Linearna algebra - 9. auditorne vježbe

1. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $W = \{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \mid \mathbf{AX} = \mathbf{XA}\}$. Dokažite da je W potprostor od $\mathcal{M}_2$ i nađite mu dimenziju.

2. Neka je

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Dokažite da je V potprostor od $\mathbb{R}^n$, nađite mu (jednu) bazu i odredite dimenziju.

3. Dokažite da je

$$V = \{p \in \mathcal{P}_4 \mid p'(1) = 0\}$$

potprostor vektorskog prostora $\mathcal{P}_4$ te mu nađite neku bazu i dimenziju. Nadopunite dobivenu bazu do baze vektorskog prostora $\mathcal{P}_4$.

4. Zadan je vektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

te skup

$$M = \{\mathbf{v} \in V^3 \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

(a) Dokažite da je M vektorski prostor te mu odredite bazu i dimenziju.

(b) Odredite geometrijsku interpretaciju skupa M te vektora njegove baze.

(c) Nadopunite bazu za M do baze prostora V^3. Odredite potprostor L razapet vektorima iz te nadopune te odredite njegovu geometrijsku interpretaciju.
(Kažemo da je L **direktni komplement** potprostora M u vektorskom prostoru V^3.)

5. Zadan je skup

$$S = \{1 + t,\ 1 - t,\ t^2 + \lambda t + 1,\ t^3 - t^2\}.$$

Odredite nužne i dovoljne uvjete uz koje je S baza prostora $\mathcal{P}_3$. Zatim zapišite proizvoljni polinom

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

u toj bazi.