Linearna algebra - 11. auditorne vježbe

1. Neka je $A\colon V^2 \to V^2$ operator rotacije oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{3}$.

   (a) Odredite $A(\mathbf{i})$ i $A(\mathbf{j})$.

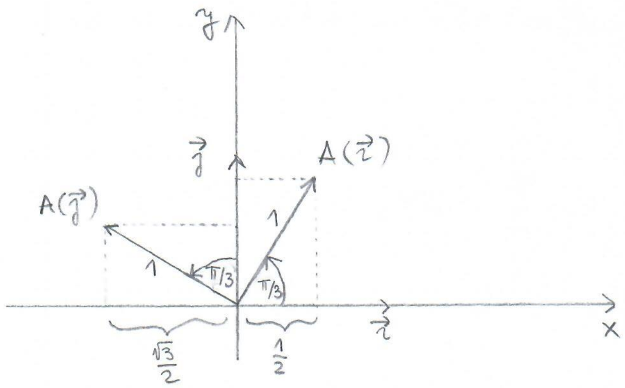
   (b) Odredite matrični prikaz od A u kanonskoj bazi.

   (c) Transponirajte matricu iz prethodnog podzadatka te odredite geometrijsku interpretaciju dobivene matrice.

   (d) Je li operator A injekcija? Je li surjekcija? Bijekcija?

   (e) Dokažite da za operator A vrijedi $A^{-1} = A^5$. Potkrijepite dokaz odgovarajućom slikom.

(a)



$$A(\vec{i}) = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$A(\vec{j}) = -\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\vec{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

(b)

$$A(e) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(c)

$$A(e)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A(e)^T$ je matrica rotacije za $-\frac{\pi}{3}$, što je upravo A^{-1}

(dakle, $A(e)^T = A(e)^{-1}$, tj. $A(e)$ je ortogonalna matrica)

(d) Regularnost operatora A možemo utvrditi na nekoliko načina:

1° $$\det A(e) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $A(e)$ je regularna matrica pa je i A regularan operator (bijekcija)

2° $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \big| \cdot (-\sqrt{3}) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow r(A(e)) = 2 \Rightarrow r(A) = 2 \Rightarrow$ A je surjekcija $(\operatorname{Im} A = V^2)$

Prema teoremu o rangu i defektu

$$d(A) = \dim V^2 - r(A) = 0,$$

pa slijedi da je A i injekcija, tj. bijekcija.

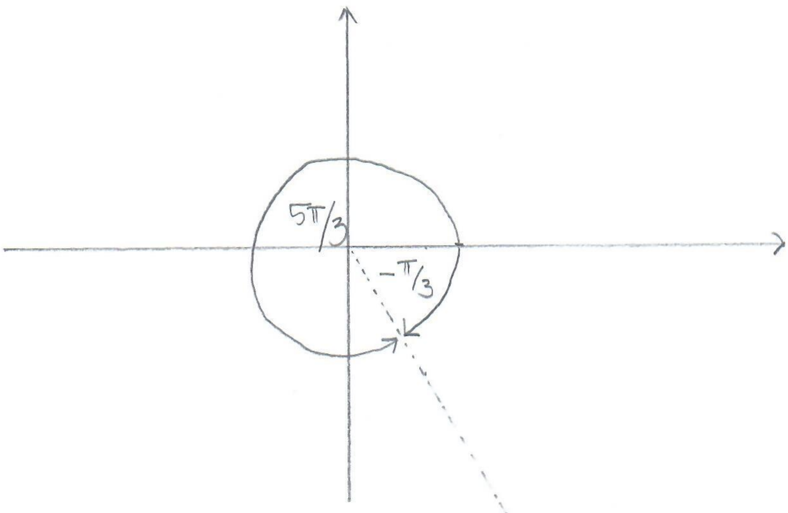
3° Lako slijedi $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ pa je $d(A) = 0$ i prethodnim zaključivanjem opet vidimo da je A bijekcija.

(e) Uočimo da je operator A^6 rotacija za $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$, tj. identiteta. Dakle,

$$A^6 = I_{V^2} \qquad \big| A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^5 = I_{V^2} \circ A^{-1} = A^{-1}$$

Geometrijski, rotacija za kut $\frac{5\pi}{3}$ je isto što i rotacija za kut $-\frac{\pi}{3}$.



2. Neka je $B\colon V^2 \to V^2$ operator zrcaljenja s obzirom na pravac $4x - 3y = 0$.

(a) Odredite prikladnu bazu (od jediničnih vektora) u kojoj ćete odrediti matrični prikaz od B.

(b) Odredite matricu prijelaza iz kanonske baze u bazu iz prethodnog podzadatka. Koja je geometrijska interpretacija dobivene matrice?

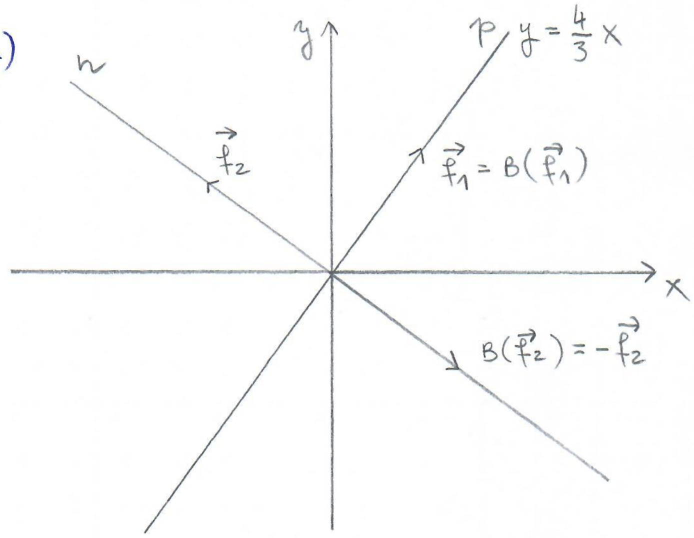
(c) Odredite matrični prikaz od B u kanonskoj bazi.

(d) Odredite $B(\mathbf{i}+\mathbf{j})$.

(e) Je li operator B injekcija? Je li surjekcija? Bijekcija?

(f) Dokažite da je operator B sam sebi inverzan, tj. $B \circ B = I_{V^2}$. Potkrijepite dokaz odgovarajućom slikom.

(a)



Djelovanje od B je najjednostavnije odrediti na vektorima u smjeru osi simetrije i vektorima okomitima na tu os.

Zato za bazu (f) biramo (jedinični) vektor smjera $\vec{f}_1$ zadanog pravca i (jedinični) vektor $\vec{f}_2$ njegove normale:

$$\vec{f}_1 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}, \quad \vec{f}_2 = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

U toj je bazi

$$B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$I_{V^2}(e,f) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(vektore baze (f) zapisujemo pomoću vektora kanonske baze (e))

Uočimo da je $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ pa postoji $\varphi \in \mathbb{R}$ t.d. $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Dakle, matricu $I_{V^2}(e,f)$ možemo shvatiti kao matricu rotacije za kut φ koja osi apscisa i ordinata preslikava redom u pravce p i n (uočimo da je $B(f)$ zapravo matrica zrcaljenja s obzirom na „novu os apscisa").

Nap. Ovaj zaključak ne bismo mogli izvesti da u prethodnom dijelu nismo birali JEDINIČNE vektore za vektore baze (f).
Linearne operatore koji bazu jediničnih i okomitih vektora (tzv. ortonormiranu bazu) ponovno preslikavaju u takvu bazu zovemo **unitarni operatori**.

(c) $B(e) = I_{V^2}(e,f)\,B(f)\,I_{V^2}(f,e) = I_{V^2}(e,f)\,B(f)\,I_{V^2}(e,f)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{bmatrix}$$

(d)
$$B(e)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{25} \\ \frac{31}{25} \end{bmatrix}$$

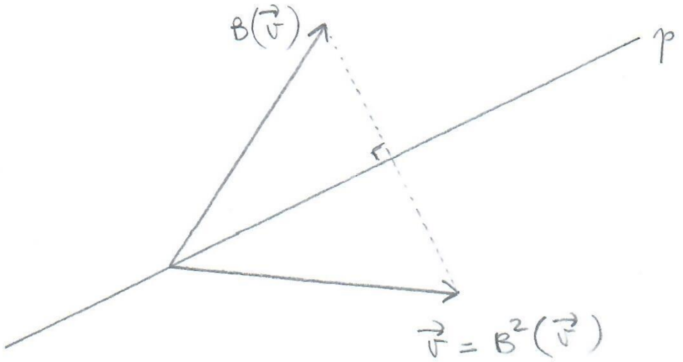
$$\Rightarrow B(\vec{i}+\vec{j}) = \frac{17}{25}\vec{i} + \frac{31}{25}\vec{j}$$

(e) Kao u prethodnom zadatku vidimo da je B regularan operator, npr. $\det(B(f)) = -1 \neq 0$.

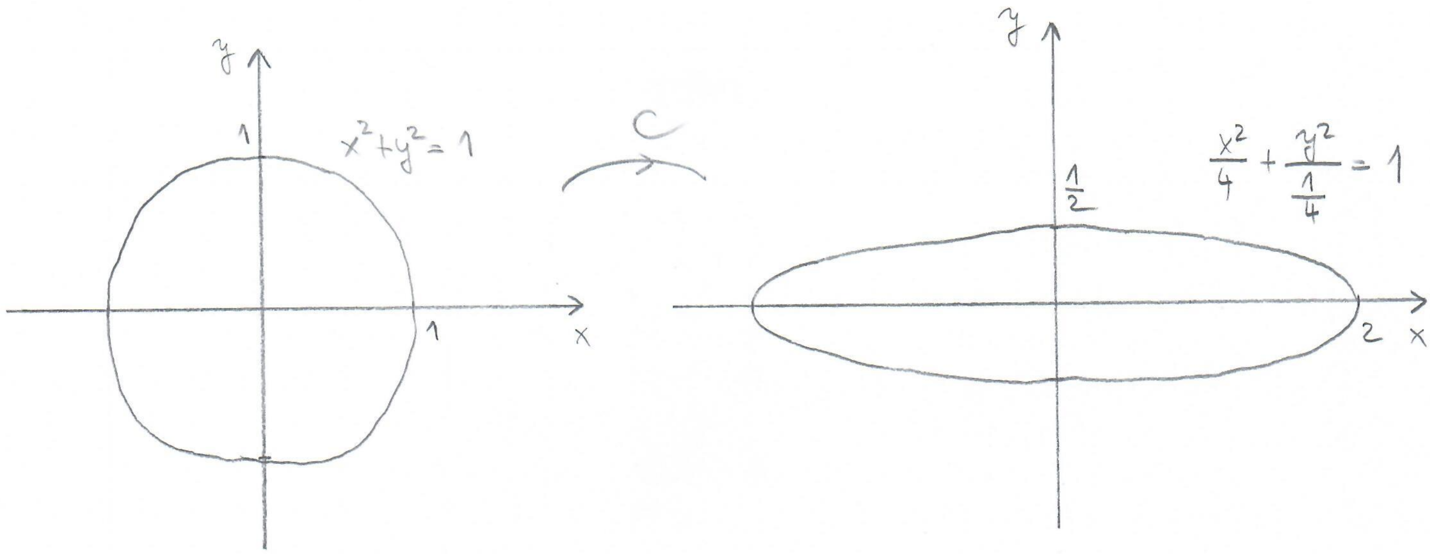
(f) Računamo:

$$(B\circ B)(f) = B(f)\,B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{V^2}(f) \Rightarrow B\circ B = I_{V^2}$$

Geometrijski to odmah vidimo:



3. Odredite linearni operator $C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koji kružnicu $x^2+y^2=1$ preslikava u elipsu $x^2+16y^2=4$.



Tražimo linearni operator koji će poluosi kružnice preslikati u poluosi elipse – taj operator u smjeru x-osi treba djelovati kao homotetija s faktorom 2, dok će u smjeru y-osi biti homotetija s faktorom $\frac{1}{2}$, tj. $C(1,0)=(2,0)$, $C(0,1)=(0,\frac{1}{2})$ pa je matrični prikaz od C u kanonskoj bazi za $\mathbb{R}^2$

$$C(e)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sada za proizvoljan vektor $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ imamo

$$C(e)\,v(e)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix}=(Cv)(e)$$

Dakle, traženi linearni operator je

$$C\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad C(x,y)=\left(2x,\ \tfrac{1}{2}y\right).$$

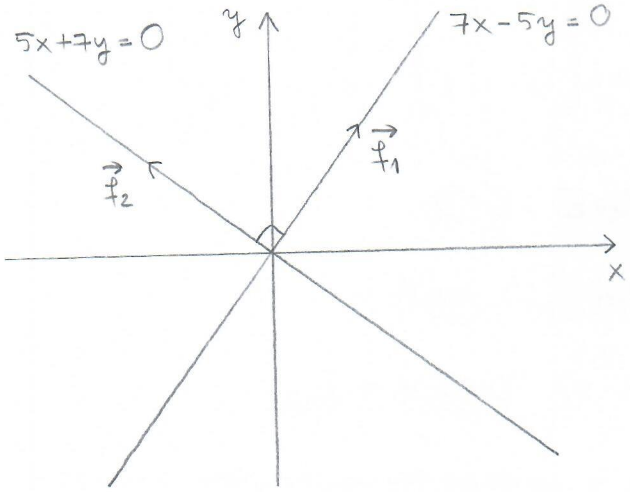
4. Neka su $D, E\colon V^2 \to V^2$ operatori zrcaljenja s obzirom na pravce $7x - 5y = 0$ i $5x + 7y = 0$ redom.

(a) Odredite matrične prikaze tih operatora u kanonskoj bazi.

(b) Dokažite da operatori D i E komutiraju ($D \circ E = E \circ D$) te odredite njihovu kompoziciju.

(c) Geometrijski intepretirajte rezultat iz prethodnog podzadatka. Nacrtajte odgovarajuću sliku.

(a)



Uočimo da su zadani pravci okomiti.

Zato ćemo najprije odrediti matrične zapise zadanih operatora u bazi (f) koja se sastoji od (jediničnih) vektora smjera tih pravaca:

$$\vec{f}_1 = \frac{5}{\sqrt{74}}\vec{\imath} + \frac{7}{\sqrt{74}}\vec{\jmath},$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{7}{\sqrt{74}}\vec{\imath} + \frac{5}{\sqrt{74}}\vec{\jmath}.$$

U toj bazi imamo

$$D(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuća matrica prijelaza je

$$I_{V^2}(e,f) = \frac{1}{\sqrt{74}}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix},$$

pa su matrični zapisi zadanih operatora u kanonskoj bazi

$$D(e) = I_{V^2}(e,f)\,D(f)\,I_{V^2}(f,e) = I_{V^2}(e,f)\,D(f)\,\underbrace{I_{V^2}(e,f)^{-1}}_{=I_{V^2}(e,f)^T}$$

$$= \frac{1}{74}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{74}\begin{bmatrix} -24 & 70 \\ 70 & 24 \end{bmatrix},$$

$$E(e) = \frac{1}{74}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{74}\begin{bmatrix} 24 & -70 \\ -70 & -24 \end{bmatrix}.$$

(b) Računamo

$$(D \circ E)(f) = D(f)E(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

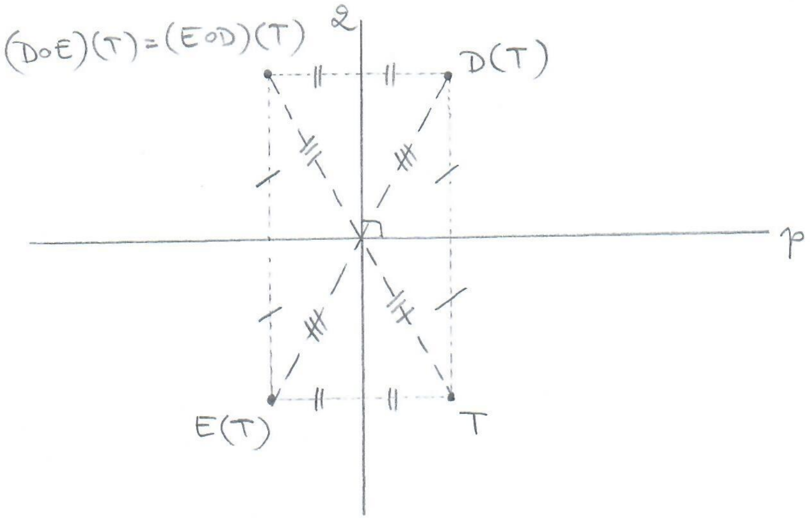
$$(E \circ D)(f) = E(f)D(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (D \circ E)(f) = (E \circ D)(f) \Rightarrow D \circ E = E \circ D.$$

Uočimo da za kompoziciju $D \circ E$ u bazi (f) vrijedi

$$(D \circ E)(f) = -I_{V^2}(f) \Rightarrow D \circ E = -I_{V^2}.$$

(c) Geometrijski, kompozicija zrcaljenja s obzirom na međusobno okomite pravce je centralna simetrija s obzirom na sjecište tih pravaca:



5. Neka je $F\colon V^3 \to V^3$ operator ortogonalne projekcije na ravninu $x + 2y + 3z = 0$.

(a) Odredite prikladnu bazu u kojoj ćete odrediti matrični prikaz od F.

(b) Odredite matricu prijelaza iz kanonske baze u bazu iz prethodnog podzadatka.

(c) Odredite matrični prikaz od F u kanonskoj bazi.

(d) Geometrijskim argumentom pokažite da su oba dobivena matrična prikaza od F idempotentne matrice.

(e) Je li F injekcija? Surjekcija, bijekcija?

(f) Neka je $G\colon V^3 \to V^3$ operator zrcaljenja s obzirom na istu ravninu. Odredite matrični zapis od G u kanonskoj bazi.

(a) Odredit ćemo matrični prikaz od F u bazi koja se sastoji od (jediničnog) vektora normale zadane ravnine, jednog njenog vektora smjera i njihovog vektorskog produkta:

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}), \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{i} + \vec{j}),$$

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}}(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}).$$

U toj bazi imamo $F(\vec{f}_1) = \vec{0}$, $F(\vec{f}_2) = \vec{f}_2$, $F(\vec{f}_3) = \vec{f}_3$ pa je

$$F(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$I_{V^3}(e,f) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}$$

Budući da su stupci ove matrice jedinični i međusobno okomiti vektori, ona je ortogonalna, tj.

$$I_{V^3}(e,f)^{-1} = I_{V^3}(e,f)^T$$

(c) $F(e) = I_{V^3}(e,f)\,F(f)\,I_{V^3}(f,e) = I_{V^3}(e,f)\,F(f)\,I_{V^3}(e,f)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 65 & -10 & -15 \\ -10 & 50 & -30 \\ -15 & -30 & 25 \end{bmatrix}$$

(d) Za operator F i proizvoljan vektor $\vec{v} \in V^3$ vrijedi:

$$(F \circ F)(\vec{v}) = F(\underbrace{F\vec{v}}) = F\vec{v}$$

ovo je vektor
koji već pripada ravnini
na koju projiciramo

$$\Rightarrow F \circ F = F \Rightarrow (F \circ F)(g) = F(g) \Rightarrow (F(g))^2 = F(g),$$

tj. za bilo koju bazu (g) prostora V^3 vrijedi da je matrični zapis od F u toj bazi idempotentna matrica.

(e) F nije regularan operator. Naime, zbog $r(F(f)) = 2$ slijedi $r(F) = 2$ pa F nije surjekcija te $d(F) = 3 - r(F) = 1$ pa F nije ni injekcija.

Uočimo i da je $\mathrm{Im}\,F$ upravo ravnina $x + 2y + 3z = 0$, dok je $\mathrm{Ker}\,F$ upravo pravac kroz ishodište okomit na tu ravninu, tj. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

(f) Uočimo da opet možemo lako odrediti matrični zapis od G u istoj bazi (f) kao u (a) podzadatku:

$$G(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zato imamo

$$G(e) = I_{V^3}(e,f)\, G(f)\, I_{V^3}(e,f)^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 60 & -20 & -30 \\ -20 & 30 & -60 \\ -30 & -60 & -20 \end{bmatrix}$$