1 Algoritmi za matrice

1.1 Osnovna svojstva matrica

Matrica je pravokutni poredak brojeva (dvodimenzijski poredak):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

a_{ij} je element matrice $\mathbf{A}$, i je indeks retka, a j indeks stupca. Transponirana matrica dobiva se zamjenom redaka i stupaca:

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Primjer:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}, \; \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 10 & 40 \\ 20 & 50 \\ 30 & 60 \end{bmatrix}.$$

Vektor je jednodimenzijski poredak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

gdje je x_i element vektora, a i indeks retka. Vektor je jednostupčana matrica, odnosno matrica dimenzije $n \times 1$. Transpozicija vektora daje jednorednu matricu:

$$\mathbf{x}^t = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Dvodimenzijska matrica $\mathbf{A}$ dimenzija $m \times n$ može se prikazati po stupcima:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix},$$

gdje su stupčasti vektori

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ a_{3m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix},$$

ili po retcima:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^t \\ \mathbf{b}_2^t \\ \mathbf{b}_3^t \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^t \end{bmatrix},$$

uz

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{3n} \end{bmatrix} \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Primjer:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^t \\ \mathbf{b}_2^t \end{bmatrix}$$

Jedinični vektor $\mathbf{e}_i$ ima u i-tom retku jedinicu, a u ostalim recima nule:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nul-matrica ima sve elemente jednake nuli, isto kao i *nul-vektor*:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

U primjeni se često javljaju *kvadratne matrice* (dimenzija $n \times n$), od kojih su neke posebno važne. *Dijagonalna matrica* ima elemente $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jedinična matrica (oznaka $\mathbf{E}$ ili $\mathbf{I}$) je dijagonalna matrica čiji elementi na glavnoj dijagonali imaju vrijednost jedan: $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Jedinična matrica sastavljena je od jediničnih vektora:

$$\mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}.$$

Permutacijska matrica $\mathbf{P}$ dobiva se permutacijom jediničnih vektora matrice $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{i_1} & \mathbf{e}_{i_2} & \mathbf{e}_{i_3} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n} \end{bmatrix},$$

gdje je $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n)$ jedna od permutacija indeksa $(1, 2, 3, \ldots n)$.

Gornja trokutasta matrica $\mathbf{U}$ ima sve elemente ispod dijagonale jednake nuli, tj. $u_{ij} = 0$ za $i > j$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & ... & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & ... & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Posebni slučaj gornje trokutaste matrice je matrica s $u_{ii} = 1$. *Donja trokutasta matrica* $\mathbf{L}$ ima elemente iznad dijagonale jednake nuli, tj. $l_{ij} = 0$ za $i < j$ (posebni je slučaj matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali, $l_{ii} = 1$):

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & ... & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima jednake elemente simetrično na dijagonalu, tj. $a_{ij} = a_{ji}$. Za simetričnu matricu vrijedi $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$.

1.2 Osnovne operacije s matricama

Operacije s matricama određene su operacijama nad njihovim elementima. Elementi mogu biti cijeli brojevi, realni brojevi, kompleksni brojevi, prirodni brojevi po modulu nekog prostog broja i sl. Ukoliko nije drugačije naznačeno, promatrat ćemo operacije nad matricama čiji su elementi cijeli ili realni brojevi.

1.2.1 Zbrajanje matrica

Zbrajati se mogu matrice jednakih dimenzija:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1, \ldots n,\ j = 1, \ldots, m$$

Nul-matrica je identitet za zbrajanje:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Zbrajanje je komutativno. *Oduzimanje matrica* može se svesti na zbrajanje:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

1.2.2 Množenje matrica skalarom

Množenje matrice skalarom λ podrazumijeva množenje svakog elementa matrice:

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$$

Uz $\lambda = -1$ dobiva se

$$-1 \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

1.2.3 Množenje matrica

Množiti se mogu matrice koje su kompatibilne u smislu množenja: u izrazu $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ broj stupaca matrice $\mathbf{A}$ mora biti jednak broju redaka matrice $\mathbf{B}$. Ako je matrica $\mathbf{A}$ dimenzija $n \times m$, matrica $\mathbf{B}$ dimenzija $m \times p$, tada je matrica umnoška $\mathbf{C}$ dimenzija $n \times p$, a elementi su definirani kao

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

```
za (I=1, I++, I<=N) {
        za (K=1, K++, K<=P) {
                C[I,K]=0;
                za (J=1, J++, J<=M)
                        C[I,K]=C[I,K]+A[I,J]*B[J,K];
        }
}
```

Ukoliko su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice, tada je $m = p = n$. Množenje dviju kvadratnih matrica obavlja se uz n^3 množenja i $n^2(n-1)$ zbrajanje, te je složenost množenja prema tome $O(n^3)$.

Jedinična matrica je identitet za množenje:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$$

Množenje s nul-matricom daje nul-matricu:

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Množenje nije komutativno, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (osim u posebnim slučajevima). Za operaciju množenja vrijede sljedeće zakonitosti:

- asocijativnost zbrajanja i množenja:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

- distributivnost množenja nad zbrajanjem:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$$

Množenje matrice vektorom daje vektor, $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \end{aligned}$$

Promotrimo što se dobiva sljedećim umnoškom:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A}^t = \mathbf{y}^t.$$

Prema tome:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y}^t = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^t$$

$$\mathbf{y}^t = \mathbf{x}^t \mathbf{A}^t$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^t = \mathbf{x}^t \mathbf{A}^t$$

Može se pokazati da općenito za kvadratne matrice vrijedi

$$(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$$

Skalarni ili *unutarnji produkt* dvaju vektora daje skalarnu vrijednost:

$$\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Vanjski produkt dvaju vektora daje matricu:

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{bmatrix}.$$

Euklidska norma $\|\mathbf{x}\|$ vektora $\mathbf{x}$ u n-dimenzijskom euklidskom prostoru je

$$\|\mathbf{x}\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2\right)^{1/2} = \left(\mathbf{x}^t\mathbf{x}\right)^{1/2}.$$

1.2.4 Inverzija matrice

Inverzija kvadratne matrice $\mathbf{A}$ dimenzija $n \times n$ je matrica $\mathbf{A}^{-1}$ istih dimenzija, za koju vrijedi

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Mnoge matrice nemaju inverziju i zovu se *singularne matrice*. Matrice koje imaju inverziju su *nesingularne matrice*. Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nesingularne matrice, tada vrijedi

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Inverzija je komutativna s transponiranjem:

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^t = \left(\mathbf{A}^t\right)^{-1}.$$

1.2.5 Rang matrice

Vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ su *linearno zavisni* ako postoje koeficijenti $c_1, c_2, \dots, c_n$ (koji nisu svi jednaki nuli) takvi da je

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Primjer: Vektori $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^t$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^t$ i $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 9 \end{bmatrix}^t$ su linearno zavisni jer je

$$2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}.$$

Stupčasti rang matrice $\mathbf{A}$ dimenzija $m \times n$ je broj elemenata najvećeg skupa linearno nezavisnih stupaca matrice $\mathbf{A}$. *Retkovni rang* matrice $\mathbf{A}$ je broj elemenata najvećeg skupa linearno nezavisnih redaka matrice **A**. Osnovno je svojstvo matrica da su im stupčasti i retkovni rangovi *jednaki* i govorimo samo o *rangu matrice*. Prema tome, rang matrice **A** može biti broj u granicama od 0 do $\min(m, n)$.

Nul-matrica ima rang 0. Jedinična matrica $n \times n$ ima rang n. Kvadratna matrica $n \times n$ ima *puni rang* n, ako je nesingularna (ako postoji inverzija matrice). Matrica ima puni rang samo onda ako ne sadrži nul-vektor kao stupac ili redak.

Determinanta matrice Ako je matrica **A** dimenzija $n \times n$ singularna, *determinanta matrice* jednaka je nuli: $\det(\mathbf{A}) = 0$. Determinanta matrice se može definirati rekurzivno uz pomoć podmatrica; podmatrica $\mathbf{A}_{[i,j]}$ dobiva se izostavljanjem i-tog retka i j-tog stupca u matrici **A**. Za determinantu vrijedi:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}, \text{ za } n = 1$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det\left(\mathbf{A}_{[1,1]}\right) - a_{12} \det\left(\mathbf{A}_{[1,2]}\right) + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det\left(\mathbf{A}_{[1,n]}\right)$$

Determinanta matrice ima slijedeća svojstva:

- Ako je bilo koji redak ili stupac od **A** jednak nuli, $\det(\mathbf{A}) = 0$.
- Ako se elementi retka ili stupca pomnože s λ, onda je deteminanta jednaka $\lambda \det(\mathbf{A})$.
- $\det(\mathbf{A})$ se ne mijenja ako se elementi jednog stupca pribroje drugom (isto vrijedi i za retke).
- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^t)$.
- Ako se zamijene bilo koja dva retka ili stupca, determinanta mijenja predznak.

1.2.6 Pozitivno definitne matrice

Kvadratna matrica **A** je *pozitivno definitna* ako za bilo koji vektor **x** različit od **0** (nul-vektora) vrijedi:

$$\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{1.1}$$

Primjer: Matrica **E** je pozitivno definitna:

$$\mathbf{x}^t\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}^t\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0.$$

Ako matrica **A** ima puni rang, onda je $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ pozitivno definitna matrica. To se može pokazati na sljedeći način:

$$\mathbf{x}^t\left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^t\mathbf{A}^t\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x})^t(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| > 0.$$

2 Rješavanje sustava linearnih jednadžbi

Sustav linearnih jednadžbi zadan je u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ako je matrica sustava $\mathbf{A}$ nesingularna i ima inverziju $\mathbf{A^{-1}}$, rješenje se može dobiti množenjem s lijeva:

$$\begin{aligned} \mathbf{A^{-1}}\mathbf{A}\,\mathbf{x} &= \mathbf{A^{-1}}\mathbf{b} \\ \mathbf{E}\,\mathbf{x} &= \mathbf{A^{-1}}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A^{-1}}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Ako su elementi a_{ij} i x_i iz $\mathbb{R}$, postupak rješavanja se, zbog pogrešaka u zaokruživanju, mora izgraditi robusno.

2.1 Postupak LUP

Zadan je sustav linearnih jednadžbi $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Osnovna zamisao postupka LUP je navedena u nastavku.

1. Potrebno je odrediti tri matrice:
    - **P** - permutacijsku matricu,
    - **L** - donju trokutnu matricu s jedinicama na glavnoj dijagonali te
    - **U** - gornju trokutnu matricu,

tako da vrijedi
$$\mathbf{P}\,\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U},$$
što je moguće za svaku nesingularnu matricu.

2. Izvorni sustav se množi s permutacijskom matricom:
$$\mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{b}$$
čime se dobiva
$$\mathbf{L}\,\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{b}.$$

3. Uvodimo pomoćni vektor
$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\,\mathbf{x}$$
i rješavamo donji trokutni sustav
$$\mathbf{L}\,\mathbf{y} = \mathbf{P}\,\mathbf{b}$$
te dobivamo vektor $\mathbf{y}$ postupkom koji se naziva *supstitucija unaprijed* (engl. *forward substitution*).

4. Rješavamo sustav
$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$
i naposljetku dobivamo traženi vektor $\mathbf{x}$ postupkom koji se naziva *supstitucija unatrag* (engl. *back substitution*).

U nastavku će prvo biti pokazani postupci supstitucije unaprijed i unatrag, dok se izvedba dekompozicije matrice sustava na gornju i donju trokutnu matricu razmatra posebice.

2.1.1 Supstitucija unaprijed

Unaprijednom supstitucijom rješava se sustav
$$\mathbf{L}\,\mathbf{y} = \mathbf{P}\,\mathbf{b},$$
odnosno dobiva se vektor $\mathbf{y}$. Desna strana sustava je jedna od permutacija elemenata vektora $\mathbf{b}$. Neka poredak π predstavlja jednu permutaciju indeksa: $\pi[1]$, $\pi[2]$, $\pi[3], \ldots, \pi[n]$. Tada se sustav može napisati kao
$$\begin{array}{lcl}
y_1 & = & b_{\pi[1]} \\
l_{21}y_1 + y_2 & = & b_{\pi[2]} \\
l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 & = & b_{\pi[3]} \\
 & \vdots & \\
l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + l_{n3}y_3 + \cdots + y_n & = & b_{\pi[1n]}
\end{array}$$

Iz ovoga oblika vektor $\mathbf{y}$ se može dobiti na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_{\pi[1]} \\
y_2 &= b_{\pi[2]} - l_{21}y_1 \\
y_3 &= b_{\pi[3]} - (l_{31}y_1 + l_{32}y_2) \\
&\vdots \\
y_n &= b_{\pi[n]} - \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j
\end{aligned}
$$

Asimptotska ocjena složenosti ovoga postupka je $O\left(n^2\right)$.

2.1.2 Supstitucija unatrag

Supstitucijom unatrag rješavamo sljedeći sustav:

$$
\begin{aligned}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1,n-2}x_{n-2} + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1,n}x_n &= \quad y_1 \\
u_{22}x_2 + \cdots + u_{2,n-2}x_{n-2} + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2,n}x_n &= \quad y_2 \\
\vdots \quad & \quad\;\; y \\
u_{n-2,n-2}x_{n-2} + u_{n-2,n-1}x_{n-1} + u_{n-2,n}x_n &= \quad y_{n-2} \\
u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= \quad y_{n-1} \\
u_{n,n}x_n &= \quad y_n
\end{aligned}
$$

Iz toga slijedi postupak jednake asimptotske složenosti $O\left(n^2\right)$:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \tfrac{1}{u_{nn}} y_n \\
x_{n-1} &= \tfrac{1}{u_{n-1,n-1}} \left(y_{n-1} - u_{n-1,n}x_n\right) \\
x_{n-2} &= \tfrac{1}{u_{n-2,n-2}} \left(y_{n-2} - \left(u_{n-2,n-1}x_{n-1} + u_{n-2,n}x_n\right)\right) \\
&\vdots \\
x_1 &= \tfrac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \textstyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)
\end{aligned}
$$

Primjer: Neka je zadan sustav

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1 \\ 12.5 \\ 10.3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}
$$

Potrebno je napraviti dekompoziciju matrice sustava tako da vrijedi $\mathbf{P}\,\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$:

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.571 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1.4 & 2.2 \\ 0 & 0 & -1.856 \end{bmatrix}$$

Nakon rastava matrice sustava, postupcima supstitucije dolazimo do rješenja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.571 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.3 \\ 12.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.3 \\ 6.32 \\ -5.569 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1.4 & 2.2 \\ 0 & 0 & -1.856 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.3 \\ 6.32 \\ -5.569 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 3.0 \end{bmatrix}$$

2.2 Izvođenje LU dekompozicije

Pretpostavimo da je permutacijska matrica $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, odnosno da u postupku dekompozicije ne provodimo zamjenu redaka. Tada je

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}.$$

LU dekompozicija se može obaviti *Gaussovom eliminacijom* na sljedeći način:

- Oduzimamo prvi red matrice $\mathbf{A}$ pomnožen odgovarajućim faktorom od ostalih redova matrice; na taj način svi elementi u prvom stupcu matrice, osim onoga na glavnoj dijagonali, postaju jednaki nuli. Tim postupkom zapravo eliminiramo prvu varijablu iz pripadnih jednadžbi.
- Nakon toga na jednak način oduzimamo drugi redak pomnožen pripadnim faktorima od trećeg i daljih redaka.
- Postupak ponavljamo dok ne dobijemo gornji trokutni oblik, tj. matricu $\mathbf{U}$.
- Matrica $\mathbf{L}$ sastoji se od faktora redova koji su uzrokovali eliminaciju.

Implementacija ove strategije može se definirati rekurzivno; za sustav gdje je $n = 1$ možemo odabrati $\mathbf{L} = \mathbf{E_1}$ te $\mathbf{U} = \mathbf{A}$, odnosno

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}.$$

Za $n > 1$ uvodimo sljedeće oznake:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{v} & \mathbf{A}' \end{bmatrix},$$

gdje su

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{A}$ se može prikazati sljedećim umnoškom:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{v} & \mathbf{A}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \frac{1}{a_{11}}\mathbf{v} & \mathbf{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{A}' - \mathbf{v}\,\mathbf{w}^t \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{A}' - \mathbf{v}\,\mathbf{w}^t \frac{1}{a_{nn}}$ naziva se *Shurov komplement* od $\mathbf{A}$ u odnosu na a_{11}. U koraku rekurzije pretpostavljamo da se Shurov komplement, čija je dimenzija za jedan manja od početne matrice $\mathbf{A}$, može rastaviti na umnožak donje i gornje trokutne matrice:

$$\mathbf{A}' - \mathbf{v}\,\mathbf{w}^t \frac{1}{a_{nn}} = \mathbf{L}'\mathbf{U}'.$$

Tada slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \frac{1}{a_{11}}\mathbf{v} & \mathbf{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{L}'\mathbf{U}' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \frac{1}{a_{11}}\mathbf{v} & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{U}' \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{L}\,\mathbf{U} \end{aligned}$$

Drugim riječima, ako je $\mathbf{L}'$ donja trokutna matrica s jedinicama na dijagonali, tada je to i $\mathbf{L}$; ako je $\mathbf{U}'$ gornja trokutna matrica, to je i $\mathbf{U}$, čime je ovaj postupak moguće provesti rekurzivno. Primijetimo da je LU dekompozicija moguća samo ako su svi elementi matrice sustava na glavnoj dijagonali različiti od nule, odnosno $a_{ii} \neq 0$.

Rekurzivni oblik dekompozicije može se jednostavno prepisati u iterativni oblik.

Budući da nul-elemente matrica $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$ ne moramo zapisivati, kao niti jedinice na dijagonali matrice $\mathbf{L}$,dekomponiranu matricu možemo zapisati u spremnički prostor dovoljan za pohranu jedne matrice dimenzija $n \times n$. Ako za smještaj iskoristimo prostor gdje je početno zapisana matrica $\mathbf{A}$, tada postupak dekompozicije postaje još jednostavniji:

```
za (K = 1, K++, K < N) {
        za (I = K+1, I++, K <= N) {
                A[I,K] /= A[K,K];
                za (J = K + 1, J++, J <= N)
                        A[I,J] -= A[I,K] * A[K,J];
        }
}
```

Primjer: Neka je zadana matrica sustava:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix}$$

Postupak dekompozicije može se prikazati sljedećim koracima:

$$(K = 1) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 16 & 9 & 18 \\ 2 & 4 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$(K = 2) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$(K = 3) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

2.3 Pivotiranje (stožerni razvoj)

2.4 LUP dekompozicija

S obzirom da u matrici sustava elementi na glavnoj dijagonali postaju pivot elementi (s kojima treba dijeliti), razumno bi bilo načiniti barem stupčasti odabir najvećeg elementa, odnosno pivotiranje po stupcima.

Pretpostavimo da je a_{l1} najveći element u prvom stupcu. Matricu $\mathbf{A}$ pomnožimo slijeva permutacijskom matricom $\mathbf{Q}$ tako da se zamijene l-ti i prvi redak:

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{l1} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{v} & \mathbf{A}' \end{bmatrix},$$

gdje su

$$\mathbf{w}^t = \begin{bmatrix} a_{l,2} & a_{l,3} & \cdots & a_{l,n} \end{bmatrix},\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{3n} \end{bmatrix},\ \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

s tim da su elementi a_{lj} zamijenjeni s elementima a_{1j}. Tada možemo pisati

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{l1} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{v} & \mathbf{A}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v} & \mathbf{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{l1} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{A}' - \frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v}\mathbf{w}^t \end{bmatrix}.$$

Element $\mathbf{A}' - \frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v}\mathbf{w}^t$ je Shurov komplement, za kojega pretpostavljamo (u koraku rekurzije) kako se može dekomponirati tako da je

$$\mathbf{P}'\left(\mathbf{A}' - \frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v}\mathbf{w}^t\right) = \mathbf{L}'\mathbf{U}',$$

gdje je permutacijska matrica definirana na sljedeći način (umnožak dvaju permutacijskih matrica je permutacijska matrica):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{P}' \end{bmatrix}\mathbf{Q}.$$

Nadalje možemo pisati

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\,\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{P}' \end{bmatrix} \mathbf{Q}\,\mathbf{A} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{P}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v} & \mathbf{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{l1} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{A}' - \frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v}\mathbf{w}^t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \mathbf{P}'\frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v} & \mathbf{P}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{l1} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{A}' - \frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v}\mathbf{w}^t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \mathbf{P}'\frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v} & \mathbf{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{l1} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{P}'\left(\mathbf{A}' - \frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v}\mathbf{w}^t\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \mathbf{P}'\frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v} & \mathbf{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{l1} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{L}'\mathbf{U}' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \mathbf{P}'\frac{1}{a_{l1}}\mathbf{v} & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{l1} & \mathbf{w}^t \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{U}' \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{L}\,\mathbf{U}
\end{aligned}
$$

Kao i prilikom LU dekompozicije, ako je $\mathbf{L}'$ donja trokutna matrica s jedinicama na dijagonali, tada je to i $\mathbf{L}$; ako je $\mathbf{U}'$ gornja trokutna matrica, to je i $\mathbf{U}$, čime je definiran korak rekurzivnog postupka.

2.5 Inverzija matrice uz pomoć dekompozicije

Uz pomoć LU dekompozicije može se izračunati i inverzija zadane matrice. Izračun inverzije matrice $\mathbf{A}$ dimenzija $n \times n$ svodi se na računanje matrice $\mathbf{X}$ tako da vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{E}_n \\
\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}
\end{aligned}
$$

Matricu $\mathbf{X}$ možemo predstaviti stupčastim vektorima $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$, pa gornji sustav postaje

$$
\mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix},
$$

što daje n nezavisnih sustava:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \mathbf{e}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_n &= \mathbf{e}_n
\end{aligned}
$$

Inverzija se stoga može dobiti rješavanjem gornjih n jednadžbi; pri tome je dekompoziciju potrebno obaviti samo jednom, a nakon toga slijedi n supstitucija unaprijed i unatrag.

Primjerice, ukoliko se zadana matrica rastavlja LUP dekompozicijom, tada je jednom potrebno izračunati matrice $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$ tako da vrijedi

$$\mathbf{L}\,\mathbf{U} = \mathbf{P}\,\mathbf{A},$$

a potom se provodi n supstitucija za $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\,\mathbf{y}_i &= \mathbf{P}\,\mathbf{e}_i \\ \mathbf{U}\,\mathbf{x}_i &= \mathbf{y}_i \end{aligned}$$