2. Determinante

Sadržaj poglavlja

2.1. Definicija determinante

Svakoj je kvadratnoj matrici pridružen skalar — njezina **determinanta**. Taj broj označavamo s $\det \mathbf{A}$ ili pak s $|\mathbf{A}|$. Pri računanju determinanata koristit ćemo i zapise

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ovaj je zapis sličan onome kod matrica. Zato govorimo o elementima determinante, retku ili stupcu determinante, redu determinante, itd.

Determinante ćemo definirati *induktivno*. Krenut ćemo od matrica maloga reda.

Za $n = 1$ i matricu $\mathbf{A} = [a_{11}]$ definiramo

$$\det \mathbf{A} = a_{11}.$$

2.1.1. Determinanta matrice drugoga reda

Za matrice drugoga reda determinanta se definira ovako:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1}$$

Na primjer

$$\begin{vmatrix} 2 & \pi \\ 3 & e \end{vmatrix} = 2e - 3\pi, \qquad \begin{vmatrix} x & 1 \\ -2 & x \end{vmatrix} = x^2 + 2, \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Motivacija — veza s linearnim sustavima. Što je motiviralo ovakvu definiciju determinante? Interesantno je spomenuti da je pojam determinante povijesno prethodio pojmu matrice, a javio se je pri rješavanju *sustava linearnih jednadžbi*.

Napišimo najjednostavniji sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} ax + by &= e, \\ cx + dy &= f. \end{aligned}$$

Njega možemo lako riješiti bilo kojom od elementarnih metoda. Možda je najviše u duhu budućih izlaganja *metoda suprotnih koeficijenata*: pomnožimo prvu jednadžbu brojem d, drugu brojem $-b$ i zbrojimo rezultate. Dobit ćemo ekvivalentnu jednadžbu:

$$(ad - bc)x = ed - bf \implies x = \frac{ed - bf}{ad - bc}.$$

Slično, za drugu nepoznanicu vrijedi

$$(ad - bc)y = af - ce \implies y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Primjećujemo da su i brojnik i nazivnik u ovim izrazima upravo determinante! Zaista

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

Ova veza linearnih sustava i determinanata je utoliko važnija budući da analogne formule vrijede i za sustave višega reda. O tome će biti više riječi u četvrtom poglavlju.

— ◆ —

2.1.2. Determinanta matrica trećega reda

Za matrice reda 3, definicija glasi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Dakako da se račun može nastaviti računajući determinante reda 2:

$$\begin{aligned} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{4}$$

Na primjer

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot 2\cdot 5 + (-1)\cdot 5\cdot(-1) - (-1)\cdot 3\cdot(-3) + 3\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot(-1) = -9.$$

Ovaj nam rastav sugerira kako treba postupiti u općem slučaju.

Minore. Označimo s M_{11} determinantu matrice koju dobijemo brisanjem prvoga retka i prvoga stupca matrice $\mathbf{A}$:

$$M_{11} := \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Takvu determinantu nazivamo **minora**, preciznije, minora elementa a_{11}. Slično, neka su

$$M_{12} := \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{13} := \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

minore elemenata a_{12} odnosno a_{13}. Pomoću minora definiramo **algebarske komplemente** matričnih elemenata,

$$A_{11} := +M_{11}, \qquad A_{12} := -M_{12}, \qquad A_{13} := +M_{13}.$$

Uz ove oznake, definicija determinante trećega reda glasi:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{5}$$

Ista formula, zapisana preko minora, glasi

$$\det \mathbf{A} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}. \tag{6}$$

Ova definicija služi i za računanje determinante, pa kažemo još da smo *determinantu razvili po elementima prvoga retka*.

Izračunajmo kao primjer gore spomenutu determinantu:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-13) + (-4) + 3\cdot(7) = -9.$$

— ◆ —

Pokušajmo sad poopćiti ovaj zapis. Neka je M_{ij} minora elementa a_{ij} početne matrice: determinanta koju dobijemo brisanjem i-tog retka i j-tog stupca. Odgovarajući algebarski komplement iznosi

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Tvrdimo da vrijedi formula analogna (1) za razvoj po svakom retku:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} \tag{7}$$

za svaki $i = 1, 2, 3$, ili čak i za razvoj po stupcima:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} \tag{8}$$

za svaki $j = 1, 2, 3$. Na primjer, za $j = 2$, razvijajući po drugome stupcu dobili bismo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Zaista, nastavljujući ovaj rastav, slijedi

$$\begin{aligned} &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \\ &\quad - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

a ovaj se broj podudara s determinantom računanom u (4).

Sarrusovo pravilo. Za determinante trećega reda, formulu (4) pamtimo iz sljedećeg zapisa kojeg nazivamo **Sarrusovo pravilo**. Prva dva stupca determinante se prepišu iza trećega i potom izmnože po tri broja koja se nalaze na istovrsnim dijagonalama. Padajuće dijagonale nose pozitivan, a rastuće negativan predznak:

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ - \quad - \quad - \end{array} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

2.1.3. Determinanta matrice n-toga reda — Laplaceov razvoj

U općem slučaju, determinanta matrice definira se razvojem po nekom retku, odnosno stupcu, baš kao u formulama (7) i (8). Takav se rastav naziva **Laplaceov razvoj** determinante. Neka je M_{ij} minora, a A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij}. Tad se determinanta matrice reda n definira na način

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} \tag{9}$$

(razvoj po i-tom retku), ili pak s

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} \tag{10}$$

(razvoj po j-tom stupcu)

Izbor predznaka $+$ ili $-$ pamtimo po sljedećoj shemi za matrice reda 3 i 4:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.

Izračunaj determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

► Razvojem po trećem retku i zatim po drugom stupcu dobivamo:

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\left(-2\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = -6\cdot(-1) + 9\cdot 5 = 51. \blacktriangleleft$$

2.2. Svojstva determinanata

Navest ćemo nekoliko najvažnijih svojstava determinanata. Pri tom ćemo zapravo ukazati na algoritam pomoću kojega se determinante mogu jednostavno računati. S obzirom da je naša definicija determinante bila u neku ruku *induktivna* — determinanta je definirana pomoću determinanata nižega reda — metoda će matematičke indukcije biti temeljna pri dokazivanju svojstava determinanata.

Sljedeće tvrdnje bit će iskazane za *retke* determinante. Napomenimo da potpuno identične tvrdnje vrijede i ako riječ *redak* zamijenimo sa *stupac*.

Teorem 1.

Ako matrica $\mathbf{A}$ ima redak sastavljen od samih nula, onda je $\det \mathbf{A} = 0$.

Dokaz. Razvojem po tom retku tvrdnja neposredno slijedi. Primijetimo da determinantu možemo razviti i po nekom drugom retku (ili stupcu!) i primijeniti indukciju!

Teorem 2.

Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali.

Dokaz. Za matrice reda 2 tvrdnja vrijedi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.$$

Pokažimo u općem slučaju tvrdnju za determinantu gornje trokutaste matrice. Ona ima oblik

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Razvojem po prvome stupcu dobivamo:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|\mathbf{A}'|$$

i možemo nastaviti razvijajući manju determinantu $|\mathbf{A}'|$ (i sve ostale nakon nje) ponovo po prvome stupcu. Dobit ćemo u konačnom rezultatu umnožak dijagonalnih elemenata. Druga je mogućnost da već nakon prvoga koraka primjenimo indukciju: dobivena matrica $\mathbf{A}'$ je reda $n-1$ i za nju vrijedi induktivna pretpostavka: njezina determinanta jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata: $\mathbf{A}' = a_{22}\cdots a_{nn}$, čime je tvrdnja dokazana.

Primjer 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 12\pi, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 24.$$

Teorem 3.

Ako matrica $\mathbf{A}$ ima dva jednaka retka, onda je $\det \mathbf{A} = 0$.

Dokaz. Indukcijom. Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

i tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve determinante reda n. Neka je $\mathbf{A}$ reda $n+1$ s dva jednaka retka. Neka su to i-ti i j-ti redak. Razvijmo determinantu po bilo kojem od preostalih redaka, recimo, k-tom, $k \neq i$, $k \neq j$, (ili po bilo kojem stupcu!)

$$\det \mathbf{A} = \sum_{l=1}^{n+1} (-1)^{k+l}a_{kl}M_{kl}.$$

Ovdje je M_{kl} determinanta matrice reda n čija su dva retka jednaka, a takva je po pretpostavci indukcije jednaka nuli. Zato je i $\det \mathbf{A} = 0$.

Teorem 4.

Transponiranjem matrice vrijednost determinante se ne mijenja:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top.$$

Dokaz. Indukcijom, poput prethodnoga. Za matrice drugoga reda imamo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Umjesto da ispisujemo korak indukcije prelazeći s matrica reda n na matrice reda $n+1$, dovoljno će biti opisati prijelaz na matrice reda 3. Opći slučaj nimalo se ne razlikuje od ovog (osim što mu je zapis složeniji). Neka je $\mathbf{A}$ matrica reda 3. Determinantu transponirane matrice razvijamo po prvome retku:

$$\det \mathbf{A}^\top = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Na ovome mjestu koristimo pretpostavku indukcije: u minorama reda 2 možemo zamijeniti retke i stupce.

$$\det \mathbf{A}^\top = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Posljednja jednakost vrijedi jer je to upravo rastav determinante po prvome stupcu!

Teorem 5.

Determinanta se množi skalarom tako da se jedan (bilo koji) njezin redak množi tim skalarom.

Dokaz. Neka je $\mathbf{A}$ početna matrica, $\mathbf{A}'$ matrica u kojoj je jedan — recimo, prvi — redak pomnožen skalarom λ. Tad vrijedi

$$\det \mathbf{A}' = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{1j})A_{1j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = \lambda \det \mathbf{A}.$$

Ovo svojstvo koristi se obično tako da se zajednički faktor nekoga retka ili stupca izluči ispred determinante! Tako na primjer imamo

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 5 & 20 & -15 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

U prvom koraku izlučen je broj 5 iz drugoga retka, u drugom broj 4 iz drugoga stupca determinante.

Teorem 6.

Rastave li se svi elementi nekoga retka matrice na zbroj dvaju elemenata, onda je determinanta jednaka zbroju dviju odgovarajućih determinanata.

Primjer 3.

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3x-3 & -x+4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3x & -x \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

(prvi redak smo rastavili na sumu dvaju), ili

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & x+3 & 3 \\ -2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

(drugi stupac smo rastavili na sumu dvaju).

Dokaz. Moramo pojasniti što se želi kazati ovim svojstvom. Pri tom ćemo koristiti zapis u kojem redak matrice (determinante) prikazujemo u obliku vektora. Neka je baš prvi redak onaj o kojem priča ovo svojstvo. Tad moramo pokazati da vrijedi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1'+\mathbf{a}_1'' \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1'' \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}.$$

Ovdje je svaki element prvog retka prikazan u obliku sume dvaju elemenata. Rastavom determinante po tom retku dobivamo

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}' + a_{1j}'')A_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}'A_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}''A_{1j} = \det \mathbf{A}' + \det \mathbf{A}''. \end{aligned}$$

Teorem 7.

Ako zamijenimo dva retka matrice, determinanta mijenja predznak.

Dokaz. Pretpostavimo da želimo zamijeniti i-ti i j-ti redak matrice $\mathbf{A}$, dok svi ostali ostaju nepromijenjeni. Da dokažemo svojstvo, krenut ćemo od matrice koja ima sve retke jednake onima od matrice $\mathbf{A}$, osim što su i-ti i j-ti redak međusobno jednaki i odgovaraju zbroju tih redaka matrice $\mathbf{A}$. Dakako da je odgovarajuća determinanta jednaka nuli. Koristeći svojstvo 3, imamo sljedeći račun

$$0 = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix}.$$

Prva i posljednja determinanta ponovo su jednake nuli jer imaju dva jednaka retka. Tako dobivamo:

$$0 = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix},$$

što je i trebalo pokazati.

Teorem 8.

Ako nekom retku matrice dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, vrijednost determinante neće se promijeniti.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se priča odnosi na prvi i na drugi redak matrice. Po prethodnim svojstvima, opravdan je sljedeći račun:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda\mathbf{a}_1 \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \end{vmatrix}$$

i time je ovo svojstvo dokazano.

— ◆ —

Svojstvo iz Teorema 8 osnovno je svojstvo koje koristimo pri izračunu determinante. Naime, uzastopnom primjenom tog svojstva moguće je postići da determinanta matrice poprimi trokutasti oblik.

Primjer 4.

Izračunaj sljedeću determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \\ 8 & 5 & 3 & -8 \end{vmatrix}.$$

► Elementarnim transformacijama možemo postići da se svi elementi u prvom stupcu (osim stožernoga elementa 1 u prvome retku) ponište. Da bismo to postigli, trebamo dodati drugome retku prvi redak pomnožen s 6, te četvrtom retku prvi redak pomnožen s -8. Vrijednost determinante pri tom se neće promijeniti.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -9 & 5 \\ 0 & 20 & -53 & 29 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & -19 & 75 & -48 \end{vmatrix}$$

Nakon ovog postupka, determinantu rastavljamo po prvom stupcu (koji sadrži samo jedan element različit od nule):

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 20 & -53 & 29 \\ 3 & 2 & -6 \\ -19 & 75 & -48 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 22 & -19 \\ 3 & 2 & -6 \\ -19 & 75 & -48 \end{vmatrix}.$$

Pri posljednjoj transformaciji dodali smo prvom retku treći, da bismo dobili jednostavniji stožerni element s kojim ćemo nastaviti račun. Pomnožimo prvi redak s -3 i dodajmo ga drugom. Nakon toga, pomnožimo ga s 19 i dodajmo trećem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 22 & -19 \\ 0 & -64 & 51 \\ 0 & 493 & -409 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -64 & 51 \\ 493 & -409 \end{vmatrix} = 64\cdot 409 - 51\cdot 493 = 1033. \blacktriangleleft$$

Ovaj primjer pokazuje

- da računanje determinanata može biti mukotrpan posao — čak i za determinante malenoga reda;
- da je 'ručno' računanje determinanata umjetnost sama po sebi: različite osobe često će različitim pristupom doći do (istoga!) konačnog rezultata.

Osnovna ideja sastoji se u tome da se determinanta svodi na determinantu trokutaste matrice, međutim izbor transformacija ostaje pri tome poprilično slobodan. Pri ručnome računanju nastojimo izbjeći račun s razlomcima koliko je god to moguće. S druge strane, algoritam prilagođen strojnom računu jednoznačno je određen i ne uzima si toliko sloboda pri izboru transformacija. Mi ćemo taj (Gaussov) algoritam detaljno opisati pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi.

Primjer 5.

Izračunaj determinante:

A. $\begin{vmatrix} 2+a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix}$; **B.** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; **C.** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; **D.** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

► **A.** Drugi redak oduzmemo od prvog:

$$\begin{vmatrix} 2+a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix} = (1.r - 2.r) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 2b - a.$$

B. Uz određeni oprez, u jednom koraku može se sprovoditi nekoliko transformacija tipa 6. Dopušteno je jednom retku *dodati linearnu kombinaciju* nekoliko preostalih redaka:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= (1.r - 2.r - 3.r) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (\text{rastav po prvom retku}) \\ &= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1. \end{aligned}$$

C.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} &= (1.r + (2.r + 3.r + 4.r)) = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 11\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (2.r - 2\times 1.r,\ 3.r - 2\times 1.r,\ 4.r - 2\times 1.r) \\ &= 11\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (\text{trokutasta matrica}) = 11\cdot 3^3 = 297. \end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= (1.r + 4.r,\ 2.r + 3.r) = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 9^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (4.r - 5\times 1.r,\ 3.r - 5\times 2.r) \\ &= 81\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 81. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Primjer 6.

Izračunaj determinante:

A. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$; **B.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; **C.** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

► **A.** 0 (dva identična stupca).

B.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= (2.s - 1.s,\ 3.s - 1.s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

C.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} &= (1.r + (2.r + 3.r)) = \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y & 2x+2y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \\ &= (2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = (2.s - 1.s,\ 3.s - 1.s) \\ &= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} x & x-y \\ -y & -x \end{vmatrix} \\ &= 2(x+y)(-x^2 - y^2 + xy) = -2(x^3 + y^3). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Teorem 9.

(Binet–Cauchyjev teorem) Determinanta umnoška dviju matrica jednaka je umnošku determinanata:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Dokaz. Općeniti dokaz nećemo sprovoditi. Pokazat ćemo njegovu ideju na matricama reda 2.

Neka su to matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Promotrimo sad matricu $\mathbf{R}$ reda 4 dobivenu na način:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Cilj nam je pokazati da za njezinu determinantu vrijedi $|\mathbf{R}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$, baš kao i $|\mathbf{R}| = |\mathbf{AB}|$.

Prvu je jednakost jednostavnije pokazati. Dovoljno je razviti determinantu matrice $\mathbf{R}$ po prvome retku:

$$|\mathbf{R}| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ -1 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

i determinante reda 3 ponovo po prvome retku:

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}| &= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{12} & a_{21} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da vrijedi $|\mathbf{R}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$. Da bismo pokazali da vrijedi $|\mathbf{R}| = |\mathbf{AB}|$, transformirat ćemo matricu $\mathbf{R}$ koristeći elementarne transformacije:

- pomnožimo treći redak s a_{11} i dodajmo ga prvom,
- pomnožimo četvrti redak s a_{12} i dodajmo ga prvom,
- pomnožimo treći redak s a_{21} i dodajmo ga drugom,
- pomnožimo četvrti redak s a_{22} i dodajmo ga drugom.

Kao rezultat, dobit ćemo matricu

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Ona ima istu determinantu kao i matrica $\mathbf{R}$. S druge strane, u njoj prepoznajemo elemente umnoška matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Ako označimo $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, onda je gornja matrica jednaka:

$$\mathbf{R}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Rastavom po prvome stupcu i potom ponovo po prvome stupcu dobivamo

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{R}'| = (-1)\begin{vmatrix} 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{21} & c_{22} \\ -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{C}| = |\mathbf{AB}|.$$

Za matricu reda n postupak je istovjetan, no zapis kompliciraniji. Mi ćemo taj dokaz preskočiti. Nakon što u sljedećem poglavlju upoznamo dodatna svojstva matrica, dat ćemo jednostavniji dokaz ovog teorema.

2.3. Računanje determinanata n-toga reda

Ne postoji općeniti postupak koji bi bio koristan pri računu determinanata n-toga reda. Najčešće se koristimo svojstvima determinanata bilo u pokušaju da ih svedemo na trokutasti oblik, bilo na oblik pogodan za Laplaceov razvoj, bilo da uočimo vezu između determinante i sličnih determinanata manjega reda. Taj je problem složen i zahtijeva velik nivo apstrakcije da bi se uočile zakonitosti među elementima početne determinante i onih koje dobivamo u postupku računanja.

Osvrnut ćemo se na najčešće metode računanja ovih determinanata.

2.3.1. Svođenje na trokutastu formu

Determinantu svodimo na gornju (ili donju) trokutastu formu bilo rastavom po nekome retku, bilo koristeći elementarne transformacije.

Primjer 7.

Izračunaj sljedeće determinante reda n:

A. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$; **B.** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{vmatrix}$.

► **A.** Determinantu rastavljamo po prvom stupcu:

$$(-1)^{n+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}.$$

B. Determinantu rastavljamo po prvom stupcu

$$\begin{aligned} D &= \alpha\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\beta\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \end{vmatrix} \\ &= \alpha^n + (-1)^{n+1}\beta^n. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Primjer 8.

Izračunaj sljedeće determinante:

A. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n+1 \end{vmatrix}$; **B.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ -2 & 0 & 6 & \dots & 2n \\ -2 & -4 & 0 & \dots & 2n \\ \vdots \\ -2 & -4 & -6 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

C. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \\ 1 & 2 & 5 & \dots & 2n-1 \\ 1 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 \\ \vdots \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-2 \end{vmatrix}$; **D.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$, $a_1, \dots, a_n \neq 0$.

► **A.**

$$D = \left(\begin{array}{c}\text{od svakog retka osim} \\ \text{prvog oduzmemo prvi}\end{array}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = 2(n-1)!$$

(determinanta gornje trokutaste matrice).

B.

$$D = 2^n\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c}\text{svakom retku} \\ \text{dodamo prvi}\end{array}\right) = 2^n\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 2^n n!.$$

C. Od svakoga retka oduzmemo prvi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

D. Od prvog retka oduzmemo drugi podijeljen s a_1, zatim treći podijeljen s a_2 itd. Dobit ćemo trokutastu matricu:

$$D = \begin{vmatrix} -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = -a_1a_2\cdots a_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right). \blacktriangleleft$$

2.3.2. Korištenje rekurzijskih formula

Razvojem po nekom retku ili stupcu moguće je ponekad determinantu reda n izraziti s pomoću istih determinanata reda $n-1$. Ponavljajući tu formulu unatrag, dobivamo vrijednost tražene determinante.

Primjer 9.

Izračunaj determinante reda n:

A. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **B.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$; **C.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$.

► Označimo tražene determinante s Δ_n.

A. Rastavom po prvom stupcu dobivamo

$$\Delta_n = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 - \Delta_{n-1}.$$

Iz ove jednakosti slijedi dalje

$$\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1} = 1 - (1 - \Delta_{n-2}) = \Delta_{n-2}.$$

Za osnovu uzimamo $n = 3$ (to je prvi n za koji determinanta ima karakterističan oblik koji vrijedi potom za svaki veći broj n):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Zato je $\Delta_{2n+1} = \Delta_3 = 1$. Za parne indekse vrijedi $\Delta_{2n} = \Delta_4 = 1 - \Delta_3 = 0$.

B. Ponovo rastavom po prvom stupcu pa potom po prvom retku dobivamo rekurzijsku relaciju $\Delta_n = -\Delta_{n-2}$. S obzirom da je $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = 0$, dobivamo $\Delta_{2n+1} = 0$, $\Delta_{2n} = (-1)^n$.

C. Determinantu možemo prikazati kao zbroj dviju determinanata, cijepajući posljednji stupac na zbroj dvaju stupaca:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$$

U prvoj determinanti ćemo od svakog retka oduzeti posljednji i tako dobiti trokutastu determinantu. Drugu determinantu rastavljamo po posljednjem stupcu.

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + n\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} \\ &= (n-1)! + n\Delta_{n-1}. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \Delta_n &= n\Delta_{n-1} + (n-1)! \\ &= n[(n-1)\Delta_{n-2} + (n-2)!] + n!\cdot\frac{1}{n} \\ &= n(n-1)[(n-2)\Delta_{n-3} + (n-3)!] + n!\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \\ &\ \ \vdots \\ &= n!\Delta_1 + n!\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \\ &= n!\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

— ◆ —

Primjer 10.

Izračunaj Vandermondeovu determinantu

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

► Stavimo u ovoj determinanti nepoznanicu x umjesto broja x_n, i promotrimo je kao funkciju od x:

$$P(x) = W(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x^2 \\ \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Razvojem determinante po posljednjem stupcu zaključujemo da je $P(x)$ polinom stupnja $n-1$. Vrijedi $P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_{n-1}) = 0$, jer odgovarajuće determinante imaju dva jednaka stupca. Zato je $P(x) = C(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})$, gdje je C vodeći koeficijent (uz potenciju x^{n-1}). U rastavu po posljednjem stupcu prepoznajemo taj koeficijent: to je identična determinanta reda $n-1$. Tako dobivamo

$$P(x) = W(x_1, \ldots, x_{n-1})(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

i odavde, stavljajući $x = x_n$,

$$\begin{aligned} W(x_1, \ldots, x_n) = P(x_n) &= (x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})W(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= \prod_{i<n}(x_n - x_i)W(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= \prod_{i<n}(x_n - x_i)\prod_{i<n-1}(x_{n-1} - x_i)W(x_1, \ldots, x_{n-2}) \\ &= \prod_{i<j}(x_j - x_i). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

— ◆ —

U slučaju kada se determinanta reda n izražava pomoću determinanata reda $n-1$ i reda $n-2$, postupak je nešto složeniji. Pretpostavimo da determinante zadovoljavaju sljedeću rekurzijsku jednadžbu:

$$\Delta_n = p\Delta_{n-1} + q\Delta_{n-2} \tag{11}$$

gdje p i q ne ovise o n. Za nju kažemo da je **linearna rekurzijska jednadžba drugoga reda**. Pokažimo kako se nalazi njeno rješenje.

Najprije riješimo pripadnu **karakterističnu jednadžbu**

$$\lambda^2 = p\lambda + q.$$

Ova kvadratna jednadžba ima uvijek dva rješenja λ_1 i λ_2 (koja mogu biti i kompleksni brojevi). Sada razlikujemo dva slučaja:

1° $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Rješenje relacije (11) tada ima oblik

$$\Delta_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \tag{12}$$

gdje su C_1 i C_2 dvije konstante koje nalazimo iz poznatih vrijednosti determinante Δ_n za $n = 1$ i $n = 2$ (ili pak $n = 2$ i $n = 3$). Te vrijednosti uvrstimo u (12) i iz dobivenog sustava odredimo C_1 i C_2.

2° $\lambda_1 = \lambda_2$. Rješenje relacije (11) tada ima oblik

$$\Delta_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n. \tag{13}$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo kao i prije.

Primjer 11.

Izračunaj vrijednost determinante n-toga reda

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

► Razvijmo determinantu po prvom stupcu:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4\Delta_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}. \end{aligned}$$

Dobili smo sljedeću rekurzijsku relaciju drugoga reda:

$$\Delta_n = 4\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 = 4\lambda - 3$$

s rješenjima $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Zato je

$$\Delta_n = C_1 3^n + C_2\cdot 1^n = 3^n C_1 + C_2.$$

Za $n = 1$ vrijedi $\Delta_1 = 4$, za $n = 2$ dobivamo $\Delta_2 = 13$. Odavde

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 3C_1 + C_2 \\ 13 &= 9C_1 + C_2 \end{aligned}\right\} \implies C_1 = \frac{3}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Tako dobivamo

$$\Delta_n = \frac{3}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}. \blacktriangleleft$$