularna rješenja jednadžbe $Ly = f_i$ onda je

$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + \ldots y_{p_k}$$

partikularno rješenje jednadžbe $Ly = f$.

■ **Primjer 7.25** Riješite diferencijalne jednadžbe:
a) $y'' + y = x \sin x$
b) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$

**Rješenje.** (a) Karakteristični polinom pripadne homogene je oblika

$$r^2 + 1 = 0 \implies r_1 = i, r_2 = -i.$$

Rješenje homogene je oblika

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Pripadno partikularno tražimo u obliku

$$y_p = x\left((A_1 x + B_1)\cos x + (A_2 x + B_2)\sin x\right).$$

Odavde dobivamo

$$y_p' = (A_2 x^2 + (2A_1 + B_2)x + B_1))\cos x + (-A_1 x^2 + (2A_2 - B_1)x + B_2)\sin x$$

$$y_p'' = (-A_1 x^2 + (4A_2 - B_1)x + (2A_1 + 2B_2)\cos x + (-A_2 x^2 + (-4A_1 - B_2)x + (2A_2 - 2B_1))\sin x.$$

Odavde slijedi

$$y_p'' + y_p = (4A_2 x + (2A_1 + 2B_2))\cos x + (-4A_1 x + (2A_2 - 2B_1))\sin x = x \sin x.$$

Odavde slijedi

$$A_1 = -\frac{1}{4},\ B_1 = 0,\ A_2 = 0,\ B_2 = \frac{1}{4},$$

iz čega dobivamo rješenje u obliku

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{1}{4}x \sin x.$$

(b) Karakteristični polinom je oblika

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \implies r_1 = -4,\ r_2 = 1.$$

Odavde dobivamo rješenje homogene

$$y_h = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}.$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku sume

$$y_p = y_p^1 + y_p^2,$$

gdje je

$$y_p^1 = A_1 x e^{-4x}, \quad y_p^2 = (A_2 x + B_2) e^{-x}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$(y_p^1)'' + 3(y_p^1)' - 4y_p^1 = -5A_1 e^{-4x} = e^{-4x}$$

$$(y_p^2)'' + 3(y_p^2)' - 4y_p^2 = (-6A_2 x + (A_2 - 6B_2))e^{-x} = xe^{-x}.$$

Iz ovoga dobivamo $A_1 = -\frac{1}{5}$, $A_2 = -\frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{36}$. Odavde slijedi da je rješenje dano sa

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{5} x e^{-4x} + (-\frac{1}{6} x + \frac{1}{36}) e^{-x}.$$

■

■ **Primjer 7.26** Riješite Cauchyjev problem:

$$y'' - 5y' + 6y = 13\sin(3x), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

**Rješenje.** Rješavanjem pripadne homogene jednadžbe $y'' - 5y' + 6y = 0$ dobivamo $r_1 = 3$ i $r_2 = 2$ te je

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

Sada ćemo partikularno rješenje odrediti koristeći oblik desne strane jednadžbe. Dakle, desna strana je oblika $f(x) = 13\sin(3x)$ te je $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $Q_1(x) = 0$ i $Q_2(x) = 13$, $m = 0$ i $p = 0$. zaključujemo da je partikularno rješenje oblika $y_p = A_1\cos(3x) + A_2\sin(3x)$. Deriviramo $y_p' = -3A_1\sin(3x) + 3A_2\cos(3x)$ i $y_p'' = -9A_1\cos(3x) - 9A_2\sin(3x)$ te uvrštavamo u jednadžbu

$$y'' - 5y' + 6y = -3(A_1 + 5A_2)\cos(3x) - 3(A_2 - 5A_1)\sin(3x) = 13\sin(3x).$$

Zbog linearne nezavisnosti funkcija $\sin(3x)$ i $\cos(3x)$ zaključujemo da vrijedi

$$-3(A_1 + 5A_2) = 0$$

$$-3(A_2 - 5A_1) = 13$$

Rješenje ovog sustava je $A_1 = \frac{5}{6}$ i $A_2 = -\frac{1}{6}$.

Sada je opće rješenje jednadžbe

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{5}{6}\cos(3x) - \frac{1}{6}\sin(3x).$$

Moramo još riješiti Cauchyjev problem odnosno uvrstiti početne uvjete: $y(0) = 0$ i $y'(0) = 0$. Iz $y(0) = 0$ slijedi $C_1 + C_2 + \frac{5}{6} = 0$, a iz $y'(0) = 0$ slijedi $3C_1 + 2C_2 - \frac{1}{2} = 0$. Sada riješimo sustav i dobivamo $C_1 = \frac{13}{6}$ i $C_2 = -3$. Rješenje Cauchyjevog problema je

$$y = y_h + y_p = \frac{13}{6} e^{3x} - 3e^{2x} + \frac{5}{6}\cos(3x) - \frac{1}{6}\sin(3x).$$

■

**Vježba 7.13** Nadite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''' - 6y'' + y' - 6y = -6x^2 + 2x.$$

Dodatak

## 7.5 Dodatak - Zapis diferencijalne jednadžbe višeg reda u obliku sustava prvog reda

Promatramo diferencijalnu jednadžbu $n$-tog reda

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

s $n$ početnih uvjeta $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Cilj nam je ovu diferencijalnu jednadžbu $n$-tog reda zapisati kao sustav od $n$ diferencijalnih jednadžbi prvog reda. To se može učiniti supstitucijom odnosno uvođenjem novih $n$ funkcija na sljedeći način:

$$z_k = y^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{7.6}$$

Time dobivamo sljedeći sustav od $n$ diferencijalnih jednadžbi i $n$ nepoznatih funkcija:

$$\begin{aligned} z_0' &= z_1 \\ z_1' &= z_2 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= f(x, z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}). \end{aligned}$$

Primijetimo da tražene funkcije zadovoljavaju početne uvjete

$$\begin{aligned} z_0(x_0) &= y_0 \\ z_1(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ z_{n-1}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Navodimo neke od prednosti ove pretvorbe

1. možemo upotrijebiti numeričke metode za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda;
2. linearne jednadžbe možemo zapisati u matričnom obliku što može biti pogodno za analizu ili pronalaženje eksplicitnog rješenja.

Sada ćemo primjenu ove pretvorbe pogledati na dva primjera.

■ **Primjer 7.27** Promatramo sljedeću linearnu diferencijalnu jednadžbu trećeg reda:

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2$ neprekinute funkcije, uz početne uvjete $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ i $y''(x_0) = y_2$. Nakon supstitucije dane s $z_0 = y$, $z_1 = y'$ i $z_2 = y''$. dobivamo sustav prvog reda

$$\begin{aligned} z_0' &= z_1 \\ z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -a_0(x)z_0 - a_1(x)z_1 - a_2(x)z_2 \end{aligned}$$

uz početne uvjete $z_0(x_0) = y_0$, $z_1(x_0) = y_1$ i $z_2(x_0) = y_2$.
Dobiveni sustav možemo zapisati u matričnom obliku na sljedeći način

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0$$

gdje je

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}(x_0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} z_0' \\ z_1' \\ z_2' \end{bmatrix}$$

■

Ponekad nam je koristan i obratan postupak odnosno sustav diferencijalnih jednadžbi želimo napisati pomoću jedna diferencijalne jednadžbe višeg reda. Pogledajmo jedan jednostavan primjer kad sustav dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda možemo svesti na diferencijalnu jednadžbu drugog reda eliminacijom jedne od nepoznanica. Linearan sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda je sustav oblika

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y,z) \\ z' &= g(x,y,z) \end{aligned}$$

čije rješenje je par funkcija $(y(x), z(x))$. Sada pogledajmo jedan primjer.

■ **Primjer 7.28** Linearan sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$y' = 2y + 2z + 3x$$
$$z' = -2y - 2z + 2x^2$$

uz početne uvjete

$$y(0) = 1$$
$$z(0) = 2$$

zapišite pomoću diferencijalne jednadžbe drugog reda.

**Rješenje.** Iz prve jednadžbe dobivamo:

$$z = \frac{1}{2}(y' - 2y - 3x) \tag{7.7}$$

te nakon uvrštavanja u drugu jednadžbu dobivamo

$$\frac{1}{2}(y'' - 2y' - 3) = -2y - (y' - 2y - 3x) + 2x^2,$$

Nakon sređivanja dobijemo nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima

$$y'' = 4x^2 + 6x + 3$$

koju možemo riješiti uzastopnim integriranjem. Za početne uvjete imamo $y(0) = 1$ i $y'(0) = 2z(0) + 2y(0) + 3 \cdot 0 = 6$. Slijedi da je

$$y = \frac{1}{3}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 1.$$

Nakon što izračunamo $y$, funkciju $z$ dobivamo iz jednadžbe (7.7) te slijedi

$$z = -\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 6x + 2.$$

■

### 7.5.1 Dodatak - za one koji žele znati više

Napominjemo da se sustav prvog reda može numerički riješiti na isti način kao i skalarna jednadžba. U prethodnom poglavlju smo upoznali dvije metode: Eulerovu metodu i Taylorovu metodu (koja aproksimira Picardove sukcesivne iteracije).

■ **Primjer 7.29** Za modeliranje diobe matičnih stanica koristi se sljedeći sustav

$$x'(t) = a\frac{x^l}{\theta_1^l + x^l} + b\frac{\theta_2^m}{\theta_2^m + x^m y^m} - x$$

$$y'(t) = a\frac{y^l}{\theta_1^l + y^l} + b\frac{\theta_2^m}{\theta_2^m + x^m y^m} - y,$$

gdje su $a, b, \theta_1, \theta_2 > 0$ parametri, a $l, m \in \mathbb{N}$ zadani prirodni brojevi. Koristeći Eulerovu metodu, dijeleći interval $[0,1]$ na pet dijelova, izračunaj aproksimativno rješenje na intervalu $[0,1]$ ako je zadano $x(0) = y(0) = 10$ i vrijednosti parametara $a = b = 1$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.5$ te $l = m = 1$. ■

**Rješenje.** Stavimo $n = 5$, $h = \frac{1}{n}$. Definirajmo $x_0 = y_0 = 10$ i

$$x_k = x_{k-1} + hf_1(x_{k-1}, y_{k-1})$$

$$y_k = y_{k-1} + hf_2(x_{k-1}, y_{k-1}),$$

gdje je $f_1(x,y) = \frac{x}{0.5+x} + \frac{0.5}{0.5+xy} - x$, $f_2(x,y) = \frac{y}{0.5+y} + \frac{0.5}{0.5+xy} - y$. Rekurziju treba riješiti za $k = 1, \ldots, n$ i definirati rješenje na $[0,1]$ koje dobijemo u obliku točaka $(x_1, y_1)$, …, $(x_n, y_n)$ za neki $n$.

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

■ **Primjer 7.30** Koristeći Eulerovu metodu i Picardove sukcesivne iteracije aproksimiraj rješenje u $x \in \mathbb{R}$ linearnog sustava

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \tag{7.8}$$

gdje $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^m$. Koristi $n$ koraka. ■

**Rješenje.**

Podijelimo interval $[0,x]$ na $m$ dijelova i definirajmo korak $h = \frac{x}{m}$. Dobivamo sljedeći niz:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}(h) \approx \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + h\mathbf{A}\mathbf{z}_0 = (I + h\mathbf{A})\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}(2h) \approx \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + h\mathbf{A}\mathbf{z}_1 = (I + h\mathbf{A})^2\mathbf{z}_0$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(nh) \approx \mathbf{z}_n = \mathbf{z}_{n-1} + h\mathbf{A}\mathbf{z}_{n-1} = (I + h\mathbf{A})^n\mathbf{z}_0.$$

Picardovim sukcesivnim iteracijama dobivamo sljedeći niz:

$$\mathbf{z}_0(x) = \mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_1(x) = \mathbf{z}_0 + \int_0^x \mathbf{A}\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0 + x\mathbf{A}\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_2(x) = \mathbf{z}_0 + \int_0^x \mathbf{A}\mathbf{z}_1(t)dt = \mathbf{z}_0 + x\mathbf{A}\mathbf{z}_0 + \frac{x^2}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_3(x) = \mathbf{z}_0 + \int_0^x \mathbf{A}\mathbf{z}_2(t)dt = \mathbf{z}_0 + x\mathbf{A}\mathbf{z}_0 + \frac{x^2}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{z}_0 + \frac{x^3}{3!}\mathbf{A}^3\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\mathbf{A})^k}{k!}\mathbf{z}_0.$$

**Napomena 7.7** Može se pokazati da za svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ red matrica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$ konvergira u $\mathbb{R}^{m\times m}$. Konvergencija reda matrica se svodi na problem konveregencije elemenata matrice. Sumu tog reda razumno je zvati eksponencijalnom funkcijom matrice $e^{\mathbf{A}}$. Može se pokazati da je analitičko rješenje sustava (7.8) dano sa

$$\mathbf{z}(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(x\mathbf{A})^k}{k!}\right)\mathbf{z}_0 = e^{x\mathbf{A}}z_0.$$

Također se može pokazati da za proizvoljnu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ vrijedi

$$e^{\mathbf{A}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\mathbf{A}\right)^n,$$

iz čega slijedi da $e^{x\mathbf{A}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\mathbf{A}\right)^n$, što pokazuje da i Eulerova metoda konvergira ka analitičkom rješenju sustava.

**Primjer 7.31** Uvjeri se da za dijagonalnu matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

vrijedi

$$e^{x\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{x\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{x\lambda_2} \end{bmatrix}.$$

■

**Rješenje** S obzirom da je

$$(x\mathbf{A})^n = \begin{bmatrix} (x\lambda_1)^n & 0 \\ 0 & (x\lambda_2)^n \end{bmatrix},$$

lagano se vidi da je

$$e^{x\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x\mathbf{A})^k}{k!} = \begin{bmatrix} e^{x\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{x\lambda_2} \end{bmatrix}.$$

**Napomena 7.8** Ako se pogleda dijagonalni sustav

$$z_1' = \lambda_1 z_1,\ z_1(0) = z_1$$

$$z_2' = \lambda_2 z_2,\ z_2(0) = z_2,$$

koji se potpuno separira lagano se vidi da za njega mora vrijediti $z_1(x) = e^{x\lambda_1}z_1$, $z_2(x) = e^{x\lambda_2}z_2$. S druge strane imamo:

$$e^{x\mathbf{A}}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x\lambda_1}z_1 \\ e^{x\lambda_2}z_2 \end{bmatrix},$$

gdje je $A$ dan s (7.9).

■ **Primjer 7.32** Ako poznaješ da je analitičko rješenje sustava

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z},\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

dano sa $z(x) = e^{x\mathbf{A}} z_0$, uvjeri se da je analitičko rješenje sustava

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z},\ \mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_{x_0},$$

dano sa $\mathbf{z}(x) = e^{(x-x_0)\mathbf{A}} \mathbf{z}_{x_0}$. ■

**Uputa.** Napravi se zamjena varijabli $t = x - x_0$.

Dodatak

## 7.6 Dodatak- Neke primjene diferencijalnih jednadžbi drugog reda

Na nekoliko sljedećih primjera objašnjavamo kako se koriste diferencijalne jednadžbe drugog reda u matematičkom modeliranju. Dosta problema koji se pojavljuju u praksi su složeni i ne mogu se egzaktno riješiti pa zahtijevaju numerički pristup.

■ **Primjer 7.33** Proučavamo vertikalno gibanje u zraku tijela mase $m$ koje je bačeno s početnom brzinom $v_0$, ako je otpor zraka dan sa $O = -kv^2$, gdje je $v$ brzina tijela, a $k$ konstanta. Želimo odrediti maksimalnu visinu do koje je tijelo došlo.

**Rješenje.** Drugi Newtonov zakon primijenjen na ovaj problem daje

$$mx'' = -mg - kv^2,$$

što nakon dijeljenja s $m$ postaje

$$x'' + \omega^2 v^2 = -g,$$

gdje je $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Primijetimo da jednadžba gibanja

$$x'' = \frac{d}{dt}(x') = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

postaje

$$v\frac{dv}{dx} = -\left(g + \omega^2 v^2\right),$$

što je jednadžba sa separiranim varijablama. Kao rješenje se dobiva

$$x = \frac{1}{2\omega^2} \ln \frac{g + \omega^2 v_0^2}{g + \omega^2 v^2}.$$

Maksimalna vrijednost za $x$ se dobiva za $v = 0$ i iznosi

$$x_{\max} = \frac{1}{2\omega^2} \ln\left(1 + \frac{\omega^2 v_0^2}{g}\right).$$

■

■ **Primjer 7.34** Dvije zemlje $A$ i $B$ imaju isti prirodni prirast stanovništva od $\lambda\%$. Emigracija iz zemlje $A$ u zemlju $B$ iznosi $a\%$ godišnje, dok emigracija iz zemlje $B$ u zemlju $A$ iznosi $b\%$ godišnje. Pretpostavimo da su početne populacije zemalja $A$ i $B$ , $N_1$ i $N_2$.

**Rješenje.** Napišimo sustav diferencijalnih jednadžbi koji modeliraju populacijsku dinamiku u zemljama $A$ i $B$. Neka $x(t)$ označava broj stanovnika u zemlji $A$, a $y(t)$ broj stanovnika u zemlji $B$ nakon $t$ godina. Tada vrijedi

$$x'(t) = \frac{\lambda x}{100} - \frac{ax}{100} + \frac{by}{100}$$

$$y'(t) = \frac{\lambda y}{100} - \frac{by}{100} + \frac{ax}{100}$$

$$x(0) = N_1; \quad y(0) = N_2.$$

Sustav se može riješiti kao i Primjer 11.24. ■

■ **Primjer 7.35** **Lotka-Volterra jednadžbe** poznate kao jednadžbe predator-plijen modela su dane sa

$$x' = \alpha x - \beta xy$$

$$y' = \delta xy - \gamma y,$$

gdje je $x$ broj jedinki plijena (npr. zečeva), $y$ broj jedinki predatora (npr. lisica) te $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pozitivni parametri koji opisuju interakciju između te dvije vrste.

Iako ne možemo pronaći formulu za rješenje ovog sustava pa je nephodno koristiti numeričke metode, može se pronaći aproksimativno rješenje u blizini točke ravnoteže Točka ravnoteže je ona u kojoj sustav miruje tj. za koju vrijedi $x' = y' = 0$ (u ovom slučaju je to $x = \frac{\gamma}{\delta}$, $y = \frac{\alpha}{\beta}$). Također se i ovaj sustav može zapisati preko jedne diferencijalne jednadžbe drugog reda. Naime, iz prve jednadžbe dobivamo

$$y = \frac{1}{\beta}\left(\alpha - \frac{x'}{x}\right),$$

što nakon uvrštavanja u drugu jednažbu daje

$$xx'' - (x')^2 + (\alpha x^2 - xx')(\delta x - \gamma) = 0.$$

Time smo dobili diferencijalnu jednadžbu drugog reda koju zatim trebamo riješiti. ■

Dodatak

■ **Primjer 7.36** Želimo odrediti trajektoriju nabijene čestice u elektromagnetskom polju konstantne električne komponente $E$ i magnetske indukcije $B$. Početna brzina čestice je $v_0 = (v_0^x, v_0^y, v_0^z)$ i početni položaj $p_0 = 0$.

**Rješenje.** Sila na česticu naboja $q$ je dana sa

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Drugi član je Lorentzova sila. Pretpostavljamo da je $\vec{E}$ leži u $yz$ ravnini, a $\vec{B}$ ima smjer osi $z$ (ovo uvijek možemo postići adekvatnim izborom koordinatnog sustava). Ako napišemo 2. Newtonov zakon po koordinatama dobivamo:

$$mx'' = qy'B$$

$$my'' = qE_y - qx'B$$

$$mz'' = qE_z.$$

Zadnja jednadžba se može odvojiti od prve dvije. Dobije se

$$z(t) = \frac{qE_z}{2m}t^2 + v_0^z t.$$

Izražavajući $y'$ iz prve jednadžbe i uvrštavajući u drugu jednadžbu dobivamo diferencijalnu jednadžbu trećeg reda s konstantnim koeficijentima

$$x''' + \frac{q^2B^2}{m^2}x' = \frac{q^2BE_y}{m^2}.$$

Dobivamo sljedeće rješenje

$$x = \frac{m}{qB}\left[v_0^x \sin(\omega t) + v_0^y(1-\cos(\omega t)) + \frac{E_y}{B}(\omega t - \sin(\omega t))\right]$$

$$y = \frac{m}{qB}\left[v_0^y \sin(\omega t) + \frac{E_y}{B}(1-\cos(\omega t))\right],$$

gdje je

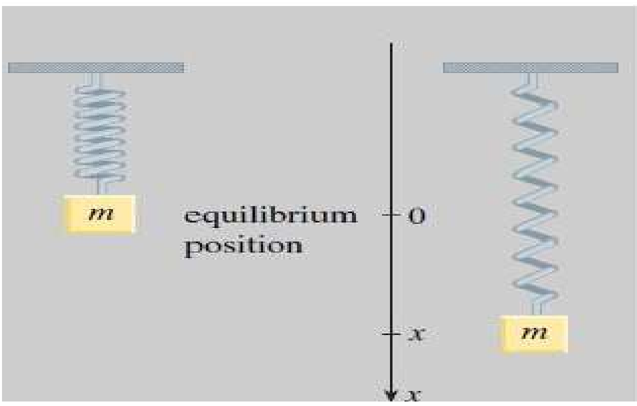
$$\omega^2 = \frac{q^2B^2}{m^2}.$$

Uoči da za $E = 0$ čestica ima kružnu putanju u ravnini $xy$. Lorentzova sila djeluje tada kao centripentalna sila. U slučaju kada je samo $E_y = 0$, imamo samo još dodatnu akceleraciju u smjeru osi $z$ što daje helikoidan oblik trajektorije. U slučaju kada je i $E_y \neq 0$, trajektorija postaje kompleksnija te u $xy$ ravnini imamo i translatorni pomak. ■

### 7.6.1 Titranja-vibracije opruga

#### Linearne vibracije jednostavne opruge

Pogledajmo sliku jednostavne opruge:




Slika 7.1: lijevo - opruga u mirovanju; desno - opruga razvučena u kretanju,

gdje je tijelo mase $m$ obješeno za oprugu. "Eqilibrium position" označava stanje mirovanja-ravnotežni položaj, a otklon mase $m$ od ove pozicije kao funkcija u vremenu je $x(t)$.

Ako zanemarimo trenje zraka, te nepromjenjivost kvalitete opruge od vanjskih utjecaja, tada po Hookovu zakonu, sila rastezanja i stezanja opruge $F_s(t)$ (indeks $s$ dolazi od riječi "stiffness" što znači "krutost") je proporcionalna sa $x(t)$ odnosno

$$F_s(t) = -kx(t),$$

gdje je $k$ pozitivna "konstanta krutosti opruge". Ako ovomu dodamo i II Newtonov zakon za kinematiku kretanja (vibriranja) mase $m$ oko ravnotežnog stanja koji kaže da je $F(t) = mx''(t)$, tada jednadžba zakona održanja glasi:

$$F(t) = F_s(t) \Longleftrightarrow mx''(t) = -kx(t) \Longleftrightarrow x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

što je diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima. S obzirom da je $k/m > 0$, karakteristična jednadžba $r^2 + (k/m) = 0$ ima samo konjugirana rješenja, pa su sva rješenja dana oblikom:

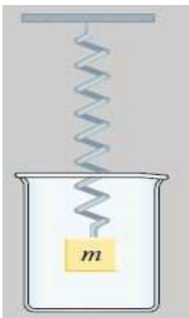
$$x(t) = c_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Zaista, nije teško provjeriti da ovakva rješenja dobro aproksimiraju stvarni otklon mase $m$ od ravnotežne pozicije.

**Vježba 7.14** Napisati i riješiti matematički model za titranje mase $m = 3$, koja je okačena na jednostavnoj opruzi krutosti $k = 2$.

### Linearne vibracije jednostavne opruge uronjene u tekućinu-ulje

Pogledajmo sliku:




Slika 7.2: opruga uronjena u tekućinu - prigušivač.

Tekućina-ulje igra ulogu prigušivača, koji se matematički realizira dodavanjem sile prigušenja $F_d(t)$ (index $d$ dolazi od riječi "damping" što znači "prigušenje") sa

$$F_d(t) = -cx'(t),$$

gdje je $c$ je pozitivna "konstanta prigušenja". U ovom slu aju jednadžba zakona održanja je:

$$F(t) = F_s(t) + F_d(t) \Longleftrightarrow x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

što je isto linearna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima, ali sadrži i član uz prvu derivaciju, takozvani "član prigušenja" ili "damping term". Interesantno je pitanje kakav je utjecaj prigušenja na rješenje ovog problema odnosno kakav je utjecaj $(c/m)x'(t)$ na rješenja ove jednadžbe? Karakteristična jednadžba i njeni korijeni su:

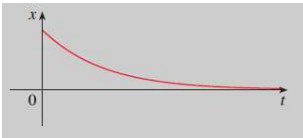
$$mr^2 + cr + k = 0, \quad r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m},$$

pa se ističu uobičajena 3 slučaja za $D = c^2 - 4km$:

• $D > 0$ rezultira striktno monotona rješenja, pa se ovo zove *jako prigušenje*;

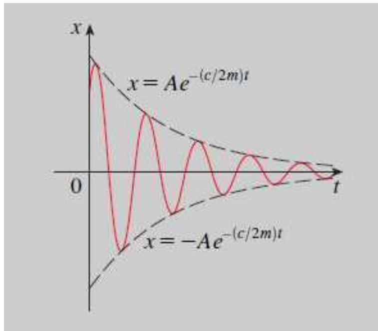
• $D = 0$ rezultira monotona rješenja (zapravo rješenja su montona od nekog mjesta nadalje; vidi sliku 3.2), pa se ovo zove *kritično prigušenje*;

• $D < 0$ rezultira oscilatorna rješenja, pa se ovo zove *slabo prigušenje*, vidi sliku:




Slika 7.3a $D > 0$


Slika 7.3b: $D = 0$




Slika 7.3c: $D < 0$

Rješenja u sva 3 slučaja ovisno o $D = c^2 - 4km$ su:

• $D > 0$: $x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(c_1 e^{-\frac{\sqrt{D}}{2m}t} + c_2 e^{+\frac{\sqrt{D}}{2m}t}\right)$;

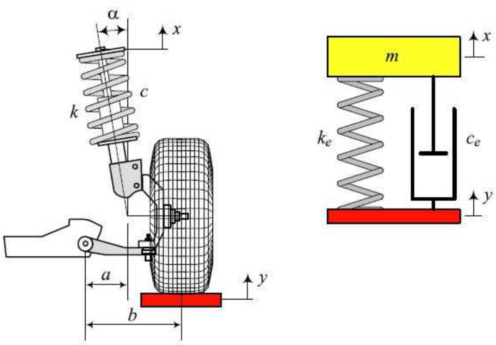
• $D = 0$: $x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(c_1 + c_2 t\right)$;

• $D < 0$: $x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(c_1 \cos(\frac{\sqrt{-D}}{2m}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{-D}}{2m}t)\right)$.

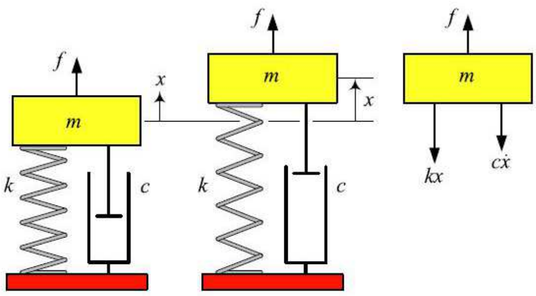
**Vježba 7.15** Napisati i riješiti matematički model za titranje mase $m = 3$ okačene na jednostavnoj opruzi krutosti $k = 2$, koja je uronjena u ulje sa konstantom prigušenja $c = 4$. Analizirati koja se vrsta prigušenja dešava u ovom konkretnom slučaju.

### Kombinacija dvije opruge: jedna bez prigušenja, a druga sa prigušenjem

Jedna od čestih situacija je kombinacija dviju opruga, od kojih prva nije prigušena a druga jest. Klasičan primjer je kod automobilskog ovjesa kotača: jedna opruga oko amortizera (slobodna, bez prigušivača i oku vidljiva) i jedna opruga u ulju unutar amortizera (u prigušivaču, oku ne vidljiva), kao na dvije sljedeće slike:




Slika 7.4




Slika 7.5

Osim auto-kotača, tko ima složeniji terenski bicikl, dobro je svjestan korisnosti fenomena prethodno opisanih dviju opruga:

Na ove probleme sa Slika 4 i 5 možemo primijeniti isti matematički model kao prije.

#### Nelinearne vibracije opruge

U većini praktičnih problema, s vremenom opruga poprima nelinearne deformacije (na primjer zbog velikog opterećenja i drugih razloga), pa je mnogo realnije sili stezanja $F_s(t) = -kx(t)$ dodati i nelinearni kubični član, pa imamo

$$F_s(t) = -k_1 x(t) + k_2 x^3(t).$$

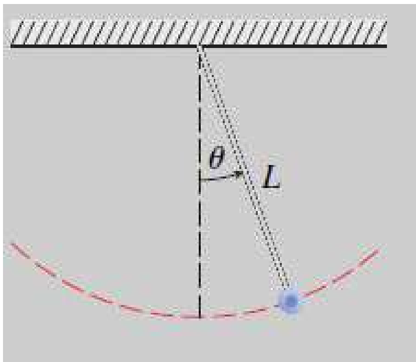
U ovom slučaju jednadžba zakona održanja je:

$$F(t) = F_s(t) + F_d(t) \Longleftrightarrow x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k_1}{m}x(t) + \frac{k_2}{m}x^3(t) = 0,$$

što je nelinearna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Ovu jednadžbu nije jednostavno riješiti, a zove se još i *Duffing jednadžba*.

### 7.6.2 Titranja-vibracije klatna

Pogledajmo sliku:




Slika 7.6

Nit duljine $L$, pričvršćena sa gornje strane za strop, a na drugom slobodnom kraju se nalazi predmet mase $m$. Ovdje $\theta(t)$ označava otklon mase $m$ u trenutku $t$ od stanja mirovanja. Slično kao u prethodnim razmatranjima, u ovom slučaju jednadžba zakona održanja je:

$$mL\theta''(t) + mg\sin\theta(t) = 0, \tag{7.10}$$

gdje $g$ označava gravitacijsku konstantu. S obzirom da član $\sin\theta(t)$ oscilira, nije lako integrirati ovu jednadžbu, pa zbog računskih razloga, nelinearni član $\sin(\theta(t))$ se razvija u Taylorov red funkcije $\sin(\theta)$ odnosno:

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots \tag{7.11}$$

### Linearne vibracije klatna

Ako u Taylorovom razvoju (7.11) uzmemo samo prvi linearni član, tada je $\sin(\theta) \approx \theta$, te ga uvrstimo u jednadžbu (7.10) i dobivamo linearnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$mL\theta''(t) + mg\theta(t) = 0,$$

koju možemo analizirati kao u prethodnim točkama. Interesantno je da možemo skratiti masu $m$ u prethodnoj jednadžbi, pa dobivamo da rezultat ovog kretanja ne ovisi o iznosu mase $m$.

**Vježba 7.16** Napisati i riješiti matematički model za linearne vibracije klatna duljine $L = 3$ na kome je okačena masa $m = 2$.

### Nelinearne vibracije klatna

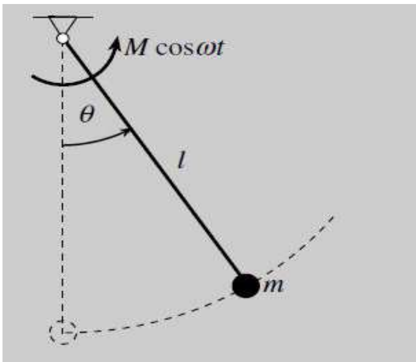
Ako u Taylorovom razvoju (7.11) uzmemo samo prva dva člana, tada je $\sin(\theta) \approx \theta - \theta^3/(3!)$, te ga uvrstimo u jednadžbu (7.10) i dobivamo nelinearnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima (Duffing jednadžba):

$$mL\theta''(t) + mg\left(\theta(t) - \frac{\theta^3(t)}{3!}\right) = 0,$$

za koju smo rekli da ju je teško riješiti.

### Linearne i nelinearne vibracije tjeranog klatna

Ukoliko na gornju čvrstu točku klatna djeluje vanjska sila $F_f(t) = M\cos(\omega_0 t)$ (indeks $f$ dolazi od riječi "forcing") koja izaziva dodatne takozvane "forsirane vibracije", vidi sliku:




Slika 7.7

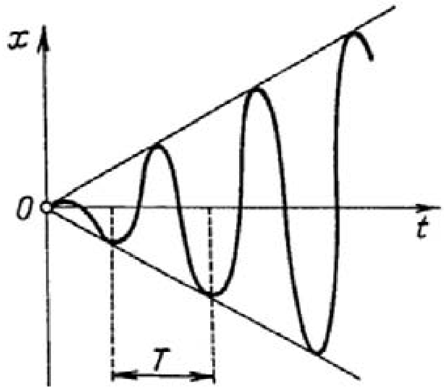
tada u jednadžbu održanja ovog klatna treba uključiti i ovu silu, pa dobivamo:

$$mL^2\theta''(t) + mgL\sin\theta(t) = M\cos(\omega_0 t). \tag{7.12}$$

Kao prethodno, i ovdje možemo koristiti razne aproksimacije za nelinearni član $\sin(\theta(t))$, pa tako dobivamo linearne i nelinearne vibracije tjeranog klatna. Linearna aproksimacija je dobra za male pomake koji se mogu očekivati za male sile (mali $M$). Možemo diskutirati rješenje za linearni slučaj kada za $\omega \neq \omega_0$ dobivamo rješenje u obliku

$$\theta(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + \frac{M}{mL^2(\omega^2 - \omega_0^2)}\cos(\omega_0 t),$$

gdje je $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.




Slika 7.8

U slučaju kada $\omega = \omega_0$ dolazi do rezonancije i rješenje je oblika

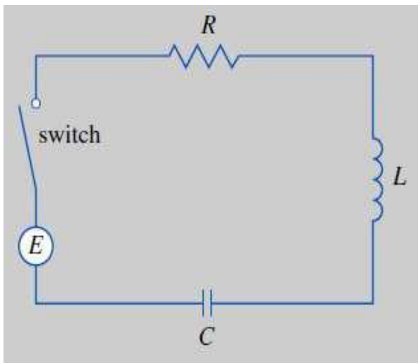
$$\theta(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{M}{2mL^2\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

Za velike $t$ linearna aproksimacija više nije dobra (čak ni za mali $M$)!

### 7.6.3 Titranja-vibracije u strujnom krugu

#### Linearni RCL strujni krug

Pretpostavimo da imamo strujni krug koji se napaja sa električnom snagom $E(t)$, kroz koji protiče struja jakosti $I(t)$ i količinom naboja $Q(t)$, te sa osnovnim konstantnim elementima $L$-indukcija induktora, $R$-otpor otpornika i $C$-kapacitet kondenzatora, vidi sliku:




Slika 7.9

Pomoću Ohmovog zakona, dobivamo jednadžbu održanja:

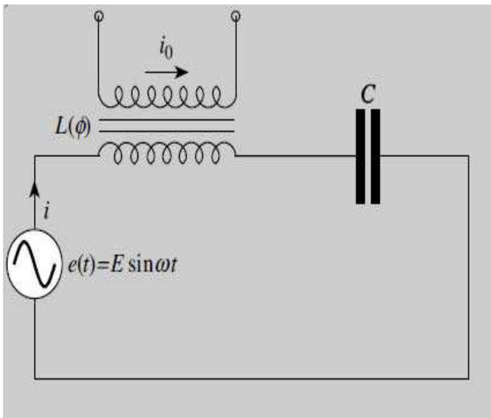
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = e(t).$$

Ovo je linearna diferencijalna jednadžba 2. reda, koja se može slično analizirati kao prije.

**Zadatak 4.** Napisati i riješiti matematički model za naboj $Q(t)$ strujnog kruga sa $L = 2$, $R = 0$, $C = 1$ i $e(t) = \sin t$. $\square$

#### Nelinearni RCL strujni krug

Ukoliko se u strujnom krugu, umjesto linearnog nalazi nelinearni induktor $L$ kao na slici:




Slika 7.10

gdje je $R = 0$, $e(t) = E\sin(\omega t)$ i $E$ pozitivna konstanta, tada jednadžba zakona održanja je nelinearna jednadžba 2. reda:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q + \frac{1}{LC}Q^3 = \frac{E}{L}\sin(\omega t),$$

gdje je $N$ pozitivna konstanta. Ovo je opet Duffing jednadžba koju smo dobili nekoliko puta u prethodnim točkama.

### 7.6.4 Dodatni modeli za one koji žele znati više

#### Model žice i rubni problem za linearnu jednadžbu drugog reda

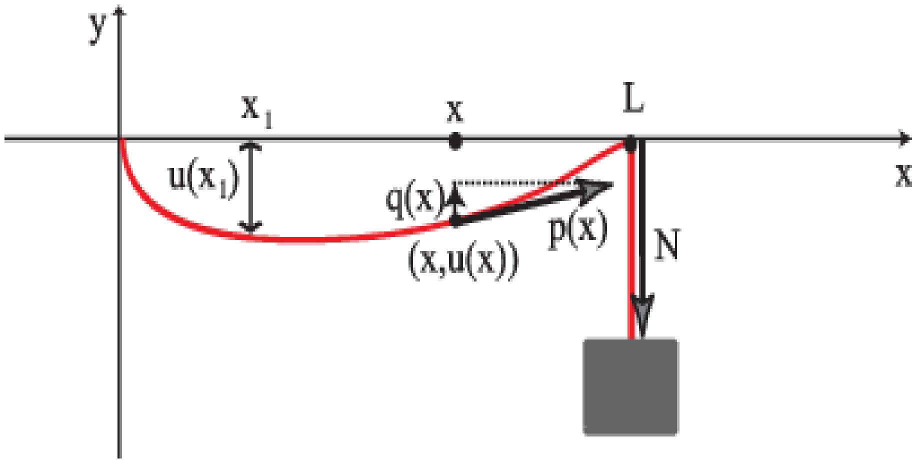
Razmotrimo uzdužno napetu žicu duljine $l$ podvrgnutu djelovanju vanjske poprečne sile koja je okomita na $x$ os. Pretpostavit ćemo da je ta sila slaba i da je mnogo manja od napetosti. Npr. ako je žica horizontalno napeta (npr. na jednom kraju pričvršćena, a na drugom napeta utegom) onda pretpostavljamo da je težina utega koji horizontalno napinje žicu mnogo veća od poprečne sile za koju možemo uzeti npr. težinu žice. Prirodno je pretpostaviti da se pod utjecajem slabe poprečne sile žica malo deformira tj. da njen ravnotežni položaj leži u ravnini vanjske sile i da se malo razlikuje od neperturbiranog položaja (intervala $(0,l)$). Točka $x \in (0,l)$ prijeđe deformacijom u točku $P(x) = (x,u(x)) \in \mathbb{R}^2$ gdje je $u(x)$ progib točke $x$. Progib je mali u smislu:

$$|u(x)| \ll l$$

$$|u'(x)| \ll 1,$$

za svako $x \in (0,l)$ (primjeti da je prva nejednakost posljedica druge jer $u(0) = 0$ po pretpostavci). Označimo s $p(x)$ kontaktnu silu u točki $P(x)$ tj. silu kojom dio $P(x)P(l)$ deformirane žice djeluje na dio $P(0)P(x)$. Eksperimentalno je dobro provjerena ova osnovna pretpostavka: ako je deformacija napete žice mala, kontaktna sila $p(x)$ u točki $P(x)$ ($x \in (0,l)$) jednaka je po modulu napetosti i paralelna je tangencijalnom vektoru žice u toj točki. Označivši poprečnu komponentu kontaktne sile s $q$, imamo sljedeći zakon ponašanja

$$q(x) = a(x)u'(x). \tag{7.13}$$




Slika 7.11

Iako je za primjere žice koje ćemo obraditi $a(x) = \text{const.}$ ($a(x)$ je napetost), zakon ponašanja pišemo u općenitom obliku, između ostalog i zbog toga što istim principom možemo modelirati provođenje topline gdje može biti $a(x) \neq \text{const.}$

Ukupna poprečna kontaktna sila na dio $P(x_1)P(x_2)$ deformirane žice jednaka je $q(x_2) - q(x_1)$. Neka je $f(x)$ gustoća poprečne linijske sile (sila po jedinici duljine). Tada je poprečna sila na dio $P(x_1)P(x_2)$ jednaka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)d\xi.$$

Ukupna poprečna sila na dio $P(x_1)P(x_2)$ je

$$q(x_2) - q(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi)d\xi,$$

pa ako je žica u ravnoteži imamo

$$q(x_2) - q(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi)d\xi = 0.$$

Deriviranjem dobijemo lokalni ili diferencijalni oblik zakona ravnoteže

$$q'(x) + f(x) = 0, \quad x \in (0,l). \tag{7.14}$$

Uvrštavajući (7.13) dobivamo

$$(a(x)u'(x))' + f(x) = 0.$$

Ako se žica nalazi u nekom sredstvu koje se elastično opire njenoj deformaciji, onda pored zadane linijske sile $f$, na nju djeluje i linijska (poprečna) sila s gustoćom $-b(x)u(x)$, gdje je $b(x) \geq 0$ koeficijent elastičnosti sredstva. Tada imamo jednadžbu ravnoteže

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) + f(x) = 0. \tag{7.15}$$

Jednadžbi ravnoteže (7.15) mogu se pridružiti razni rubni uvjeti. Ako su oba kraja žice pričvršćena, tada imamo uvjete

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{7.16}$$

Ukoliko je jedan kraj žice pričvršćen, a drugi slobodan (ali o njega obješen uteg), tada imamo rubni uvjet

$$u(0) = 0, \quad u'(l) = 0. \tag{7.17}$$

Ako se npr. za jedan kraj ($x = 0$) veže elastično pero s koeficijentom elastičnosti $\kappa > 0$, tada rubni uvjet u $x = 0$ glasi

$$q(0) = \kappa u(0) \implies u'(0) - \beta_0 u(0) = 0,$$

gdje smo stavili $\beta_0 = \kappa/a(0)$.

■ **Primjer 7.37** Homogena žica učvršćena je na kraju $x = 0$ i horizontalno napeta pomoću niti (vezane za kraj $x = l$) i utega mase $M > 0$; kraj $x = l$ je slobodan. Odredit ćemo ravnotežni progib u polju sile teže. Linijska sila je težina, pa je $f = -\rho g$, gdje je $\rho =$ const. gustoća mase (masa jedinice duljine žice). ■

Jednadžba ravnoteže glasi:

$$Mgu'' - \rho g = 0.$$

Iz toga slijedi

$$u(x) = \frac{\rho}{2M}x^2 + c_1 x + c_2.$$

Pripadni rubni uvjet je oblika (7.17) iz čega dobivamo

$$c_1 = -\frac{\rho l}{M}, \quad c_2 = 0.$$

■ **Primjer 7.38** Žica je sastavljena od dvaju homogenih komada $(0, x_0)$, $(x_0, l)$ s linijskim gustoćama mase $\rho_1$ i $\rho_2$ i napeta horizontalno utegom mase $M > 0$; oba kraja su učvršćena. Odredimo ravnotežni položaj u polju sile teže. ■

Gustoća linijske sile ima u točki $x_0$ skok:

$$f(x) = \begin{cases} \rho_1 g, & 0 \leq x < x_0 \\ \rho_2 g, & x_0 < x \leq l. \end{cases}$$

Jednadžba ravnoteže glasi ovako:

$$gMu''(x) = \rho_1 g, \quad x \in (0, x_0)$$

$$gMu''(x) = \rho_2 g, \quad x \in (x_0, l).$$

Uzimajući u obzir rubne uvjete (7.16), dobivamo

$$u(x) = \frac{\rho_1 x^2}{2M} + c_1 x,$$

za $x \in (0, x_0)$, te

$$u(x) = \frac{\rho_2}{2M}(x^2 - l^2) + c_2(x - l),$$

za $x \in (x_0, l)$, gdje su $c_1$ i $c_2$ konstante. Moramo još dodati uvjet neprekidnosti progiba i sila u točki $x_0$ tj. sljedeće uvjete

$$u(x_0-) = u(x_0+), \quad u'(x_0-) = u'(x_0+),$$

iz čega dobivamo

$$c_1 = -\frac{\rho_2 l}{2M} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2Ml}x_0^2 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{M}x_0$$

$$c_2 = -\frac{\rho_2 l}{2M} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2Ml}x_0^2.$$

### Model provođenja topline kroz tanki štap

Neka os tankog štapa leži na $x$-osi. Neka se na štap izvana prenosi slabi toplinski fluks. Označimo s $u(x)$ temperaturu poprečnog presjeka na mjestu $x \in (0,l)$, a s $q(x)$ kontaktni toplinski fluks na tom mjestu, tj. toplinu koja se u jedinici vremena prenosi s dijela $(x,l)$ na dio $(0,x)$. Neka je $f$ gustoća linijskog toplinskog fluksa (vanjska toplina koja se u jedinici vremena prenosi na jedinicu duljine štapa). Ako je provođenje topline u tijelu stacionarno (neovisno o vremenu), ukupni toplinski fluks (toplina po jedinici vremena) koji se na njega prenosi jednak je nuli(zakon stacionarnog provođenja topline). Iz toga slijedi jednadžba (7.14). Eksperimentalni zakon ponašanja (Fourieov zakon) ima oblik (7.13), gdje je

$$a = \kappa S.$$

Ovdje $\kappa > 0$ konstanta provođenja, a $S$ površina poprečnog presjeka ($S = \text{const.}$ za cilindrični štap, $\kappa = \text{const.}$ za homogeni štap).

■ **Primjer 7.39** Tanki cilindrični štap sastavljen je od dva homogena dijela $(0,x_0)$ i $(x_0,l)$ s koeficijentima provođenja $a_1$ i $a_2$ respektivno. Krajevi $x = 0$ i $x = l$ pridržavaju se na temperaturi $u = 0$. Odredimo stacionarnu temperaturu štapa, ako je gustoća vanjskog toplotnog fluksa $f = 1$ ■

Jednadžba stacionarnog provođenja je

$$\begin{aligned} -a_1 u''(x) &= 1, \quad x \in (0,x_0), \\ -a_2 u''(x) &= 1, \quad x \in (x_0,l). \end{aligned}$$

Uvjeti na spoju su neprekinutost temperature i neprekinutost toplinskog fluksa tj.

$$\begin{aligned} u(x_0-) &= u(x_0+), \\ a_1 u'(x_0-) &= a_2 u'(x_0+). \end{aligned}$$

Dodajući tome rubne uvjete $u(0) = u(l) = 0$ nakon kraćeg računa dobivamo

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2a_1}x^2 + \frac{a_1(l^2-x_0^2)+a_2x_0^2}{2(a_1a_2-a_1^2)x_0+2a_1^2 l}x, & x \in [0,x_0], \\ \frac{1}{2a_2}(x^2-l^2) + \frac{a_1(l^2-x_0^2)+a_2x_0^2}{2a_2x_0(a_2-a_1)+2a_1a_2 l}(x-l), & x \in [x_0,l]. \end{cases}$$

**Napomena 7.9** Primjeri 7.38 i 7.39 nam pokazuju da nam je nekad u primjenama potrebno tražiti rješenje koji ima prekid u derivaciji najvišeg reda (za oba primjera vrijedi da druga derivacija rješenja ima prekid).

## 7.7 Rješavanje diferencijalnih jednadžbi pomoću redova

Mnoge diferencijalne jednadžbe ne možemo eksplicitno riješiti jer za to ne postoje prikladne metode. No, jedna od metoda koju možemo koristiti u takvim slučajevima je rješavanje pomoću redova potencija. Pretpostavimo da je rješenje diferencijalne jednadžbe sljedećeg oblika

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \; c_n \in \mathbb{R}.$$

Sada koristeći formulu za deriviranje redova potencija, nađemo sve potrebne derivacije funkcije $y$ te ih uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$. Time se problem traženja rješenja diferencijalne jednadžbe svodi na problem traženja nepoznatih koeficijenata $c_n$, $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju navedenu jednadžbu.

Sada ćemo taj postupak provesti na jednom jednostavnom primjeru.

■ **Primjer 7.40** Koristeći redove potencija riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = 0.$$

**Rkešenje.** Pretpostavimo da je rješenje oblika $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Deriviranjem dobivamo $y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ i $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}$. Uvrštavanjem u jednadžbu slijedi da je

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Ako želimo ove dvije sume zbrojiti, tada moramo u prvoj sumi pomaknuti indeks sumacije. Sada imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

te zbrajanjem dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n)x^n = 0.$$

Iz ove jednakosti zaključujemo da su svi koeficijenti dobivenog reda jednaki 0 odnosno dobijemo da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ mora vrijediti

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0.$$

Time smo dobili rekurzivnu relaciju

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dodatak

**Linearna homogena rekurzivna relacija** je relacija oblika

$$c_n = \gamma_1(n)c_{n-1} + \ldots + \gamma_r(n)c_{n-r}, \quad n \geq r$$

gdje su $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ zadane realne funkcije, $\gamma_r(n) \neq 0$. Broj $r$ zovemo red rekurzije. Nepoznanice u rekurzivnoj relaciji su članovi niza $(c_n)$. Ako je zadano $r$ početnih vrijednosti članova niza $c_0, \ldots, c_{r-1}$, tada se pomoću njih mogu izračunati sve vrijednosti $c_n$ odnosno opći član niza $c_n$ se može izraziti kao funkcija od $n$. Time smo riješili rekurzivnu relaciju. Napomenimo da su rekurzivne relacije gradivo kolegija Diskretna matematika 1. Mi ćemo se u sklopu ovog poglavlja baviti rješavanjem rekurzivne relacije oblika

$$c_n = \gamma_r(n)c_{n-2}, \quad n \geq 2$$

odnosno s pomakom je rekurzija oblika

$$c_{n+2} = \gamma(n)c_n, \quad n \geq 0.$$

To je rekurzija reda 2 gdje trebaju biti zadane vrijednosti dva koeficijenta $c_0$ i $c_1$.

Sada vidimo da je u našem primjeru dobivena rekurzivna relacija s $r = 2$ te moramo pretpostaviti da znamo dva početna koeficijenta $c_0$ i $c_1$. Tada ostale koeficijente možemo pronaći uvrštavanjem u relaciju pa za parne koeficijente dobivamo:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2}, \quad c_4 = \frac{c_0}{4!}, \ldots, c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}$$

a za neparne slijedi:

$$c_1 = -\frac{c_1}{3!}, \quad c_5 = \frac{c_1}{5!}, \ldots, c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}.$$

Uvrštavanjem u red potencija rješenja dobivamo

$$y(x) = c_0(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots) + c_1(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Sada možemo prepoznati dobivene redove potencija kao redove trigonometrijskih funkcija. Dakle, dobili smo da je rješenje oblika $y = c_0 \cos x + c_1 \sin x$. Ovu jednadžbu znamo riješiti i eksplicitno. Primijetimo da kod diferencijalne jednadžbe drugog reda dobijemo opće rješenje zapisano pomoću dvije konstante $c_0$ i $c_1$. ■

Zbog kompleksnosti postupka rješavanja rekurzivne relacije, zadržat ćemo se na rješavanju diferencijalnih jednadžbi samo drugog reda.

**Teorem 7.7.1** Ako su $p$, $q$ i $r$ analitičke funkcije u okolini točke $x_0$ i $p(x_0) \neq 0$ onda je rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$p(x)y'' + q(x)y + r(x)y = 0$$

analitička funkcija oko točke $x_0$.

Dakle, uz uvjet da su funkcije $p$, $q$ i $r$ analitičke oko 0, rješenje linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda:

$$p(x)y'' + q(x)y + r(x)y = 0 \tag{7.18}$$

tražimo u obliku

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{7.19}$$

U diferencijalnu jednadžbu uvrstimo red i njegove derivacije, dobijemo rekurzivnu relaciju te ju riješimo i dobijemo koeficijente $c_n$.

■ **Primjer 7.41** Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2xy' + y = 0$.

**Rješenje.** Ovo je linearna homogena diferencijalna jednadžba s nekonstantnim koeficijentima. Funkcije $p(x) = 1$, $q(x) = -2x$, $r(x) = 1$ su analitičke na cijelom $\mathbb{R}$ te tražimo rješenje u obliku reda potencija oko 0.

Uvrstimo

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \ldots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n.$$

u danu diferencijalnu jednadžbu te dobijemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

U drugoj sumi ubacimo $2x$ pod sumu te pomaknemo indeks jer se dodavanjem nule suma ne mijenja. Dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Sada redove zbrojimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n-1) c_n] x^n = 0.$$

Iz činjenice da svi koeficijenti moraju biti jednaki nuli dobijemo rekurzivnu relaciju

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n-1) c_n = 0\ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

odnosno

$$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} c_n\ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Sada fiksiranjem prva dva koeficijenta $c_0$ i $c_1$ rješavamo rekurzivnu relaciju na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{1}{2} c_0 & c_3 &= \frac{1}{2\cdot 3} c_1 \\
c_4 &= \frac{3}{3\cdot 4} c_2 = -\frac{3}{4!} c_0 & c_5 &= -\frac{5}{4\cdot 5} c_3 = \frac{5}{5!} c_1 \\
c_6 &= -\frac{3\cdot 7}{6!} c_0 & c_7 &= \frac{1\cdot 5\cdot 9}{7!} c_1 \\
&\vdots & &\vdots \\
c_{2n} &= -\frac{3\cdot 7\cdot \ldots \cdot (4n-5)}{(2n)!} c_0 & c_{2n+1} &= \frac{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} c_1.
\end{aligned}$$

Opće rješenje glasi

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 (1 - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{3}{4!} x^4 - \ldots) + c_1 (x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{5}{5!} x^5 + \ldots).$$

■

■ **Primjer 7.42** Koristeći razvoj u red potencija nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - xy = \cos x$$

koje zadovoljava početne uvjete $y'(0) = y(0) = 0$. (Uputa: Dovoljno je napisati koeficijente rješenja do člana $x^6$.)

**Rješenje.** Rješenje tražimo u obliku $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Desnu stranu jednadžbe moramo isto zapisati u obliku reda potencija oko nule:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

Prije deriviranja i uvrštavanja u jednadžbu pogledajmo što znače početni uvjeti $y'(0) = y(0) = 0$. Iz $y(0) = 0$ slijedi da je $c_0 = 0$, a iz $y'(0) = 0$ da je $c_1 = 0$. Dakle, rješenje je oblika

$$y = \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n.$$

Red deriviramo dva puta i uvrstimo u jednadžbu

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

U prvoj sumi pomaknemo indeks sumacije i dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Primijetimo da se ove tri sume ne mogu zbrojiti odnosno napisati kao jedna suma zbog različitih potencija od $x$. Zato sređivanje po potencijama od $x^k$ dobivamo uvrštavanjem pripadnog indeksa u svaku sumu te slijedi

$$\begin{aligned}
x^0 &: \quad 2c_2 = 1 \implies c_2 = 0.5 \\
x^1 &: \quad 6c_3 = 0 \implies c_3 = 0 \\
x^2 &: \quad 12c_4 = -0.5 \implies c_4 = -\frac{1}{24} \\
x^3 &: \quad 20c_5 - c_2 = 0 \implies c_5 = \frac{1}{40} \\
x^4 &: \quad 30c_6 - c_3 = \frac{1}{24} \implies c_6 = \frac{1}{6!}
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje Cauchyjevog problema glasi

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \dots.$$

■

## 7.8 Pitanja za ponavljanje

1. Neka je zadana homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.
   (a) Definirajte bazu rješenja ove jednadžbe.
   (b) Ako su $y_1$ i $y_2$ dva rješenja gornje jednadžbe, pokažite da je i $y_1 + y_2$ također rješenje.
2. Navedite neku homogenu LDJ 2. reda s konstantnim koeficijentima čije je opće rješenje oblika $y = C_1 e^{-3x} + C_2$.
3. Opruga uronjena u tekućinu se modelira jednadžbom $mx'' + cx' + kx = 0$.
   (a) Ako su $m = 1, k = 2, c = 1$, da li rješenje oscilira? Ako da, odredite period oscilacije.
   (b) Ako malo povećamo koeficijent prigušenja $c$, period se smanjuje. Istina/Laž Obrazložite sve tvrdnje.
4. Definirajte determinantu Wronskog za funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.
5. Funkcija $h(t) = 4 + 3t$ se može zapisati kao linearna kombinacija funkcija $f(t) = (1+t)^2$ i $g(t) = 2 - t - 2t^2$. T / F
6. Funkcije $\cos(2t)$ i $\sin(-2t)$ su linearno zavisne. T / F
7. Koje od sljedećih tvrdnji su istinite, a koje nisu:
   (a) Ako je $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$ za svaki $x$, tada su funkcije $y_1, \dots, y_n$ lin. zavisne.
   (b) Ako postoji $x_0$ takav da je $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$, tada su funkcije $y_1, \dots, y_n$ lin. nezavisne.
   (c) Funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = \sin x$ su linearno nezavisne.
8. Funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ su dva rješenja zadane homogene LDJ 2. reda s konstantnim koeficijentima za $a < t < b$. Koje tvrdnje su istinite, a koje nisu:
   (a) Opće rješenje je oblika $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.
   (b) Funkcije $y_1$ i $y_2$ moraju biti linearno nezavisne jer su rješenja.
   (c) Funkcije $y_1$ i $y_2$ mogu biti linearno zavisne pa ne znamo ništa o općem rješenju.
   (d) Mora vrijediti da je $W(y_1, y_2) \neq 0$.
9. Karakteristična jednadžba LDJ 3. reda $y''' - 5y' + 2y = 0$ glasi $r^3 - 5r^2 + 2r = 0$. Istina/Laž
10. Odredite jedno partikularno rješenje nehomogene LDJ 2. reda $f'' + 7f' + 12f = 5e^{-6t}$.
11. Dokažite sljedeću tvrdnju: Rješenja $y_1, \dots, y_n$ homogene LDJ n-tog reda su linearno nezavisne ako i samo $W(y_1, \dots, y_n)$ nije identički jednak nuli.

## 7.9 Zadatci za vježbu

**Zadatak 1.** Ispitaj jesu li sljedeće funkcije linearno nezavisne ili ne:

1. $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$
2. $\cos x$, $\cos(x-2)$, $\cos(x+1)$
3. $e^{x+1}$, $e^{1-x}$, $e^{2x}$
4. $e^x$, $e^x \sin x$, $e^x \cos x$.

**Zadatak 2.** Odredi opće rješenje sljedećih linearnih diferencijalnih jednadžbi

1. $y'' + 4y' + 5y = 0$
2. $y'' + 4y' - 5y = 0$

3. $y'' + 6y' = 0$
4. $y'' + 6y = 0$.

**Zadatak 3.** Napiši homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu najmanjeg stupnja kojoj su rješenja

1. $e^x$, $xe^x$, $x^2e^x$
2. 1, $\sin 2x$, $\cos 2x$
3. $e^{3x}$, $\sin x$, $\cos x$
4. $e^{-x}\sin 2x$, $e^{-x}\cos 2x$, $\sin x$, $\cos x$.

**Zadatak 4.** Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe

1. $y'' + y = x\sin x$
2. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$
3. $y'' + y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$
4. $y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$
5. $y'' + 2y' + 2y = e^{2x} + 4\sin x\cos x$
6. $y'' - y = 4xe^x + 2\sin x$

**Zadatak 5.** Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe

1. $y''' - y = 4e^x$
2. $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$
3. $y''' + y'' = xe^{-x}$
4. $y''' - y'' = 4\mathrm{sh}x$.

**Zadatak 6.** Metodom varijacije konstanata odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe

1. $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$
2. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$
3. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$
4. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$
5. $y'' + 4y = \mathrm{ctg}2x$
6. $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$
7. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$
8. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

**Zadatak 7.** Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe

1. $y'' - y = \mathrm{th}x$
2. $y'' + y = \frac{1}{1+\cos 2x}$
3. $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$
4. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$
5. $y'' + y = \mathrm{tg}x$
6. $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)$
7. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
8. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \cdot x^{-3}$.

**Zadatak 8.** Nađi partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''' + y' - \sin x = 0$$

koje zadovoljava uvjete $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

**Zadatak 9.** Koristeći razvoj u red potencija riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + xy' + y = 0.$$

**Zadatak 10.** Koristeći razvoj u red potencija riješite Cauchyjev problem

$$y'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Rješenje napišite do člana $x^8$.

**Zadatak 11.** Nađi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + xy = 0$ razvojem u red potencija.

**Zadatak 12.** Riješi razvojem u red potencija Cauchyjev problem

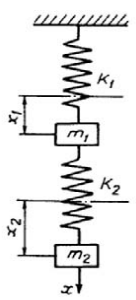
$$y'' + \frac{y'}{x} - xy = 0, \quad y(0) = 1\ , \quad y'(0) = 0.$$

**Zadatak 13.** Eliminacijom jedne od nepoznanica riješi sustav s početnim uvjetom

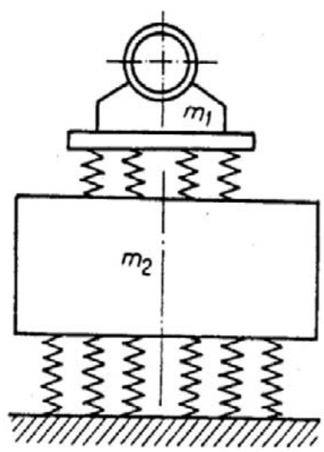
$$x' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 14.** Žica mase 2 kg ima prirodnu duljinu $0,5$ m. Sila od $25,6$ N je potrebna da je drži istegnutu na $0,7$ m. Žica je stavljena u fluid koji ima konstantu prigušenja $c = 40$. Pronađi poziciju žice u trenutku $t$, ako žica kreće iz položaja ravnoteže i dana joj je početna brzina $0,6$ m/s.

**Zadatak 15.** Promatramo sistem od dvije mase $m_1$ i $m_2$ povezane oprugama koeficijenata elastičnosti $k_1$ i $k_2$ kao na slici. Odredi gibanje sistema!




**Slika 7.12** Dvije mase na oprugama




**Slika 7.13** Motor na ležaju s osnovom

**Zadatak 16.*** Osnova motora mase $m_2$ leži na elastičnom mediju (vidi sliku 11.3). Elastični medij je prikazan kao sistem opruga. Površina osnove je $S$, a elastični medij ima koeficijent elastičnosti $k_s$, koji je zadan po jedinici površine. Da bi se izbjegla rezonancija, motor je postavljen na ležaj, koji je onda povezan s osnovom oprugama koji ukupno daju koeficijent elastičnosti $k_1$. Masa motora s ležajem je $m_1$. Izračunaj vibracije sistema uz podatke $m_2 = 10^5 kg$, $S = 17m^2$, $k_s = 58,8\cdot 10^6 N/m^3$, $k_1 = 49\cdot 10^6 N/m$, $m_1 = 4,9\cdot 10^3 kg$.

**Zadatak 17.*** Žica je sastavljena od dvaju homogenih komada jednake duljine s linijskim gustoćama $\rho_1$ i $\rho_2$ i napeta horizontalno utegom mase $M$, a u sredini opterećena utegom mase $M_1$; oba kraja su učvršćena. Odredite ravnotežni progib!

## 7.10 Rješenja zadataka za vježbu

**Z1.** 1.da 2. ne 3. da 4. da.

**Z2.** 1. $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ 2. $y = C_1e^{-5x} + C_2e^x$ 3. $y = C_1 + C_2e^{-6x}$ 4. $y = C_1\cos(\sqrt{6}x) + C_2\sin(\sqrt{6}x)$.

**Z3.** 1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ 2. $y''' + 4y' = 0$ 3. $y''' - 3y'' + y' - 3y = 0$ 4. $y^{(iv)} + 2y''' + 6y'' + 2y' + 5y = 0$.

**Z4.** 1. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x$ 2. $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x$. 3. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(\sqrt{3}\sin x - \cos x)$. 4. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x - xe^{-2x}$. 5. $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{10}e^{2x} - \frac{2}{5}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x$.

**Z5.** 1. $y = C_1e^x + e^{-x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{4}{3}xe^x$. 2. $y = C_1 + C_2e^{-2x} + C_3e^x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}xe^x$. 3. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + e^{-x}(\frac{1}{2}x^2 + 2x)$. 4. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + 2xe^x + e^{-x}$.

**Z6.** 1. $y = C_1 + C_2e^x - \ln(1+e^x) + e^x[x - \ln(1+e^x)]$. 2. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\cdot\ln|\cos 2x| + \frac{x}{2}\sin 2x$ 3. $y = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\cdot\ln|\cos x| + xe^{2x}\sin x$. 4. $y = C_1e^x + C_2xe^x + xe^x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}e^x\ln(x^2+1)$. 5. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\ln|\mathrm{tg}x|$. 6. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \mathrm{ctg}x\cdot\cos x - \sin x$. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (x^2 - x)e^x - \sin x$. 7. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5}e^{-x}$. 8. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{\cos 2x}{2\cos x}$.

**Z7.** 1. Rješenje homogene jednadžbe $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Varijacijom konstante $C_1' = \frac{\mathrm{th}x}{2e^x}$, $C_1 = \mathrm{arctg}e^x + \frac{1}{2e^x}$, $C_2 = -\frac{e^x}{2} + \mathrm{arctg}e^x$; $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{arctg}e^x$. 2. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cdot\ln\left|\mathrm{tg}\langle\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\rangle\right|$. 3. $y = C_1e^x + C_2xe^x - e^x\ln x - e^x$. 4. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + xe^{-x}(\ln x - 1)$. 5. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\cdot\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$. 6. $y = C_1 + C_2e^x - \cos e^x$. 7. $y = C_1e^x + C_2xe^x + (x\ln x - x)e^x$. 8. $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{2x}$.

**Z8.** Opće rješenje $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x\sin x$. Partikularno $y = 2 - 2\cos x - \frac{1}{2}x\sin x$.

**Z9.** $y = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

**Z10.** $y = 1 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12\cdot 56}x^8 + \ldots$.

**Z11.** $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $a_n = -\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}$, $n \geq 3$.

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \ldots\right).$$

**Z12.** $y = 1 + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^6}{3^2\cdot 6^2} + \frac{x^9}{3^2\cdot 6^2\cdot 9^2} + \ldots$

**Z13.**

$$x(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

**Z14.** $x(t) = 0,05(e^{-4t} - e^{-16t})$;
**Z15.** Jednadžbe ravnoteže su

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1).$$

Stavljajući

$$a = \frac{k_1 + k_2}{m}, \quad b = \frac{k_2}{m}, \quad c = \frac{k_2}{m_2},$$

dobivamo za

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc}}.$$

rješenja u obliku

$$x_1 = A_1 \sin(p_1 t + \alpha') + A_2 \sin(p_2 t + \alpha'')$$
$$x_2 = \lambda' A_1 \sin(p_1 t + \alpha') + \lambda'' \sin(p_2 t + \alpha''),$$

gdje je

$$\lambda' = \frac{a - p_1^2}{b} = \frac{c}{c - p_1^2}, \quad \lambda'' = \frac{a - p_2^2}{b} = \frac{c}{c - p_2^2}.$$

**Z16.** Matematički model

$$m_1 x_1'' + k_1(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2 x_2'' + (k_1 + k)x_2 - k_1 x_1 = 0,$$

gdje je $k = k_s S$. Dobiju se korijeni karakteristične jednadžbe

$$p_1 = \pm 31,547i, \quad p_2 = \pm 100,323i.$$

Rješenje je

$$x_1 = A_1 \sin(p_1 t) + B_1 \cos(p_1 t) + A_2 \sin(100,323t) + B_2 \cos(100,323t),$$

$$\begin{aligned} x_2 \ = \ & A_1 \left(1 - \frac{m_1 p_1^2}{k_1}\right) \sin(p_1 t) + B_1 \left(1 - \frac{m_1 p_1^2}{k_1}\right) \cos(p_1 t) \\ & + A_2 \left(1 - \frac{m_1 p_2^2}{k_1}\right) \sin(p_2 t) + B_2 \left(1 - \frac{m_1 p_2^2}{k_1}\right) \cos(p_2 t) \end{aligned}$$

**Z17.** Jednadžbe ravnoteže su

$$u''(x) = \frac{\rho_1}{M}, \quad x < \frac{l}{2},$$

$$u''(x) = \frac{\rho_2}{M}, \quad x > \frac{l}{2}.$$

Uvjeti u točki $x_0 = \frac{l}{2}$ su

$$u(\frac{l}{2}+0) = u(\frac{l}{2}-0), \quad u'(x_0+0) - u'(x_0-0) = \frac{M_1}{M}.$$

Dobije se

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\rho_1}{2M}x^2 + Cx, & x < \frac{l}{2} \\ \frac{\rho_2}{2M}(x^2 - l^2) + D(x-l), & x > \frac{l}{2}, \end{cases}$$

gdje je

$$C = \frac{M_1}{M} - \frac{l}{8M}(3\rho_1 + \rho_2), \quad D = \frac{M_1}{M} + \frac{l}{8M}(\rho_1 - 5\rho_2)$$

## 7.11 Rješenja vježbi

**Vj 7.1** $L(y_1+y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0$
**Vj 7.2** $(y_1+y_2)'' + p(x)(y_1+y_2)' + q(x)(y_1+y_2) = y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 + y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0+0 = 0$
**Vj 7.3** $W(y_1,\dots,y_n)(x_0) \neq 0$ za neki $x_0 \to W(y_1,\dots,y_n)(x) = 0$ za svaki $x$
**Vj 7.4** $W(e^{r_1x}, xe^{r_1x}, x^2e^{r_1x}) = 2e^{3r_1x} \neq 0$ za svaki $x$
**Vj 7.5** $y = e^{2x} + 2xe^{2x}$
**Vj 7.6** $y = 2e^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$
**Vj 7.7** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$
**Vj 7.8** $y = C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2xe^{\sqrt{3}x} + C_3e^{-\sqrt{3}x} + C_4xe^{-\sqrt{3}x}$
**Vj 7.9** $y''' + 4y' = 0$
**Vj 7.10** (a) $W(y_1,y_2,y_3) = 37e^{6x} \neq 0$
(b) $y''' - 6y'' + y' - 6y = 0$
**Vj 7.11** (a) $W(\cos x, \sin x) = 1 \neq 0$
(b) $y = (C_1 - \frac{2}{\cos x})\cos x + (\ln|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}| + C_2)\sin x$
**Vj 7.12** (a) $\{y_1,y_2\}$ je baza rješenja $\Longrightarrow$ $W(y_1,y_2) \neq 0$ za svaki $x$ $\Longrightarrow$ matrica sustava je regularna za svaki $x$ $\Longrightarrow$ sustav ima jedinstveno rješenje $(A(x),B(x))$
(b) opće rješenje: $y = C_1e^x + C_2xe^x + e^x\ln x$
**Vj 7.13** $y = C_1e^{6x} + C_2\cos x + C_3\sin x + x^2 - 2$

**Literatura**

1. I. Aganović, K. Veselić: *Linearne diferencijalne jednadžbe*, Element, Zagreb 1997.
2. N. Elezović: *Diferencijalne jednadžbe*, Zagreb, svibanj 2016.
3. M. V. Soare, P.P. Teodorescu, I. Toma: *Ordinary differential equations with applications to mechanics*, Springer, 2007.
4. J. Stewart: *Multivariable Calculus*, 7th Edition, USA, 2012