Linearna algebra - 12. auditorne vježbe

1. **(Problem predatora i plijena)** Ekolozi su promatrali populacije zečeva i lasica u jednoj šumi. Uočeno je da je svake godine broj zečeva jednak četverostrukom broju zečeva prošle godine u-manje-nom za dvostruki broj lasica prošle godine, dok je broj lasica jednak zbroju lanjskog broja zečeva i lanjskog broja lasica. Ako je na početku bilo 100 zečeva i 10 lasica, odredite broj zečeva i lasica nakon n godina. Koliki će biti dugoročan omjer broja zečeva i lasica u toj šumi?

$Z_n :=$ broj zečeva nakon n godina

$L_n :=$ broj lasica nakon n godina

Uvjete zadatka možemo zapisati u obliku sustava dvije linearne rekurzije

$$\begin{cases} Z_{n+1} = 4Z_n - 2L_n \\ L_{n+1} = Z_n + L_n \end{cases} \quad n \geq 0,$$

uz početne uvjete $Z_0 = 100$, $L_0 = 10$.

Stavljanjem $X_n := \begin{bmatrix} Z_n \\ L_n \end{bmatrix}$ dobiveni sustav možemo zapisati matrično

$$X_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} X_n \Rightarrow X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = \ldots = A^{n-1}X_1 = A^n X_0.$$

Dakle, treba odrediti A^n za $n \in \mathbb{N}$ što možemo napraviti koristeći dijagonalizaciju.

Karakteristični polinom od A:

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$.

Odredimo pripadne svojstvene vektore

1° $(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ I\cdot(-2) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow \vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0$$

$2^\circ \ (3I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow \vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x_2 \neq 0$$

Dakle, $A = TDT^{-1}$, gdje $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo

$$X_n = A^n X_0 = T D^n T^{-1} X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n & 2 \cdot 3^n \\ 2^n & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & 2^{n+1} - 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 180 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \\ 90 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} Z_n = 180 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \\ L_n = 90 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \end{matrix}$$

Dugoročno,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{Z_n}{L_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{180 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n}{90 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{180 - 80 \cdot \overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\to 0}}{90 - 80 \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}} = \frac{2}{1},$$

tj. omjer broja zečeva i lasica će biti $2:1$.

2. **(DZ)** Niz **Fibonaccijevih brojeva** $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadan je rekurzivno s

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \; F_1 = 1.$$

Odredite formulu za F_n.

Uputa: uvedite niz $G_n := F_{n-1}$ i postupajte slično kao u prethodnom zadatku.

Koristeći niz (G_n), zadanu rekurziju možemo zapisati u obliku sustava dvije linearne rekurzije

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + G_{n-1} \\ G_n = F_{n-1} \end{cases} \quad n \geq 2,$$

uz početne uvjete $F_1 = 1$, $G_1 = 0$. Stavljanjem $X_n := \begin{bmatrix} F_n \\ G_n \end{bmatrix}$ dobiveni sustav zapisujemo matrično

$$X_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} X_{n-1} \quad \Rightarrow \quad X_n = A^{n-1} X_1.$$

Dijagonaliziramo matricu A:

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Stavimo $\varphi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Tada je $\lambda_1 = \varphi$ i $\lambda_2 = -\frac{1}{\varphi} = 1 - \varphi$.

Odredimo pripadne svojstvene vektore:

1° $(\lambda_1 I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varphi - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \varphi & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot\varphi\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{\varphi - 1}^{\frac{1}{\varphi}} & -1 & 0 \\ \underbrace{\varphi^2 - \varphi - 1}_{=0} & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{\varphi} x_1 - x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \varphi x_2$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \varphi x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \varphi \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2 \neq 0$$

$2^\circ \quad (\lambda_2 I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\varphi & -1 & 0 \\ -1 & 1-\varphi & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} / \cdot (1-\varphi) \\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -\varphi & -1 & 0 \\ \underbrace{\varphi^2-\varphi-1}_{=0} & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = -\varphi x_1$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\varphi x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\varphi \end{bmatrix} \qquad x_1 \neq 0$$

Dakle, $A = TDT^{-1}$, gdje $D = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} -\varphi & -1 \\ -1 & \varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{-\varphi^2-1} \begin{bmatrix} -\varphi & -1 \\ -1 & \varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{\varphi^2+1} \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix}.$$

Slijedi

$$X_n = A^{n-1} X_1 = T D^{n-1} T^{-1} X_1$$

$$= \frac{1}{\varphi^2+1} \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{n-1} & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{\varphi})^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varphi^2+1} \begin{bmatrix} \varphi^n & (-\frac{1}{\varphi})^{n-1} \\ \varphi^{n-1} & (-\frac{1}{\varphi})^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varphi^2+1} \begin{bmatrix} \varphi^{n+1} + (-\frac{1}{\varphi})^{n-1} & \varphi^n + (-\frac{1}{\varphi})^{n-2} \\ \varphi^n + (-\frac{1}{\varphi})^{n-2} & \varphi^{n-1} + (-\frac{1}{\varphi})^{n-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varphi^2+1} \begin{bmatrix} \varphi^{n+1} + (-\frac{1}{\varphi})^{n-1} \\ \varphi^n + (-\frac{1}{\varphi})^{n-2} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{\varphi}{\varphi^2+1}}_{= \frac{\varphi}{\varphi+2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} \varphi^n - (-\frac{1}{\varphi})^n \\ \varphi^{n-1} - (-\frac{1}{\varphi})^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

3. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore operatora

$$A\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2, \quad A(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^\top.$$

Za vektore kanonske baze $(e) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ za $\mathcal{M}_2$ imamo

$$A(E_{11}) = E_{11},\ A(E_{12}) = E_{21},\ A(E_{21}) = E_{12},\ A(E_{22}) = E_{22}$$

pa je matrični prikaz od A u toj bazi

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom:

$$k(\lambda) = \det(\lambda I - A(e)) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \leftarrow$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \leftarrow \quad = (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^3(\lambda+1)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ (kratnost 3), $\lambda_2 = -1$ (kratnost 1)

Svojstveni vektori:

1° $\lambda_1 = 1$

$$(I - A(e))\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ + \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = x_3$$

$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_4 = \gamma$

$\Rightarrow x_3 = \beta$

Svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ su matrice oblike

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0 \end{array}$$

(simetrične matrice iz $\mathcal{M}_2$)

2° $\lambda_2 = -1$

$$(-I - A(e))\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = -x_3 \qquad x_2 = \alpha \Rightarrow x_3 = -\alpha \\ \Rightarrow x_4 = 0 \end{array}$$

Svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = -1$ su matrice oblika

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(antisimetrične matrice iz $\mathcal{M}_2$)

4. Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredite $\mathbf{A}^{3000}$.

Dijagonaliziramo A. Računamo karakteristični polinom:

$$k(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-5 & 2 \\ -4 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 2 \\ \lambda-3 & \lambda-3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$+1\cdot 1$ $\quad +1\cdot 1$

$$= (\lambda-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$+1\cdot(-2)$ $\quad +1\cdot(-1)$

$$= (\lambda-3)^2(\lambda-2)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 3$ (kratnost 3) i $\lambda_2 = 2$ (kratnost 1)

Odredimo pripadne svojstvene vektore:

1° $\lambda_1 = 3$

$(3I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1\cdot(-2) \\ + \\ +1\cdot(-4) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 + x_3$$

$x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta \Rightarrow x_1 = -\alpha + \beta$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -\alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

$2^\circ \ \lambda_2 = 2$

$(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ + \ |\cdot(-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ |\cdot(-1) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_2 = 2x_1 \\ \Rightarrow x_3 = 2x_2 \\ \ \end{array}$$

$x_1 = \alpha \Rightarrow x_2 = 2\alpha, \ x_3 = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 4\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Dakle, $A = TDT^{-1}$, gdje $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

pa slijedi

$$A^{3000} = T D^{3000} T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{3000} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{3000} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{3000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2^{3000} + 2 \cdot 3^{3000} & -2^{3000} + 3^{3000} & 2^{3000} - 3^{3000} \\ -2^{3001} + 2 \cdot 3^{3000} & -2^{3001} + 3^{3001} & 2^{3001} - 2 \cdot 3^{3000} \\ -2^{3002} + 4 \cdot 3^{3000} & -2^{3002} + 4 \cdot 3^{3000} & 2^{3002} - 3^{3001} \end{bmatrix}$$

5. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore operatora zrcaljenja u prostoru s obzirom na ravninu

$$\pi \ldots 3x - 2y + z = 0.$$

Baza u kojoj je najjednostavnije odrediti matrični zapis zadanog operatora jest upravo baza svojstvenih vektora tog operatora i „vidimo" ju odmah zbog geometrijskih svojstava zrcaljenja:

1° svi vektori koji leže u ravnini π prilikom zrcaljenja ostaju fiksni pa su to svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ tog operatora

2° svi vektori okomiti na ravninu π prilikom zrcaljenja se preslikavaju u sebi suprotne vektore pa su to svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = -1$

Budući da je svojstveni potprostor od λ_1 (ravnina π) 2-dimenzionalan, a onaj od λ_2 (normala od π) 1-dimenzionalan, odmah slijedi da su λ_1 i λ_2 jedine svojstvene vrijednosti zadanog operatora.

Za svojstveni vektor pridružen λ_2 uzmimo jedinični vektor normale od π, $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$, za jedan svojstveni vektor pridružen λ_1 uzmimo (neki) jedinični vektor smjera od π, $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{j} + 2\vec{k})$, dok za drugi možemo uzeti njihov vektorski produkt:

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}}\left(-5\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}\right).$$

Dakle, zadani se operator dijagonalizira na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} 3/\sqrt{14} & 0 & -5/\sqrt{70} \\ -2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{5} & -6/\sqrt{70} \\ 1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{14} & 0 & -5/\sqrt{70} \\ -2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{5} & -6/\sqrt{70} \\ 1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} \end{bmatrix}^{-1}.$$

6. Ako za matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ vrijedi da je zbroj elemenata u svakom njenom retku (ili stupcu) jednak c, dokažite da je c svojstvena vrijednost te matrice.

BSOMP da je zbroj elemenata u svakom stupcu od A jednak c. Tada za karakteristični polinom od A vrijedi

$$K(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |\cdot 1 \\ + \quad |\cdot 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}}_{=c} & \lambda - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}}_{=c} & \cdots & \lambda - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{in}}_{=c} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - c) \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow K(c) = 0$

$\Rightarrow c$ je svojstvena vrijednost od A