Linearna algebra - 13. auditorne vježbe

1. Odredite udaljenost i kut među vektorima

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

u $\mathcal{M}_2$ sa skalarnim produktom

$$\langle \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^\top).$$

2. Neka je $L = [\{(1,0,0),\ (0,-1,1),\ (5,-2,2)\}]$ potprostor od $\mathbb{R}^3$ i $\mathbf{x} = (1,1,1)$. Odredite ortogonalnu projekciju vektora $\mathbf{x}$ na potprostor L te udaljenost vektora $\mathbf{x}$ od L.

3. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom dani su vektori $\mathbf{a}_1 = (1,2,2)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-2,0)$ i $\mathbf{a}_3 = (-1,0,1)$. Ispitajte jesu li ti vektori linearno nezavisni te ih ortonormirajte.

4. **(Parsevalova jednakost)** Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ ortonormirani vektori iz unitarnog prostora U nad $\mathbb{R}$. Dokažite da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\|\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

5. Nađite ortonormiranu bazu u kojoj je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dijagonalna.

6. Neka je $\mathbf{v}$ jedinični vektor u $\mathbf{R}^3$. Tada je $\mathbf{v}^\top\mathbf{v} = 1$. Neka je zadana i matrica $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$.

(a) Dokažite da vrijedi $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$.

(b) Dokažite da je matrica $\mathbf{H}$ simetrična.

(c) Dokažite da je matrica $\mathbf{H}$ ortogonalna.