Matematička analiza 2

3. poglavlje – Primjena diferencijalnog računa funkcije više varijabli

Tomislav Burić, Lana Horvat Dmitrović, Domagoj Kovačević,
Mervan Pašić, Mate Puljiz, Tomislav Šikić, Igor Velčić, Ana Žgaljić Keko

PUBLISHED BY UNIZG-FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Verzija: 4. travnja 2022.

Sadržaj

3. Primjena diferencijalnog računa funkcij

Nakon što smo se upoznali s osnovnim pojmovima diferencijalnog računa više varijabli kao što su npr. parcijalne derivacije, gradijent, složeno deriviranje, usmjerena derivacija i Teorem srednje vrijednosti, došlo je vrijeme da sve to primijenimo na probleme u praksi.

U ovom ćemo se poglavlju baviti s nekoliko problema. Prvi problem je kako derivirati integral ovisan o parametru koji će se javljati u sklopu matematičkih i stručnih kolegija druge godine koji koriste Fourierovu i Laplaceovu transformaciju. Zatim ćemo se baviti aproksimacijom funkcije koristeći Taylorovu formulu koja ima široku primjenu u fizici i inženjerstvu te čini teoretsku podlogu za računanje i aproksimaciju funkcija dvije varijable. Na kraju se bavimo problemima optimizacije koji se javljaju svuda oko nas, od biologije i inženjerstva do ekonomije i poslovanja. Svaki put kada želimo naći minimum ili maksimum neke funkcije primjenjivat ćemo neki od matematičkih modela za traženje lokalnih, globalnih i uvjetnih ekstrema koje ćemo naučiti u sklopu ovog poglavlja.

3.1 Integrali ovisni o parametru

U području matematičke analize se često koriste funkcije zadane pomoću integrala koje imaju veliku primjenu u inženjerstvu. U ovom ćemo se poglavlju baviti takvim funkcijama i njihovim derivacijama.

Definicija 3.1.1 **Integral ovisan o parametru** je integral oblika

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx.$$

Funkcija $I(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ zadana integralom ovisnom o parametru je funkcija jedne varijable α. ■

Neki primjeri funkcija zadanih integralom su:

$$I_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx, \quad I_2(\alpha) = \int_1^{\alpha^2} \ln(\alpha x)\,dx.$$

Najpoznatije funkcije zadane integralom su Laplaceova transformacija i Fourierova transformacija koje ćete susresti Matematičkoj analizi 3E i ostalim kolegijima viših godina. Laplaceovu transformaciju

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

koristimo kod rješavanja diferencijalnih i integralnih jednadžbi te u analizi električkih krugova dok se Fourierova transformacija

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi sxi}dx$$

koristi kod obrade signala.

Zanima nas kako izračunati derivaciju funkcije $I(\alpha)$ zadane integralom ovisnom o parametru po toj jednoj varijabli odnosno po parametru α. Dakle, želimo izračunati

$$I'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right)$$

i o tome govori sljedeći teorem.

Teorem 3.1.1 — Derivacija funkcije zadane integralom ovisnom o parametru. Neka je

$$I(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx$$

funkcija zadana određenim integral ovisnom o parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ te neka su φ, ψ neprekinuto diferencijabilne funkcije u varijabli α, a f funkcija dviju varijabli x i α,klase C^1 (diferencijabilna je i parcijalne derivacije su neprekinute funkcije). Tada je $I(\alpha)$ diferencijabilna funkcija i vrijedi:

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx \\ &= f[\psi(\alpha),\alpha]\cdot\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha),\alpha]\cdot\varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx \end{aligned}$$

Napomena 3.1 Ako granice ne ovise o α, tada je formula jednostavnija i glasi:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$$

Napomena 3.2 Gornja formula vrijedi i u slučaju kada su jedna ili obje granice integracije beskonačne, uz uvjet da pripadni nepravi integral jednoliko konvergira.

Primjerice:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx = \int_a^{\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$$

tj. postupamo na isti način kao kad su obje granice integracije konačne.

Pogledajmo sada nekoliko primjera.

■ **Primjer 3.1** Ako je $F(\alpha) = \displaystyle\int_2^{\sin\alpha}\frac{\text{tg}(\alpha\text{x})}{x}\text{dx}$, izračunajte $F'(\alpha)$.

Rješenje. Vidimo da je podintegralna funkcija oblika $f(x,\alpha) = \frac{\text{tg}(\alpha x)}{x}$. Uvrstimo u formulu i dobivamo:

$$F'(\alpha) = f(\sin\alpha,\alpha)\cdot(\sin\alpha)' - f(2,\alpha)\cdot(2)' + \int_2^{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\text{tg}(\alpha x)}{x}\right) =$$

$$= \frac{\text{tg}(\alpha\sin\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha + \int_2^{\sin\alpha}\frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\cdot\frac{x}{x}dx = \text{ctg}\alpha\cdot\text{tg}(\alpha\sin\alpha) + \frac{1}{\alpha}\text{tg}(\alpha x)\Big|_2^{\sin\alpha} =$$

$$= \text{ctg}\alpha\cdot\text{tg}(\alpha\sin\alpha) + \frac{1}{\alpha}\text{tg}(\alpha\sin\alpha) - \frac{1}{\alpha}\text{tg}(2\alpha).$$

■

U sljedećem ćemo primjeru pokazati kako se deriviranje integrala po parametru može koristiti i kao metoda za izračunavanje integrala koje ne znamo drugačije eksplicitno riješiti.

■ **Primjer 3.2** Deriviranjem integrala po parametru izračunajte integral $I(a) = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\text{dx}$ gdje je $a > -1$.

Rješenje. Vidimo da granice ne ovise o parametru. Sada računamo derivaciju:

$$I'(a) = \frac{d}{da}\left(\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\text{dx}\right) = \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\right)\text{dx} =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{xe^{-ax}}{xe^x}\text{dx} = \int_0^{\infty}e^{-ax-x}\text{dx} =$$

$$= \frac{e^{-(a+1)x}}{-(a+1)}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{a+1}\left(e^{-(a+1)\infty}-1\right) = \frac{1}{a+1}.$$

Dakle, dobili smo

$$I'(a) = \frac{1}{a+1}.$$

Integriranjem slijedi da je

$$I(a) = \int\frac{1}{a+1}da = \ln(a+1) + C.$$

Uvrštavanjem $a = 0$ dobivamo:

$$I(0) = \int_0^{\infty}\frac{1-e^0}{xe^x}dx = 0.$$

Sada je $C = I(0) - \ln 1 = 0$. Dakle, $I(a) = \ln(a+1)$. ■

■ **Primjer 3.3** Dokažite da funkcija $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$, $x > 0$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Rješenje. Vidimo da granice ne ovise o parametru. Sada računamo prvu derivaciju:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{z^2+1}\mathrm{d}z\right) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xz}}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{-ze^{-xz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

Zatim računamo drugu derivaciju:

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty \frac{-ze^{-xz}}{z^2+1}\mathrm{d}z\right) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-ze^{-xz}}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{z^2e^{-xz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

Dobivene izraze uvrstimo u jednadžbu:

$$y'' + y = \int_0^\infty \frac{z^2e^{-xz}}{z^2+1}\mathrm{d}z + \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int_0^\infty e^{-xz}dz = \frac{e^{-xz}}{-x}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{x}(e^{-x\cdot\infty} - 1) = \frac{1}{x}.$$

Primijetimo da je zbog uvjeta $x > 0$ izraz $e^{-x\cdot\infty} = 0$. ■

Dodatak

Ako $f(x,\alpha)$ ne ovisi o α, $\varphi(\alpha) = a$ je neka konstanta, a $\psi(\alpha) = \alpha$, onda se formula:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx = f[\psi(\alpha),\alpha]\cdot\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha),\alpha]\cdot\varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$$

svodi na dobro nam poznatu jednakost iz MatAn1:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\alpha f(x)dx = f(\alpha),$$

možda poznatiju uz preimenovanje varijabli

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

3.2 Taylorova formula za funkcije dviju varijabli

Kao što smo vidjeli i kod funkcije jedne varijable u Matematičkoj analizi 1, Taylorova formula je jedan od načina kako možemo riješiti problem aproksimacije funkcije polinomom ili aproksimacije vrijednosti funkcije u točki.

Promatramo funkciju $f : U \to \mathbb{R}$, gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren. Neka je $T(x_0,y_0) \in U$ te neka je f klase C^{n+1} (ima neprekinute parcijalne derivacije do reda $n+1$ uključivo). Zanima nas ponašanje funkcije f u okolici od T_0, tj. želimo aproksimirati funkciju f na okolini točke T_0 odnosno aproksimirati izraz

$$f(x,y) = f(x_0+h, y_0+k)$$

za male parametre h,k. Tražimo polinome dviju varijabli koji će najbolje aproksimirati danu funkciju. Podsjetimo se prvo kako izgledaju polinomi u dvije varijable.

Dodatak

Polinom $P(x,y)$ u varijablama x i y je funkcija dvije varijable koja je zadana kao *konačna* suma *monoma* oblika $a_{ij}x^i y^j$ oblika

$$P(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$$

pri čemu su $i, j \in \mathbb{N}_0$, a a_{ij} neke realne konstante.

Stupanj monoma $a_{ij}x^i y^j$ je jednak $i+j$, a *stupanj polinoma* $f(x,y)$ definiramo kao maksimalni stupanj monoma koji se javljaju kao sumandi tog polinoma. Polinom prvog stupnja je oblika $P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y$, a drugog stupnja $P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$.

3.2.1 Izvod Taylorove formule

Sada ćemo izvesti Taylorovu formulu za funkciju dvije varijable $f(x,y)$.

Definirajmo pomoćnu funkciju **jedne varijable**

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

Sada vrijedi $F(0) = f(x_0, y_0)$. Primijenimo Taylorovu formulu za funkciju jedne varijable oko $t_0 = 0$:

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}.$$

gdje je c realan broj između 0 i t.

Ako ubacimo supstituciju $x = x_0 + th$, $y = y_0 + tk$, tada imamo

$$F(t) = f(x,y).$$

Sada prvu derivaciju pomoćne funkcije raspišemo koristeći složeno deriviranje i dobivamo

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f'_x h + f'_y k.$$

Odavde slijedi:

$$F'(0) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k$$

ili kraće pisano

$$F'(0) = (f'_x)_0 h + (f'_y)_0 k.$$

Analogno slijedi i za drugu derivaciju pomoćne funkcije:

$$F''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)\frac{dy}{dt}.$$

Odavde lako slijedi

$$F''(t) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$$

odnosno imamo

$$F''(0) = (f''_{xx})_0 h^2 + 2(f''_{xy})_0 hk + (f''_{yy})_0 k^2.$$

Slično možemo formalno pisati

$$F^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

Sada uvrstimo $t = 1$ u formulu

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

i znajući $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
F(1) =& f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left[(f'_x)_0 h + (f'_y)_0 k\right] \\
&+ \frac{1}{2!}\left[(f''_{xx})_0 h^2 + 2(f''_{xy})_0 hk + (f''_{yy})_0 k^2\right] + \ldots \\
&\ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + ch, y_0 + ck)
\end{aligned}$$

Točka $(x_0 + ch, y_0 + ck)$ nalazi se na spojnici točaka $T_0(x_0, y_0)$ i $T(x_0 + h, y_0 + k)$. Koristit ćemo oznaku $T_c = (x_c, y_c) = (x_0 + ch, y_0 + ck)$.

Ako označimo $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$ odnosno

$$h = x - x_0 \quad \text{i} \quad k = y - y_0$$

dobivamo **Taylorovu formulu** u obliku

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y)$$

gdje je T_n Taylorov polinom n-tog stupnja, a R_n pripadni ostatak u Lagrangeovom obliku. Taylorov polinom u okolini ishodišta $T_0(0, 0)$ zovemo **MacLaurinov polinom** funkcije.

Taylorova formula za funkciju dvije varijable u okolini točke $T(x_0, y_0)$ glasi

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y)$$

gdje su n-ti Taylorov polinom $T_n(x, y)$ i ostatak u Lagrangeovom obliku $R_n(x, y)$ jednaki:

$$\begin{aligned}
T_n(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[(f'_x)_0(x - x_0) + (f'_y)_0(y - y_0)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left[(f''_{xx})_0(x - x_0)^2 + 2(f''_{xy})_0(x - x_0)(y - y_0) + (f''_{yy})_0(y - y_0)^2\right] \\
&\quad + \ldots + \frac{1}{n!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) \\
R_n(x, y) &= \frac{1}{(n+1)!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(T_c)
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada nekoliko primjera.

■ **Primjer 3.4** Funkciju $f(x,y) = e^{xy}$ razvijte u Taylorov polinom drugog stupnja u okolini točke $T(1,0)$.

Rješenje. Tražimo drugi Taylorov polinom:

$$T_2(x,y) = f(1,0) + \left[(f'_x)_0(x-1) + (f'_y)_0 y\right] + \frac{1}{2!}\left[(f''_{xx})_0(x-1)^2 + 2(f''_{xy})_0(x-1)y + (f''_{yy})_0 y^2\right]$$

te izračunamo sve potrebne parcijalne derivacije. Dakle, $f'_x = ye^{xy}$ i $f'_x(1,0) = 0$, $f'_y = xe^{xy}$ i $f'_y(1,0) = 1$. Nadalje, $f''_{xx} = y^2e^{xy}$ i $f''_{xx}(1,0) = 0$, $f''_{xy} = (1+y^2)e^{xy}$ i $f''_{xy}(1,0) = 1$, $f''_{yy} = x^2e^{xy}$ i $f''_{yy}(1,0) = 1$. Uvrstimo sve u formulu i dobivamo

$$T_2(x,y) = 1 + y + \frac{1}{2!}\left[2(x-1)y + y^2\right].$$

■

■ **Primjer 3.5** Naći Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $z = \ln(x+y^2)$ u točki $T(e,0)$.

Rješenje. Tražimo drugi Taylorov polinom:

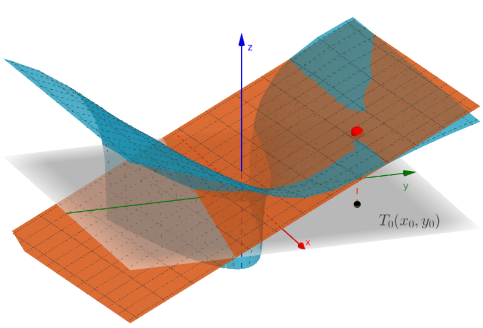
$$T_2(x,y) = f(e,0) + \left[(f'_x)_0(x-e) + (f'_y)_0 y\right] + \frac{1}{2!}\left[(f''_{xx})_0(x-e)^2 + 2(f''_{xy})_0(x-e)y + (f''_{yy})_0 y^2\right]$$

te izračunamo sve potrebne parcijalne derivacije. Dakle, $f'_x = \frac{1}{x+y^2}$ i $f'_x(e,0) = \frac{1}{e}$, $f'_y = \frac{2y}{x+y^2}$ i $f'_y(e,0) = 0$. Nadalje, $f''_{xx} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$ i $f''_{xx}(e,0) = -\frac{1}{e^2}$, $f''_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$ i $f''_{xy}(e,0) = 0$, $f''_{yy} = \frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2}$ i $f''_{yy}(e,0) = \frac{2e}{e^2} = \frac{2}{e}$. Uvrstimo sve u formulu i dobivamo

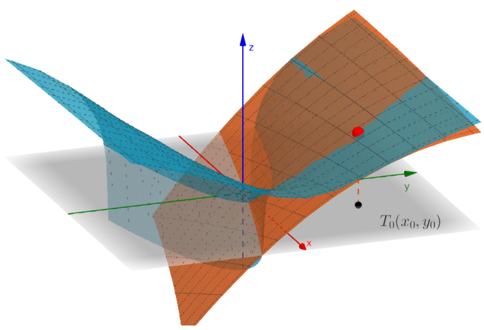
$$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{e}(x-e) + \frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{e^2}(x-e)^2 + \frac{2}{e}y^2\right].$$

■

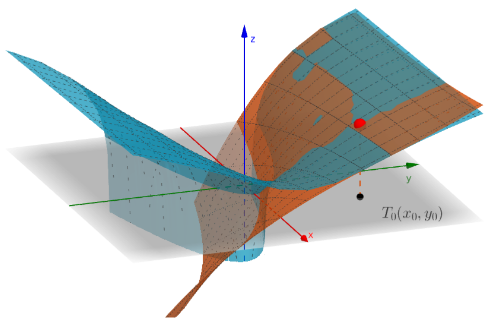
Na sljedećim slikama možete vidjeti nekoliko Taylorovih polinoma funkcije $f(x,y) = \ln(x+y^2)$ oko točke $T_0(2.48, 3.24)$. Vidimo da vrijedi isto kao i kod funkcije jedne varijable: aproksimacija je bolja što je veći stupanj Taylorovog polinoma.



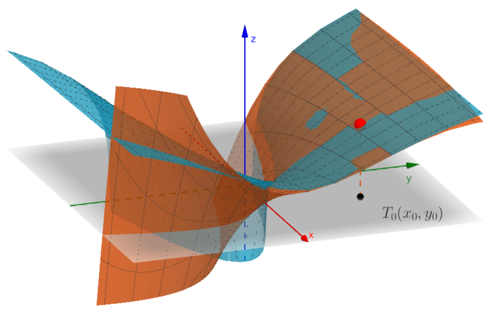
prvi Taylorov polinom $T_1(x,y)$



drugi Taylorov polinom $T_2(x,y)$



treći Taylorov polinom $T_3(x,y)$



četvrti Taylorov polinom $T_4(x,y)$

Slika 1 - aproksimacija Taylorovim polinomima

Sami možete pokrenuti crtanje Taylorovih polinoma proizvoljne funkcije oko proizvoljne točke u Geogebri na sljedećem linku: `https://www.geogebra.org/classic/uwmtesye`.

Vježba 3.1 Funkciju $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ razvijte u Taylorov polinom drugog stupnja u okolini točke $T(-2,1)$.

3.2.2 Primjena Taylorovih polinoma

U praksi se Taylorovi polinomi koriste kod problema aproksimacije funkcije polinomom ili aproksimacije vrijednosti funkcije u okolini neke točke. Taylorov polinom prvog stupnja je linearna funkcija odnosno polinom prvog stupnja. Zato se aproksimacija prvim Taylorovim polinomom naziva **linearna aproksimacija**. Linearnom aproksimacijom plohe oko neke točke dobijemo tangencijalnu ravninu na tu plohu u toj točki. Taylorov polinom drugog stupnja je kvadratna funkcija u dvije varijable te tu aproksimaciju zovemo **kvadratna aproksimacija**. Kvadratnom aproksimacijom plohe oko neke točke dobijemo kvadratnu plohu koja ima istu tangencijalnu ravninu i zakrivljenost u toj točki.

■ **Primjer 3.6** Odredite linearnu i kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x,y) = xe^y + 1$ oko točke $T(1,0)$.

Rješenje. Ustvari tražimo prvi i drugi Taylorov polinom:

$$T_1(x,y) = f(1,0) + (f'_x)_0(x-1) + (f'_y)_0 y$$

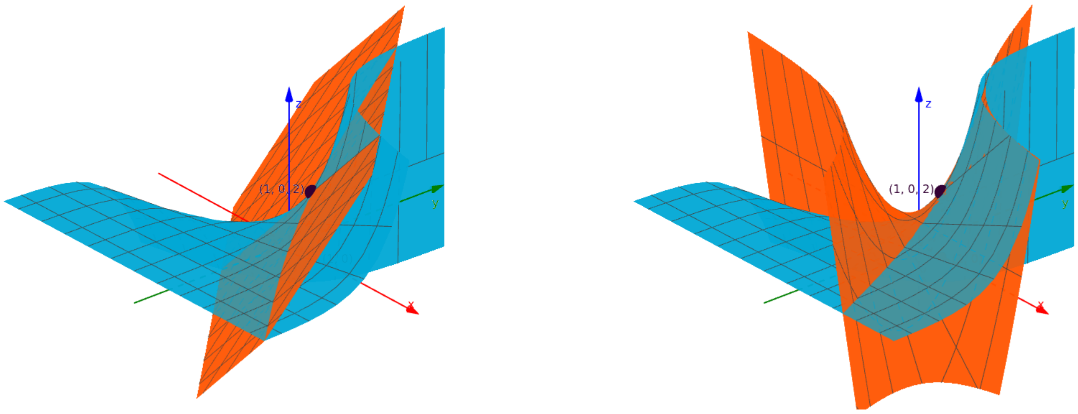
$$T_2(x,y) = f(1,0) + \left[(f'_x)_0(x-1) + (f'_y)_0 y\right] + \frac{1}{2!}\left[(f''_{xx})_0(x-1)^2 + 2(f''_{xy})_0(x-1)y + (f''_{yy})_0 y^2\right]$$

te izračunamo sve potrebne parcijalne derivacije. Dakle, $f'_x = e^y$ i $f'_x(1,0) = 1$, $f'_y = xe^y$ i $f'_y(1,0) = 1$. Nadalje, $f''_{xx} = 0$ i $f''_{xx}(1,0) = 0$, $f''_{xy} = e^y$ i $f''_{xy}(1,0) = 1$, $f''_{yy} = xe^y$ i $f''_{yy}(1,0) = 1$. Uvrstimo sve u formulu i dobivamo

$$T_1(x,y) = 2 + (x-1) + y = 1 + x + y$$

$$T_2(x,y) = 2 + (x-1) + y + \frac{1}{2!}\left[2(x-1)y + y^2\right] = 1 + x + xy + \frac{1}{2}y^2.$$

Znači, dobili smo linearnu aproksimaciju $L(x,y) = T_1(x,y) = 1 + x + y$. Primijetimo da je tangencijalna ravnina na zadanu plohu u točki $T(1,0)$ glasi $z = x + y + 1$ što je ustvari dobivena linearna aproksimacija. Nadalje, kvadratna aproksimacija glasi $Q(x,y) = T_2(x,y) = 1+x+xy+\frac{1}{2}y^2$. Na Slici 2 pogledajte koja aproksimacija bolje aproksimira plohu u okolini točke $T(1,0)$. ■



prvi Taylorov polinom drugi Taylorov polinom

Slika 2 Primjer 3.6

Pomoću Taylorovog polinoma možemo i naći aproksimaciju vrijednosti funkcije u točki.

■ **Primjer 3.7** Koristeći drugi Taylorov polinom oko točke $T(1,0)$ funkcije $f(x,y) = e^{2xy}$ aproksimirajte vrijednost $f(1.1, 0.1)$.

Rješenje. Lako dobijemo drugi Taylorov polinom koji glasi $T_2(x,y) = 1+2y+2(x-1)y+2y^2$. Sada znamo da je $f(x,y) \approx T_2(x,y)$ na okolini točke $T(1,0)$. Ubacimo točku $(1.1, 0.1)$ u Taylorov polinom i dobivamo aproksimaciju

$$f(1.1,0.1) \approx 1+0.2+2(1.1-1)0.1+2(0.1)^2 = 1.2+0.02+0.02 = 1.24.$$

Samo za usporedbu, točna vrijednost je $f(1.1,0.1) = e^{2\cdot 1.1\cdot 0.1} = 1.24608$. ■

3.3 Kvadratna forma. Drugi diferencijal. Hesseova matrica.

3.3.1 Kvadratna forma

U Poglavlju 1.3.3 smo spomenuli kako izgledaju polinomi n varijabla, a sada ćemo uvesti pojam kvadratne forme koji označava određeni tip kvadratnog polinoma.

Kvadratne forme nad $\mathbb{R}$ su homogeni kvadratni polinomi u n varijabli s koeficijentima $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oblika

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Primijetimo da je kvadratna forma onaj dio polinoma drugog stupnja u n varijabli koji sadrži sve monome stupnja 2. Kvadratne forme imaju široku primjenu, a neke od primjena su u područjima matematike kao što su linearna algebra, analitička geometrija i teorija brojeva. Mi ćemo neke rezultate za kvadratne forme koristiti kod dovoljnog uvjeta za lokalne ekstreme u sljedećem poglavlju koji u sebi sadrži uvjet na drugi diferencijal. Vidjet ćemo da je drugi diferencijal funkcija više varijabli kvadratna forma.

Sada ćemo definirati kvadratne forme za dvije i tri varijable. U ovom ćemo poglavlju dvije varijable označavati s (h,k), tri s (h,k,l), a n varijabli s $(h_1,\dots,h_n)$.

Definicija 3.3.1 **Kvadratna forma dvije realne varijable** je homogena kvadratna funkcija $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oblika

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

gdje su $a,b,c \in \mathbb{R}$. Kvadratnoj formi pridružujemo simetričnu matricu oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

koju zovemo **matrica kvadratne forme**. ■

Lako se vidi da su glavne minore matrice A jednake:

$$M_1 = a \quad \text{i} \quad M_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2.$$

Vježba 3.2 Provjerite da se kvadratna forma može zapisati pomoću matrice kvadratne forme i skalarnog produkta na sljedeći način

$$Q(h,k) = A \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.3.2 **Kvadratna forma tri varijable** je homogena, kvadratna funkcija tri realne varijable $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ oblika

$$Q(h,k,l) = ah^2 + bk^2 + cl^2 + 2dhk + 2ehl + 2fkl$$

gdje su $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. Kvadratnoj formi pridružujemo simetričnu matricu oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

koju zovemo **matrica kvadratne forme**. ■

Glavne minore matrice A su:

$$M_1 = a\,, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad M_3 = \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix}.$$

Promatrat ćemo osnovna svojstva kvadratnih formi definirana na sljedeći način.

Definicija 3.3.3 Za kvadratnu formu $Q(h_1,\dots,h_n)$ kažemo da je

a) **pozitivno definitna** ako je $Q(h_1,\dots,h_n) > 0$ za sve $(h_1,\dots,h_n) \neq \vec{0}$
b) **negativno definitna** ako je $Q(h_1,\dots,h_n) < 0$ za sve $(h_1,\dots,h_n) \neq \vec{0}$
c) **indefinitna forma** ako $Q(h_1,\dots,h_n)$ mijenja predznak za razne izbore $(h_1,\dots,h_n)$, tj. postoji $(h_1,\dots,h_n)$ tako da je $Q(h_1,\dots,h_n) > 0$ i postoji $(k_1,\dots,k_n)$ tako da je

$Q(k_1,\dots,k_n) < 0.$

■

Napomena 3.3 Izraz $(x_1,\dots,x_n) \neq \vec{0}$ znači da nisu sve komponente istovremeno jednake 0.

■ **Primjer 3.8** Ispitajmo definitnost sljedećih kvadratnih formi:

a) $Q(h,k) = 2h^2 + 3k^2$,
b) $Q(h,k) = -2h^2 - 3k^2$,
c) $Q(h,k) = 2h^2 - 3k^2$.

Rješenje.

a) Znamo da je $Q(h,k) = 2h^2 + 3k^2 \geq 0$ za sve $h,k \in \mathbb{R}$. Nadalje, primijetimo da je $Q(h,k) = 0$ ako i samo ako su $h = k = 0$. Dakle, slijedi da je $Q(h,k) > 0$ za sve $(h,k) \neq (0,0)$.
b) Znamo da je $Q(h,k) = -2h^2 - 3k^2 \leq 0$ za sve $h,k \in \mathbb{R}$. Također je $Q(h,k) = 0$ ako i samo ako su $h = k = 0$. Dakle, slijedi da je $Q(h,k) < 0$ za sve $(h,k) \neq (0,0)$.
c) Vidimo da $Q(h,k) = -2h^2 - 3k^2$ mijenja predznak za različite parove (h,k). Ako uzmemo $(h,k) = (1,0)$ tada je $Q(1,0) = 2 > 0$. Ako uzmemo $(h,k) = (0,1)$ tada je $Q(0,1) = -3 < 0$. Dakle, slijedi da je $Q(h,k)$ indefinitna forma. ■

Sljedeći teorem daje dovoljne uvjete za pozitivnu i negativnu definitnost te indefinitnost kvadratne forme koristeći glavne minore pripadne matrice.

Teorem 3.3.1 — Sylvesterov teorem za dvije varijable. Neka je zadana kvadratna forma

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

gdje su a, b i c zadani realni brojevi te neka je A pripadna matrica kvadratne forme. Vrijedi sljedeće:

a) Ako su u matrici A sve glavne minore pozitivne, tj. $a > 0, \quad ac - b^2 > 0$, onda je kvadratna forma $Q(h,k)$ pozitivno definitna.
b) Ako je $a < 0, \quad ac - b^2 > 0$ onda je kvadratna forma $Q(h,k)$ negativno definitna.
c) Ako je $ac - b^2 < 0$, tada je (neovisno o prvoj minori) kvadratna forma $Q(h,k)$ indefinitna.

Dokaz. Pretpostavimo da $k \neq 0$. Sada raspišemo kvadratnu formu na sljedeći način

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 = k^2\big[a(\frac{h}{k})^2 + 2b\frac{h}{k} + c\big].$$

Primijetimo da smo u zagradi dobili polinom drugog stupnja u varijabli $\frac{h}{k}$. Pogledajmo kako sada možemo interpretirati zadane uvjete.
a) Uvjet $a > 0$ znači da je parabola okrenuta prema gore, a iz uvjeta $ac - b^2 > 0$ slijedi da je diskriminanta $D = 4b^2 - 4ac < 0$. Znači, polinom nema realnih nultočaka. Iz toga slijedi da je $Q(h,k) > 0$ za svaki $(h,k) \neq (0,0)$.
b) U slučaju ako je $a < 0$ i diskriminanta $D = 4(b^2 - ac) < 0$, tada polinom nema realnih nultočaka te je uvijek negativan odnosno vrijedi $Q(k,h) < 0$.
c) Sada vidimo da ako je diskriminanta $D = 4(b^2 - ac) > 0$, tada dobiveni polinom drugog stupnja ima nultočke što znači da mijenja predznak. Drugim riječima postoje (h_1,k_1) u kojima je $Q(h_1,k_1) < 0$ i (h_2,k_2) u kojima je $Q(h_1,k_1) > 0$ te je forma indefinitna. ■

Primjer 3.9 Ispitajte definitnost kvadratne forme $Q(h,k) = 3h^2 + 4hk + 2k^2$.

Rješenje. Primijetimo da su $a = 3$, $b = 2$ i $c = 2$. Dakle, vrijedi $a > 0$ i $ac - b^2 = 6 - 4 = 2 > 0$ te zaključujemo da je kvadratna forma pozitivno definitna. ■

Teorem 3.3.2 — Sylvesterov teorem za kvadratnu formu tri varijable. Neka je dana kvadratna forma $Q(h,k,l) = ah^2 + bk^2 + cl^2 + 2dhk + 2ehl + 2fkl$ kojoj je pridružena simetrična matrica

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}.$$

a) Ako su u matrici A sve glavne minore pozitivne:
$a > 0$, $\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0$ i $\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0$, tada je $Q(h,k,l)$ pozitivno definitna.

b) Ako je $a < 0$, $\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0$ i $\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} < 0$, tada je $Q(h,k,l)$ negativno definitna.

c) Ako su glavne minore različite od nule te su predznaci glavnih minora različiti i od predznaka u slučaju (a) i od predznaka u slučaju (b), onda je $Q(h,k,l)$ **indefinitna**.

Napomena 3.4 U oba Sylvesterova teorema su svuda **stroge** nejednakosti! To znači da u slučaju neke jednakosti, teoremi ne daju odluku.

Primjer 3.10 Ispitajte definitnost kvadratne forme $Q(h,k,l) = 2h^2 + 2k^2 + l^2 - 2hk - 2kl$.

Rješenje. Primijetimo da su $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 0$ i $f = -1$. Dakle, vrijedi $a > 0$, $ab - d^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-1) + 1(-1-0) = 1 > 0$ te zaključujemo da je kvadratna forma pozitivno definitna. ■

3.3.2 Drugi diferencijal. Hesseova matrica.

• Drugi diferencijal funkcije dviju varijabli

U Poglavlju 2.3.3 smo vidjeli da je prvi diferencijal funkcije $z = f(x,y)$ jednak

$$df(T)(dx,dy) = f'_x(T)\,dx + f'_y(T)dy$$

Drugi diferencijal izvodimo računajuci $d(df)$ gdje df shvaćamo kao funkciju od x i y s fiksiranim dx i dy.

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x dx + f'_y dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x dx + f'_y dy\right) dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 \end{aligned}$$

Formula za drugi diferencijal funkcije dvije varijable u točki glasi

$$d^2f(T) = f''_{xx}(T)(dx)^2 + 2f''_{xy}(T)dxdy + f''_{yy}(T)(dy)^2.$$

■ **Primjer 3.11** Izračunajte $d^2f(1,2)$ ako je $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

Rješenje. Formula glasi

$$d^2f(1,2) = f''_{xx}(1,2)(dx)^2 + 2f''_{xy}(1,2)dxdy + f''_{yy}(1,2)(dy)^2.$$

Izračunamo sve parcijalne derivacije prvog reda $f'_x = 2x + y - \frac{4}{x}$ i $f'_y = x + 2y - \frac{10}{y}$ te parcijalne derivacije drugog reda $f''_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2}$, $f''_{xy} = 1$ i $f''_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2}$. Uvrstimo točku i dobivamo

$$d^2f(1,2) = 6(dx)^2 + 2dxdy + \frac{9}{2}(dy)^2.$$

■

Vježba 3.3 Nađite $d^2f(1,1)$ ako je $f(x,y) = 2x^3 - 4xy + 3y^3 - 2y + 1$.
(rj. $d^2f(1,1) = 6(dx)^2 + 2dxdy + \frac{9}{2}(dy)^2$)

Sada primijetimo da je drugi diferencijal ustvari kvadratna forma.

Primijetimo!
Drugi diferencijal funkcije dvije varijable u točki $T_0(x_0,y_0)$ je kvadratna forma u varijablama dx i dy čiji koeficijenti su druge derivacije funkcije u točki.

$$d^2f(T_0)(dx,dy) = f''_{xx}(T_0)(dx)^2 + 2f''_{xy}(T_0)dxdy + f''_{yy}(T_0)(dy)^2$$

Matrica pridružena ovoj kvadratnoj formi je

$$H_f(T_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_0) & f''_{xy}(T_0) \\ f''_{xy}(T_0) & f''_{yy}(T_0) \end{bmatrix}$$

Zovemo ju **Hesseova matrica** pridružena funkciji $z = f(x,y)$ u točki $T(x_0,y_0)$. Sada možemo ispitivati definitnost drugog diferencijala što će se kasnije pokazati važno za određivanje lokalnih ekstrema funkcije.

■ **Primjer 3.12** Ispitajte definitnost kvadratne forme $d^2f(0,0)$ ako je $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2$.

Rješenje. Izračunamo prve i druge parcijalne derivacije: $f'_x = 4x - 2y$, $f'_y = -2x + 2y$, $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = -2$ i $f''_{yy} = 2$. Drugi diferencijal u točki glasi:

$$d^2f(0,0) = 4(dx)^2 - 4dxdy + 2(dy)^2,$$

a pripadna Hesseova matrica je

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $a = 4 > 0$ i $ac - b^2 = 8 - 4 > 0$ te zaključujemo da je $d^2f(0,0)$ pozitivno definitna kvadratna forma. ■

Vježba 3.4 Ispitajte definitnost drugog diferencijala funkcije $f(x,y) = e^{xy}$ u točki $T(1,1)$. (Rj $d^2f(1,1) = e(dx)^2 + 4edxdy + e(dy)^2$, $a = e > 0$, $ad - b^2 = -3e^2 < 0$, indefinitna forma)

Dodatak

Diferencijali višeg reda funkcije dviju varijabli
Analognim izvodom dobijemo i formulu za treći diferencijal funkcije $z = f(x,y)$ koja glasi

$$d^3f = d(d^2f) = f'''_{xxx}(dx)^3 + 3f'''_{xxy}(dx)^2dy + 3f'''_{xyy}dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(dy)^3$$

Primijetimo da koristeći formalnu oznaku prvog diferencijala

$$df = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

drugi i treći diferencijal možemo zapisati kao

$$d^2f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \quad d^3f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f$$

Općenito za n-ti diferencijal se dobiva izraz oblika

$$d^nz = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.$$

primijetimo da je to homogen polinom n-tog stupnja u varijablama dx i dy.

- **Drugi diferencijal funkcija triju varijabli**

Za funkciju triju varijabli $u = f(x,y,z)$ prvi diferencijal glasi

$$df = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)f$$

odnosno

$$df(T) = \frac{\partial f}{\partial x}(T)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(T)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(T)dz$$

Lako se dobije da je onda drugi diferencijal jednak

$$d^2f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f$$

odnosno

$$\begin{aligned} d^2f(T) =& f''_{xx}(T)(dx)^2 + f''_{yy}(T)(dy)^2 + f''_{zz}(T)(dz)^2 \\ &+ 2(f''_{xy}(T)dxdy + f''_{xz}(T)dxdz + f''_{yz}(T)dydz) \end{aligned}$$

Analogna formula vrijedi i za više diferencijale funkcije triju varijabli.

■ **Primjer 3.13** Nađite $d^2f(T)$ u $T(2,1,-2)$ za funkciju $f(x,y,z) = xyz$.

Rješenje. Prvo izračunamo sve prve derivacije: $f'_x = yz$, $f'_y = xz$ i $f'_z = xy$. Zatim sve druge derivacije: $f''_{xx} = f''_y = f''_z = 0$, $f''_{xy} = z$, $f''_{xz} = y$ i $f''_{yz} = x$. Sada uvrstimo točku i slijedi $f''_{xy}(T) = -2$, $f''_{xz}(T) = 1$ i $f''_{yz}(T) = 2$. Dobili smo drugi diferencijal jednak

$$d^2f(T) = -4dxdy + 2dxdz + 4dydz.$$

■

Drugi diferencijal funkcije tri varijable u točki $T_0(x_0,y_0,z_0)$ je kvadratna forma u varijablama dx, dy i dz čiji koeficijenti su druge derivacije funkcije u točki.

$$d^2f(T_0)(dx,dy,dz) == f''_{xx}(T_0)(dx)^2 + f''_{yy}(T_0)(dy)^2 + f''_{zz}(T_0)(dz)^2 + \\ + 2f''_{xy}(T_0)dx\,dy + 2f''_{xz}(T_0)dx\,dz + 2f''_{yz}(T_0)dy\,dz$$

Matrica pridružena ovoj kvadratnoj formi $d^2f(T_0)(dx,dy,dz)$ je matrica oblika

$$H_f(T_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_0) & f''_{xy}(T_0) & f''_{xz}(T_0) \\ f''_{xy}(T_0) & f''_{yy}(T_0) & f''_{yz}(T_0) \\ f''_{xz}(T_0) & f''_{yz}(T_0) & f''_{zz}(T_0) \end{bmatrix}$$

Zovemo je **Hesseova matrica** pridružena funkciji $u = f(x,y,z)$ u točki $T(x_0,y_0,z_0)$.

■ **Primjer 3.14** Ispitajte definitnost kvadratne forme $d^2f(T)$ ako je $f(x,y) = -x^4 - y^4 - z^4$ i $T(-1,-1,-1)$.

Rješenje. Prvo izračunamo sve prve derivacije: $f'_x = -4x^3$, $f'_y = -4y^3$ i $f'_z = -4z^3$. Zatim sve druge derivacije: $f''_{xx} = -12x^2$, $f''_y = -12y^2$, $f''_z = -12z^2$, $f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = 0$. Sada uvrstimo točku i slijedi $f''_{xx}(T) = -12$, $f''_{yy}(T) = -12$ i $f''_{zz}(T) = -12$. Dobili smo drugi diferencijal jednak $d^2f(T) = -12(dx)^2 - 12(dy)^2 - 12(dz)^2$. Pripadna Hesseova matrica izgleda

$$\begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Sada računamo glavne minore: $a = -12 < 0$, $ab - d^2 = 144 > 0$ i $abc = -12^3 < 0$. Zaključujemo da je drugi diferencijal u točki $d^2f(T)$ negativno definitan. ■

3.4 Lokalni ekstremi

Problem traženja minimuma i maksimuma funkcije je prisutan u svim područjima matematike i inženjerstva i time je to je jedna od najraširenijih i najvažnijih primjena diferencijalnog računa.

U sklopu kolegija Matematička analiza 1 tražili smo lokalne ekstreme funkcije jedne varijable. Sada ćemo isto raditi za funkcije više varijabli. U ovom ćemo poglavlju vidjeti kako se prve i druge parcijalne derivacije funkcije više varijabli koriste pri traženju i određivanju lokalnih ekstrema funkcije. Poslije ćemo se baviti globalnim i uvjetnim ekstremima.

3.4.1 Lokalni ekstremi funkcija dvije varijable

Krećemo s definicijom lokalnih ekstrema za funkciju dvije varijable.

Definicija 3.4.1 Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup.

- Funkcija f u točki $(x_0,y_0) \in U$ ima **lokalni minimum** ako postoji otvoreni krug

$K_\varepsilon(x_0, y_0)$ tako da je

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in K_\varepsilon(x_0,y_0)$$

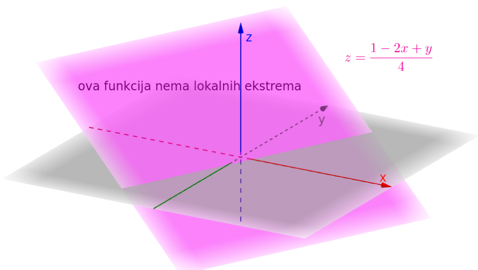
- Funkcija f u točki $(x_0, y_0) \in U$ ima **lokalni maksimum** ako postoji otvoreni krug $K_\varepsilon(x_0, y_0)$ tako da je

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in K_\varepsilon(x_0,y_0)$$

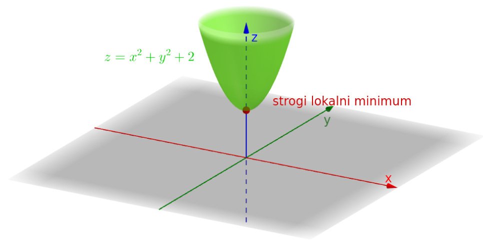
Lokalni minimumi i maksimumi se zajedno zovu **lokalni ekstremi funkcije.** ■

Napomena 3.5 Ako u gornjim nejednakostima imamo stroge nejednakosti za $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ onda govorimo o **strogom lokalnom minimumu**, odnosno **strogom lokalnom maksimumu**, tj. o **strogim lokalnim ekstremima** funkcije f.

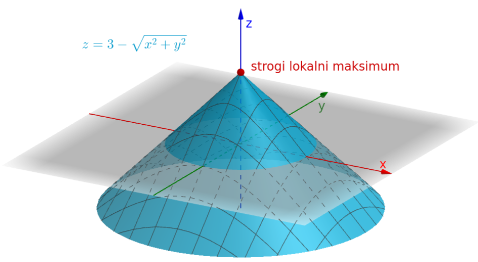
Pogledajmo koje od sljedećih ploha imaju lokalne ekstreme, koji od njih su strogi, a koji nisu. Vidimo da ravnina nema lokalnih ekstrema, stožac i rotacijski paraboloid imaju strogi lokalni ekstrem, a položeni valjak ima beskonačno mnogo lokalnih maksimuma koji nisu strogi.



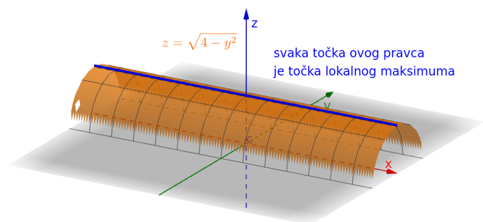
ravnina



rotacijski paraboloid



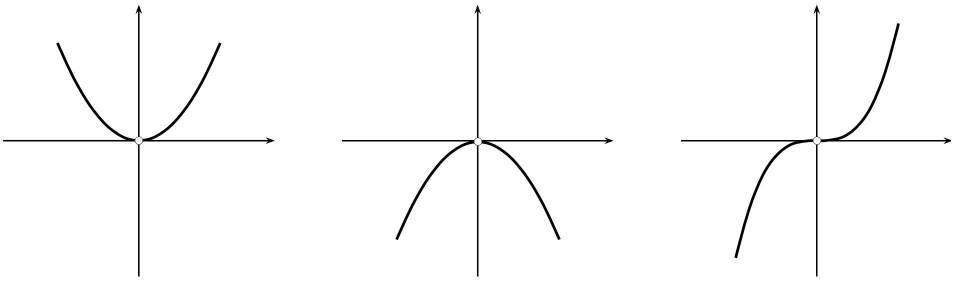
stožac uzduž osi z



gornja polovica valjka uzduž osi y

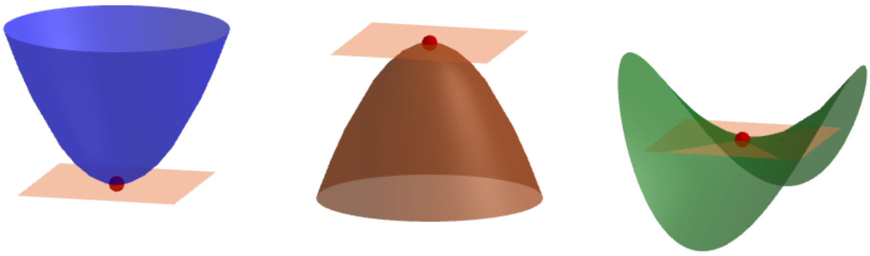
Slika 3 - lokalni ekstremi funkcije dvije varijable

Prisjetimo se da je za diferencijabilnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nužan uvjet za lokalni ekstrem u točki x_0 bio da je x_0 stacionarna točka. Stacionarne točke funkcije f su točke za koje $f'(x) = 0$, odnosno točke u kojima je tangenta paralelna s x-osi. Imamo tri tipa stacionarnih točaka: minimum, maksimum i točku infleksije. Vidi Sliku 4.



Slika 4 - stacionarne točke funkcije jedne varijable

Ako primijenimo analogiju na funkciju $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tada će **stacionarne točke** funkcije $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ biti točke u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s xOy-ravninom. Vidi Sliku 5.



Slika 5 - stacionarne točke funkcije dvije varijable

Pitanje. Razmislite kako biste gornji uvjet stacionarnosti izrazili preko parcijalnih derivacija.

Odgovor. Uvjet da je tangencijalna ravnina u točki T paralelna s xOy ravninom znači da joj je vektor normale paralelan s vektorom $\vec{k}$, odnosno

$$\vec{n} = \left(f'_x(T), f'_y(T), -1\right) \parallel \vec{k}.$$

Iz toga slijedi da su obje parcijalne derivacije jednake nula odnosno da je $\nabla f(T) = \vec{0}$. Dakle, zaključujemo da su stacionarne točke funkcije $z = f(x,y)$ su rješenja sustava

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Time smo dobili kako glasi nužan uvjet za lokalni ekstrem diferencijabilne funkcije dvije varijable.

Teorem 3.4.1 — Nužan uvjet za lokalni ekstrem funkcije dviju varijabla. Ako diferencijabilna funkcija dviju varijabla f ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0), onda je

$$\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$$

tj.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

Dokaz. Definiramo funkciju $f_1(x)=f(x,y_0):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kao restrikciju funkcije f na pravac $y=y_0$ kroz točku $T_0(x_0,y_0)$. Iz same definicije slijedi da ako je T_0 lokalni ekstrem funkcije f, tada je x_0 lokalni ekstrem restrikcije f_1 kao funkcije jedne varijable. Slijedi da je $\frac{df_1}{dx}(x_0)=0$. Sada iz veze funkcija f_1 i f slijedi da je

$$\frac{df_1}{dx}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0.$$

Analogno, definiramo funkciju $f_2(x)=f(x_0,y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kao restrikciju funkcije f na pravac $x=x_0$ kroz točku $T_0(x_0,y_0)$. Ako je T_0 lokalni ekstrem funkcije f, tada je y_0 lokalni ekstrem funkcije f_2. Slijedi da je $\frac{df_2}{dy}(y_0)=0$. Sada iz veze funkcija f_2 i f slijedi da je

$$\frac{df_2}{dy}(y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

■

Nužan uvjet za lokalni ekstrem u točki (x_0,y_0) jest da je ta točka *stacionarna*. Dakle, moguće ekstreme tražit ćemo među takvim točkama (točkama u kojima je tangencijalna ravnina paralelna xOy ravnini.)

Dakako da postoje funkcije koje imaju ekstrem u nekoj točki u kojoj nisu diferencijabilne. Primjer takve funkcije je $z=\sqrt{x^2+y^2}$ koja ima minimum u $T(0,0)$ a nije diferencijabilna u toj točki. No mi se za sada nećemo baviti traženjem ekstrema u takvim točkama.

Teorem 3.4.2 — Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem funkcije dvije varijable. Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^2$ i $f:U\to\mathbb{R}$ dvaput neprekinuto diferencijabilna funkcija (tj. klase C^2). Pretpostavimo da je $T_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ stacionarna točka od f, tj. $\nabla f(x_0,y_0)=\vec{0}$. Tada vrijedi:

a) Ako je kvadratna forma $d^2f(x_0,y_0)$ pozitivno definitna, tj. takva da je
$$d^2f(x_0,y_0)(dx,dy)>0$$
za sve $(dx,dy)\neq(0,0)$, onda je u $T_0(x_0,y_0)$ **strogi lokalni minimum** od f.

b) Ako je kvadratna forma $d^2f(x_0,y_0)$ negativno definitna, tj. takva da je
$$d^2f(x_0,y_0)(dx,dy)<0$$
za sve $(dx,dy)\neq(0,0)$, onda je u $T_0(x_0,y_0)$ **strogi lokalni maksimum** od f .

c) Ako je $d^2f(x_0,y_0)$ indefinitna kvadratna forma, tj. postoje (dx_1,dy_1) i (dx_2,dy_2) takvi da je $d^2f(x_0,y_0)(dx_1,dy_1)>0$ i $d^2f(x_0,y_0)(dx_2,dy_2)<0$, onda $T_0(x_0,y_0)$ **nije točka ekstrema (sedlasta točka).**

Ovo su samo **dovoljni uvjeti** da određena točka bude točka ekstrema. Stacionarna točka može biti ekstrem ili sedlasta točka čak i kad u uvjeti teorema nisu zadovoljeni. Dokazujemo samo dijelove a) i b), a dokaz dijela c) ne radimo

Dokaz. Neka je $T(x_0,y_0)$ stacionarna točka funkcije f. Tada koristeći Taylorovu formulu za funkciju f u okolini točke $T(x_0,y_0)$ dobivamo

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \left[((f'_x)_0(x-x_0) + (f'_y)_0(y-y_0)\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(f''_{xx})_c(x-x_0)^2 + 2(f''_{xy})_c(x-x_0)(y-y_0) + (f''_{yy})_c(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

gdje indeks c znači da parcijalne derivacije drugog reda izračunavamo u točki T_c koja se nalazi na spojnici točka $T_0(x_0,y_0)$ i $T(x,y)$. Budući da je točaka $T_0(x_0,y_0)$ stacionarna imamo da je $(f'_x)_0 = 0$ i $(f'_y)_0 = 0$ odnosno

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(T_c)$$

Ako uzmemo da je $T(x,y)$ u dovoljno maloj okolini točke $T_0(x_0,y_0)$ onda će i točka $T_c(x_c,y_c)$ biti u toj okolini i zbog pretpostavke da je f klase C^2 (druge parcijalne derivacije su neprekinute) predznaci od d^2f će se u točkama T_0 i T_c podudarati. Dakle, ako je $d^2f(T_0) < 0$ imamo

$$f(x,y) < f(x_0,y_0),$$

za T dovoljno blizu T_0, pa je T_0 strogi lokalni maksimum. Time smo dokazali tvrdnju pod b). Slično slijedi za tvrdnju pod a). Ako je $d^2f(T_0) > 0$ imamo

$$f(x,y) > f(x_0,y_0),$$

za T dovoljno blizu T_0, pa je T_0 strogi lokalni minimum. ■

Napomena 3.6 Primijetimo da je izraz $\frac{1}{2}d^2f(T_c)$ iz dokaza teorema ustvari pogreška linearne aproksimacije funkcije tangencijalnom ravninom $z = f(x_0,y_0)$. Ukoliko je ta pogreška pozitivna, ploha (graf funkcije) je iznad tangencijalne ravnine. Ukoliko je negativna, ploha je ispod tangencijalne ravnine. A to upravo odgovara definiciji lokalnih ekstrema.

Primijenimo sada dokazani teorem na nekoliko primjera.

Primjer 3.15 Odredite i ispitajte ekstreme funkcije:

a) $z = 2x^2 + 2y^2$,
b) $z = -3x^2 - 3y^2$,
c) $z = 3x^2 - 2y^2$,
d) $z = x^2 + y^4$.

a) Prvo potražimo stacionarne točke koje su rješenje sustava: $f'_x = 4x = 0$ i $f'_y = 4y = 0$. Jedina stacionarna točka je $T(0,0)$. Zatim izračunamo sve druge parcijalne derivacije: $f''_{xx} = 4$, $f''_{yy} = 4$ i $f''_{xy} = 0$. Drugi diferencijal glasi

$$d^2f(0,0) = 4(dx)^2 + 4(dy)^2 = 4((dx)^2 + (dy)^2).$$

Lako se vidi da je to pozitivno definitna kvadratna forma te je $T(0,0)$ lokalni minimum.
b) Dakle, stacionarne točke su rješenje sustava: $f'_x = -6x = 0$ i $f'_y = -6y = 0$ te dobivamo

stacionarnu točku $T(0,0)$. Zatim izračunamo sve druge parcijalne derivacije: $f''_{xx} = -6$, $f''_{yy} = -6$ i $f''_{xy} = 0$. Drugi diferencijal glasi

$$d^2 f(0,0) = -6(dx)^2 - 6(dy)^2 = -6((dx)^2 + (dy)^2).$$

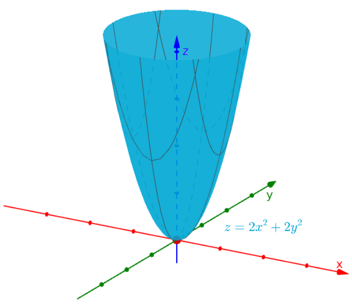
Lako se vidi da je to negativno definitna kvadratna forma te je $T(0,0)$ lokalni maksimum.
c) Stacionarne točke koje su rješenje sustava: $f'_x = 6x = 0$ i $f'_y = -4y = 0$. Jedina stacionarna točka je $T(0,0)$. Zatim izračunamo sve druge parcijalne derivacije: $f''_{xx} = 6$, $f''_{yy} = -4$ i $f''_{xy} = 0$. Drugi diferencijal glasi

$$d^2 f(0,0) = 6(dx)^2 - 4(dy)^2.$$

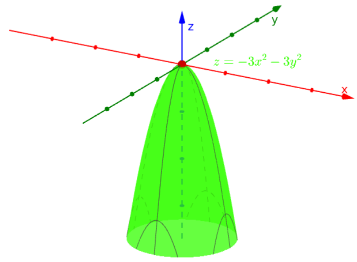
Lako se vidi da je to indefinitna kvadratna forma jer je za $(dx,dy) = (1,0)$ pozitivna, a za $(dx,dy) = (0,1)$ negativna. Zaključujemo da $T(0,0)$ nije točka ekstrema nego je sedlasta točka.
d) Stacionarne točke su rješenja sustava: $f'_x = 2x = 0$ i $f'_y = 4y^3 = 0$. Jedina stacionarna točka je $T(0,0)$. Zatim izračunamo sve druge parcijalne derivacije: $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 12y^2$ i $f''_{xy} = 0$. Drugi diferencijal glasi

$$d^2 f(0,0) = 2(dx)^2.$$

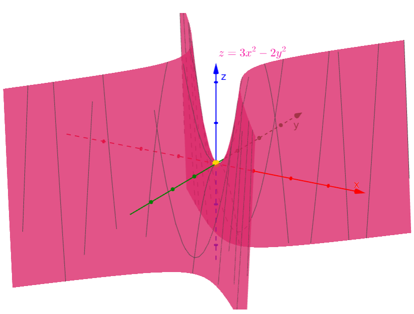
To nije niti jedna od formi iz teorema jer za $(dx,dy) = (0,1) \neq (0,0)$ vrijedi $d^2 f(0,0) = 0$ što kao mogućnost nije sadržano u teoremu. Zaključujemo da nam gornji teorem ne daje odluku. No kada nacrtamo zadanu plohu vidimo da je $T(0,0)$ lokalni minimum. Vidi Sliku 6. ■



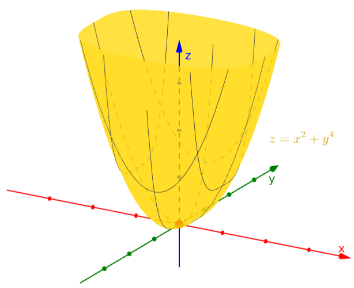
a) $z = 2x^2 + 2y^2$



b) $z = -3x^2 - 3y^2$



c) $z = 3x^2 - 2y^2$



d) $z = x^2 + y^4$

Slika 6 - Primjer 3.15

Budući da postoji jednostavniji način za ispitivanje definitnosti drugog diferencijala koristeći Hesseovu matricu, u zadacima ćemo koristiti sljedeći teorem.

Teorem 3.4.3 — Dovoljni uvjeti za ekstrem pomoću Hesseove matrice za funkciju dviju varijabla. Neka je $T_0(x_0, y_0)$ stacionarna točka funkcije $z = f(x,y)$ klase C^2, tj. rješenje sustava

$$f'_x(T_0) = 0 \qquad f'_y(T_0) = 0$$

Neka je $H_f(T_0)$ Hesseova matrica funkcije $z = f(x,y)$ u točki T_0 i neka je $\det H_f(T_0) = (f''_{xx})_0(f''_{yy})_0 - (f''_{xy})_0^2$ njena determinanta. Tada vrijedi:

a) Ako su sve glavne minore Hesseove matrice $H_f(T_0)$ pozitivne, tj.

$$(f''_{xx})_0 > 0, \quad \det H_f(T_0) > 0$$

onda funkcija f ima u točki T_0 **strogi lokalni minimum**.

b) Ako je

$$(f''_{xx})_0 < 0, \quad \det H_f(T_0) > 0$$

onda funkcija f ima u točki T_0 **strogi lokalni maksimum**.

c) Ako je

$$\det H_f(T_0) < 0$$

onda (neovisno o vrijednosti f''_{xx}) točka T_0 nije točka ekstrema nego je **sedlasta točka** funkcije f.

Napomena 3.7 U slučaju $\det H_f(T_0) = 0$ ovaj teorem ne daje odluku.

Pogledajmo još nekoliko primjera s primjenom Hesseove matrice u računu.

■ **Primjer 3.16** Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = e^x - x + y^2 - 2y.$$

Rješenje. Stacionarne točke su rješenje sustava: $f'_x = e^x - 1 = 0$ i $f'_y = 2y - 2 = 0$. Jedina stacionarna točka je $T_0(0,1)$. Druge parcijalne derivacije su jednake $f''_{xx} = e^x$, $f''_{yy} = 2$ i $f''_{xy} = 0$. Hesseova matrica glasi

$$H_f(T_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_0) & f''_{xy}(T_0) \\ f''_{xy}(T_0) & f''_{yy}(T_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primijetite da u Hesseovu matricu ubacujemo vrijednost drugih parcijalnih derivacija u stacionarnoj točki T_0. Lako se vidi da su glavne minore ($f''_{xx}(T_0) = 1 > 0$ i $\det(H_f(T_0)) = 2 > 0$) pozitivne te je $T(0,1)$ lokalni minimum funkcije. ■

■ **Primjer 3.17** Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Rješenje. Stacionarne točke su rješenje sustava: $f'_x = 2x = 0$ i $f'_y = -2y = 0$. Jedina stacionarna točka je $T_0(0,0)$. Druge parcijalne derivacije su jednake $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = -2$ i

$f''_{xy} = 0$. Hesseova matrica glasi

$$H_f(T_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_0) & f''_{xy}(T_0) \\ f''_{xy}(T_0) & f''_{yy}(T_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da glavne minore iznose $f''_{xx}(T_0) = 2 > 0$ i $\det(H_f(T_0)) = -4 < 0$ te zaključujemo da je $T_0(0,0)$ sedlasta točka. ■

■ **Primjer 3.18** Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

Rješenje. Prvo izračunamo parcijalne derivacije:

$$f'_x = e^{x-y}(x^2 - 2y^2) + e^{x-y} \cdot 2x = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x)$$

i

$$f'_y = -e^{x-y}(x^2 - 2y^2) + e^{x-y} \cdot (-4y) = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y).$$

Stacionarne točke su rješenje sustava:

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) = 0 \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) = 0 \end{cases}.$$

Budući da je izraz e^{x-y} uvijek različit od nule, možemo podijeliti s tim izrazom te slijedi da tražimo rješenja sustava:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}.$$

Zbrajanjem te dvije jednadžbe dobivamo

$$2x - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2y.$$

To uvrstimo u prvu jednadžbu te dobijemo jednadžbu samo po y koja glasi

$$2y^2 + 4y = 0.$$

Lako se dobiju rješenja ove jednadžbe: $y_1 = 0$ i $y_2 = -2$. Sada su pripadne stacionarne točke $T_1(0,0)$ i $T_2(-2,-4)$.

Druge parcijalne derivacije su jednake $f''_{xx} = e^{x-y}(x^2 + 4x + 2 - 2y^2)$, $f''_{yy} = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4)$ i $f''_{xy} = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y)$. Za svaku stacionarnu točku napišemo pripadnu Hesseovu matricu. Hesseova matrica za T_1 glasi

$$H_f(T_1) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_1) & f''_{xy}(T_1) \\ f''_{xy}(T_1) & f''_{yy}(T_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da su glavne minore : $f''_{xx}(T_1) = 2 > 0$ i $\det(H_f(T_1)) = -8 < 0$ te zaključujemo da je $T_1(0,0)$ sedlo funkcije. Hesseova matrica za T_2 glasi

$$H_f(T_2) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_2) & f''_{xy}(T_2) \\ f''_{xy}(T_2) & f''_{yy}(T_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{e^2} & \frac{8}{e^2} \\ \frac{8}{e^2} & -\frac{12}{e^2} \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da su glavne minore : $f''_{xx}(T_2) = -\frac{6}{e^2} < 0$ i $\det(H_f(T_1)) = \frac{72}{e^4} - \frac{64}{e^4} > 0$ te zaključujemo da je točka $T_2(-2,-4)$ lokalni maksimum funkcije. ■

■ **Primjer 3.19** Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije:
a) $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 2$,
b) $f(x,y) = x\sin y$.

Rješenje. a) Prvo izračunamo parcijalne derivacije: $f'_x = \cos x$ i $f'_y = 2y - 2$. Stacionarne točke su rješenje sustava:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Slijedi da je $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $y = 1$. Dakle, imamo beskonačno mnogo stacionarnih točaka oblika $T_k(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

Druge parcijalne derivacije su jednake $f''_{xx} = -\sin x$, $f''_{yy} = 2$ i $f''_{xy} = 0$. Budući da se vrijednost funkcije sinus razlikuje u parnim i neparnim točkama, morat ćemo odvojeno promatrati stacionarne točke oblika $T_{2k}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$ i $T_{2k+1}(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, 1)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Hesseova matrica za točke T_{2k} glasi

$$H_f(T_{2k}) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_1) & f''_{xy}(T_1) \\ f''_{xy}(T_1) & f''_{yy}(T_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da su glavne minore : $f''_{xx}(T_{2k}) = -1 < 0$ i $\det(H_f(T_{2k})) = -2 < 0$ te zaključujemo da su točke T_{2k} sedla funkcije. Hesseova matrica za točke T_{2k+1} glasi

$$H_f(T_{2k+1}) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_2) & f''_{xy}(T_2) \\ f''_{xy}(T_2) & f''_{yy}(T_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da su glavne minore : $f''_{xx}(T_{2k+1}) = 1 > 0$ i $\det(H_f(T_{2k+1})) = 2 > 0$ te zaključujemo da su točke T_{2k+1} lokalni minimum funkcije. Vidi Sliku 7.

b) Prvo izračunamo parcijalne derivacije: $f'_x = \sin y$ i $f'_y = x\cos y$. Stacionarne točke su rješenje sustava:

$$\begin{cases} \sin y = 0 \\ x\cos y = 0 \end{cases}.$$

Iz prve jednadžbe slijedi da je $y_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a iz druge slijedi da je $x = 0$. Primijetite da funkcije kosinus i sinus ne mogu istovremeno biti nula. Dakle, imamo beskonačno mnogo stacionarnih točaka oblika $T_k(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

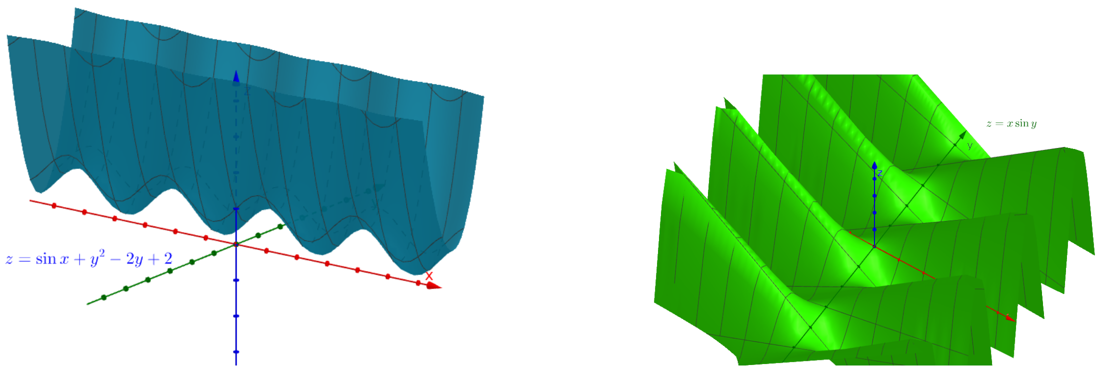
Druge parcijalne derivacije su jednake $f''_{xx} = 0$, $f''_{yy} = -x\sin y$ i $f''_{xy} = \cos y$. Budući da se vrijednost funkcije kosinus razlikuje u parnim i neparnim točkama, morat ćemo odvojeno promatrati stacionarne točke oblika $T_{2k}(0, 2k\pi)$ i $T_{2k+1}(0, (2k+1)\pi)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Hesseova matrica za točke T_{2k} glasi

$$H_f(T_{2k}) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_{2k}) & f''_{xy}(T_{2k}) \\ f''_{xy}(T_{2k}) & f''_{yy}(T_{2k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da su glavne minore : $f''_{xx}(T_{2k}) = 0$ i $\det(H_f(T_{2k})) = -1 < 0$ te zaključujemo da su točke T_{2k} sedla funkcije. Hesseova matrica za točke T_{2k+1} glasi

$$H_f(T_{2k+1}) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_{2k+1}) & f''_{xy}(T_{2k+1}) \\ f''_{xy}(T_{2k+1}) & f''_{yy}(T_{2k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da su glavne minore : $f''_{xx}(T_{2k+1}) = 0$ i $\det(H_f(T_{2k+1})) = -1 < 0$ te zaključujemo da su točke T_{2k+1} isto sedla. Vidi Sliku 7. ■



a) $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 2$ b) $f(x,y) = x \sin y$

Slika 7 - Primjer 3.19

Vježba 3.5 Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije
a) $f(x,y) = x^2 - y^4$
b) $f(x,y) = x^2 + y^4$
c) $f(x,y) = x^4 + y^4$
Uputa: Uvjerite se da kriterij pomoću Hesseove matrice ne daje odluku ni u kojem od dijelova. No direktno iz grafova možemo vidjeti da funkcija u (a) ima sedlo, u (b) strogi lokalni minimum, i u (c) strogi lokalni minimum u točki $(0,0)$.

Vježba 3.6 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$. (Uputa: Pripazite da su stacionarne točke u domeni funkcije!) (Rj. $T(6,4)$ = lok.max.)

Vježba 3.7 Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. (Rj. $T_1(2,1)$ lok min; $T_2(-2,-1)$ lok max; $T_3(1,2)$ sedlo; $T_4(-1,-2)$ sedlo)

Zapamtimo!
Postupak određivanja lokalnih ekstrema funkcije dvije varijable se sastoji od:
- traženja stacionarnih točaka
- ispitivanja svih stacionarnih točaka pomoću drugog diferencijala ili Hesseove matrice
- donošenja zaključka o tipu lokalnog ekstrema za svaku stacionarnu točku

3.4.2 Lokalni ekstremi funkcije n varijabli

Nakon što smo postupak traženja lokalnih ekstrema detaljno pokazali za funkciju dvije varijable, sada ćemo ukratko prezentirati iste rezultate poopćene na funkcije n varijabli. Na kraju ćemo kroz zadatke pokazati kako se određuju lokalni ekstremi za funkciju tri varijable.

Definicija 3.4.2 Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup.

- Funkcija f u točki $\vec{a} \in U$ ima **lokalni minimum** ako postoji otvorena kugla $K_\varepsilon(\vec{a})$ tako da je
$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{a}) \quad \forall \vec{x} \in K_\varepsilon(\vec{a})$$
- Funkcija f u točki $\vec{a} \in U$ ima **lokalni maksimum** ako postoji otvorena kugla $K_\varepsilon(\vec{a})$ tako da je
$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}) \quad \forall \vec{x} \in K_\varepsilon(\vec{a})$$

Lokalni minimumi i maksimumi se zajedno zovu **lokalni ekstremi funkcije.** ▪

Napomena 3.8 Ako u gornjim nejednakostima imamo stroge nejednakosti (za $\vec{x} \neq \vec{a}$) onda govorimo o **strogom lokalnom minimumu**, odnosno **strogom lokalnom maksimumu**, tj. o **strogim lokalnim ekstremima** funkcije f.

Definicija 3.4.3 Neka je f diferencijabilna funkcija. Točke $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koje zadovoljavaju uvjet
$$\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$$
zovemo **stacionarne** točke funkcije f. ▪

Napomena 3.9 U slučaju tri varijable stacionarna točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ funkcije $u = f(x,y,z)$ je rješenje sustava $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0 \end{cases}$

Sada ćemo navesti poopćene uvjete za lokalne ekstreme.

Teorem 3.4.4 — Nužan uvjet za lokalni ekstrem funkcije. Ako diferencijabilna funkcija više varijabli f ima lokalni ekstrem u točki $\vec{x} = \vec{a}$, onda je
$$\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$$
tj.
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) = 0.$$

Teorem 3.4.5 — Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem funkcija n varijabli. Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $f : U \to \mathbb{R}$ dvaput neprekinuto diferencijabilna funkcija (tj. klase C^2). Pretpostavimo da je $T_0 \in \mathbb{R}^n$ stacionarna točka od f , tj. $\nabla f(T_0) = 0$. Tada vrijedi:

a) Ako je kvadratna forma $d^2 f(T_0)$ pozitivno definitna, tj. takva da je
$$d^2 f(T_0)(\vec{dx}) > 0$$
za sve $\vec{dx} \neq \vec{0}$, onda je u T_0 **strogi lokalni minimum** od f.

b) Ako je kvadratna forma $d^2f(T_0)$ negativno definitna, tj. takva da je

$$d^2f(T_0)(\vec{dx}) < 0$$

za sve $\vec{dx} \neq \vec{0}$, onda je u T_0 **strogi lokalni maksimum** od f .

c) Ako je $d^2f(T_0)$ indefinitna kvadratna forma, tj. postoje $\vec{ds}_1$ i $\vec{ds}_2$ takvi da je $d^2f(T_0)(\vec{ds}_1) > 0$ i $d^2f(T_0)(\vec{ds}_2) < 0$, onda T_0 **nije točka ekstrema.**

Napomena 3.10 Nema odgovora u situacijama $d^2f(T_0) \geq 0$ i $d^2f(T_0) \leq 0$ i kada je $d^2f(T_0) = 0$. Tada moramo dalje istraživati!

Mi ćemo računati lokalne ekstreme samo za funkcije tri varijable pa ćemo stoga i navesti pripadni teorem s Hesseovom matricom.

Teorem 3.4.6 — Dovoljni uvjeti za ekstrem pomoću Hesseove matrice za funkciju tri varijable. Neka je $T_0(x_0,y_0,z_0)$ stacionarna točka funkcije $u = f(x,y,z)$ klase C^2 , tj. rješenje sustava $f_x(T_0) = 0,\ f_y(T_0) = 0,\ f_z(T_0) = 0$. Neka je $H_f(T_0)$ Hesseova matrica funkcije f u točki T_0. Tada vrijedi:

a) Ako su sve glavne minore Hesseove matrice $H_f(T_0)$ pozitivne, tj.

$$(u''_{xx})_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} (u''_{xx})_0 & (u''_{xy})_0 \\ (u''_{yx})_0 & (u''_{yy})_0 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} (u''_{xx})_0 & (u''_{xy})_0 & (u''_{xz})_0 \\ (u''_{yx})_0 & (u''_{yy})_0 & (u''_{yz})_0 \\ (u''_{zx})_0 & (u''_{zy})_0 & (u''_{zz})_0 \end{vmatrix} > 0$$

onda je T_0 točka **strogog lokalnog minimuma** funkcije f .

b) Ako je

$$(u''_{xx})_0 < 0, \quad \begin{vmatrix} (u''_{xx})_0 & (u''_{xy})_0 \\ (u''_{yx})_0 & (u''_{yy})_0 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} (u''_{xx})_0 & (u''_{xy})_0 & (u''_{xz})_0 \\ (u''_{yx})_0 & (u''_{yy})_0 & (u''_{yz})_0 \\ (u''_{zx})_0 & (u''_{zy})_0 & (u''_{zz})_0 \end{vmatrix} < 0$$

onda je T_0 točka **strogog lokalnog maksimuma** funkcije.

c) Ako su su glavne minore različite od nule te su predznaci glavnih minora Hesseove matrice $H_f(T_0)$ različiti od predznaka u slučaju (a) i od predznaka u slučaju (b), onda točka T_0 nije točka ekstrema.

Sada ćemo prethodni teorem primijeniti u zadacima s lokalnim ekstremima funkcije tri varijable.

■ **Primjer 3.20** Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije $u(x,y,z) = xy + 2z - x - x^2 - y^2 - z^2$.

Rješenje. Prvo tražimo stacionarne točke te izračunamo $u'_x = y - 1 - 2x$, $u'_y = x - 2y$ i $u'_z = 2 - 2z$. Znamo da su stacionarne točke rješenja sustava

$$\begin{cases} y - 1 - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2 - 2z = 0 \end{cases} .$$

Odmah vidimo da je $z_0 = 1$. Zatim uvrstimo $x = 2y$ u prvu jednadžbu i dobivamo $y - 1 - 4y = 0$ odnosno $y_0 = -\frac{1}{3}$ te je $x_0 = -\frac{2}{3}$. Dakle, dobivena je jedna stacionarna točka $T_0(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.
Sada računamo elemente Hesseove matrice odnosno sve parcijalne derivacije drugog reda u točki T_0. Dobivamo $u''_{xx} = -2$, $u''_{yy} = -2$, $u''_{zz} = -2$, $u''_{xz} = 0$, $u''_{yz} = 0$ i $u''_{xy} = 1$ te ih ubacimo u matricu:

$$H_u(T_0) = \begin{bmatrix} (u''_{xx})_0 & (u''_{xy})_0 & (u''_{xz})_0 \\ (u''_{yx})_0 & (u''_{yy})_0 & (u''_{yz})_0 \\ (u''_{zx})_0 & (u''_{zy})_0 & (u''_{zz})_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Glavne minore dobivene Hesseove matrice su:

$$u''_{xx}(T_0) = -2 < 0, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 < 0.$$

Dakle, zaključujemo da je točka $T_0(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ točka lokalnog maksimuma funkcije u. ■

■ **Primjer 3.21** Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije $u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy + 2yz + x - y$.

Rješenje. Prvo izračunamo parcijalne derivacije $u'_x = 2x - 4y + 1$, $u'_y = 4y - 4x + 2z - 1$ i $u'_z = 4z + 2y$. Znamo da su stacionarne točke rješenja sustava

$$\begin{cases} 2x - 4y + 1 = 0 \\ 4y - 4x + 2z - 1 = 0 \\ 4z + 2y = 0 \end{cases}.$$

Sada trebamo znati riješiti linearni sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice. Jedan način je upotreba matričnog zapisa sustava i metode Gaussovih eliminacija što ste naučili u kolegiju Linearna algebra. Drugi način je korištenje supstitucije. Iz zadnje jednadžbe vidimo da je $z = -\frac{1}{2}y$ i to uvrstimo u drugu jednadžbu. Iz prve izlučimo $x = 2y - \frac{1}{2}$ i ubacimo isto u drugu jednadžbu. Sada druga jednadžba postaje

$$4y - 4(2y - \frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2}y) = 1 \quad \Rightarrow \quad -5y = -1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{5}.$$

Uvrštavanjem u supstitucije lako dobivamo ostale koordinate: $x_0 = -\frac{1}{10}$ i $z_0 = -\frac{1}{10}$. Dakle, dobivena je jedna stacionarna točka $T_0(-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10})$.
Sada računamo elemente Hesseove matrice odnosno sve parcijalne derivacije drugog reda u točki T_0. Dobivamo $u''_{xx} = 2$, $u''_{yy} = 4$, $u''_{zz} = 4$, $u''_{xz} = 0$, $u''_{yz} = 2$ i $u''_{xy} = -4$ te ih ubacimo u matricu:

$$H_u(T_0) = \begin{bmatrix} (u''_{xx})_0 & (u''_{xy})_0 & (u''_{xz})_0 \\ (u''_{yx})_0 & (u''_{yy})_0 & (u''_{yz})_0 \\ (u''_{zx})_0 & (u''_{zy})_0 & (u''_{zz})_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Glavne minore dobivene Hesseove matrice su:

$$u''_{xx}(T_0) = 2 > 0, \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 16 = -8 < 0, \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 4 \cdot (-16) = -40 < 0.$$

Dakle, zaključujemo da točka $T_0(-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10})$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije u nego sedlo. ■

Vježba 3.8 Odredite i ispitajte sve ekstreme funkcije

$$u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

(Rj. $T(-2/3, -1/3, 1)$ lok. min.)

3.5 Globalni ekstremi funkcija više varijabli

U ovom ćemo se poglavlju baviti globalnim ekstremima koja funkcija više varijabli postiže na zatvorenom i omeđenom skupu u $\mathbb{R}^n$. Općenito, globalni ekstremi se definiraju na sljedeći način.

Definicija 3.5.1 Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : U \to \mathbb{R}$.

- Funkcija f u točki $T_0 \in U$ ima **globalni minimum** ako je $f(T) \geq f(T_0)$, $\forall T \in U$. Vrijednost $f(T_0)$ je minimalna vrijednost funkcije na skupu U.
- Funkcija f u točki $T_0 \in U$ ima **globalni maksimum** ako je $f(T) \leq f(T_0)$, $\forall T \in U$. Vrijednost $f(T_0)$ je maksimalna vrijednost funkcije na skupu U.

Globalni minimumi i maksimumi se zajedno zovu **globalni ekstremi funkcije.** ■

No mi ćemo proučavati globalne ekstreme funkcije više varijabli samo na zatvorenom i omeđenom skupu U zato što za takve skupove postoji rezultat sličan onome za funkciju jedne varijable. Podsjetimo se rezultata iz Matematičke analize 1 vezano uz globalne ekstreme.

Dodatak

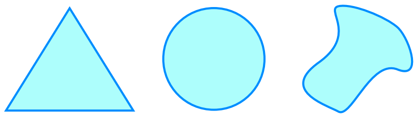
Teorem 3.5.1 Realna funkcija jedne varijable f koja je neprekinuta postiže globalni minimum i globalni maksimum na zatvorenom intervalu (segmentu) $[a,b]$.

Definicija 3.5.2 **Kritične točke** neprekinute funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ su stacionarne točke($f'(x) = 0$) i točke u kojima f nije diferencijabilna. ■

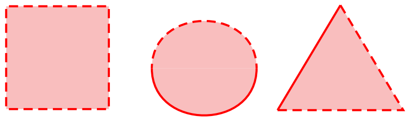
Teorem 3.5.2 Točke u kojima neprekinuta funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na zatvorenom segmentu poprima globalni minimum i globalni maksimum su neke od kritičnih točaka funkcije f ili rubovi segmenta.

Sada ćemo se ukratko podsjetiti kakvi su to zatvoreni i omeđeni skupovi u $\mathbb{R}^n$. Preciznu definiciji smo naveli u Poglavlju 1.0.2. Zatvoreni skupovi su oni skupovi koji sadrže svoj rub. Omeđeni skupovi su skupovi koji su sadržani u nekoj kugli u $\mathbb{R}^n$.

Na sljedećoj slici pogledajte kako izgledaju zatvoreni i omeđeni skupovi u $\mathbb{R}^2$. Primjer zatvorenog i omeđenog skupa u ravnini je krug $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Zatvoreni skupovi sadrže svoj rub

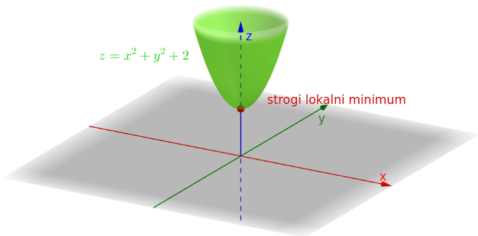


Skupovi koji nisu zatvoreni

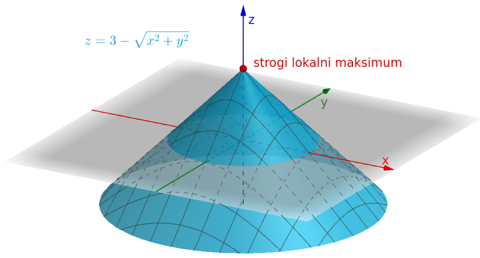
Sada slijede analogna definicija kritičnih točaka i teorem o globalnim ekstremima za funkcije više varijabli.

Definicija 3.5.3 **Kritične točke** neprekinute funkcije $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ su stacionarne točke i točke u kojima f nije diferencijabilna. ■

Prisjetimo se da su stacionarne točke one u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s xOy ravninom: točke lokalnih ekstrema i sedlaste točke. Nadalje, u Poglavlju 2.3 smo detaljno proučavali funkcije koje nisu diferencijabilne u nekoj točki. Vidi Sliku 8.



f ima stacionarnu točku $T(0,0)$



f nije diferencijabilna u $T(0,0)$

Slika 8 - kritične točke

Teorem 3.5.3 — o globalnim ekstremima. Neprekinuta funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na omeđenom i zatvorenom skupu D poprima globalni minimum i globalni maksimum. Točke u kojima se ti ekstremi mogu postići su kritične točke funkcije f i rub skupa D.

Dokaz. Dokazujemo samo drugu tvrdnju teorema: globalni ekstremi su kritične točke ili rub skupa. Dakle, neka je $\vec{x}_0$ točka globalnog ekstrema funkcije f. Želimo pokazati da je $\vec{x}_0$ kritična točka ili na rubu skupa. Pretpostavimo suprotno tj. da $\vec{x}_0$ nije kritična i da nije na rubu skupa. Dakle, to bi značilo da je $\vec{x}_0$ u unutrašnjosti skupa D, f je diferencijabilna u $\vec{x}_0$ i $\vec{x}_0$ nije stacionarna točka. Budući da je $\vec{x}_0$ točka globalnog ekstrema i nalazi se u unutrašnjosti skupa U, onda je to i točka lokalnog ekstrema. Budući da je f diferencijabilna u $\vec{x}_0$ po nužnom uvjetu za lokalni ekstrem imamo da je $\vec{x}_0$ stacionarna točka za f. Time smo dobili kontradikciju! Ova kontradikcija pokazuje da točka globalnog ekstrema mora biti ili kritična točka ili na rubu skupa. ■

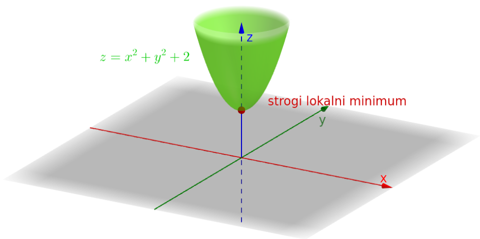
Ilustrirajmo navedeni teorem na nekoliko primjera funkcija sa Slike 9.

■ **Primjer 3.22** Nađite minimalnu i maksimalnu vrijednost funkcije $z = f(x,y)$ na skupu S ako je:
a) $z = x^2 + y^2 + 2$, S je krug $x^2 + y^2 \leq 1$.
b) $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$, S je krug $x^2 + y^2 \leq 4$.

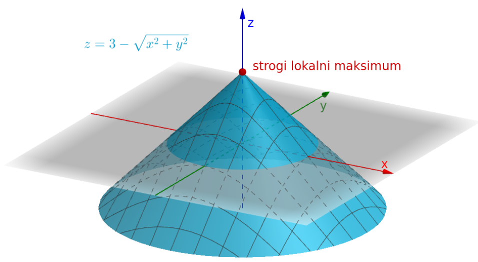
Rješenje. b) Vidimo da funkcija $z = x^2 + y^2 + 2$ ima lokalni minimum u $O(0,0)$, a nema lokalnog maksimuma. Sada tražimo globalne ekstreme na krugu $x^2 + y^2 \leq 1$ pa vidimo da lokalni minimum postaje i globalni te minimalna vrijednost funkcije iznosi $z_{min} = 2$. Globalni maksimum se poprima na rubu odnosno u točkama kružnice $x^2 + y^2 = 1$ koja je ujedno i nivo krivulja navedene plohe. Maksimalna vrijednost je jednaka $z_{max} = x^2 + y^2 + 2 = 3$. Vidi Sliku 9a.

b) Funkcija nije diferencijabilna u ishodištu no ima lokalni maksimum u $T(0,0)$ koji se nalazi unutar kruga $x^2 + y^2 \leq 4$. Znači, lokalni maksimum je i globalni te je maksimalna vrijednost funkcije $z_{max} = 3$. Globalni minimum se postiže na kružnici $x^2 + y^2 = 4$ i minimalna vrijednost iznosi $z_{min} = 3 - \sqrt{4} = 1$. Vidi Sliku 9b.

■



Slika 9a $z = x^2 + y^2 + 2$



Slika 9b $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Slika 9 - Primjer 3.22

Primjenom Teorema 3.5.3 dobijemo postupak za određivanje globalnih ekstrema funkcije dvije varijable na zatvorenom i omeđenom skupu.

Određivanje globalnih ekstrema funkcije f na omeđenom i zatvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^2$

1. Pronaći sve točke u kojima f nije diferencijabilna.
2. Pronaći sve stacionarne točke funkcije f unutar D.
3. Pronaći točke globalnih ekstrema restrikcije funkcije f na rub od D. (Parametrizirati rub skupa D kao funkciju jedne varijable, po dijelovima ako treba.)
4. Evaluirati f u svim dobivenim točkama te odrediti najveću i najmanju vrijednost funkcije.

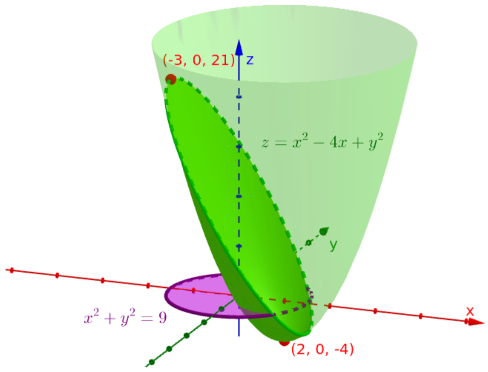
■ **Primjer 3.23** Odredite globalne ekstreme funkcije $z = x^2 - 4x + y^2$ na području $P : x^2 + y^2 \leq 9$.

Rješenje. Funkcija f je diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$, a jedina stacionarna točka unutar P je $T_1(2,0)$. Potrebno je još provjeriti rub, tj. kružnicu $x^2 + y^2 = 9$. Iz parametrizacije $x = 3\cos t, y = 3\sin t$ dobivamo

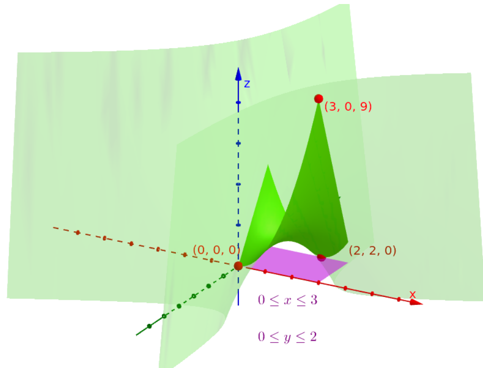
$$f(t) = 9 - 12\cos t,\ t \in [0, 2\pi),$$

a iz $f'(t) = 12\sin t = 0$ imamo $t = 0$ i $t = \pi$, odnosno kritične točke na rubu su $T_2(3,0)$ i $T_3(-3,0)$.
Vrijednosti funkcije z u kritičnim točkama su redom $z(2,0) = -4$, $z(3,0) = -3$, $z(-3,0) = 21$. Zaključujemo da globalni minimum funkcije na području P iznosi -4 i postiže se u stacionarnoj točki $T_{max}(2,0)$, a globalni maksimum iznosi 21 i postiže se u točki ruba $T_{min}(-3,0)$. Vidi Sliku 10a.

■



Slika 10a Primjer 3.23



Slika 10b Primjer 3.24

■ **Primjer 3.24** Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ na pravokutniku $P = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

Rješenje. Funkcija f je neprekinuta i diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$. Iz $f'_x = 2x - 2y = 0$ i $f'_y = -2x + 2 = 0$ slijedi da je jedina stacionarna točka unutar pravokutnika $T_1(1,1)$. Potrebno je još provjeriti rub pravokutnika. Ako vrhove označimo s $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,2)$ i $D(0,2)$, tada gledamo restrikcije funkcije na svaku stranicu pravokutnika.

- Stranica $\overline{AB}$ je dio pravca $y = 0$ za $x \in [0,3]$. Restrikcija funkcije f na $\overline{AB}$ glasi:
$$f(x,0) = x^2, \quad x \in [0,3].$$
Ova kvadratna funkcija je rastuća na $[0,3]$ te ima minumum u $A(0,0)$ koji iznosi $f(0,0) = 0$, a maksimum u $B(3,0)$ koji iznosi $f(3,0) = 9$.
- Stranica $\overline{BC}$ je dio pravca $x = 3$ za $y \in [0,2]$. Restrikcija funkcije f na $\overline{BC}$ glasi:
$$f(3,y) = 9 - 4y, \quad y \in [0,2].$$
Ova linearna funkcija je padajuća na $[0,2]$ te ima minumum u $C(3,2)$ koji iznosi $f(3,2) = 1$, a maksimum u $B(3,0)$ koji iznosi $f(3,0) = 9$.
- Stranica $\overline{CD}$ je dio pravca $y = 2$ za $x \in [0,3]$. Restrikcija funkcije f na $\overline{CD}$ glasi:
$$f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2, \quad x \in [0,3].$$
Ova kvadratna funkcija ima minumum u $A(2,2)$ koji iznosi $f(2,2) = 0$ (tjeme), a maksimum u $D(0,2)$ koji iznosi $f(0,2) = 4$. (rub)
- Stranica $\overline{DA}$ je dio pravca $x = 0$ za $y \in [0,2]$. Restrikcija funkcije f na $\overline{DA}$ glasi:
$$f(0,y) = 2y, \quad y \in [0,2].$$
Ova linearna funkcija je rastuća na $[0,2]$ te ima minumum u $A(0,0)$ koji iznosi $f(0,0) = 0$, a maksimum u $D(0,2)$ koji iznosi $f(0,2) = 4$.

Sada usporedimo sve dobivene minimalne i maksimalne vrijednosti na rubu i u stacionarnoj točki te slijedi da je $f_{max}(3,0) = 9$ i $f_{min}(0,0) = f_{min}(2,2) = 0$. Vidi Sliku 10b. ■

3.5.1 Ekstremi linearne funkcije

Sada ćemo proučavati postupak za traženje globalnih ekstrema linearne funkcije na zatvorenom i omeđenom skupu. Ovaj problem ima zanimljivu geometrijsku interpretaciju te se primjenjuje u linearnom programiranju. Problemi linearnog programiranja su problemi traženja ekstrema linearnih funkcija na skupovima koji su zadani u obliku linearnih jednadžbi i nejednadžbi. Primjer jednog takvog problema možete vidjeti u dodatku na kraju ovog poglavlja.

Prvo se prisjetimo linearne i afine funkcije. Linearna funkcija jedne varijable glasi $f(x) = ax$, a afina funkcija glasi $f(x) = ax + b$. Analogne definicije vrijede i za više varijabli.

Definicija 3.5.4 — Linearna i afina funkcija više varijabli. Neka je zadan vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq 0$ i $d \in \mathbb{R}$. Funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadanu s

$$f(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} = a_1 k_1 + \ldots + a_n x_n$$

zovemo **linearna funkcija više varijabli**. Funkciju $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadanu s

$$g(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + d$$

zovemo **afina funkcija više varijabli**. ■

Uočimo da je linearna funkcija specijalan slučaj afine za $d = 0$.

Pogledajmo situaciju za $n = 2$. Tada je $\vec{a} = (a_1, a_2)$ te je linearna funkcija oblika

$$f(x,y) = a_1 x + a_2 y,$$

a afina oblika

$$g(x,y) = a_1 x + a_2 y + d.$$

Uočimo:

$$\nabla f(x,y) = (a_1, a_2) \quad \text{za sve } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Isto vrijedi i za afinu funkciju:

$$\nabla g(x,y) = (a_1, a_2) \quad \text{za sve } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Općenito, gradijent svake linearne i afine funkcije više varijabli je konstantan vektor:

$$\nabla f(\vec{x}) = \vec{a} \quad \text{za sve } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

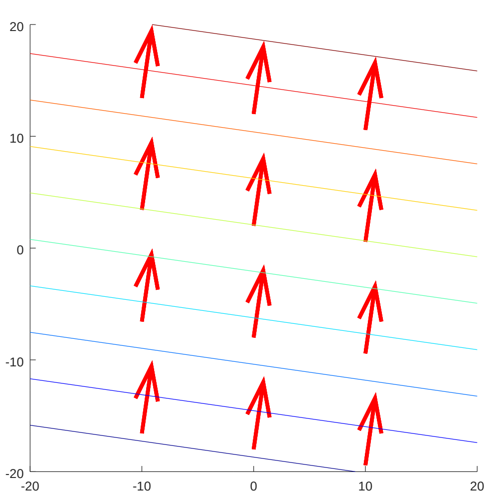
Prisjetimo se da vektor gradijenta $\nabla f(\vec{x}) = \vec{a}$ pokazuje smjer u kojem funkcija najbrže raste, a $-\nabla f(\vec{x}) = -\vec{a}$ pokazuje smjer najbržeg opadanja funkcije. Znači da afina funkcija u svim točkama ravnine raste u istom konstantnom smjeru, a pada u suprotnom smjeru. Ako se sjetimo da je graf linearne odnosno afine funkcije dviju varijabli ustvari ravnina u prostoru, onda tvrdnja postaje jasnija.

Prisjetimo se sada veze između gradijenta funkcije i njenih nivo krivulja odnosno nivo ploha.

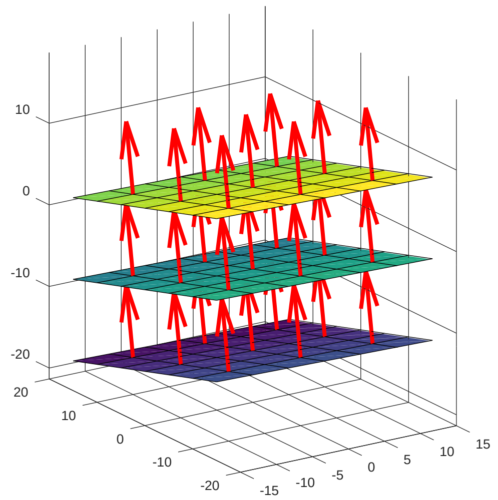
■ **Primjer 3.25** Za $n = 2$ i $\vec{a} = (a_1, a_2)$, linearna funkcija je $f(x,y) = a_1 x + a_2 y$, $\nabla f(\vec{x}) = \vec{a}$. Nivo-krivulje funkcije f su paralelni pravci s jednadžbama:

$$a_1 x + a_1 y = C, \quad \text{gdje je } C \in \mathbb{R}.$$

Prisjetimo se da su nivo-pravci okomiti na gradijent $\vec{a}$. Isto vrijedi i za pripadnu afinu funkciju. Vidi Sliku 11a. ■



Slika 11a Primjer 3.25



Slika 11b Primjer 3.26

■ **Primjer 3.26** Za $n=3$ je $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ te linearna funkcija glasi $f(x,y,z)=a_1x+a_2y+a_3z$, a gradijent je $\nabla f(\vec{x})=\vec{a}$. Nivo-plohe funkcije f su paralelne ravnine koje sve imaju isti vektor normale $\vec{a}$ i jednadžbu oblika:

$$a_1x+a_1y+a_3z=C, \quad \text{gdje } C\in\mathbb{R}.$$

Prisjetimo se da su nivo-ravnine okomite na gradijent $\vec{a}$. Vidi Sliku 11b. ■

Sada se vratimo na problem traženja globalnih ekstrema linearne i afine funkcije na zatvorenom i omeđenom skupu. Budući da su obje funkcije neprekinute na $\mathbb{R}^n$, za njih vrijedi Teorem 3.5.3 iz prethodnog poglavlja. Znači da na omeđenom i zatvorenom skupu dostižu ekstremne vrijednosti ili u kritičnim točkama ili na rubu skupa. Budući da su linearna i afina funkcija svuda diferencijabilne i nemaju stacionarnih točaka unutar skupa jer je $\nabla f=\vec{a}\neq 0$, one mogu poprimati minimum i maksimum samo na rubu skupa. Time smo dokazali sljedeći korolar.

Korolar 3.5.4 Ako je $D\subseteq\mathbb{R}^n$ omeđen i zatvoren skup onda afina funkcija $f(\vec{x})=\vec{a}\vec{x}+d$ dostiže minimum i maksimum na rubu skupa D.

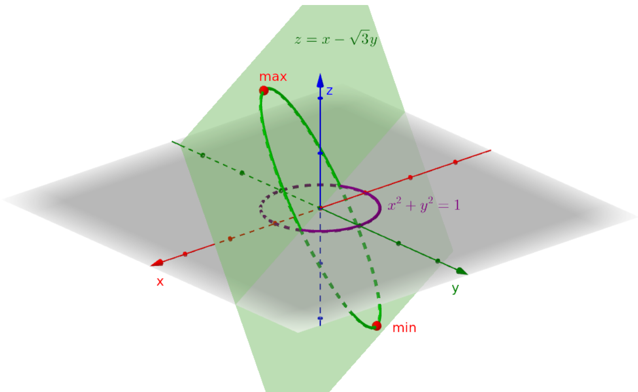
Ovu tvrdnju možemo objasniti i geometrijski koristeći se gradijentom u slučaju dviju i tri varijabli. Naime, točka maksimuma afine funkcije je ona točka na rubu skupa D do koje možemo najdalje translatirati nivo-pravce (nivo-plohe) u smjeru rasta funkcije, to jest u smjeru gradijenta $\nabla f=\vec{a}$. Analogno, točku minimuma funkcije tražimo translacijom nivo-pravaca (nivo-ploha) u smjeru pada funkcije $-\nabla f=-\vec{a}$. Ovaj geometrijski postupak ćemo i koristiti u zadacima.

Napomena 3.11 Štoviše, ukoliko je D poligon, poliedar, ili općenito politop (trokut, peterokut, tetraedar, prizma, ...) onda se ekstremi afine funkcije uvijek poprimaju u nekom od vrhova/bridova/strana. ($\longrightarrow$ Linearno programiranje)

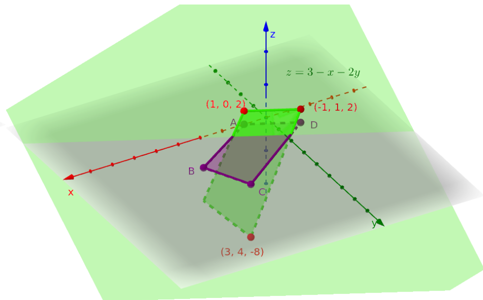
Pogledajmo sada nekoliko primjera traženja ekstrema linearnih funkcija dvije i tri varijable na zatvorenim i omeđenim skupovima.

■ **Primjer 3.27** Zadana je kružnica $x^2 + y^2 = 1$. Odredite točke ekstrema i ekstremalne vrijednosti funkcije $f(x,y) = x - \sqrt{3}y$ na zadanoj kružnici.

Rješenje. Imamo linearnu funkciju $f(x,y) = x - \sqrt{3}y$. Gradijent iznosi $\nabla f = \vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}$ i on pokazuje smjer najbržeg rasta funkcije. U koordinatnoj ravnini nacrtamo kružnicu $x^2 + y^2 = 1$, vektor gradijenta i nekoliko nivo pravaca oblika $x - \sqrt{3}y = C$. Sada vidimo da se ekstremi postižu u točkama presjeka zadane kružnice i pravca kroz ishodište s vektorom smjera jednakim vektoru gradijenta. Naime, kod kružnice vrijedi da normala na svaku točku kružnice prolazi ishodištem.
Jednadžba pravca kroz $O(0,0)$ i vektorom smjera $\vec{c} = \vec{i} - \sqrt{3}$ u ravnini glasi: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-\sqrt{3}}$ odnosno $y = -\sqrt{3}x$. Sada tražimo presjek pravca i kružnice tako da $y = -\sqrt{3}x$ ubacimo u jednadžbu $x^2 + y^2 = 1$ te dobivamo $x^2 + 3x^2 = 1$. Slijedi da je $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Dobivene točke su $T_1(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ i $T_2(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Vidimo da je $f_{max}(T_1) = 2$ i $f_{min}(T_2) = -2$. Vidi Sliku 12. ■



Slika 12 Primjer 3.27



Slika 13 Primjer 3.28

■ **Primjer 3.28** Zadana je afina funkcija $f(x,y) = 3 - x - 2y$ na četverokutu $ABCD$ čiji su vrhovi $A(1,0), B(4,2), C(3,4), D(-1,1)$. Odredi sve točke u kojima se dostiže minimum ili maksimum zadane funkcije.

Rješenje. Zadatak možemo riješiti na dva načina. Jedan je geometrijski. Naime, ako nacrtamo četverokut i gradijent $\nabla f = -\vec{i} - 2\vec{j}$ u koordinatnoj ravnini, koristeći činjenicu da gradijent pokazuje smjer rasta lako vidimo da će se minimum postići u svim točkama stranice $\overline{AD}$, a maksimum se postiže u točki C. Sada je maksimalna vrijednost $f(A) = f(D) = 2$, a minimalna je $f(C) = -8$. Vidi Sliku 13.
Drugi način je da iskoristimo tvrdnju prethodnog teorema te izračunamo vrijednosti funkcije u svim vrhovima četverokuta i jednostavno izaberemo maksimalnu i minimalnu vrijednost. ■

■ **Primjer 3.29** Odredimo maksimum funkcije f i točku u kojoj se on postiže za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ definiranu na tetraedru $D_f = ABCD$ s vrhovima $A(-2,1,1)$, $B(2,-5,2)$, $C(3,6,3)$, $D(1,-7,-2)$ formulom $f(x,y,z) = 2x - 3y + z + 4$.

Rješenje. Znamo da afina funkcije na zatvorenom i omeđenom skupu kao što je tetraedar postiže ekstreme na rubu. Tako da je dovoljno izračunati vrijednosti u svim vrhovima tetraedra te zaključiti u kojim točkama funkcija ima minimum, a u kojima ima maksimum. Dakle, imamo $f(A) = -3$, $f(B) = 25$, $f(C) = -5$ i $f(D) = 25$. Vidimo da se maksimum postiže na bridu $\overline{BD}$, a minimum u vrhu C. Primijetimo da u slučaju kada je vrijednost jednaka u tri točke, onda se maksimum postiže na cijeloj strani tetraedra. ■

Dodatak

Primjer standardnog oblika problema linearnog programiranja iz područja ekonomije

Problem u ekonomiji
Neka informatička tvrtka proizvodi dva tipa računala R_1 i R_2. Istraživanje tržišta je pokazalo da se proda barem dvostruko više računala tipa R_1 nego R_2. Također, tvrtka tjedno može proizvesti najviše 150 računala. Neto prihod za proizvedeno i prodano računalo tipa R_1 iznosi 1000kn, a za računalo tipa R_2 500kn. Problem traženja maksimalnog tjednog neto prihoda uz navedene uvjete se može zapisati kao problem linearnog programiranja na sljedeći način:

Matematički model
Neka je x broj prodanih računala R_1, a y broj prodanih računala R_2.Tražimo globalni maksimum linearne funkcije $f(x,y) = 1000x + 500y$ na skupu $D = \{(x,y) : x \geq 2y, x+y \leq 150, x,y \geq 0\}$.

Rješenje. Skiciramo pravce $y = \frac{1}{2}x$ i $y = 150 - x$ u prvom kvadrantu. Skup D je dio prvog kvadranta ispod oba pravca te dobijemo trokut s vrhovima u točkama $A(0,0)$, $B(150,0)$ i $C(100,50)$. Znamo da linearna funkcija ima maksimum na rubu trokuta. Gradijent je $\nabla f = 500(2\vec{i} + \vec{j})$, što je ujedno i vektor smjera stranice $\overline{AC}$. Nacrtamo trokut i vidimo da se maksimum postiže u vrhu $B(150,0)$ te maksimalni neto prihod iznosi $f(150,0) = 150000$ kn.

3.6 Uvjetni ekstremi. Lagrangeova funkcija

U prethodnom poglavlju smo tražili globalne ekstreme neprekinutih funkcija više varijabli na zatvorenom i omeđenom skupu. Sada ćemo tražiti ekstreme funkcija više varijabli na nekom podskupu domene koji ne mora biti zatvoren i omeđen skup. Dakle, promotramo sljedeći problem:

Problem uvjetnih ekstrema:
Tražimo lokalne ekstreme funkcije više varijabli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na nekom podskupu $S \subset \mathbb{R}^n$. Skup S je obično zadan uvjetom $\varphi(\vec{x}) = 0$ te zato to zovemo problemom uvjetnih ekstrema.

Napomena 3.12 Problem globalnih ekstrema je problem traženja ekstrema neprekinute funkcije na zatvorenom i omeđenom skupu U koji se ne mora nužno moći zapisati u obliku $\varphi(\vec{x}) = 0$.

U slučaju da je zadana funkcija dvije varijable $z = f(x,y)$, traže se lokalni ekstremi te funkcije na nekom podskupu domene S, dakle tražimo ekstreme od $f|_S$. Podskup S će najčešće biti krivulja implicitno zadana jednadžbom oblika $\varphi(x,y) = 0$. To možemo ilustrirati sljedećim primjerom.

Neka funkcija $z = f(x,y)$ opisuje visinu neke planine, a krivulja $\varphi(x,y) = 0$ neka predstavlja planinarsku stazu na zemljopisnoj karti te planine. Ako želimo saznati koja točka na stazi ima najvišu, a koja najnižu visinu, to će biti problem uvjetnog ekstrema funkcije $f(x,y)$ uz uvjet $\varphi(x,y) = 0$.

U slučaju kada imamo funkciju tri varijable $u = f(x,y,z)$, onda možemo tražiti uvjetne ekstreme te funkcije na nekoj plohi zadanoj implicitno s $\varphi(x,y,z) = 0$, ili pak na krivulji danoj kao presjek dvije plohe $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 0, \\ \varphi_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$. To znači da u slučaju tri varijabli skup S može biti zadan s jednim ili dva uvjeta.

Napomena 3.13 Općenito, broj uvjeta kod uvjetnih ekstrema funkcije n varijabli mora biti strogo manji od broja varijabli!

Napomena 3.14 Problem uvjetnih ekstrema nekada možemo svesti na problem lokalnih ekstrema ako iz uvjeta izlučimo jednu varijablu i ubacimo u funkciju. Time smo smanjili broj varijabli i riješili se uvjeta. Npr. ako tražimo maksimum funkcije $f(x,y) = xy$ uz uvjet da je $x+y=2$, tada iz uvjeta slijedi da je $y = 2-x$ te uvrštavanjem u $f(x,y) = x(2-x)$ dobivamo funkciju jedne varijable čiji ekstrem lakše odredimo. No općenito izlučivanje jedne varijable iz uvjeta ne mora biti moguće.

Sada ćemo navesti i definiciju uvjetnih lokalnih ekstrema.

Definicija 3.6.1 Točku $\vec{a}$ iz skupa S zovemo točkom **uvjetnog lokalnog minimuma funkcije** f na skupu S (ili točkom lokalnog minimuma restrikcije $f|_S$) ako postoji otvorena kugla $K_\varepsilon(\vec{a})$ oko $\vec{a}$ takva da je

$$f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in K_\varepsilon(\vec{a}) \cap S.$$

Slično definiramo i **točke uvjetnog lokalnog maksimuma** funkcije f na skupu S.
Sve njih obuhvaćamo pojmom **uvjetnih lokalnih ekstrema funkcije** f na skupu S, odnosno pojmom lokalnih ekstrema od $f|_S$ ■

Prisjetimo se ekstrema linearne funkcije iz prošlog poglavlja. Pogledat ćemo jedan primjer u kojem je uvjet zadan u obliku implicitne krivulje i predstavlja zatvoren i omeđen skup.

■ **Primjer 3.30** Nađite uvjetne ekstreme linearne funkcije $f(x,y) = x-y+2$ uz uvjet $\varphi(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$. (Drugim riječima, nađite globalne ekstreme funkcije f na kružnici $x^2+y^2 = 1$.)

Rješenje. Uvjetni ekstremi linearne funkcije $f(x,y) = x-y+2$ na krivulji $\varphi(x,y) = x^2-y^2-1 = 0$ postizali su se upravo u točkama gdje su nivo pravci od f bili tangencijalni na zadanu krivulju uvjeta. Vidi Sliku 14. Sjetimo se da za implicitno zadanu krivulju $\varphi(x,y) = 0$ vrijedi da je gradijent $\nabla\varphi(T)$ okomiti na tangentu krivulje u toj istoj točki T. Također vrijedi da je ∇f okomit na nivo pravce (vidi Poglavlje 2.8.3). Vidjeli smo da je u točki ekstrema pripadni nivo pravac upravo tangenta na krivulju $\varphi(x,y) = 0$. Dakle, u točki ekstrema su $\nabla\varphi(T_0)$ i $\nabla f(T_0)$ kolinearni odnosno postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\nabla f(T_0) = -\lambda \nabla\varphi(T_0).$$

■

Slična je situacija i ukoliko f nije linearna funkcija.

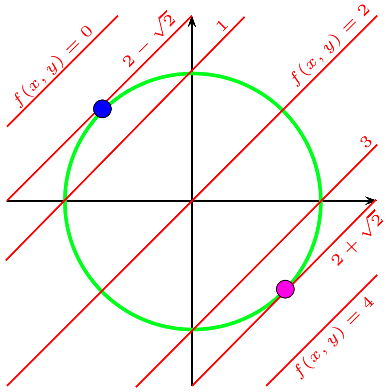
■ **Primjer 3.31** Uvjetni ekstremi funkcije $f(x,y)$ čije su nivo-krivulje zadane Slikom 15 uz uvjet

$$\varphi(x,y) = x^2-y^2-1 = 0$$

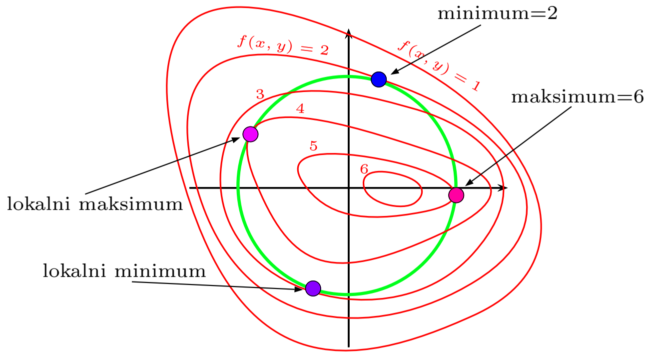
postižu se upravo u točkama gdje su nivo krivulje od f tangencijalne na zadanu krivulju uvjeta. Navedeni uvjet tangencijalnosti opet možemo zapisati u obliku: postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\nabla f(T_0) = -\lambda \nabla \varphi(T_0).$$

■



Slika 14 Primjer 3.30



Slika 15 Primjer 3.31

Pomoću ova dva primjera smo ilustrirali općeniti teorem koji daje nužan uvjet za uvjetni lokani ekstrem funkcije više varijabli. Na njemu se temelji metoda traženja uvjetnih ekstrema pomoću Lagrangeovih multiplikatora.

Teorem 3.6.1 — Nužni uvjet za uvjetni ekstrem. Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ te neka je $f : U \to \mathbb{R}$ zadana neprekinuto diferencijabilna funkcija. Neka je S skup svih točaka $\vec{x} \in U$ takvih da je $\varphi(\vec{x}) = 0$ i pretpostavimo da je $\nabla\varphi(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Ako je u točki $\vec{a}$ uvjetni lokalni ekstrem funkcije f na skupu S (tj. lokalni ekstrem restrikcije funkcije $f|_S$), onda postoji realan broj λ (**Lagrangeov multiplikator**) takav da je

$$\nabla f(\vec{a}) + \lambda \nabla \varphi(\vec{a}) = \vec{0}.$$

Dodatak

Dokaz. Uzmemo $n = 3$ i promatramo funkciju $u = f(x,y,z)$ uz uvjet $\varphi(x,y,z) = 0$. Navedeni uvjet definira plohu S implicitno zadanu s $\varphi(x,y,z) = 0$. Neka je $\vec{a}$ točka uvjetnog ekstrema funkcije f na S te neka je $\vec{r}(t)$ glatka krivulja na plohi S koja prolazi kroz točku ekstrema $\vec{a}$ takva da je $\vec{r}(t_0) = \vec{a}$.
Dakle, ako uvedemo funkciju

$$u(t) = f(\vec{r}(t))$$

tada ona u $t = t_0$ ima ekstrem, odnosno vrijedi

$$0 = \frac{du}{dt}(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}\,'(t_0)$$

Dakle, slijedi da je

$$\nabla f(\vec{a}) \perp \vec{r}\,'(t_0).$$

Budući da ovo vrijedi za tangentu svake glatke krivulje $\vec{r}(t)$ na plohi S koja prolazi kroz $\vec{a}$, zaključujemo da je $\nabla f(\vec{a})$ okomit na tangencijalnu ravninu plohe S u točki $\vec{a}$. Dakle, paralelan je s normalom tangencijalne ravnine $\nabla\varphi(\vec{a})$ odnosno postoji λ tako da je

$$\nabla f(\vec{a}) = -\lambda \nabla \varphi(\vec{a}).$$

Slijedi da je
$$\nabla f(\vec{a}) + \lambda \nabla \varphi(\vec{a}) = \vec{0}.$$
■

Na temelju navedenog teorema se razvila metoda Lagrangeovih multiplikatora koja se sastoji od promatranja sljedeće funkcije:

Definicija 3.6.2 Neka su zadane funkcije $f, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Funkciju $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ oblika
$$L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda \varphi(\vec{x})$$
zovemo **Lagrangeova funkcija**. ■

Sada proučimo povezanost Lagrangeove funkcije i nužnog uvjeta za uvjetni ekstrem. Naime, znamo da stacionarna točka Lagrangeove funkcije mora zadoljavati sustav
$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0, \forall i$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\vec{x}, \lambda) = \varphi(\vec{x}) = 0$$
Iz Teorema 3.6.1 vidimo da je u točki uvjetnog lokalnog ekstrema prva jednadžba jednaka 0 za svaki $i = 1, \ldots, n$, a zbog definicije uvjeta je druga jednadžba uvijek jednaka 0. Dakle, zaključujemo da je svaka točka uvjetnog lokalnog ekstrema ujedno i stacionarna točka Lagrangeove funkcije.

Zapamtimo:
Ako je $\vec{a}$ točka lokalnog uvjetnog ekstrema, tada postoji λ_0 tako da je $(\vec{a}, \lambda_0)$ stacionarna točka pripadne Lagrangeove funkcije

Sada imamo sve što nam je potrebno za definiranje metode Lagrengeovih multiplikatora za funkciju više varijabli.

Metoda Lagrangeovih multiplikatora (metoda za traženje uvjetnog lokalnog ekstrema funkcije $u = f(\vec{x})$ uz uvjet $\varphi(\vec{x}) = 0$)

1. Odredimo Lagrangeovu funkciju
$$L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda \varphi(\vec{x})$$
2. Nađemo stacionarne točke od $L(\vec{x}, \lambda)$ koje su rješenja sustava:
$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}, \lambda) = 0, \ i = 1, \ldots, n; \quad \varphi(\vec{x}) = 0$$
3. Odredimo karakter uvjetnog lokalnog ekstrema pomoću definitnosti drugog diferencijala Lagrangeove funkcije, uz obavezno korištenje diferencijala uvjeta $(d\varphi(\vec{x}) = 0)$.

Napomena 3.15 Kod ispitivanja karaktera stacionarnih točaka moramo koristiti drugi diferencijal Lagrangeove funkcije i diferencijale uvjeta koji povezuju diferencijale nezavisnih varijabla.

U sljedeća dva potpoglavlja ćemo metodu promatrati u slučaju dvije i tri varijable.

3.6.1 Uvjetni ekstremi funkcija dvije varijable

Proučavamo lokalne ekstreme funkcije $z = f(x,y)$ uz uvjet $\varphi(x,y) = 0$. Pripadna Lagrangeova funkcija je funkcija tri varijable te glasi

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$$

Moguće točke uvjetnih ekstrema zadovoljavaju sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= 0 \\ \varphi(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Nakon određivanja stacionarnih točaka Lagrangeove funkcije, moramo im odrediti karakter koristeći drugi diferencijal. Drugi diferencijal Lagrangeove funkcije u točkama rješenja gornjeg sustava $T_0(x_0,y_0;\lambda_0)$ je

$$\begin{aligned} d^2L(T_0) =& L''_{xx}(T_0)(dx)^2 + L''_{yy}(T_0)(dy)^2 + L''_{\lambda\lambda}(T_0)(d\lambda)^2 + \\ &+ 2(L''_{xy}(T_0)dx\,dy + L''_{x\lambda}(T_0)dx\,d\lambda + L''_{y\lambda}(T_0)dy\,d\lambda) \end{aligned}$$

Pogledajmo dio drugog diferencijala koji u sebi ima član $d\lambda$:

$$L''_{\lambda\lambda}(T_0)(d\lambda)^2 + 2(L''_{x\lambda}(T_0)dx + L''_{y\lambda}(T_0)dy)\,d\lambda.$$

Jasno je da je $L'_\lambda = \varphi(x,y)$. Izraz ne ovisi o λ te slijedi da je $L''_{\lambda\lambda}(T_0) = 0$. Nadalje, vidimo da je $L''_{x\lambda} = \varphi'_x$ i $L''_{y\lambda} = \varphi'_y$ te je cijeli izraz u zagradi $L''_{x\lambda}(T_0)dx + L''_{y\lambda}(T_0)dy = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = d\varphi(x,y) = 0$ jer je $\varphi(x,y) = 0$. Dakle, slijedi da je cijeli dio diferencijala s članom $d\lambda$ jednak nuli, odnosno drugi diferencijal u T_0 je oblika

$$d^2L(T_0) = L''_{xx}(T_0)(dx)^2 + 2L''_{xy}(T_0)dx\,dy + L''_{yy}(T_0)(dy)^2.$$

Ako je u stacionarnoj točki T_0 Lagrangeove funkcije
- $d^2L(T_0) > 0$ za sve $(dx,dy) \neq (0,0)$, onda funkcija $f|_S$ u točki (x_0,y_0) ima strogi lokalni minimum.
- $d^2L(T_0) < 0$ za sve $(dx,dy) \neq (0,0)$, onda funkcija $f|_S$ u točki (x_0,y_0) ima strogi lokalni maksimum.
- ako $d^2L(T_0)$ mijenja predznak za sve $(dx,dy) \neq (0,0)$, onda funkcija $f|_S$ u točki (x_0,y_0) nema ekstrema (sedlo).

Prije samog određivanja definitnosti drugog diferencijala Lagrangeove funkcije moramo iskoristiti diferencijal uvjeta koji glasi

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0.$$

Odavde slijedi da je (uz $\varphi'_y \neq 0$)

$$dy = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\, dx.$$

Tek nakon što uvrstimo diferencijal uvjeta u drugi diferencijal, možemo određivati definitnost drugog diferencijala. Osim toga, tako ćemo dobiti jednostavniji izraz za proučavanje definitnosti. U protivnom se čak može donijeti i pogrešan zaključak.

Pogledajmo nekoliko primjera.

■ **Primjer 3.32** Metodom Lagrangeovih multiplikatora naći i ispitati uvjetne ekstreme $z = xy$ ako su nezavisne varijable vezane uvjetom $2x + 3y = 12$.

Rješenje. Uvjet je pravac koji zapišemo u implicitnom obliku $\varphi(x,y) = 2x + 3y - 12 = 0$ te je Lagrangeova funkcija $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ oblika:

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 12).$$

Pripadni sustav jednadžbi za traženje uvjetnih ekstrema glasi:

$$\begin{array}{c} L'_x = y + 2\lambda = 0 \\ L'_y = x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{array}.$$

Iz prve dvije jednadžbe izlučimo $y = -2\lambda$ i $x = -3\lambda$ te uvrstimo u treću i dobijemo

$$-6\lambda - 6\lambda = 12$$

iz čega slijedi da je $\lambda = -1$. Time smo dobili jednu stacionarnu točku: $T(3,2;-1)$. Sada izračunamo druge derivacije od L te dobivamo

$$L''_{xx} = 0, \quad L''_{xy} = 1 \quad L''_{yy} = 0.$$

Dakle, drugi diferencijal glasi

$$d^2L(T) = 2dxdy.$$

Sada diferenciramo uvjet:

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0.$$

te dobivamo

$$d\varphi = 2dx + 3dy = 0$$

iz čega slijedi da je $dy = -\frac{2}{3}dx$. Ubacimo u drugi diferencijal i slijedi

$$d^2L(T) = 2dxdy = -\frac{4}{3}(dx)^2.$$

U stacionarnoj točki $T(3,2;-1)$ imamo $d^2L(T_1) = -\frac{4}{3}(dx)^2 \leq 0$. No ako je $dx = 0$ zbog diferencijala uvjeta mora i $dy = 0$ tako da slijedi da je

$$d^2L(T_1) = -\frac{4}{3}(dx)^2 < 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy) \neq (0,0).$$

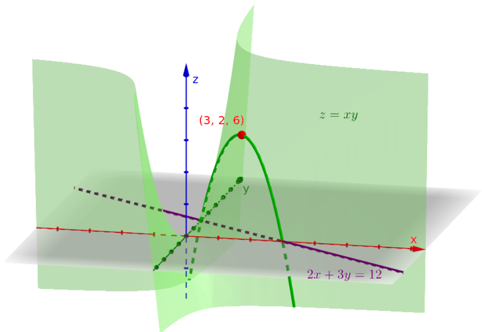
Zaključujemo da je T točka lokalnog uvjetnog maksimuma. ■

Napomena 3.16 Važno!
Uočimo da je u prethodnom primjeru drugi diferencijal prije uvrštavanja uvjeta glasio:

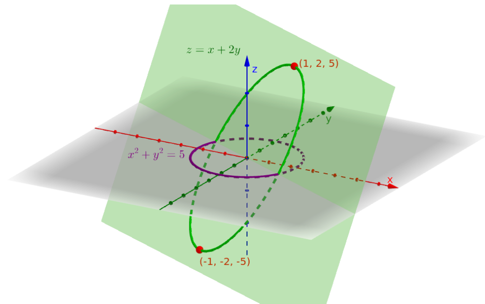
$$d^2L(T) = 2dxdy.$$

Da smo krenuli s ispitivanjem definitnosti prije uvrštavanja diferencijala uvjeta, zaključili bismo da točka nije ekstrem nego sedlo.

Napomena 3.17 Primijetimo da u slučaju neprekidne funkcije i uvjeta koji ne predstavlja zatvoren i omeđen podskup domene, funkcija ne mora imati oba uvjetna ekstrema.



Slika 16 Primjer 3.32



Slika 17 Primjer 3.33

■ **Primjer 3.33** Odredite ekstreme funkcije $z = x + 2y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$.

Rješenje. Uvjet je kružnica koju zapišemo u implicitnom obliku $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$ te je Lagrangeova funkcija $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ oblika:

$$L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Pripadni sustav jednadžbi za traženje uvjetnih ekstrema glasi:

$$\begin{aligned} L'_x &= 1 + 2x\lambda = 0 \\ L'_y &= 2 + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}\ .$$

Iz prve dvije jednadžbe izlučimo $x = -\frac{1}{2\lambda}$ i $y = -\frac{1}{\lambda}$ te uvrstimo u treću i dobijemo

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5$$

iz čega slijedi da je $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Time smo dobili dvije stacionarne točke:

$$T_1(-1,-2;\frac{1}{2}),\ T_2(1,2;-\frac{1}{2}).$$

Sada izračunamo druge derivacije od L te dobivamo

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0 \quad L''_{yy} = 2\lambda.$$

Dakle, drugi diferencijal glasi

$$d^2L(T) = 2\lambda(dx)^2 + 2\lambda(dy)^2.$$

Uvrštavanjem točaka u drugi diferencijal dobijemo:

$$d^2L(T_1) = (dx)^2 + (dy)^2$$

i

$$d^2L(T_2) = -(dx)^2 - (dy)^2.$$

Sada diferenciramo uvjet:

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0.$$

te dobivamo

$$d\varphi = 2xdx + 2ydy = 0$$

iz čega slijedi da je $dy = -\frac{x}{y}dx$. Ubacimo u drugi diferencijal i slijedi

$$d^2L(T) = 2\lambda(dx)^2 + 2\lambda\frac{x^2}{y^2}(dx)^2 = 2\lambda(1 + \frac{x^2}{y^2})(dx)^2.$$

Sada uvrštavamo točke.

- U stacionarnoj točki $T_1(-1,-2;\frac{1}{2})$ imamo $d^2L(T_1) = (1+\frac{1}{4})(dx)^2 \geq 0$. No ako je $dx = 0$ zbog diferencijala uvjeta mora i $dy = 0$ tako da slijedi da je

$$d^2L(T_1) = \frac{5}{4}(dx)^2 > 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy) \neq (0,0).$$

Zaključujemo da je T_1 točka lokalnog uvjetnog minimuma.

- U stacionarnoj točki $T_2(1,2;-\frac{1}{2})$ imamo $d^2L(T_1) = -1(1+\frac{1}{4})(dx)^2 \leq 0$. No ako je $dx = 0$ zbog diferencijala uvjeta mora i $dy = 0$ tako da slijedi da je

$$d^2L(T_2) = -\frac{5}{4}(dx)^2 < 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy) \neq (0,0).$$

Zaključujemo da je T_2 točka lokalnog uvjetnog maksimuma.

Ovaj zadatak je ustvari traženje ekstrema linearne funkcije na zatvorenom i omeđenom skupu pa se mogao riješiti i geometrijski kao u prethodnom poglavlju. ■

Napomena 3.18 Primijetimo da je u prethodnom zadatku drugi diferencijal oblika kod kojeg se isti zaključak definitnosti dobiva prije i nakon uvrštavanja diferencijala uvjeta. Naime, ako je $d^2L(T) = a(dx)^2 + c(dy)^2$ gdje su a i c ili oba pozitivna ili oba negativna, tada se definitnost ne mijenja uvrštavanjem diferencijala uvjeta. To je specijalan slučaj. U svim ostalim slučajevima moramo obavezno uvrstiti diferencijal uvjeta.

Napomena 3.19 Primijetimo da u slučaju neprekidne funkcije i uvjeta koji predstavlja zatvoren i omeđen podskup domene, funkcija ima i uvjetni maksimum i uvjetni minimum.

3.6.2 Uvjetni ekstremi funkcija tri varijable

Sada ćemo promatrati funkciju tri varijable $u = f(x,y,z)$ uz uvjet $\varphi(x,y,z) = 0$. Pripadna Lagrangeova funkcija je funkcija četiri varijable i glasi

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z).$$

Nadalje, stacionarne točke $T_0(x_0,y_0,z_0,\lambda_0)$ Lagrangeove funkcije su rješenja sustava

$$\begin{aligned} L'_x(x,y,z,\lambda) &= 0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda) &= 0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda) &= 0 \\ \varphi(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Slično kao u i u slučaju dvije varijable, računamo drugi diferencijal Lagrangeove funkcije u dobivenim stacionarnim točkama T_0. Pokazuje se da je on oblika:

$$\begin{aligned} d^2L(T_0) =& L''_{xx}(T_0)(dx)^2 + L''_{yy}(T_0)(dy)^2 + L''_{zz}(T_0)(dz)^2 + \\ &+ 2(L''_{xy}(T_0)dx\,dy + L''_{xz}(T_0)dx\,dz + L''_{yz}(T_0)dy\,dz) \end{aligned}$$

Prije nego promotrimo definitnost drugog diferencijala Lagrangeove funkcije u dobivenim točkama T_0, odredimo diferencijal uvjeta

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0.$$

Sada uz uvjet da nazivnik nije nula dobivamo

$$dz = -\frac{\varphi'_x dx + \varphi'_y dy}{\varphi'_z}$$

što uvrštavamo u drugi diferencijal Lagrangeove funkcije. Analogno možemo izlučiti izraz za dx ili dy.

Sada ćemo metodu Lagrangeovih multiplikatora primijeniti na uvjetne ekstreme funkcije tri varijabli s jednim uvjetom.

■ **Primjer 3.34** Metodom Lagrangeovog multiplikatora naći i ispitati uvjetne ekstreme funkcije $u = xy + 2xz + 3yz$ ako su nezavisne varijable vezane uvjetom $x + y + z = 6$.

Rješenje Pripadna Lagrangeova funkcija glasi

$$L(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 3yz + \lambda(x + y + z - 6).$$

Stacionarne točke Lagrangeove funkcije dobijemo kao rješenje sustava

$$L'_x = y + 2z + \lambda = 0$$

$$L'_y = x + 3z + \lambda = 0$$

$$L'_z = 2x + 3y + \lambda = 0$$

$$x + y + z - 6 = 0$$

Trebamo riješiti ovaj linearan sustav 4 jednadžbe i 4 nepoznanice na neki od načina (supstitucija, GME). Npr. izlučivanjem λ iz prve jednadžbe i z iz zadnje te ubacivanjem u drugu i treću ćemo dobiti sustav dvije jednadžbe i dvije nepoznanice koji je lakše riješiti. Rješenje ovog linearnog sustava je

$$x = 0,\ y = 3,\ z = 3,\ \lambda = -9$$

odnosno stacionarna točka je

$$T_0(0,3,3;-9).$$

Računanjem drugih parcijalnih derivacija dobivamo

$$L''_{xx}(T_0) = 0 \quad L''_{yy}(T_0) = 0 \quad L''_{zz}(T_0) = 0$$

$$L''_{xy}(T_0) = 1 \quad L''_{xz}(T_0) = 2 \quad L''_{yz}(T_0) = 3$$

te drugi diferencijal glasi

$$d^2L(T_0) = 2\,dx\,dy + 4dx\,dz + 6dy\,dz.$$

Diferenciranjem uvjeta $\varphi(x,y,z) = x+y+z-6 = 0$ dobivamo

$$dx + dy + dz = 0$$

odnosno

$$dx = -dy - dz.$$

Uvrstimo u drugi diferencijal i slijedi da je

$$d^2L(T_0) = 2(-dy-dz)dy + 4(-dy-dz)dz + 6dy\,dz$$

odnosno dobivamo

$$d^2L(T_0) = -2(dy)^2 - 4(dz)^2 = -2[(dy)^2 + 2(dz)^2] < 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy,dz) \neq (0,0,0).$$

Drugi diferencijal $d^2L(T_0)$ je jednak nula samo za $(dy,dz) = (0,0)$, a zbog diferencijala uvjeta bi tada i dx morao biti 0. Dakle, to je točka strogog lokalnog uvjetnog maksimuma. ■

- **Uvjetni ekstremi funkcija triju varijabla s dva zadana uvjeta**

Tražimo uvjetne ekstreme funkcije $u = f(x,y,z)$ na skupu S zadanom jednadžbama $\varphi_1(x,y,z) = 0$ i $\varphi_2(x,y,z) = 0$. U slučaju dva uvjeta Lagrangeova funkcija ima dva Lagrangeova multiplikatora λ i μ te glasi

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda\varphi_1(x,y,z) + \mu\varphi_2(x,y,z).$$

Stacionarne točke Lagrangeove funkcije $T_0(x_0,y_0,z_0;\lambda_0,\mu_0)$(točke (x_0,y_0,z_0) su moguće točke uvjetnih ekstrema) su rješenja sustava

$$\begin{aligned} L'_x(x,y,z,\lambda,\mu) &= 0\\ L'_y(x,y,z,\lambda,\mu) &= 0\\ L'_z(x,y,z,\lambda,\mu) &= 0\\ \varphi_1(x,y,z) &= 0\\ \varphi_2(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Prije analize definitnosti drugog diferencijala koristimo diferencijale oba uvjeta.

$$d\varphi_1(x,y,z) = 0 \quad \text{i} \quad d\varphi_2(x,y,z) = 0.$$

Pogledajmo kako to izgleda na jednom primjeru.

■ **Primjer 3.35** Metodom Lagrangeovih multiplikatora nađite uvjetne ekstreme funkcije $f(x,y,z) = x(y+1)z$ uz uvjete $x-y-1=0$ i $y-z-2=0$.

Rješenje Lagrangeova funkcija glasi

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x(y+1)z + \lambda(x-y-1) + \mu(y-z-2).$$

Stacionarne točke Lagrangeove funkcije dobijemo kao rješenje sustava

$$\begin{cases} L'_x = (y+1)z + \lambda = 0 \\ L'_y = xz - \lambda + \mu = 0 \\ L'_z = x(y+1) - \mu = 0 \\ x - y - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Iz zadnje dvije jednadžbe izrazimo varijable $x = y+1$ i $z = y-2$. Iz prve jednadžbe izrazimo $\lambda = -(y+1)z = -(y+1)(y-2)$, a iz treće izrazimo $\mu = x(y+1) = (y+1)^2$. Sve uvrstimo u drugu jednadžbu te slijedi

$$(y+1)(y-2) + (y+1)(y-2) + (y+1)^2 = 0$$

odnosno

$$(y+1)[2(y-2) + y + 1] = 0.$$

Sada imamo dva rješenja za y: $y_1 = -1$ i $y_2 = 1$. Odavde dobivamo stacionarne točke $T_1(0,-1,-3;0,0)$ i $T_2(2,1,-1;2,4)$.

Druge parcijalne derivacije glase $L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 0$, $L''_{xz} = y+1$, $L''_{xy} = z$ i $L''_{yz} = x$. Drugi diferencijal je jednak

$$d^2L = 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + (y+1)\,dx\,dz).$$

Diferenciranjem oba uvjeta dobivamo $dx - dy = 0, \quad dy - dz = 0$ odnosno

$$dx = dy = dz.$$

Uvrštavanjem u drugi diferencijal dobivamo

$$d^2L = 2(z + x + y + 1)(dx)^2.$$

Sada možemo uvrštavati stacionarne točke. Kada ubacimo stacionarnu točku $T_1(0,-1,-3;0,0)$ dobivamo

$$d^2L(T_1) = -6(dx)^2 < 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy,dz) \neq (0,0,0)$$

odnosno točka $T_1(0,-1,-3)$ je točka lokalnog uvjetnog maksimuma. Kada ubacimo stacionarnu točku $T_2(2,1,-1;2,4)$ dobivamo

$$d^2L(T_1) = 6(dx)^2 > 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy,dz) \neq (0,0,0)$$

odnosno točka $T_2(2,1,-1)$ je točka lokalnog uvjetnog minimuma. ■

■ **Primjer 3.36** Metodom Lagrangeovih multiplikatora nađite uvjetne ekstreme funkcije $f(x,y,z) = x^3 + xy - z^2$ uz uvjete $x - z - 1 = 0$ i $x - y - 5 = 0$.

Rješenje Lagrangeova funkcija glasi

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^3 + xy - z^2 + \lambda(x - z - 1) + \mu(x - y - 5).$$

Stacionarne točke Lagrangeove funkcije dobijemo kao rješenje sustava

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 + y + \lambda + \mu = 0 \\ L'_y = x - \mu = 0 \\ L'_z = -2z - \lambda = 0 \\ x - z - 1 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

Iz zadnje dvije jednadžbe izrazimo varijable $z = x - 1$ i $y = x - 5$. Iz treće jednadžbe izrazimo $\lambda = -2z = -2x + 2$, a iz druge izrazimo $\mu = x$. Sve uvrstimo u prvu jednadžbu te slijedi

$$3x^2 + x - 5 - 2x + 2 + x = 0$$

odnosno

$$x^2 = 1.$$

Sada imamo dva rješenja za x: $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$. Odavde dobivamo stacionarne točke $T_1(1,-4,0;0,1)$ i $T_2(-1,-6,-2;4,-1)$.

Druge parcijalne derivacije glase $L''_{xx} = 6$, $L''_{yy} = 0$, $L''_{zz} = -2$, $L''_{xz} = 0$, $L''_{xy} = 1$ i $L''_{yz} = 0$. Drugi diferencijal je jednak

$$d^2L = 6x(dx)^2 - 2(dz)^2 + 2dx\,dy.$$

Diferenciranjem oba uvjeta dobivamo $dx - dz = 0, \quad dx - dy = 0$ odnosno

$$dx = dy = dz.$$

Uvrštavanjem u drugi diferencijal dobivamo

$$d^2L = 6x(dx)^2.$$

Sada možemo uvrštavati stacionarne točke. Kada ubacimo stacionarnu točku $T_1(1,-4,0;0,1)$ dobivamo

$$d^2L(T_1) = 6(dx)^2 > 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy,dz) \neq (0,0,0)$$

odnosno točka T_1 je točka lokalnog uvjetnog minimuma. Kada ubacimo stacionarnu točku $T_2(-1,-6,-2;4,-1)$ dobivamo

$$d^2L(T_1) = -6(dx)^2 < 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy,dz) \neq (0,0,0)$$

odnosno točka T_2 je točka lokalnog uvjetnog maksimuma. ■

3.7 Problemski zadaci

U ovom ćemo poglavlju riješiti nekoliko problemskih zadataka iz područja uvjetnih ekstrema. Iz teksta zadatka treba pažljivo odrediti funkciju čije ekstreme tražimo te funkciju koja predstavlja zadani uvjet.

■ **Primjer 3.37** Nađite najkraću udaljenost točke $T(1,0,-2)$ od ravnine $x+2y+z=4$.

Rješenje. Prvo moramo odrediti funkciju čiji ekstrem tražimo. Tražimo najkraću udaljenost odnosno tražimo minimum funkcije udaljenosti dviju točaka:

$$d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

od kojih je jedna zadana $T_1(1,0,-2)$, a druga leži na ravnini $x+2y+z=4$. Dakle, tražimo točku na ravnini $x+2y+z=4$ koja je najbliža točki T_1. Drugim riječima, tražimo minimum funkcije

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2}$$

uz uvjet da je $\varphi(x,y,z)=x+2y+z-4=0$. Budući da je funkcija $g(x)=\sqrt{x}$ rastuća, radi pojednostavljenja računa možemo promatrati ekstreme funkcije:

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+(z+2)^2$$

uz navedeni uvjet. Naime, funkcije $f(x,y,z)$ i $d(x,y,z)=g(f(x,y,z))$ imaju jednake ekstreme.

Pripadna Lagrangeova funkcija glasi

$$L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+y^2+(z+2)^2+\lambda(x+2y+z-4).$$

Stacionarne točke Lagrangeove funkcije dobijemo kao rješenje sustava

$$\begin{aligned}
L'_x&=2(x-1)+\lambda=0\\
L'_y&=2y+2\lambda=0\\
L'_z&=2(z+2)+\lambda=0\\
x+2y&+z-4=0
\end{aligned}$$

Sada izražavanjem x preko λ iz prve jednadžbe dobijemo $x=-\frac{1}{2}\lambda+1$, y iz druge: $y=-\lambda$ te z iz treće $z=-\frac{1}{2}\lambda-2$ te ubacivanjem u zadnju dobivamo

$$-\frac{1}{2}\lambda+1-2\lambda-\frac{1}{2}\lambda-2=4.$$

Slijedi da je $\lambda=-\frac{5}{3}$. Rješenje ovog linearnog sustava je

$$x=\frac{11}{6},\ y=\frac{5}{3},\ z=-\frac{7}{6}$$

odnosno stacionarna točka je

$$T_0(\frac{11}{6},\frac{5}{3},-\frac{7}{6};-\frac{5}{3}).$$

Računanjem drugih parcijalnih derivacija dobivamo

$$L''_{xx}(T_0) = 2 \quad L''_{yy}(T_0) = 2 \quad L''_{zz}(T_0) = 2$$

$$L''_{xy}(T_0) = 0 \quad L''_{xz}(T_0) = 0 \quad L''_{yz}(T_0) = 0$$

te drugi diferencijal glasi

$$d^2L(T_0) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2.$$

Diferenciranjem uvjeta $\varphi(x,y,z) = x + 2y + z - 4 = 0$ dobivamo

$$dx + 2dy + dz = 0$$

odnosno

$$dx = -2dy - dz.$$

Uvrstimo u drugi diferencijal i slijedi da je

$$d^2L(T_0) = 2(-2dy - dz)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 = 10(dy)^2 + 6dydz + 4(dz)^2.$$

Sada problemu određivanja definitnosti drugog diferencijala možemo pristupiti na dva načina: nadopunom na potpuni kvadrat i Sylvesterovim kriterijem.
1. način: Nadopunom na potpuni kvadrat dobijemo

$$d^2L(T_0) = 10(dy)^2 + 6dydz + 4(dz)^2 = (2dz + 3dy)^2 + (dy)^2 > 0 \quad \text{za} \quad (dx,dy,dz) \neq (0,0,0).$$

Drugi diferencijal $d^2L(T_0)$ je jednak nula samo za $(dy),dz) = (0,0)$, a zbog diferencijala uvjeta bi tada i dx morao biti 0. Dakle, slijedi da je T_0 točka lokalnog uvjetnog minimuma.
2. način: Drugi način je da primijetimo da kvadratna forma

$$d^2L(T_0) = 10(dy)^2 + 6dydz + 4(dz)^2$$

ima matricu oblika

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

čije glavne minore su pozitivne te zaključujemo da je točka lokalni uvjetni minimum.
Tražena najkraća udaljenost iznosi

$$d(T_0) = d\Big(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{6}\Big) = \sqrt{\Big(\frac{11}{6} - 1\Big)^2 + \Big(\frac{5}{3}\Big)^2 + \Big(-\frac{7}{6} + 2\Big)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{6}.$$

■

■ **Primjer 3.38** Nađite one točke na elipsi $4x^2 + y^2 = 8$ za koje je vrijednost funkcije $f(x,y) = x^2y^2$ maksimalna.

Rješenje. Lagrangeova funkcija glasi

$$L(x,y,\lambda) = x^2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 8)$$

te stacionarne točke tražimo iz sustava

$$L'_x = 2xy^2 + 8\lambda x = 0$$

$$L'_y = 2x^2y + 2\lambda y = 0$$
$$4x^2 + y^2 - 8 = 0$$

Faktoriziranjem prve i druge jednadžbe se dobiju tri opcije: $x = 0$ ili $y = 0$ ili $x^2 = -\lambda$ i $y^2 = -4\lambda$. Dobije se osam stacionarnih točaka: $T_{1,2,3,4}(\pm 1, \pm 2; -1)$, $T_{5,6}(0, \pm 2\sqrt{2}; 0)$ i $T_{7,8}(\pm\sqrt{2}, 0; 0)$. Računanjem drugih parcijalnih derivacija dobivamo

$$L''_{xx} = 2y^2 + 8\lambda \quad L''_{yy} = 2x^2 + 2\lambda \quad L''_{xy} = 4xy$$

te drugi diferencijal glasi

$$d^2L = (2y^2 + 8)(dx)^2 + (2x^2 + 2)(dy)^2 + 8xydxdy.$$

Diferenciranjem uvjeta $\varphi(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - 8 = 0$ dobivamo

$$8xdx + 2ydy = 0$$

odnosno

$$dy = -\frac{4x}{y}dx.$$

Uvrštavamo točke u drugi diferencijal i diferencijal uvjeta te dobivamo redom:

- za točke $T_{1,2,3,4}(\pm 1, \pm 2; -1)$ je drugi diferencijal:

$$d^2L(T_{1,2,3,4}) = -32(dx)^2 < 0 \quad \text{za sve} \quad (dx,dy) \neq (0,0)$$

  te su to točke lokalnog uvjetnog maksimuma.
- $T_{5,6}(0, \pm 2\sqrt{2}; 0)$ je drugi diferencijal:

$$d^2L(T_{5,6}) = 16(dx)^2 > 0 \quad \text{za sve} \quad (dx,dy) \neq (0,0)$$

  te su to točke lokalnog uvjetnog minimuma.
- $T_{7,8}(\pm\sqrt{2}, 0; 0)$ je drugi diferencijal:

$$d^2L(T_{7,8}) = 4(dy)^2 > 0 \quad \text{za sve} \quad (dx,dy) \neq (0,0)$$

  te su to točke lokalnog uvjetnog minimuma.

■

Primijetimo da je u prethodnom zadatku uvjet bila elipsa, što je zatvoren i omeđen skup. Dobili smo osam uvjetnih ekstrema, od kojih je četiri minimuma i četiri maksimuma odnosno jednak broj minimuma i maksimuma.

■ **Primjer 3.39** Kartonska kutija u obliku kvadra bez poklopca ima volumen $32\,\mathrm{m}^3$. Odredite dimenzije one kutije tog volumena za čiju izradu je potrebno najmanje kartona.

Rješenje. Primijetimo da zbog geometrijske interpretacije zadatka mora vrijedi $x,y,z > 0$. Iz uvjeta na volumen $xyz = 32$ ćemo izlučiti jednu varijablu: $z = \frac{32}{xy}$. Kada to ubacimo u formulu za oplošje kvadra bez poklopca dobijemo:

$$O = 2(xz + yz) + xy = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}.$$

Sada smo problem uvjetnog ekstrema s tri varijable sveli na običan lokalni ekstrem funkcije dvije varijable. Dakle, tražimo lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}.$$

Stacionarne točke su rješenje sustava: $f'_x = y - \frac{64}{x^2} = 0$ i $f'_y = x - \frac{64}{y^2} = 0$. Dobijemo da je $x^2y = 64$ i $xy^2 = 64$. Kada izjednačimo lijeve strane, slijedi da je

$$xy(x-y) = 0.$$

Duljine stranica x i y moraju biti pozitivne te je jedina preostala mogućnost da je $x = y$. Uvrstimo u jednu od jednadžbi te se dobije $x^3 = 64$ odnosno stacionarna točka je $T(4,4)$. Druge parcijalne derivacije su jednake $f''_{xx} = \frac{128}{x^3}$, $f''_{yy} = \frac{128}{y^3}$ i $f''_{xy} = 1$ te Hesseova matrica glasi

$$H_f(T_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T) & f''_{xy}(T) \\ f''_{xy}(T) & f''_{yy}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da su glavne minore: $f''_{xx}(T) = 2 > 0$ i $\det(H_f(T_0)) = 3 > 0$ pozitivne te je $T(4,4)$ lokalni minimum funkcije. Dimenzije kutije su $x = y = 4$ i $z = 2$. ■

3.8 Pitanja za ponavljanje

Pitanje 1. Iskažite formulu za derivaciju integrala ovisnog o parametru.

Pitanje 2. Iskažite Taylorovu formulu za funkciju dvije varijable u točki $T(x_0, y_0)$. Navedite barem jednu primjenu Taylorove formule.

Pitanje 3. Iskažite sljedeće definicije:
(a) definiciju kvadratne forme dviju varijabli;
(b) definiciju negativne definitne kvadratne forme dviju varijabli.

Pitanje 4. Iskažite sljedeće definicije:
(a) definiciju kvadratne forme triju varijabli;
(b) definiciju pozitivno definitne kvadratne forme triju varijabli.

Pitanje 5. Navedite jedan primjer pozitivno definitne i jedan primjer indefinitne kvadratne forme dviju varijabli.

Pitanje 6. Iskažite i dokažite Sylvesterov teorem za kvadratnu formu dviju varijabli.

Pitanje 7. Iskažite formulu za drugi diferencijal funkcije dvije varijable.

Pitanje 8. Neka je dana funkcija više varijabli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
(a) Definirajte lokalni ekstrem funkcije f.
(b) Iskažite nužan uvjet za lokalni ekstrem funkcije f.

Pitanje 9. Navedite primjer funkcije dviju varijabli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koja ima lokalni minimum u točki $(0,0)$. (Uputa: Sjetite se ploha iz Poglavlja 1.)

Pitanje 10. Da li postoji valjkasta ploha koja ima strogi lokalni ekstrem?

Pitanje 11. Neka je zadan rotacijski paraboloid $z = a(x^2 + y^2)$.
(a) Koliko lokalnih ekstrema ima zadani rotacijski paraboloid?
(b) Kako karakter ekstrema ovisi o koeficijentu a?

Pitanje 12. Koji je dovoljan uvjet da bi stacionarna točka funkcije više varijabli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bila lokalni minimum?

Pitanje 13. Neka je dana funkcija dviju varijabli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
(a) Definirajte Hesseovu matricu funkcije f.
(b) Iskažite dovoljan uvjet za lokalni maksimum funkcije f koristeći Hesseovu matricu.

Pitanje 14. Zadana je diferencijabilna funkcija dviju varijabli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Koje od sljedećih tvrdnji su istinite, a koje nisu:
(A) Tangencijalna ravnina u stacionarnoj točki funkcije f je paralelna s xOy ravninom.
(B) U stacionarnoj točki funkcija nema tangencijalne ravnine.
(C) Svaka stacionarna točka je lokalni ekstrem.
(D) Svaki lokalni ekstrem je stacionarna točka.
(E) Ako je $\det H_f(T_0) = 0$, tada točka T_0 nije lokalni ekstrem funkcije f.
(F) Ako je $\det H_f(T_0) > 0$ i $f''_{xx}(T_0) \neq 0$, tada je T_0 lokalni ekstrem funkcije f.

Pitanje 15. Zadana je funkcija dviju varijabli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pod kojim uvjetom na funkciju f postoji lokalni ekstrem funkcije koji nije stacionarna točka? Je li postoji tangencijalna ravnina u toj točki? Obrazložite.

Pitanje 16. U kojim točkama neprekinuta funkcija više varijabli poprima maksimum na zatvorenom i omeđenom podskupu njene domene?

Pitanje 17. Napišite primjere linearnih funkcija s dvije i s tri varijable, te im nađite gradijente. Ovise li gradijenti linearnih funkcija o točki u kojoj ih računamo?

Pitanje 18. Je li vektor gradijenta funkcije dviju varijabli f u točki P okomit na nivo krivulju od f koja prolazi kroz tu točku ili je paralelan s njom?
(a) Objasni tvrdnju na primjeru linearne funkcije $f(x,y) = ax + by$.
(b) Objasni kako navedenu tvrdnju koristimo za traženje ekstrema linearne funkcije $f(x,y) = ax + by$ na nekom zatvorenom podskupu od $\mathbb{R}^2$.

Pitanje 19. Definirajte uvjetni lokalni ekstrem funkcije više varijabli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Pitanje 20. Opišite metodu Lagrangeovog multiplikatora za funkciju $z = f(x,y)$ i uvjet $\varphi(x,y) = 0$.

Pitanje 21. Koliko najviše uvjeta smije imati problem uvjetnog ekstrema funkcije pet varijabli?

Pitanje 22. Da li je svaka stacionarna točka Lagrangeove funkcije uvjetni lokalni ekstrem? Obrazložite.

Pitanje 23. Što je to diferencijal uvjeta i gdje se koristi?

Pitanje 24. Izvedite formulu za drugi diferencijal Lagrangeove funkcije za problem uvjetnog ekstrema funkcije dvije varijable $z = z(x,y)$ uz uvjet $\varphi(x,y) = 0$.

3.9 Zadaci za vježbu

1. Izračunajte $F'(\alpha)$ ako je $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^3}}{x} dx$, $\alpha > 0$.

2. Ako je $F(\alpha) = \int_{0}^{\sin\alpha} \frac{tg(\alpha x)}{x} dx$ nađite $F'(\alpha)$.

3. Ako je $F(\alpha) = \int_{1}^{\cos\alpha} \frac{ctg(\alpha x)}{x} dx$ odredite $F'(\alpha)$.

4. Deriviranjem integrala po parametru izračunati integral $I(a) = \int_{0}^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} dx$ $(a > -1)$.

5. Dokazati da funkcija $F(a) = \int_{0}^{\frac{1}{a}} \frac{e^{ax}-1}{x} dx$ ima konstantnu vrijednost.

6. Kvadratni polinom $f(x,y) = x^2 + xy - x + y - 1$ napišite u obliku polinoma s potencijama od $(x-1)$ i $(y+2)$.

7. Funkciju $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ razvijte u Taylorov polinom u okolini točke $T(-2,1)$.

8. Nađi Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ u točki $T(1,2)$.

9. Nađi Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $z = e^{2xy}$ u točki $T(1,0)$.

10. Nađi MacLaurinov polinom trećeg stupnja za funkciju $z = \sin(xy)$.

11. Polinom $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy + 1$ napiši po potencijama od $(x-1)$ i $(y+1)$.

12. Odredite Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $f(x,y) = (x+1)e^{\frac{x}{y}}$ u točki $T(0,1)$.

13. Ispitajte definitnost kvadratne forme Q ako je: a) $Q(h,k) = 3h^2 - 2hk + k^2$
b) $Q(h,k,l) = -5h^2 + 2hk - k^2 - 4hl - 2l^2$.

14. Nađite drugi diferencijal funkcije $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2xy$.

15. Nađite drugi diferencijal funkcije $f(x,y) = e^{x^2} + \ln\frac{1}{xy}$ u točki $T(1,1)$.

16. Nađite drugi diferencijal funkcije $f(x,y) = \sin(xy) + x^y + e^{xy}$ u točki $T(1,1)$.

17. Ispitaj definitnost kvadratne forme $d^2 f(0,0)$ ako je:
a) $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

18. Ispitaj definitnost kvadratne forme $d^2f(T)$ ako je:
a) $f(x,y,z) = -x^4 - y^4 - z^4$, $T(-1,-1,-1)$
b) $f(x,y,z) = 3x^4 + 2x^3 - 4xy^2 + z^3$, $T(-1,1,1)$.

19. Nađite i ispitajte točke lokalnih ekstrema sljedećih funkcija:
a) $z = x^2 - 2x + 2y^2 - 3$
b) $z = x^2 + 3xy^2 - 14x - 12y$
c) $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$
d) $z = e^x - x + y^2 - 2y$
e) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$
f) $u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + x - y$

20. Nađite i ispitajte točke lokalnih ekstrema sljedećih funkcija:
a) $f(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y - 3$
b) $f(x,y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
c) $f(x,y) = x^3 - 3xy + \frac{1}{2}y^2$
d) $u(x,y,z) = xy + 2z - x - x^2 - y^2 - z^2$

21. Pronađite stacionarne točke funkcije $f(x,y) = x^2 + ky^2 + xy$ gdje je k realan broj različit od $1/4$. Opiši kako karakter stacionarne točke ovisi o k.

22. Svemirska sonda u obliku elipsoida $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ ulazi u Zemljinu atmosferu. Nakon jednog sata temperatura u točki (x,y,z) na površini sonde je određena funkcijom $T(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$. Nađite točku koja je u tom času najtoplija točka na površini sonde.

23. Odredite globalni minimum i maksimum funkcije f na zatvorenom i omeđenom skupu D ako je:
a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$, $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$
b) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

24. Zadana je linearna funkcija $f(x,y) = 3 - x - 2y$ na peterokutu $ABCDE$ čiji su vrhovi $A(2,0)$, $B(4,2)$, $C(3,3)$, $D(2,5)$, $E(0,1)$. Odredite sve točke u kojima dana funkcija postiže minimum ili maksimum.

25. Kocka K je smještena tako da joj je središte u ishodištu, a bridovi su joj paralelni s koordinatnim osima. Duljina brida je 2. Odredite ekstremne vrijednosti funkcije $f(x,y,z) = x + y - 3z - 3$ definirane na kocki $K \subseteq \mathbb{R}^3$ te nađite točke u kojima se poprimaju ti ekstremi.

26. Metodom Lagrangeovih multiplikatora nađite i ispitajte točke lokalnih uvjetnih ekstrema.
a) $z = xy$ uz uvjet $x + y = 1$
b) $z = x + 2y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$
c) $z = 6 - 4x - 3y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 1$
d) $z = x^2 + xy + y^2$ uz uvjet $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$
e) $z = \ln(x + y)$ uz uvjet $x^2 + 2y^2 = 4$
f) $u = x^2 + y^2 + z^2$ uz uvjet $2y^2 + (z-2)^2 = 1$
g) $u = x + y + 3z$ uz uvjet $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$
h) $u = xyz$ uz uvjet $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

27. Pomoću vezanih ekstrema izračunajte maksimalan obujam stošca upisanog u kuglu polumjera 1.

28. Metodom Lagrangeovih multiplikatora nađite ekstreme funkcije $u(x,y,z) = 2x+y^2-z^2$ uz uvjete $x-2y=0$ i $x+z=0$.

29. Među svim parovima realnih brojeva nađite onaj par kojemu je produkt najveći, a zbroj im je jednak zadanom pozitivnom broju a.

30. Među svim realnim brojevima x, y i z takvim da je $x+y+z=1$ nađite ona tri za koja je vrijednost $x^2+2x+y^2-4y+z^2$ najmanji.

31. Pronađite točku ravnine $2x-3y-z=4$ koja je najbliža ishodištu na dva načina:
a) svođenjem problema na traženje minimuma funkcije dviju varijabli
b) koristeći Lagrangeov multiplikator.

3.9.1 Rješenja zadataka za vježbu

1 $F'(\alpha) = -\frac{4}{3\alpha}e^{-\alpha^4}$

2. $F'(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha\sin\alpha)[\frac{1}{\alpha}+\mathrm{ctg}\alpha]$.

3. $F'(\alpha) = \mathrm{ctg}(\alpha\cos\alpha)[\frac{1}{\alpha}-\mathrm{tg}\alpha]-\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\alpha}$.

4. $I(a) = \ln(a+1)$.

5. Pokaže se da je $F'(a) = 0$.

6. $T_2(x,y) = -5-(x-1)+2(y+2)+(x-1)^2+(x-1)(y+2)$

7. $T_2(x,y) = 1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$

8. $T_2(x,y) = \ln 5+\frac{2}{5}(x-1)+\frac{4}{5}(y-2)+\frac{3}{25}(x-1)^2-\frac{8}{25}(x-1)(y-2)-\frac{3}{25}(y-2)^2$.

9. $T_2(x,y) = 1+2y+2(x-1)y+2y^2$.

10. $T_2(x,y) = xy$.

11. $f_T(x,y) = -1+5(y+1)+2(x-1)^2+3(x-1)(y+1)-3(y+1)^2+(x-1)^3+(x-1)^2(y+1)+(y+1)^3$.

12. Taylorov polinom drugog stupnja u točki $T(0,1)$:
$T_2(x,y) = 1+2x+\frac{3}{2}x^2-x(y-1)$

13. a) pozitivno definitna; b) negativno

14. $d^2f = 2(dx)^2-4dxdy+6(dy)^2$

15. $df(1,1) = (2e-1)dx-dy$; $d^2f(1,1) = (6e+1)(dx)^2+(dy)^2$;
$\pi\ldots(2e-1)dx-y-z-e+2=0$.

16. $df(1,1) = (\cos 1+1+e)dx+(\cos 1+e)dy$;
$d^2f(1,1) = (e-\sin 1)(dx)^2+2(\cos 1-\sin 1+1+2e)dxdy+(e-\sin 1)(dy)^2$.

17. a) $d^2f(0,0)$ je pozitivno definitna; b) $d^2f(0,0)$ je indefinitna

18. a) $d^2f(-1,-1,-1)$ je negativno definitna; b) $d^2f(-1,1,1)$ je pozitivno definitna

19. a) Točka $(1,0)$ je stacionarna i to je lokalni minimum.

b) Stacionarne točke: $(1,2)$(nije ekstrem); $(3+\sqrt{15}, \frac{-3+\sqrt{15}}{3})$(lokalni minimum); $(3-\sqrt{15}, \frac{-3-\sqrt{15}}{3})$(lokalni maksimum).

c) Stacionarna točka je $(6,4)$ i to je lokalni maksimum.

d) Stacionarna točka je $(0,1)$ i to je lokalni minimum.

e) Stacionarna točka je $(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 1)$ i to je lokalni minimum.

f) Stacionarna točka je $(\frac{-1}{2}, 0, 0)$ i to je lokalni minimum.

20. a) $T_0(1,-1)$ strogi lokalni minimum

b) $T_0(1/\sqrt[3]{4}, 1/\sqrt[3]{4})$ strogi lokalni minimum

c) $T_1(0,0)$ nije točka ekstrema; $T_2(3,9)$ lokalni minimum

d) $T(-2/3,-1/3,1)$ strogi lokalni maksimum

21. Stacionarna točka je $T(0,0)$. Za $k > 1/4$ je lokalni minimum, a za $k < 1/4$ je sedlo.

22. uvrštavanjem uvjeta u funkciju temperature dobijemo funkciju $f(y,z) = -2y^2 - 8z^2 + 4yz - 16z + 632$; **lokalni maksimumi**: $T_{1,2}(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$

23. a) $f(3,0) = 83$ globalni maksimum, $f(1,1) = 0$ globalni minimum
b) $f(1,0) = 2$ globalni maksimum, $f(-1,0) = -2$ globalni minimum

24. min u točki D, max na bridu AE

25. max u $T(1,1,-1)$ iznosi 2, min u $T(-1,-1,1)$ iznosi -8

26. a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lokalni maksimum.

b) $(1,2)$ lokalni maksimum. $(-1,-2)$ lokalni minimum.

c) $(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5})$ lokalni maksimum. $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ lokalni minimum.

d) $(\frac{-1}{2}, 0)$ lokalni minimum. $(\frac{1}{2}, 0)$ lokalni minimum.

e) $(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ lokalni maksimum.

f) $(0,0,3)$ nije ekstrem. $(0,0,1)$ lokalni minimum.

g) $(-4,-1,-4/3)$ **lokalni minimum**. $(4,1,4/3)$ lokalni maksimum.

h) $(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}})$ lokalni maksimum.

27. Lagrangeova funkcija: $L(r,v,\lambda) = \frac{\pi}{3}r^2v + \lambda(r^2 - 2v + v^2)$, $r > 0$, $v > 0$; stacionarna točka $T(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3})$, za $\lambda = -\frac{4\pi}{9}$ je lokalni maksimum

28. $T_1(1,-4,0)$ uvjetni lokalni minimum, $T_2(-1,-6,-2)$ uvjetni lokalni maksimum

29. $T(a/2, a/2, a^2/4)$

30. $T(-1,2,0)$

31. $T(4/7, -6/7, -2/7)$

3.10 Literatura

[1] Andrea Aglić Aljinović i drugi. **Funkcije više varijabla**. Zagreb: Element, 2019.
[2] Boris Pavlovič Demidovič. **Zadaci i riješeni primjeri iz Matematičke analize za tehničke fakultete**. Zagreb: Golden marketing - Tehnička knjiga, 2003.
[3] Petar Javor. **Matematička analiza 2**. Zagreb: Element, 2002.
[4] Serge Lang. **Calculus of several variables**. New York: Springer-Verlag, 1987.
[5] Mervan Pašić. **Matematika 2. Sa zbirkom riješenih primjera i zadataka** . Zagreb: Merkur ABD, 2006.
[6] James Stewart. **Calculus: early transcendentals** . Sv. 6. Belmont, Cal.: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.