Matematička analiza 1 – Poglavlje 1 b)

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

Verzija od 12. veljače 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

1. b) Kompleksni brojevi

Najkraći put među dvjema realnim istinama
prolazi kroz kompleksno područje.
Jacques HADAMARD (1865.-1963.), francuski matematičar

Ključni pojmovi: kompleksni brojevi 5, konjugirano kompleksni broj $\overline{z}$ od z 7, apsolutna vrijednost (ili modul) $|z|$ kompleksnog broja z 7, Gaussov teorem (ili Osnovni teorem algebre) 13, argument $\varphi = \arg(z)$ kompleksnog broja z 16, trigonometrijski oblik $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ kompleksnog broja z 18, Moivreova formula 19, Eulerov zapis $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ kompleksnog broja z 20, korjenovanje kompleksnih brojeva 23.

Kompleksni brojevi se pojavljuju u raznim područjima fizike i elektrotehnike, kao što su proračun izmjeničnih struja, obradba signala, dinamika fluida, teorija vibracija, u dinamičkim sustavima i proučavanju njihove stabilnosti, u teoriji elektromagnetskih polja, u kvantnoj mehanici, kao i u obradbi slike.

S pomoću kompleksnih brojeva moguća je konstrukcija čudesnih fraktalnih skupova (Mandelbrotov skup, Juliaovi skupovi, Henonov atraktor itd.). Danas vjerojatno najznačajniji neriješeni otvoren problem u matematici, poznat pod nazivom *Riemannova hipoteza*, tiče se nultočaka tzv. Riemannove zeta funkcije, čija varijabla je kompleksan broj.

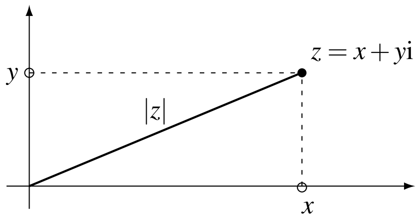
Kao što znamo, jednadžba $x^2 + 1 = 0$ nema niti jedno realno rješenje, tj. polinom $x^2 + 1$ nema niti jedan korijen u skupu realnih brojeva. Kompleksni brojevi predstavljaju proširenje skupa realnih brojeva u kojem će *bilo koji* polinom s realnim koeficijentima (pa čak i s kompleksnim) imati barem jedan korijen; vidi Gaussov teorem (ili Osnovni teorem algebre), naveden u Teoremu 1.1.1 niže.

1.1 Operacije s kompleksnim brojevima

Definirajmo kao pomoćni objekt tzv. *imaginarnu jedinicu* i, koju po definiciji potenciramo na sljedeći način: $\mathrm{i}^2 = -1$. Uvodimo novu vrstu brojeva koje zapisujemo u obliku $z := x + y\mathrm{i}$, a zovemo ih *kompleksnim brojevima*, gdje su x i y bilo koji realni brojevi. Skup kompleksnih brojeva označujemo s $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} := \{z = x + y\mathrm{i} : x, y \in \mathbb{R}\}, \tag{1.1}$$

Svaki kompleksan broj $z = x + y\mathrm{i}$ predočujemo odgovorajućom točkom (x,y) u ravnini, koju zovemo *Gaussovom ravninom* (ili kompleksnim područjem); vidi Sliku 1.1. Broj x zovemo *realnim dijelom* kompleksnog broja z i pišemo $\mathrm{Re}\,z := x$, dok broj $\mathrm{Im}\,z := y$ zovemo *imaginarnim dijelom* kompleksnog broja z. Kompleksni broj $0+0\mathrm{i}$ označujemo kraće samo s 0.



Slika 1.1: Prikaz kompleksnog broja $z = x + y\mathrm{i}$ u Gaussovoj ravnini u Kartezijevim koordinatama x i y.

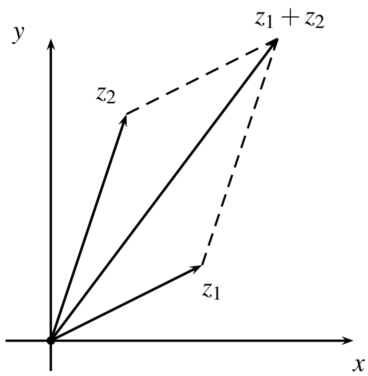
Kompleksne brojeve oblika $x + 0\mathrm{i}$, gdje je x realan broj, označujemo kraće s x. Na taj način, realni brojevi postaju pravi podskup skupa kompleksnih brojeva, tj. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Kompleksne brojeve oblika $0 + y\mathrm{i}$, gdje je y realan broj, zovemo *imaginarnim brojevima* i označujemo kraće s $y\mathrm{i}$.

Za dva kompleksna broja $z_1 := x_1 + y_1\mathrm{i}$ i $z_2 := x_2 + y_2\mathrm{i}$ kažemo da su *jednaki* i pišemo $z_1 = z_2$, ako vrijedi $x_1 = x_2$ *i* $y_1 = y_2$. U suprotnom (tj. ako je $x_1 \neq x_2$ *ili* $y_1 \neq y_2$) kažemo da su kompleksni brojevi z_1 i z_2 međusobno *različiti* i pišemo $z_1 \neq z_2$. Prema tome, ako je $z \neq 0$, gdje je $z = x + y\mathrm{i}$, onda je $x \neq 0$ *ili* $y \neq 0$, ili pak ekvivalentno tome, $x^2 + y^2 > 0$.

U skup $\mathbb{C}$ svih kompleksnih brojeva uvodimo *operacije zbrajanja i množenja*. Po definiciji, kompleksne brojeve $z_1 := x_1 + y_1\mathrm{i}$ i $z_2 := x_2 + y_2\mathrm{i}$ zbrajamo po komponentama:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}. \tag{1.2}$$

Ovakvom zbrajanju odgovara zbrajanje radijvektora u Gaussovoj ravnini, određenih kompleksnim brojevima z_1 i z_2, po *pravilu paralelograma*.



Slika 1.2: Za zbrajanje kompleksnih brojeva z_1 i z_2 vrijedi pravilo paralelograma.

Kompleksne brojeve množimo po definiciji ovako:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 + y_2\mathrm{i}) := (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i}, \tag{1.3}$$

tj. množeći pripadajuća dva binoma 'svaki sa svakim', te rabeći dogovor da je $\mathrm{i}^2 = -1$.

Vrlo je lako provjeriti da za zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva vrijede zakoni komutativnosti i asocijativnosti:

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \quad z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$$
$$z_1z_2=z_2z_1, \quad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3.$$

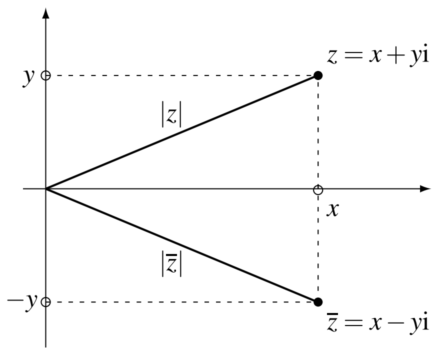
Također, nije teško provjeriti da su zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva međusobno usklađeni zakonom distribucije: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

■ **Primjer 1.1** Za kompleksne brojeve $z_1=2+3\mathrm{i}$ i $z_2=-1+4\mathrm{i}$ izračunajmo
$z_1+z_2=(2+3\mathrm{i})+(-1+4\mathrm{i})=1+7\mathrm{i}$
$z_1z_2=(2+3\mathrm{i})\cdot(-1+4\mathrm{i})=(-2-12)+(8-3)\mathrm{i}=-14+5\mathrm{i}$. ■

Za bilo koji prirodan broj n moguće je definirati *n-tu potenciju kompleksnog broja z*, u oznaci z^n, na uobičajen način: $z^2:=z\cdot z$, $z^3:=z^2\cdot z,\ldots,z^n:=z^{n-1}\cdot z$. Ovdje definiramo i $z^0:=1$. Zbog asocijativnosti množenja kompleksnih brojeva, za bilo koja dva prirodna broja m i n vrijedi $z^{m+n}=z^mz^n$.

■ **Primjer 1.2** Izračunajmo $(2-3\mathrm{i})^3$. Najprije je $(2-3\mathrm{i})^2=4-12\mathrm{i}-9=-5-12\mathrm{i}$, te zatim $(2-3\mathrm{i})^3=(2-3\mathrm{i})^2(2-3\mathrm{i})=(-5-12\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})=46-9\mathrm{i}$. Moguće je računati i izravno, uporabom binomnog teorema:[1] $(2-3\mathrm{i})^3=2^3+3\cdot2^2(-3\mathrm{i})+3\cdot2(-3\mathrm{i})^2+(-3\mathrm{i})^3=\cdots=-46-9\mathrm{i}$. ■

Za kompleksni broj $z=x+y\mathrm{i}$ definiramo *suprotni broj* $-z:=(-1)z=-x-y\mathrm{i}$. Množenju kompleksnog broja z s -1, u Gaussovoj ravnini odgovara njegovo *zrcaljenje s obzirom na ishodište*. Možemo definirati i oduzimanje kompleksnih brojeva z_1 i z_2 (tj. z_1-z_2) po komponentama, slično kao i kod zbrajanja.



Slika 1.3: Prikaz konjugirano kompleksnog broja $\bar{z}=x-y\mathrm{i}$ u Gaussovoj ravnini, u odnosu na $z=x+y\mathrm{i}$.

Kompleksnom broju $z:=x+y\mathrm{i}$ pridružujemo njemu *konjugirano kompleksni broj* $\bar{z}$, u kojem samo promijenimo predznak imaginarnog dijela od z, tj.

$$\bar{z}:=x-y\mathrm{i}.$$

Vidi Sliku 1.3. Time dolazimo do operacije *konjugiranja kompleksnih brojeva*,[2] kojoj u Gaussovoj ravnini očevidno odgovara *zrcaljenje kompleksnih brojeva s obzirom na realnu os*. Kao što vidimo, $z\bar{z}=(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})=x^2+y^2$. Ako je z *realan broj*, onda se konjugiranjem on ne mijenja, tj. $\bar{z}=z$. Vrijedi i obratno: ako je kompleksni broj z takav da je $\bar{z}=z$, onda je z realan broj.

Definiramo li *apsolutnu vrijednost* (ili *modul*) $|z|$ kompleksnog broja z kao njegovu udaljenost od ishodišta u Gaussovoj ravnini, onda iz Pitagorina poučka odmah dobivamo da je

[1] Tj. rabeći formulu $(z_1+z_2)^3=z_1^3+3z_1^2z_2+3z_1z_2^2+z_2^3$.
[2] U Fizici i Elektrotehnici, vrlo česta oznaka za konjugirano kompleksni broj od z je z^* umjesto $\bar{z}$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

pri čemu podrazumijevamo da je vrijednost drugog korijena na desnoj strani uvijek ≥ 0. Prema tome je

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Ako je $z = x + yi \neq 0$ (tj. $x \neq 0$ ili $y \neq 0$), možemo definirati *recipročnu vrijednost* ili *inverz* kompleksnog broja z, u oznaci $1/z$ ili z^{-1}, na sljedeći način:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Naravno, vrijedi $z \cdot z^{-1} = 1$.

Malo općenitije, možemo definirati i dijeljenje kompleksnih brojeva z_1 i $z_2 \neq 0$ kao umnožak brojeva z_1 i z_2^{-1}, tj.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}.$$

■ **Primjer 1.3** $\frac{2+3i}{-1+4i} = \frac{2+3i}{-1+4i} \cdot \frac{-1-4i}{-1-4i} = \frac{10-11i}{17} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}i.$ ■

Zanimljivo je da je konjugiranje kompleksnih brojeva lijepo usklađeno ne samo sa zbrajanjem, nego i s množenjem i dijeljenjem kompleksnih brojeva:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

(Prepuštamo zainteresiranom čitatelju da za vježbu sam provjeri ove jednakosti.) Rabeći svojstvo $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (ili izravno), može se lako pokazati da vrijedi

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

gdje u drugoj jednakosti pretpostavljamo da je $z_2 \neq 0$. Također, za bilo koji kompleksni broj z i prirodan broj n vrijedi $|z^n| = |z|^n$, što se vrlo lako vidi matematičkom indukcijom.

Na primjer, $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{z_1 z_2} = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$, dakle $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Za kompleksne brojeve vrijedi i pravilo za zbrajanje razlomaka:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_2 z_4},$$

gdje su $z_2 \neq 0$ i $z_4 \neq 0$. Ovo pravilo znamo iz osnovne škole za racionalne i realne brojeve.

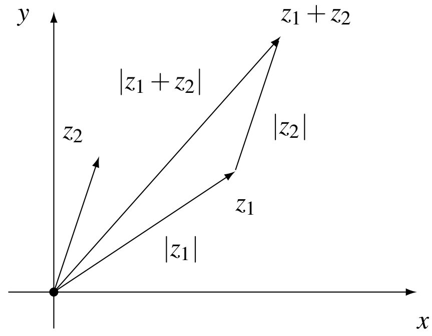
Za kompleksne brojeve vrijedi *nejednakost trokuta*:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.4}$$

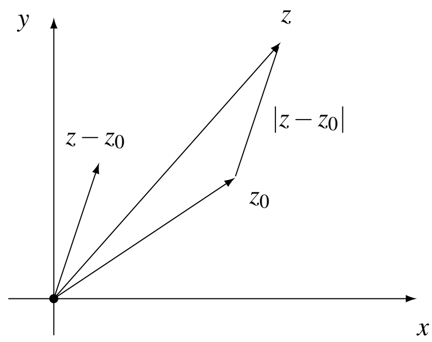
Ona se odmah dobiva iz pravila paralelograma za zbrajanje kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini, gledajući odgovarajući trokut određen s kompleksnim brojevima 0, z_1 i $z_1 + z_2$, čije duljine stranica su $|z_1|$, $|z_2|$ i $|z_1 + z_2|$.

Međusobna *udaljenost dvaju kompleksnih brojeva* z i z_0 u Gaussovoj ravnini iznosi[3]

[3] Slovo d u $d(z, z_0)$ dolazi od 'distanca', tj. udaljenost.



Slika 1.4: Za zbrajanje kompleksnih brojeva vrijedi nejednakost trokuta: $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. Trokut je jasno vidljiv na slici, s naznačenim duljinama stranica $|z_1|$, $|z_2|$ i $|z_1+z_2|$.



Slika 1.5: Za zadane kompleksne brojeve z i z_0, kompleksni broj $z-a$ dobijemo tako da vektor koji spaja dočetak (kraj) vektora a s dočetkom od z translatiramo u ishodište. To vidimo iz jednakosti $a+(z-a)=z$, zbrajanjem po pravilu paralelograma. Udaljenost kompleksnih brojeva z i a iznosi $|z-a|$.

$$d(z,z_0) := |z-z_0|.$$

To je moguće odmah vidjeti iz jednakosti $z_0+(z-z_0)=z$, crtajući radijvektore kompleksnih brojeva z_0, z i $z-z_0$; vidi Sliku 1.5. Prema tome, jednadžba *kružnice* polumjera r sa središtem u kompleksnom broju a može se zadati jednadžbom

$$|z-z_0| = r. \tag{1.5}$$

Vidi Sliku 1.6. Ako stavimo $z=x+yi$ i $z_0=x_0+y_0\mathrm{i}$, ta jednadžba je ekvivalentna jednadžbi kružnice koju poznajemo iz srednje škole:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

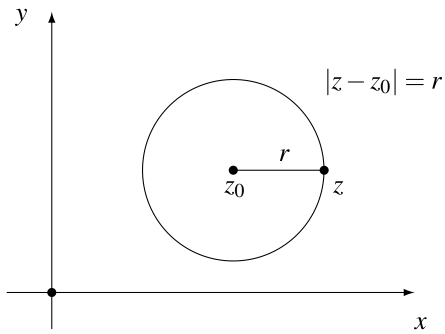
Jednadžba kružnice navedena u (1.5) je prikladnija, jer je kraća i intuitivnija.

■ **Primjer 1.4** Udaljenost kompleksnih brojeva $z_1=1+2\mathrm{i}$ i $z_2=-2+\mathrm{i}$ iznosi $|z_1-z_2|=|(1+2i)-(-2+\mathrm{i})|=|3+\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. ■

Na sličan način, *zatvoren krug* (tj. krug s uključenom rubnom kružnicom) polumjera $r>0$, sa središem u točki $z_0\in\mathbb{C}$, možemo opisati nejednakošću

$$|z-z_0|\leq r.$$

Otvoren krug (tj. krug s isključenom rubnom kružnicom) određen je nejednakošću $|z-z_0|<r$. Vidi Sliku 1.7.



Slika 1.6: Za zadani kompleksni broj z_0 i $r>0$, skup svih $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $|z-z_0|=r$ je kružnica polumjera r sa središtem u z_0. Drugim riječima, jednadžba kružnice u Gaussovoj ravnini glasi $|z-z_0|=r$.

Slika 1.7: S lijeva je *zatvoren krug* u Gaussovoj ravnini (tj. krug s uključenom rubnom kružnicom), opisan nejednakošću $|z-z_0| \le r$. S desna je *otvoren krug* (tj. s isključenom rubnom kružnicom, što smo označili crtkanom linijom), opisan strogom nejednakošću $|z-z_0|<r$.

▪ **Primjer 1.5** U Gaussovoj ravnini odredite skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $1 \le |z+3+4\mathrm{i}| \le 2$.

Rješenje. Ako ovu nejednakost napišemo kao $1 \le |z-(-3-4\mathrm{i})| \le 2$, vidimo da se radi o skupu svih točaka z čija je udaljenost od broja $-3-4\mathrm{i}$ između 1 i 2. Radi se zatvorenom kružnom vijencu sa središtem u točki $-3-4\mathrm{i}$, unutarnjeg polumjera 1 a vanjskog 2. Vidi Sliku 1.8. Zatvoreni kružni vijenac opisan nejednakostima $1 \le |z+3+4\mathrm{i}| \le 2$ možemo zapisati i u Kartezijevim koordinatama (što je manje spretan način):

$$1 \le (x+3)^2+(y+4)^2 \le 4.$$

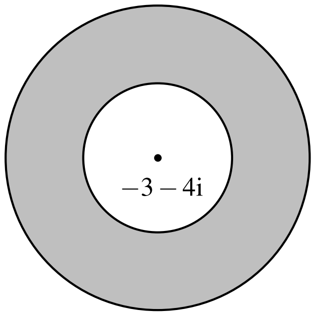
■

▪ **Primjer 1.6** Komplement otvorenog kruga u Gaussovoj ravnini, određenog nejednakošću $|z-3+5\mathrm{i}|<2$, je zatvoren skup određen nejednakošću $|z-3+5\mathrm{i}| \ge 2$, tj. $|z-(3-5\mathrm{i})| \ge 2$. Radi se dakle o skupu svih kompleksnih brojeva z u Gaussovoj ravnini koji su od $a=3-5\mathrm{i}$ udaljeni za barem 2. ■

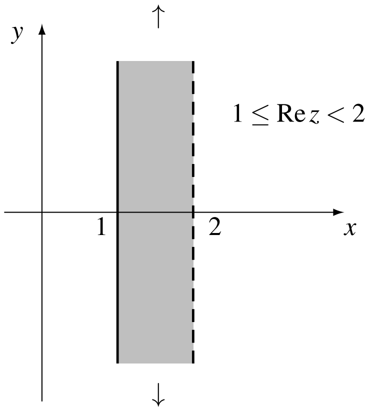
▪ **Primjer 1.7** Nejednakostima $1 \le \mathrm{Re}\, z < 2$ definirana je poluotvorena (ili poluzatvorena) vertikalna traka: lijevi rubni pravac $\mathrm{Re}\, z = 1$ je uključen u traku, dok desni rubni pravac $\mathrm{Re}\, z = 2$ nije. Vidi Sliku 1.9. Na sličan je način nejednakostima $1 \le \mathrm{Im}\, z < 2$ opisana odgovarajuća vodoravna traka, u koju rubni pravac $\mathrm{Im}\, z = 2$ nije uključen. ■

Za bilo koji kompleksan broj $z \neq 1$ i prirodan broj n možemo lako zbrojiti potencije od z od nulte do n-te, ili točnije, brojeve $1, z, z^2, \dots, z^n$:

$$1+z+z^2+\cdots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}. \tag{1.6}$$



Slika 1.8: Skup svih kompleksnih brojeva za koje vrijedi $1 \leq |z+3+4\mathrm{i}| \leq 2$ čini zatvoren kružni vijenac sa središtem u $-3-4\mathrm{i}$, nutarnjeg radijusa 1, a vanjskog 2; vidi primjer 1.5.



Slika 1.9: Vertikalna poluotvorena (ili poluzatvorena) traka opisana nejednakostima $1 \leq \operatorname{Re} z < 2$. Vidi Primjer 1.7.

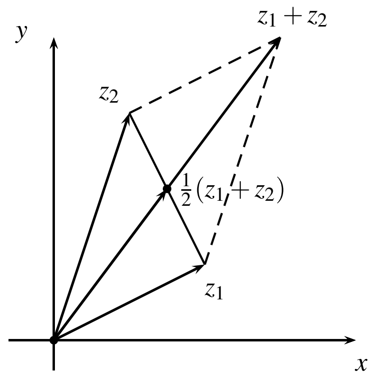
Ova formula je vrlo korisna u analizi funkcija kompleksne varijable z. Dokaz je sasvim isti kao i za slučaj kada je z realan broj x; vidi formulu (**??**) na str. **??**.

■ **Primjer 1.8** Za bilo koja dva zadana kompleksna broja z_1 i z_2, vrijednost kompleksnog broja z koja odgovara *polovištu njihove spojnice* je njihova aritmetička sredina:

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2). \tag{1.7}$$

To slijedi odmah iz pravila paralelograma za zbrajanje kompleksnih brojeva; vidi Sliku 1.10. Na primjer, za kompleksne brojeve $z_1 = 1+2\mathrm{i}$ i $z_2 = -2+\mathrm{i}$, polovištu njihove spojnice odgovara kompleksni broj $z = \frac{1}{2}(z_1+z_2) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$. ■

Vježba 1.1 Kompleksnim brojem z u Gaussovoj ravnini je određen *radij-vektor* koji spaja ishodište (kao početkom vektora) s točkom z (kao dočetkom, tj. krajem vektora). Uvjerite se da su dva radij-vektora određena kompleksnim brojevima z_1 i z_2 izvan ishodišta su paralelna onda i samo onda ako postoji *realan* broj t takav da je $z_1 = t \cdot z_2$. Kažemo kraće da su kompleksni brojevi z_1 i z_2 paralelni onda i samo onda ako postoji realan broj t takav da je $z_1 = t \cdot z_2$.



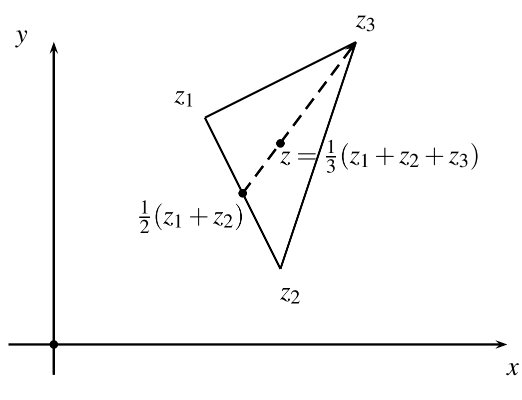
Slika 1.10: Polovištu dužine $[z_1, z_2]$ odgovara kompleksni broj $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.

■ **Primjer 1.9** Skicirajte skup svih kompleksnih brojeva z za koje je $z = tz_0$, gdje je $z_0 = 1 + \mathrm{i}$, te (a) $t \in \mathbb{R}$, (b) $t \geq 1$, (c) $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Rješenje. (a) Cijeli pravac određen ishodištem i točkom z_0. (b) Zraka s početkom u točki z_0, u smjeru vektora z_0. (c) Otvoreni interval koji spaja ishodište s točkom z_0. Nacrtajte slike. ■

■ **Primjer 1.10** Odredite sve kompleksne brojeve z za koje je $z - z_1 = tz_2$, gdje je $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_1 = 1 - \mathrm{i}$, te (a) $t \in \mathbb{R}$, (b) $t \geq 0$, (c) $t \in \langle 0, 1 \rangle$. (Primijetite da uvjet $z - z_1 = tz_2$, gdje je t realan broj, znači da su vektori $z - z_1$ i z_2 paralelni.)

Rješenje. (a) Cijeli pravac određen točkom z_1 u smjeru vektora z_2 (tj., z_2 je tzv. *vektor smjera* pravca). (b) Zraka s početkom u z_1, u smjeru vektora z_2 (povučenog iz točke z_1). (c) Otvoreni interval koji spaja točku z_1 s točkom $z_1 + z_2$. Nacrtajte slike. ■



Slika 1.11: Težište trokuta s vrhovima u bilo kojim točkama z_1, z_2 i z_3 Gaussove ravnine nalazi se u točki $z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$. Crtkanom linijom je nacrtana jedna od triju težišnica trokuta (spojnica vrha s polovištem nasuprotne stranice). Vidi (1.8) i popratno vrlo kratko objašnjenje.

Dodatak

Težištu trokuta s vrhovima u kompleksnim brojevima z_1, z_2 i z_3 odgovara kompleksni broj z koji je njihova aritmetička sredina:

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3). \tag{1.8}$$

Doista, pokažimo da se točka z nalazi u sjecištu svih triju težišnica (spojnica bilo kojeg vrha trokuta s polovištem nasuprotne stranice; vidi Sliku 1.11). Težišnica iz vrha z_3 ima smjer od $t_3 := \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - 2z_3)$. S druge strane, spojnica točke z i rečenog polovišta je

$$\frac{1}{2}(z_1 + z_2) - z = \frac{1}{6}(z_1 + z_2 - 2z_3) = \frac{1}{3}t_{1,2}.$$

To pokazuje da točka z doista leži na navedenoj težišnici, te da ju dijeli u omjeru 1 : 2. Na potpuno isti načine se pokazuje da z leži i na preostale dvije težišnice.

Potenciranje kompleksnih brojeva nam omogućuje da definiramo *opći polinom* $P(z)$ *s kompleksnim koeficijentima* $a_0, a_1, \dots, a_n$, koji su unaprijed zadani:

$$P(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0.$$

Njegova varijabla je kompleksni broj z. Ako je $a_n \neq 0$, onda kažemo da je $P(z)$ *polinom n-tog stupnja*, te a_n zovemo *vodećim koeficijentom* polinoma. Koeficijent a_0 zovemo *slobodnim koeficijentom* polinoma.

Kompleksan broj z_1 takav da je $P(z_1) = 0$ zovemo *nultočkom* polinoma $P(z)$. U tom je slučaju polinom $P(z)$ *djeljiv* sa $z - z_1$, tj. $P(z) = (z - z_1)P_1(z)$, gdje je $P_1(z)$ također polinom.

Na primjer, kompleksni brojevi $z_{1,2} = \pm\mathrm{i}$ su nultočke kvadratnog polinoma $P(z) := z^2 + 1$ i vrijedi $P(z) = z^2 + 1 = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = (z - z_1)(z - z_2)$.

Općenito, za bilo koji polinom $P(z)$ s kompleksnim koeficijentima, za nultočku z_1 kažemo da je *kratnosti* $k_1 \in \mathbb{N}$, ako postoji polinom $P_1(z)$ takav da je $P(z) = (z - z_1)^{k_1} P_1(z)$, pri čemu je k_1 najveća moguća potencija (tj., polinom $P_1(z)$ nije djeljiv sa $z - z_1$, tj. $P_1(z_1) \neq 0$; drugim riječima, z_1 nije nultočka polinoma $P_1(z)$).

■ **Primjer 1.11** Polinom $Q(z) = z^3 - 2\mathrm{i}z^2 - z$ ima nultočku $z_{1,2} = \mathrm{i}$ kratnosti 2. Vrijedi $Q(z) = (z - \mathrm{i})^2 \cdot z$. Druga nultočka, $z_3 = 0$, je kratnosti jedan. Uzimljući u obzir i kratnosti, možemo reći da polinom Q ima ukupno tri nultočke. ■

Spomenimo bez dokaza znameniti Gaussov teorem (ili Osnovni teorem algebre) o rješivosti bilo koje polinomijalne jednadžbe $P(z) = 0$ u skupu kompleksnih brojeva.

Teorem 1.1.1 — Gaussov teorem ili Osnovni teorem algebre. Neka je $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ bilo koji polinom s kompleksnim koeficijentima, stupnja $n \geq 1$ (tj. $a_n \neq 0$). Onda postoji barem jedan kompleksan broj z_1 koji je nultočka polinoma, tj. $P(z_1) = 0$. Što više, za polinom n-tog stupnja $P(z)$ postoji točno n kompleksnih nultočaka $z_1, z_2, \dots, z_n$ (ne nužno međusobno različitih), takvih da za sve kompleksne brojeve z vrijedi

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Za polinome prvog i drugog stupnja, ovaj teorem u bitnome poznajemo iz srednje škole. Važno je naglasiti da Gaussov teorem ne vrijedi u skupu relanih brojeva, kao što pokazuje primjer polinoma $P(x) := x^2 + 1$, koji nema realnih nultočaka.

Crtica

Carl Friedrich Gauss je Osnovni teorem algebre dokazao 1799. u svojoj doktorskoj disertaciji, u dobi od samo 20 godina. Iako vrlo značajan, taj teorem ne daje *postupak*, tj. formulu za nalaženje

Slika 1.12: Carl Friedrich Gauss je Osnovni teorem algebre (vidi Teorem 1.1.1) dokazao 1799., u dobi od 20 godina. (Portret je naslikao Christian Albrecht Jensen; fotografija je s Wikipedije na naznačenoj adresi.)

nultočaka polinoma bilo kojeg stupnja. Pokazuje se da za *opći* polinom stupnja $n \geq 5$ niti ne postoji formula za izračunavanje svih njegovih nultočaka, što je otkrio Niels Abel početkom 19. st. Za opće polinome stupnja $n = 1,2,3,4$ takve formule postoje. Na primjer, za $n = 1$, tj. za polinom $P(z) = a_1z + a_0$ imamo samo jednu nultočku $z_1 = -a_0/a_1$. Za $n = 2$, tj. za polinom $P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, imamo dvije nultočke $z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$, gdje će o korjenovanju kompleksnih brojeva biti riječi kasnije. Za $n = 3$ postoje Cardanove formule (nazvane po Girolamo Cardanu) za nalaženje nultočaka kubnog polinoma (tj. polinoma trećeg stupnja), poznate još iz 16. st., čiji autor je zapravo talijanski matematičar *Niccolo Tartaglia*. Za $n = 4$, tj. za nalaženje nultočaka polinoma četvrtog stupnja, postoje Ferrarijeve formule koje je još 1540. g. otkrio *Lodovico Ferrari*.

Norveški matematičar *Niels Abel* je godine 1826. dokazao da ne postoji formula za nalaženje nultočaka *općeg polinoma* petog ili višeg stupnja, izraziva *u radikalima*, tj. u ovisnosti od koeficijenata polinoma s pomoću konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korjenovanja. Na primjer, jednadžba $z^5 - 4z - 2 = 0$ nije rješiva u radikalima, iako po Gaussovu teoremu znamo da posjeduje pet kompleksnih nultočaka.

Dodatak

Skup kompleksnih brojeva je 'najmanji' brojevni sustav u kojem *svaki* polinom s realnim koeficijentima (pa čak i iz tog brojevnog sustava) ima barem jednu nultočku. U tom smislu kažemo da je skup kompleksnih brojeva **algebarski zatvoren**. O tome govori Gaussov teorem (Teorem 1.1.1). Skup realnih brojeva nije algebarski zatvoren, jer na primjer polinom $P(x) = x^2 + 1$ nema niti jedne realne nultočke, pa se ne može rastaviti na umnožak dvaju polinoma prvog stupnja s realnim koeficijentima. S druge strane, taj polinom u skupu kompleksnih brojeva ima dvije nultočke: $\pm \mathrm{i}$. Radi toga je moguć rastav $P(x) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$.

Propozicija 1 Ako je $P(z) := a_nz^n + \cdots + a_1 + a_0$ bilo koji polinom s *realnim* koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$, onda njegove nultočke dolaze u konjugirano kompleksnim parovima. Drugim riječima, ako je z_1 nultočka takvog polinoma $P(z)$, onda je i $\overline{z}_1$ nultočka istog polinoma.

Dokaz. Doista, ako je $P(z_1) = 0$, onda konjugiranjem ove jednakosti dobivamo

$$\overline{a_nz_1^n + \cdots + a_1z_1 + a_0} = \overline{0} = 0,$$

dakle, $\overline{a}_n\overline{(z_1)^n}+\cdots+\overline{a}_1\overline{z}_1+\overline{a}_0=0$, i prema tome (jer su svi koeficijenti a_k realni)

$$a_n(\overline{z}_1)^n+\cdots+a_1\overline{z}_1+a_0=0,$$

tj. $P(\overline{z}_1)=0$. ■

Iz Propozicije 1 vidimo da ako je z_1 nultočka polinoma $P(z)$ s realnim koeficijentima, te ako je $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ (tj. $z_1 \neq \overline{z}_1$), onda je $P(z)$ djeljiv sa kvadratnim polinomom $(z-z_1)(z-\overline{z}_1)=z^2-(\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z)z+z_1\overline{z}_1=z^2-2(\operatorname{Re} z_1)z+|z_1|^2$, čiji koeficijenti su realni.

Na taj način s pomoću Propozicije 1 i Osnovnog teorema algebre vidimo da je svaki polinom $P(z)$ s *realnim* koeficijentima jednak umnošku konačno mnogo linearnih članova oblika $z-a_k$, gdje su a_k realne nultočke polinoma, i konačno mnogo kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima koji imaju negativnu negativnu diskriminantu (tako da ti kvadratni polinomi nemaju realne nultočke, nego samo konjugirano kompleksne parove nultočaka). Na primjer, polinom

$$P(z)=(z-1)(z^2+z+1)$$

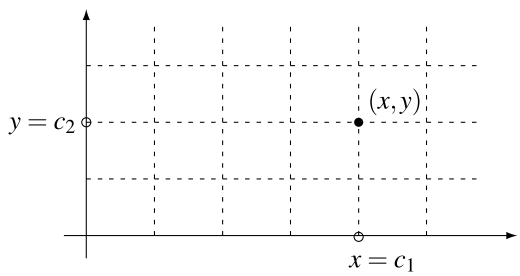
se ne može dalje rastaviti u skupu realnih brojeva, jer kvadratni polinom z^2+z+1 nema realnih nultočaka, nego konjugirano kompleksni par nultočaka $\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

Dodatak

Za skup $\mathbb{C}$ svih kompleksnih brojeva, zajedno s operacijama zbrajanja i množenja, tako da vrijede uobičajena svojstva (komutativnost, asocijativnost, distributivnost, te mogućnost invertiranja brojeva $z \neq 0$), kažemo da je 'polje', tj. govorimo o *polju kompleksnih brojeva*. Pojam općeg polja bit će točno definiran u kolegiju Linearna algbera. U osnovnoj i srednjoj školi smo već upoznali dva polja: polje racionalnih brojeva i polje realnih brojeva.

1.2 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kartezijeve koordinate u Gaussovoj ravnini (kao i u ravnini $\mathbb{R}^2$) određene su skupom okomitih pravaca oblika $\operatorname{Re} z = const$ (tj. $x = const.$), zajedno sa skupom vodoravnih pravaca oblika $\operatorname{Im} z = const$ (tj. $y = const$). Ti pravci čine *Kartezijevu koordinatnu mrežu*. Vidi Sliku 1.13. Položaj bilo kojeg kompleksnog broja $z=x+yi$ u Gaussovoj ravnini (ili točke (x,y) u ravnini $\mathbb{R}^2$) određen je kao presjek jednog okomitog i jednog jednog vodoravnog pravca.



Slika 1.13: Kartezijeva koordinatna mreža, sastavljena od vertikalnih pravaca $x=c_1$ i vodoravnih pravaca $y=c_2$, gdje su c_1 i c_2 bilo koje realne konstante.

Pokazuje se da je u mnogim slučajevima u Gaussovoj ravnini (kao i u ravnini $\mathbb{R}^2$) prikladnije korisititi drugi koordinatni sustav, koji se zove *polarni sustav*. Položaj kompleksnog broja $z = x+yi$ (ili točke (x,y)) zadaje se s pomoću udaljenost broja (točke) od ishodišta, koju označujemo s r (dakle, $r=|z|$), i priklonog kuta φ koji radijvektor povučen iz ishodišta do odgovarajuće točke zatvara prema pozitivnom dijelu x-osi. Vidi Sliku 1.16 na str. 17. Kut mjerimo počevši od pozitivnog dijela x-osi (prema radijvektoru) ili u pozitivnom smjeru (tj. u smjeru protivnom smjeru kazaljke na satu), ili u negativnom smjeru (u smjeru kazaljke na satu). Na taj način dolazimo do polarnih koordinata (r,φ).

Pritom kut φ nije određen jednoznačno, nego do na cjelobrojni višekratnik punog kuta 2π. Drugim riječima, koordinate (r,φ) i $(r,\varphi+2\pi k)$ određuju istu točku za bilo koji cijeli broj k.

Ako se kutovi φ_1 i φ_2, mjereni u radijanima, razlikuju za cjelobrojni višekratnik punog kuta 2π, tj. $\varphi_1-\varphi_2=2\pi k$ za neki cijeli broj k, onda pišemo

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\pi}. \tag{1.9}$$

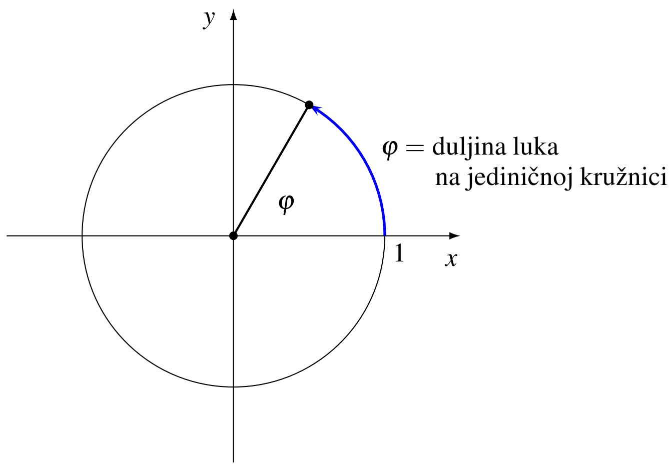
■ **Primjer 1.12** Na primjer, $7\pi/3 \equiv \pi/3 \pmod{2\pi}$, jer je $\frac{7\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=2\pi$. Također, $-\pi/4 \equiv 7\pi/4 \pmod{2\pi}$, jer je $-\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}=-2\pi$. ■

Kut φ pridružen kompleksnom broju $z\neq 0$ u Gaussovoj ravnini, određen jednoznačno do na cjelobrojni višekratnik punog kuta 2π, zovemo *argumentom kompleksnog broja* z i označujemo s $\arg z$.

■ **Primjer 1.13** Vrijedi $\arg(1+i)\equiv\pi/4 \pmod{2\pi}$, $\arg(-i)\equiv 3\pi/2\equiv-\pi/2 \pmod{2\pi}$, $\arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i})\equiv\pi/3 \pmod{2\pi}$. ■

Dodatak

Kut mjerimo najčešće u radijanima. Pritom je 1 **radijan** određen na jediničnoj kružnici (tj. na kružnici polumjera 1, sa središtem u ishodištu Kartezijeva koordinatnog sustava) kao kut koji odgovara luku duljine 1 s početkom u točki $(1,0)$, usmjerenom pozitivno, tj. obratno od smjera kazaljke na satu, kao na slici (1.14). Naziv *radijan* dolazi od 'radijusa' jedinične kružnice (koji iznosi 1). Na sličan način, luku duljine φ na jediničnoj kružnici, povučenom iz točke $(1,0)$, odgovara kut koji također zovemo s φ, i kažemo da kut ima vrijednost φ radijana.



Slika 1.14: Kut φ mjeren u radijanima, tj. s pomoću duljine luka na jediničnoj kružnici. Na ovoj slici je uzet kut od $\pi/3$ radijana, tj. malo više od 1 radijana.

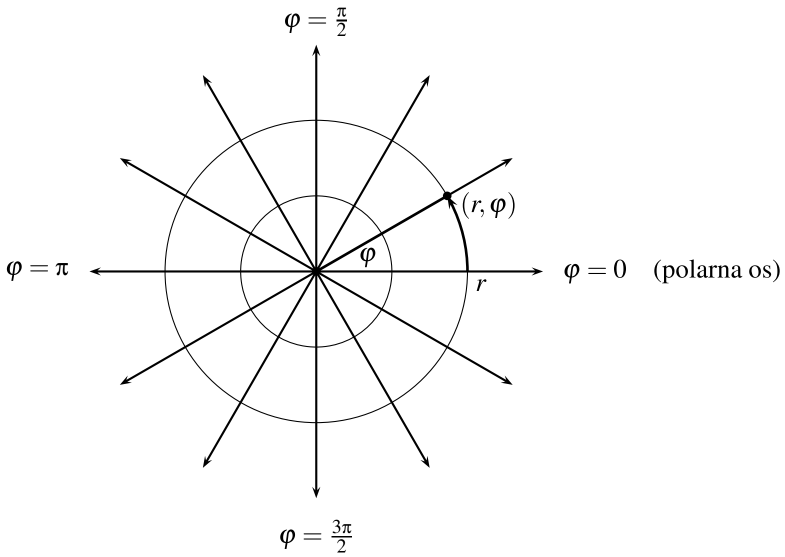
Budući da je opseg jedinične kružnice jednak $2\pi\cdot 1=2\pi$, onda *puni kut* iznosi 2π radijana (tj. približno 6.28 radijana, dakle nešto više od šesterostrukog radijusa). Pola punog kuta iznosi π radijana, a on odgovara *ispruženom kutu* (dakle približno nešto više od tri radijana). *Pravom kutu* odgovara polovica ispruženog kuta, tj. $\pi/2$ radijana (tj. približno nešto više od 1.5 radijana).

Ako kut mjerimo u stupnjevima, onda prema jako davnom dogovoru (još iz vremena Babilonaca) punom kutu odgovara 360° (razlog za taj izbor je taj što broj 360 ima puno cjelobrojnih djelitelja, njih čak 24; vidi Primjer **??** na str. **??**). Šestina tog kuta je 60°, a njemu odgovara $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ radijana (tj. malo više od jednog radijana). Polovici tog kuta odgovara 30°, tj. $\frac{\pi}{6}$ radijana.

Ako nekom odabranom kutu odgovara φ_r radijana i φ_s stupnjeva, onda vrijedi

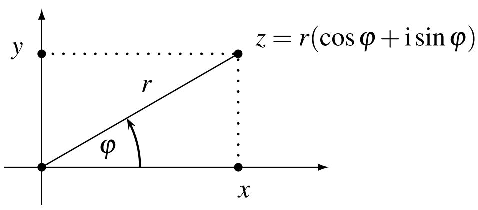
$$\frac{\varphi_r}{2\pi} = \frac{\varphi_s}{360}.$$

S pomoću ove jednakosti, iz kuta mjerenog u radijanima (tj. iz φ_r radijana) dobivamo isti taj kut mjeren u stupnjevima (tj. φ_s stupnjeva), i obratno.



Slika 1.15: Polarna koordinatna mreža slična je paukovoj mreži. Položaj točke u ravnini određen je *polarnim koordinatama* (r,φ), pa govorimo o *polarnom koordinatnom sustavu*. Jednadžbom $r = c_1$ opisana je kružnica polumjera $c_1 > 0$, a jednadžbom $\varphi = c_2$ (u radijanima) opisana je zraka koja s pozitivnim smjerom x-osi zatvara kut c_2.

Jednadžbom $r = const. > 0$ u polarnom sustavu je zadana *kružnica* oko ishodišta, polumjera $const.$, dok je sa $\varphi = const.$ zadana *zraka* povučena iz ishodišta Gaussove ravnine, koja s pozitivnim smjerom x-osi zatvara kut $const.$ (mjeren u radijanima). Jednadžbom $r = 0$ opisan je kompleksni broj $z = 0$ (tj. ishodište koordinatnog sustava). Prema tome, *polarna koordinatna mreža* nalikuje na paukovu mrežu; vidi Sliku 1.15. Svaki kompleksni broj z u Gaussovoj ravnini nalazi se u presjeku kružnice polumjera r i zrake kroz ishodište određene kutom od φ radijana. Kažemo da kompleksni broj z (tj. odgovarajuća točka u Gaussovoj ravnini) ima *polarne koordiante* (r,φ).



Slika 1.16: Prikaz kompleksnog broja $z = x + yi$ u Gaussovoj ravnini u trigonometrijskom obliku, tj. u polarnim koordinatama r i φ, glasi $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.

Ako je zadan kompleksan broj $z = x + yi$, čija odgovarajuća točka u Gaussovoj ravnini ima polarne koordinate (r,φ), onda iz pravokutnog trokuta s vrhovima u 0, z i x na Slici 1.16 vidimo da je

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

pa je $z = r\cos\varphi + r\sin\varphi\,\mathrm{i}$. Drugim riječima, svaki kompleksan broj z možemo prikazati u obliku

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.10}$$

koji zovemo **trigonometrijskim oblikom kompleksnog broja**. Pritom za kompleksni broj $z = x + y\mathrm{i}$ imamo $r = \sqrt{x^2+y^2}$, a kut φ određujemo iz jednadžbe $\operatorname{tg}\varphi = y/x$ (funkcija tangens ima period π), znajući kvadrant u kojem se z nalazi. Taj kvadrant određujemo na temelju predznaka realnih brojeva x i y.

■ **Primjer 1.14** Prikažite sljedeće kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku: (a) $z = 4$, (b) $z = -5$, (c) $z = -2\mathrm{i}$, (d) $z = 1 + \mathrm{i}$, (e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

(a) Za $z = 4$ su polarne koordinate očevidno $r = 4$ i $\varphi = 0$, pa je $4 = 4(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$.

(b) Za $z = -5$ su polarne koordinate očevidno $r = 5$ i $\varphi = \pi$, pa je $-5 = 5(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$.

(c) Za $z = -2\mathrm{i}$ su polarne koordinate očevidno $r = 2$ i $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, pa je $-2\mathrm{i} = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2})$.

(d) Za $z = 1 + \mathrm{i}$ je $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, a iz jednadžbe $\operatorname{tg}\varphi = y/x = 1$, znajući da se radi o kompleksnom broju u prvom kvadrantu (jer je $x = 1 > 0$ i $y = 1 > 0$), dobivamo $\varphi = \pi/4$. Prema tome je $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$.

(e) Za $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ je $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, te $\operatorname{tg}\varphi = y/x = \sqrt{3}$. Znajući da se radi o kompleksnom broju u trećem kvadrantu (jer su x i y negativni), dobivamo da je $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$. Dakle, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = 1 \cdot (\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3})$. ■

Ako su zadana dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$, oni su *jednaki* onda i samo onda ako imaju iste apsolutne vrijednosti, a argumenti su jednaki do na cjelobrojni višekratnik od 2π:

$$z_1 = z_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r_1 = r_2, \quad \varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\pi}.$$

Umnožak dva kompleksna broja z_1 i z_2 u trigonometrijskom obliku izgleda ovako:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{1.11}$$

Drugim riječima, vrijedi

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Dokaz provodimo izravnim računom, rabeći $\mathrm{i}^2 = -1$ i poznate adicione teoreme za funkcije sinus i kosinus:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Za kvocijent kompleksnih brojeva vrijedi slična formula kao i za množenje:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{1.12}$$

uz pretpostavku da je $z_2 \neq 0$. Drugim riječima, vrijedi

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi}. \tag{1.13}$$

Doista, zbog $\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$ je $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| = |z_1|$ i $\arg(z_1/z_2) + \arg(z_2) = \arg(z_1)$, odakle jednakosti u (1.13) odmah slijede, a time i jednakost (1.12).

Za bilo koji prirodan broj n je n-ta potencija kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ jednaka

$$z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\big). \tag{1.14}$$

Gornja formula se zove *Moivreova formula*, po francuskom matematičaru A. de Moivreu, koju je izveo još godine 1707. (dokaz indukcijom pogledajte u Primjeru 1.15 niže.) Posebno, za $r = 1$ dobivamo zanimljiv identitet (koji se također zove Moivreova formula):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi). \tag{1.15}$$

Drugim riječima, n-ta potencija kompleksnog broja z na jediničnoj kružnici ostaje na istoj kružnici, s argumentom pomnoženim s n.

■ **Primjer 1.15** Jednakost (1.14) slijedi vrlo lako iz pravila množenja kompleksnih brojeva (vidi (1.11)), primjenom matematičke indukcije.

(B) za $n = 1$ tvrdnja (1.14) je očevidna.

(P) Pretpostavimo da tvrdnja $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$ vrijedi za neki učvršćeni n.
(K) Onda je $z^{n+1} = z^n z = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)) \cdot r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \overset{\text{vidi (1.11)}}{=} r^{n+1}(\cos(n\varphi + \varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi + \varphi)) = r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + \mathrm{i}\sin(n+1)\varphi)$, čime je induktivni korak završen.

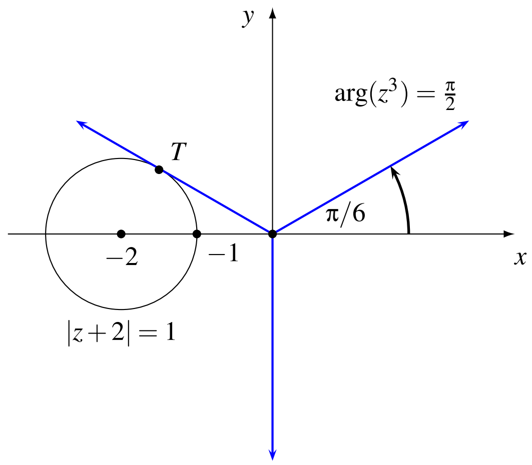
Tvrdnja (1.14) slijedi iz načela matematičke indukcije. ■

■ **Primjer 1.16** Moivreova formula (1.15) za $n = 2$ daje $\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2 = (\cos^2\varphi - \sin\varphi^2) + \mathrm{i} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi$, odakle izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobivamo poznate relacije $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin\varphi^2$ i $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$. Za $n = 3$ na sličan način dobivamo $\cos 3\varphi$ i $\sin 3\varphi$ izražene samo u ovisnosti od $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$. Pokušajte to napraviti. Na sličan se način može uporabom Moivreove formule (1.15) i binomnog teorema (**??**) na str. **??** (za $x := \cos\varphi$ i $y := \mathrm{i}\sin\varphi$) dobiti $\cos n\varphi$ i $\sin n\varphi$ za bilo koji prirodan broj n. ■

■ **Primjer 1.17** Skicirajte skup
(a) opisan jednadžbom $\arg(z^3) = \pi/2$;
(b) opisan jednadžbom $|z + 2| = 1$;
(c) opisan uvjetima $\arg(z^3) = \pi/2$ i $|z + 2| = 1$.

Rješenje. Vidi Sliku 1.17.
(a) Označimo $\varphi := \arg z$, jednadžba $\arg(z^3) = \pi/2$ prelazi u $3\varphi \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$, tj. u $3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, gdje je k cijeli broj. Prema tome je

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},$$



Slika 1.17: Jednadžbom $\arg(z^3) = \pi/2$ opisane su tri zrake iz ishodišta označene plavom bojom; vidi Primjer 1.17. Kružnica $|z+2| = 1$ siječe spomenuti skup u točki $T(-3/2, \sqrt{3}/2)$, tj. u $z = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

odakle je jasno da je dovoljno gledati samo vrijednosti $k = 0, 1, 2$, jer na primjer, za vrijednost $k = 3$ dobivamo kut $\frac{\pi}{6} + 2\pi \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$, tj. isti kut kao i za $k = 0$, do na 2π. Kao što vidimo, za $k = 0, 1, 2$ dobivamo tri zrake kroz ishodište Gaussove ravnine, određene jednadžbama $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$ i $\varphi = 3\pi/2$; vidi Sliku 1.17.

(b) Ovu jednadžbu možemo pisati u obliku $|z - (-2)| = 1$, pa vidimo da se radi o jednadžbi kružnice polumjera 1 sa središtem u -2; vidi Sliku (1.17).

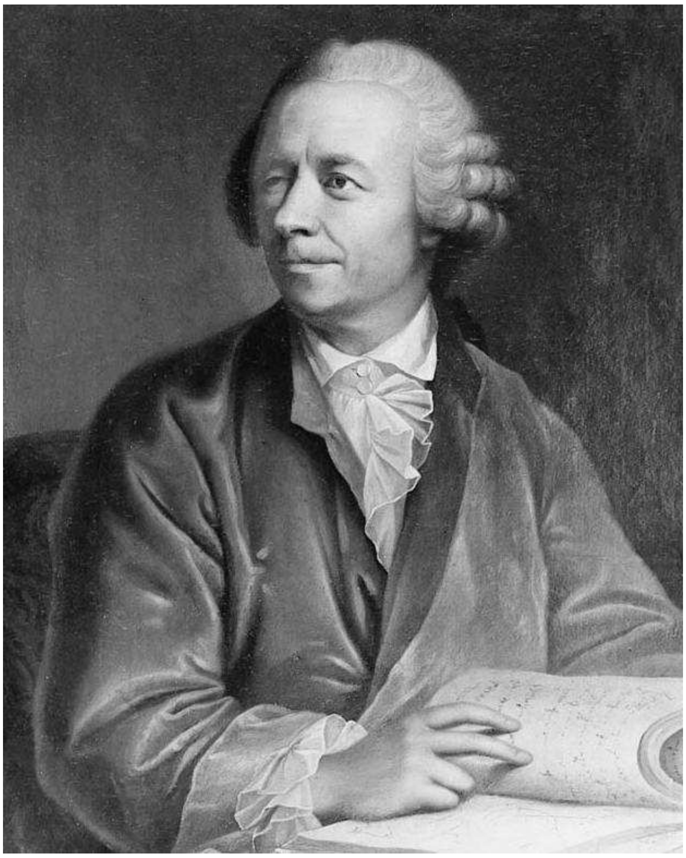
(c) Skup svih rješenja je presjek skupova dobivenih u (a) i (b). Budući da se kružnica u (b) nalazi lijevo od imaginarne osi (tj. lijevo od y-osi u Gaussovoj ravnini), onda ta kružnica ima presjek samo sa zrakom u (a) koja odgovara slučaju $k = 1$ iz (a). Jednadžba te zrake je $y = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} x$, tj. $y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x$, uz $x < 0$. Jednadžba kružnice $|z+2| = 1$ glasi $(x+2)^2 + y^2 = 1$. Rješavajući taj sustav, uz navedeni uvjet $x < 0$, dobivamo samo jedno rješenje $x = -3/2$ i $y = \sqrt{3}/2$, tj. $z = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, koje odgovara diralištu zrake i kružnice (tj. zraka je tangencijalna na kružnicu); vidi Sliku (1.17). Primjer (c) je moguće dobiti i s pomoću polarnog prikaza kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$; dobiva se $\varphi = 5\pi/3$ i $r = \sqrt{3}$. ■

1.3 Eksponencijalni ili Eulerov zapis kompleksnog broja

Korisno je i opravdano kompleksni broj $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, koji leži na jediničnoj kružnici (sa središtemu u ishodištu Gaussove ravnine), označiti s $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (ili s $\exp(\mathrm{i}\varphi)$):

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{1.16}$$

Vidi Sliku 1.19. Oznaka (s obrazloženjem) potječe od znamenitog švicarskog matematičara Leonharda Eulera iz 18. st., i zove se *Eulerova formula.* U toj oznaci, svojstvo množenja kompleksnih



Slika 1.18: Leonhard Euler (1707.-1783.) je uveo i opravdao eksponencijalnu oznaku $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$. Vidi (1.16). Zadnjih sedamnaest godina svojeg života bio je slijep. Imao je trinaestero djece. (Fotografija je s naznačene mrežne stranice, izvorno iz knjige Emila A. Fellmanna: *Leonhard Euler* (Birkhäuser, 2007), 185 str., kao što je tamo navedeno.)

brojeva $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ u jednakosti (1.11) na str. 18 izgleda iznenađujuće jednostavno:[4]

$$(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.17}$$

dok se Moivreova formula (1.15) za potenciranje kompleksnog broja $z = re^{i\varphi}$ prirodnim brojem n može zapisati ovako:

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{1.18}$$

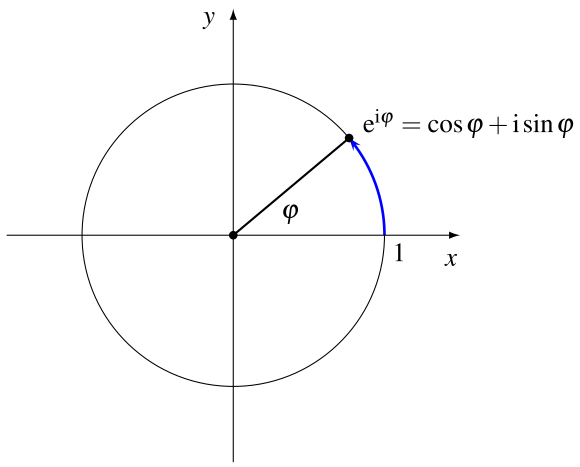
Za dijeljenje kompleksnih brojeva z_1 i z_2, gdje je $z_2 \neq 0$ (tj. $r_2 \neq 0$), vrijedi:

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{1.19}$$

Konjugiranje bilo kojeg kompleksnog broja $z = re^{i\varphi}$ obavljamo ovako: $\overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$.

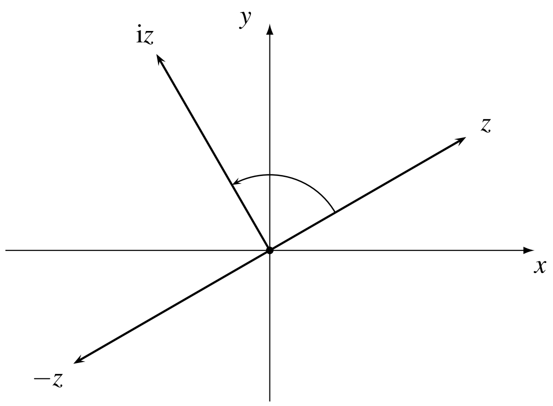
Eulerova formula (1.16), tj. Eulerov zapis kompleksnog broja, za vrijednost $\varphi = \pi$ nam daje sljedeću vrlo znamenitu vezu između brojeva 'e', 'i', 'π' i '−1', koju je otkrio Euler:

[4]Istaknimo da jednakost (1.17) ne predstavlja dokaz formule (1.11) na str. 18, nego samo njen kraći *zapis*. (Doista, kako bi to mogao biti dokaz, a da nigdje ne koristi ključno svojstvo $i^2 = -1$?) Dokaz je naveden nakon formule (1.11) na str. 18. Sličan komentar vrijedi za zapis potenciranja (vidi (1.18)) i dijeljenja kompleksnih brojeva u (vidi (1.19)).



Slika 1.19: Svaki kompleksan broj na jediničnoj kružnici Gaussove ravnine sa središem u ishodištu, može se prikazati kao $e^{i\varphi}$.

$$e^{i\pi} = -1.$$



Slika 1.20: Kompleksni broj $-z$ nastaje iz z centralnom simetrijom s obzirom na ishodište (ili što je isto, rotacijom za kut od π radijana). Kompleksni broj iz nastaje iz z rotacijom za kut $\pi/2$. Pogledajte Primjer 1.18(b) i (c). Primijetite da je $-z = i(iz)$ (jer je $i^2 = -1$), pa $-z$ nastaje rotacijom kompleksnog broja iz za kut $\pi/2$. Ako kompleksni broj z želimo zarotirati oko ishodišta za pravi kut (tj. za 90°), samo ga pomnožimo s i.

■ **Primjer 1.18** Za kompleksne brojeve možemo navesti neka jednostavna svojstva:

(a) $\arg\bar{z} \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$; štoviše, kompleksni broj $\bar{z}$ nastaje iz z zrcaljenjem s obzirom na x-os (vidi Sliku 1.3 na str. 7);

(b) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \pmod{2\pi}$; štoviše, kompleksni broj $-z$ nastaje iz z rotacijom za kut π, tj. centralnom simetrijom s obzirom na ishodište (vidi Sliku 1.20);

(c) $\arg iz \equiv \frac{\pi}{2} + \arg z \pmod{2\pi}$; štoviše, kompleksni broj iz nastaje iz z rotacijom za kut $\pi/2$ (vidi Sliku 1.20).

Rješenje. Tvrdnja (a) je jasna; pogledajte Sliku 1.3 na str. 7. Tvrdnja (b) slijedi iz $\arg(-z) =$

$\arg((-1)\cdot z) = \arg(-1) + \arg z \equiv \pi + \arg z \pmod{2\pi}$. Tvrdnja (c) slijedi iz $\arg iz \equiv \arg \mathrm{i} + \arg z \equiv \frac{\pi}{2} + \arg z \pmod{2\pi}$. ■

■ **Primjer 1.19** Izračunajte

(a) $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})^{10}$;

(b) $\arg \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$;

(c) $\arg z$, ako je $z = -\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}$.

(d) $\arg z$, ako je $z = -\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, gdje je φ zadani kut u radijanima.

Rješenje. (a) Zbog $\arg(1+\mathrm{i}) = \pi/4$ je $\arg(1+\mathrm{i})^{10} = 10\pi/4 = 5\pi/2 = 2\pi + \pi/2 \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$. Budući da se $(1+\mathrm{i})^{10}$ nalazi na imaginarnoj osi, onda je $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})^{10} = 0$. Rezultat je moguće dobiti i izravnim računom, jer iz $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}(\pi/4))$ slijedi $(1+\mathrm{i})^{10} = \sqrt{2}^{10}\exp(\mathrm{i}(10\pi/4)) = 32\exp(\mathrm{i}(\pi/2))$, pa je $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})^{10} = 0$.

(b) Iz $\arg(1+\mathrm{i}) = \pi/4$ i $\arg(\sqrt{3}-\mathrm{i}) = -\pi/6$ slijedi da je $\arg\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \arg(1+\mathrm{i}) - \arg(\sqrt{3}-\mathrm{i}) \equiv 5\pi/12 \pmod{2\pi}$.

(c) Zbog $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ je $\mathrm{tg}\,\varphi = -1/\sqrt{3}$, a budući da se z nalazi u četvrtom kvadrantu, zaključujemo da je $\varphi = 11\pi/6$, ili što je isto (do na cjelobrojni višekratnik od 2π), $\varphi = -\pi/6$.

(d) $\varphi = \pi - \varphi$. ■

■ **Primjer 1.20** Riješite jednadžbu $z^6 = \bar{z}(1-\mathrm{i})$.

Rješenje. Ova je jednadžba ekvivalentna sa sljedeće dvije:

$$|z^6| = |\bar{z}(1-i)| = |\bar{z}|\,|1-\mathrm{i}| = |z|\sqrt{2},$$
$$\arg(z^6) \equiv \arg(\bar{z}(1-i)) \equiv \arg\bar{z} + \arg(1-\mathrm{i}) \pmod{2\pi}.$$

Prijelazom na polarni sustav imamo $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, pa vidimo da je

$$r^6 = r\cdot\sqrt{2}, \quad 6\varphi = -\varphi + \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{1.20}$$

Jednadžba $r^6 = r\sqrt{2}$ zbog uvjeta $r \geq 0$ ima samo dva rješenja: $r = 0$ (dakle $z = 0$) i $r = 2^{1/10}$. Iz druge jednakosti u (1.20) dobivamo $7\varphi = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{7}$ za $k = 0,1,2,3,4,5,6$. Na taj način osim rješnja $z_0 = 0$ dobivamo još sedam rješenja: $z_{1,2,3,4,5,6,7} = 2^{1/10}\exp(\mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{7}))$, za $k = 0,1,2,3,4,5,6$. Imamo dakle ukupno osam rješenja. Moglo bi se pomisliti da je to u kontradikciji s Gaussovim Teoremom 1.1.1, međutim primijetite da zbog nazočnosti člana $\bar{z}$, jednadžba $z^6 = \bar{z}(1-\mathrm{i})$ uopće nije polinomijalnog tipa. ■

■ **Primjer 1.21** Zadani su međusobno različiti kompleksni brojevi z_0 i z_1. Odredite kompleksan broj w koji nastaje iz z_1 rotacijom oko z_0 za kut od $\pi/2$. (Nacrtajte sliku.)

Rješenje. Broj $w - z_0$ nastaje iz $z_1 - z_0$ rotacijom za kut $\pi/2$. Budući da rotaciji za taj kut odgovara množenje s imaginarnom jedinicom (vidi Sliku 1.20), mora vrijediti $w - z_0 = \mathrm{i}(z_1 - z_0)$. Dakle, $w = z_0 + \mathrm{i}(z_1 - z_0)$. (Da je umjesto za kut $\pi/2$ trebalo rotirati za bilo koji zadani kut φ, onda bi moralo vrijediti $w - z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(z_1 - z_0)$, tj. $w = z_0 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(z_1 - z_0)$.) ■

1.4 Korjenovanje kompleksnih brojeva

Pretpostavimo da nam je zadan neki kompleksni broj z. Za zadani prirodan broj n htjeli bismo pronaći sve n-te korijene iz z, tj. sve kompleksne brojeve w takve da je $w^n = z$. Za $z = 0$ je jedino rješenje $w = 0$. Zato pretpostavimo u daljnjem da je $z \neq 0$, tj. $z = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$, gdje je $r > 0$.

Po Gaussovu Toeremu 1.1.1 znamo da polinom $P(w) = w^n - z$ ima točno n korijena (nultočaka). U slučaju ovog jednostavnog polinoma, mi ćemo sve te korijene moći izračunati na sljedeći način.

Neka je $w = \rho\exp(\mathrm{i}\psi)$ trigonometrijski oblik nekog od n-tih korijena zadanog kompleksnog broja z, tj. $w^n = z$, tj.

$$\rho^n = r, \quad n\psi \equiv \varphi \pmod{2\pi}.$$

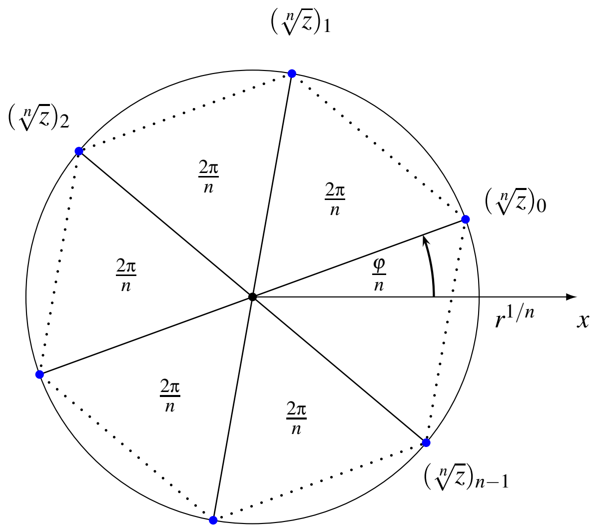
Prema tome, budući da je $n\psi = \varphi + 2\pi k$ za neki cijeli broj k, onda dobivamo

$$\rho = r^{1/n} > 0, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odatle slijedi da je

$$w = r^{1/n}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

jer na primjer za $k = n$ imamo $\frac{\varphi+2\pi n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \equiv \frac{\varphi}{n} \pmod{2\pi}$, pa za $k = n$ dobivamo isti kut kao i za $k = 0$. Na taj način vidimo da je dovoljno gledati samo ukupno n vrijednosti kutova (argumenata) $\frac{\varphi+2\pi k}{n}$ za $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, umjesto za sve cijele brojeve k.



Slika 1.21: Svi n-ti korijeni iz kompleksnog broja $z = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$ su oblika $(\sqrt[n]{z})_k := r^{1/n}\exp\left(\mathrm{i}(\frac{\varphi+2\pi k}{n})\right)$, gdje je $k = 0, 1, \dots, n-1$; pogledajte (1.22). (Primijetite da je $\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$.) Oni leže u vrhovima pravilnog n-terokuta polumjera $r^{1/n}$. Ova slika odgovara slučaju kada je $n = 6$.

Kao što vidimo, *svi n-ti korijeni kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, gdje je $r > 0$, leže na kružnici polumjera $r^{1/n} > 0$, u vrhovima pravilnog n-terokuta*, počevši s kutom φ/n:

$$(\sqrt[n]{z})_k := r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \tag{1.21}$$

ili u Eulerovoj oznaci, za $z = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$ je

$$(\sqrt[n]{z})_k := r^{1/n}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \tag{1.22}$$

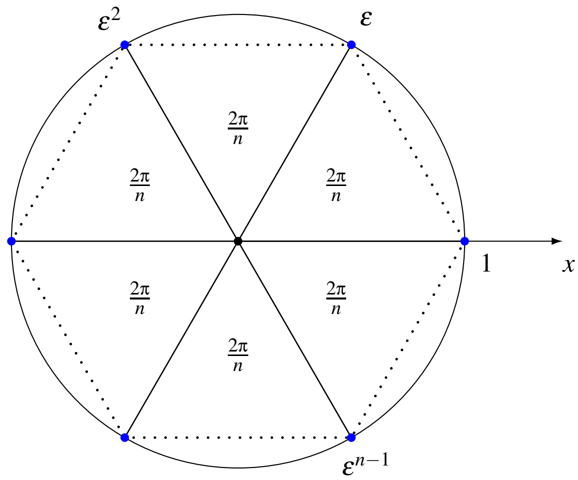
Pogledajte Sliku 1.21.

Naravno, pravilni n-terokut dobivamo za $n \geq 3$, dok za $n = 1$ imamo $z^{1/1} = z$, a za $n = 2$ dobivamo dva druga korijena, koji su simetrični s obzirom na ishodište kompleksne ravnine: $z_0^{1/2} = r^{1/2}\exp(\mathrm{i}\varphi/2)$ i $z_1^{1/2} = r^{1/2}\exp(\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi}{2}) = r^{1/2}\exp(\mathrm{i}(\frac{\varphi}{2} + \pi)) = -r^{1/2}\exp\mathrm{i}(\varphi/2) = -z_0^{1/2}$.

Vježba 1.2 Kako bi izgledala Slika 1.21 za slučaj $n = 2$? A za $n = 1$?

■ **Primjer 1.22** Nađite sve četvrte korijene iz 1.

Rješenje. Budući da je $1 = 1\exp(\mathrm{i}0)$, imamo $w_k = 1\exp(\mathrm{i}\frac{0+2\pi k}{4}) = \exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}k)$, gdje su $k = 0,1,2,3$. Dakle $w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = -1$, $w_3 = -i$. Ovi kompleksni brojevi leže na jediničnoj kružnici u vrhovima pravilnog četverokuta, tj. kvadrata. ■



Slika 1.22: Svi n-ti korijeni iz jedinice leže na jediničnoj kružnici u Gaussovoj ravnini, u vrhovima pravilnog n-terokuta, počevši od 1. To su kompleksni brojevi 1, ε, ε^2,..., ε^{n-1}, koji se dobivaju potenciranjem broja $\varepsilon := \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\right)$. Primijetite da je $\varepsilon^n = 1$. Kut između svake dvije susjedne radijalne linije iznosi $2\pi/n$. Ova slika odgovara slučaju kad je $n = 6$. Vidi primjer (1.23).

Ovaj primjer se može znatno generalizirati.

■ **Primjer 1.23** Nađite sve *n-te korijene iz jedinice*, za bilo koji prirodan broj n.

Rješenje. Kao u gornjem primjeru, dobivamo da su svi n-ti korijeni iz 1 jednaki

$$w_k = 1\exp\left(\mathrm{i}\frac{0+2\pi k}{n}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}k\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{1.23}$$

Ovi kompleksni brojevi leže na jediničnoj kružnici u vrhovima pravilnog n-terokuta. Zanimljivo je da je umnožak $w_k w_l$ opet jedan od korijena, i to w_{k+l}. Ovdje umjesto indeksa $k+l$ možemo staviti i ostatak pri dijeljenju broja $k+l$ s n, koji će biti jedan od brojeva $0,1,\ldots,n-1$. Ako definiramo $\varepsilon := \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\right)$, onda je skup svih n-tih korijena jednak $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^{n-1}$. Vidi Sliku 1.22. ■

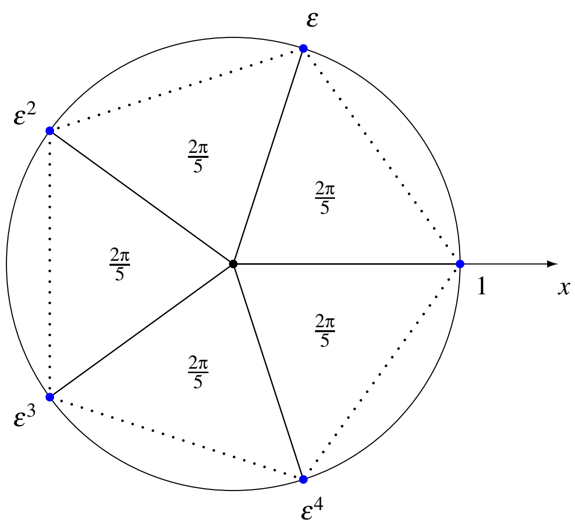
■ **Primjer 1.24** U Gaussovoj ravnini nacrtajte sve pete korijene iz jedinice. Vidi Sliku 1.23.

■

Dodatak

Biste li znali konstruirati pravilni peterokut na Slici 1.23 samo s pomoću ravnala i šestara? Ekvivalentno tome, dovoljno je znati konstruirati petinu punog kuta, tj. kut $\frac{2\pi}{5} = 72°$.

Vježba 1.3 Pretpostavimo da je r zadani pozitivan realan broj, a n neka je prirodan broj koji je



Slika 1.23: Svi peti korijeni iz jedinice leže na jediničnoj kružnici u Gaussovoj ravnini, u vrhovima pravilnog peterokuta, počevši od 1. To su kompleksni brojevi 1, ε, ε^2, ε^3 i ε^4, koji se dobivaju potenciranjem broja $\varepsilon := \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}\right)$. Primijetite da je $\varepsilon^5 = 1$. Kut između svake dvije susjedne radijalne linije iznosi $2\pi/5 = 72°$. Vidi primjer 1.24.

≥ 2. Je li n-ti korijen iz r u skupu realnih brojeva isto što i n-ti korijen iz r u skupu kompleksnih brojeva? Pogledajte za ilustraciju slučaj $r = 1$ i $n = 2$.

■ **Primjer 1.25** Riješite jednadžbe:

(a) $z^4 + a^8 = 0$, gdje je $|a| = \sqrt{2}$ i $\arg a = \pi/10$;
(b) $z^7 - z^5 + z^2 - 1 = 0$;
(c) $(z - \mathrm{i})^6 + 64 = 0$;
(d) $z^{10} + 3z^5 - 4 = 0$.

Rješenje.

(a) Imamo $z^4 = -[\sqrt{2}\exp(\mathrm{i}(\pi/10))]^8 = -16\exp(\mathrm{i}(4\pi/5)) = 16(-\exp(\mathrm{i}(4\pi/5))) = 16\exp(\mathrm{i}(9\pi/5))$, jer je $-1 = \exp(\mathrm{i}\pi)$. Dakle $z_k = 16^{1/4}\exp(\mathrm{i}\frac{\frac{9\pi}{5}+2\pi k}{4})$ za $k = 0,1,2,3$, tj. $z_0 = 2\exp(\mathrm{i}(9\pi/20))$, $z_1 = 2\exp(\mathrm{i}(19\pi/20))$, $z_2 = 2\exp(\mathrm{i}(29\pi/20))$, $z_3 = 2\exp(\mathrm{i}(39\pi/20))$.

(b) Zbog $z^7 - z^5 + z^2 - 1 = z^5(z^2-1) + (z^2-1) = (z^2-1)(z^5+1) = (z-1)(z+1)(z^5+1)$ je $z_{1,2} = \pm 1$, te još rješenja jednadžbe $z^5 = -1$, tj. pet korijena iz $-1 = 1\exp(\mathrm{i}\pi)$: $z_{3,4,5,6,7} = \exp(\mathrm{i}\frac{\pi+2\pi k}{5})$, $k = 0,1,2,3,4$. Prema tome dobivao ukupno sedam rješenja, u skladu s Gaussovim Teoremom 1.1.1 na str. 13.

(c) Uz oznaku $w := z - \mathrm{i}$ treba riješiti najprije jednadžbu $w^6 = -64 = 64\exp(\mathrm{i}\pi)$. Imamo $w_k = 2\exp(\mathrm{i}\frac{\pi+2\pi k}{6})$, gdje je $k = 0,1,2,3,4,5$. Zbog $z_k = w_k + \mathrm{i} = \mathrm{i} + 2\exp(\mathrm{i}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}))$, dobivao da je $z_0 = \sqrt{3} + 2\mathrm{i}$, $z_1 = 3\mathrm{i}$, $z_2 = -\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$, $z_3 = -\sqrt{3}$, $z_4 = -\mathrm{i}$, $z_5 = \sqrt{3}$.

(d) Supstitucijom $w = z^5$ dobivamo kvadratnu jednadžbu u varijabli w. Njeni korijeni $w_{1,2}$ nam daju jednadžbe $z^5 = w_1$ i $z^5 = w_2$, čime dobivamo ukupno 10 rješenja. ■

■ **Primjer 1.26** Odredite sve kompleksne brojeve z za koje je $z^2 + \frac{1}{z^2} = -1$ i $\mathrm{Re}\, z \geq 0$.

Rješenje. Množenjem jednadžbe sa z^2 dobivamo bikvadratnu jednadžbu $z^4 + z^2 + 1 = 0$. Uvođenjem nove varijable $w := z^2$, iz nje dobivamo kvadratnu jednadžbu $w^2 + w + 1 = 0$, čija rješenja su $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \exp(\mathrm{i}\frac{2\pi}{3})$ i $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \exp(\mathrm{i}\frac{4\pi}{3})$. Iz jednadžbe $z^2 = w_1$ dobivamo $z_{1,2} = \exp(\mathrm{i}(\frac{\pi}{3} + k\pi))$ za $k = 0,1$, a iz $z^2 = w_2$ još dva korijena $z_{3,4} = \exp \mathrm{i}((\frac{2\pi}{3} + k\pi))$, također za $k = 0,1$. Dodatni uvjet $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ ispunjavaju $z_1 = \exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{3})$ i $z_4 = \exp(\mathrm{i}\frac{5\pi}{3})$. ■

1.5 Zadatci za vježbu

1.5.1 Pitanja za ponavljanje i produbljivanje gradiva

Zadatak 1.1 Neka je n zadani prirodan broj. Koja je razlika između n-tog korijena iz pozitivnog realnog broja x i n-tog korijena kompleksnog broja z. Ako je broj n neparan, može li se računati n-ti korijen i iz negativnih realnih brojeva x?

Zadatak 1.2 Neka su z_1 i z_2 dva kompleksna broja, koji su n-ti korijeni iz jedinice. Je li njihov umnožak $z_1 z_2$ također n-ti korijen iz jedinice? A kvocijent z_1/z_2?

Zadatak 1.3 Kompleksni broj $z \neq 0$ želimo zarotirati oko ishodišta za kut od φ radijana. Uvjerite se da je dobiveni kompleksni broj $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot z$. Na primjer, koji se kompleksni broj w dobiva rotacijom kompleksnog broja $z = 1 + \mathrm{i}$ za kut od $30°$ oko ishodišta.

Rješenje. Vrijedi $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot z| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| \cdot |z| = |z|$ i $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot z) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) + \arg(z) = \varphi + \arg(z)$. Za konkretan primjer je $\varphi = \pi/6$, pa je $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} \cdot (1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\big(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})\big) = \sqrt{2}\big(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\big)$.

Zadatak 1.4 Zadana su četiri kompleksna broja z_1, z_2, z_3 i z_4. Kako biste napisali uvjet da se kompleksni broj z nalazi na presjecištu pravca p koji spaja z_1 i z_2 s pravcem q koji spaja točke z_2 i z_3? (Riješite taj zadatak za $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3$, $z_3 = \mathrm{i}$ i $z_4 = 1 + 4\mathrm{i}$)

Rješenje. To da se z nalazi na spojnici točaka z_1 i z_2 možemo zapisati kao da su $z - z_1$ i $z_2 - z_1$ paralelni, tj. postoji realan broj t takav da je $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$). Na sličan način, mora biti $z - z_4 = s(z_3 - z_4)$ za neki drugi realan broj s. Te dvije jednadžbe nam odvajanjem realnih i imaginarnih dijelova daju sustav četiri jednadžbe s četiri nepoznanice: t, s i dvije nepoznanice za z (tj. njen realni i imaginarni dio).

Zadatak 1.5 Rješenja jednadžbe $z^2 + z + 1 = 0$ dolaze kao konjugirano kompleksni par. S druge strane, rješenja jednadžbe $z^2 + \mathrm{i}z + 1 = 0$ ne dolaze kao konjugirano kompleksni par. (Provjerite.) Koji je razlog tome?

Rješenje. Vidi Propoziciju 1 na str. 14.

Zadatak 1.6 Zadana su dva kompleksna broja z_1 i z_2. Opišite njihovo zbrajanje i oduzimanje algebarski (po definiciji), a zatim geometrijski (s pomoću pravila paralelograma).

Zadatak 1.7 U Gaussovoj ravnini skicirajte skup svih rješenje nejednakosti $|z - 5| < 0.001$, gdje je z kompleksan broj.

Zadatak 1.8 Zadan je kompleksan broj $z = 0$, tj. $z = 0 + 0\mathrm{i}$. Koje su njegove polarne koordinate?

Rješenje. Za $z = 0$ je $r = 0$, a φ je bilo koji realan broj. Drugim riječima, $z = 0$ je ekvivalentno s $r = 0$.

Zadatak 1.9 Odredite skupove (a) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 1\}$; (b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,z\}$; (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Rješenje. (a) Pišući $z = x + yi$, gdje su x i y realni brojevi, dobivamo $x^2 - y^2 = 1$, pa je riječ o hiperboli. (b) Riječ je o pravcu $x = y$. (b) Riječ je skupu koncentričnih kružnica sa središtem u ishodištu, polumjera $1/k$ za bio koji prirodan broj k.

1.5.2 Ostali zadatci o kompleksnim brojevima

Zadatak 1.10 Ispitajte istinitost ovih sudova:

(a) $A \equiv (\forall z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C})(z^3 = w^3 \Rightarrow z = w)$;
(b) $B \equiv (\forall z \in \mathbb{R})(\forall w \in \mathbb{R})(z^3 = w^3 \Rightarrow z = w)$;
(c) $C \equiv (\exists z \in \mathbb{C})(z^5 + 3z^4 - 2z - 1 = 0)$.

Zadatak 1.11 Skiciraj sljedeće skupove u Gaussovoj ravnini:
(a) $|z| = 1$;
(b) $|z-1+\mathrm{i}| = 2$;
(c) $|z-1|+|z+1| = 3$; $|z-1|+|z+1| \le 3$;
(d) $\arg z = 5\pi/3$;
(e) $\arg(z-1+\mathrm{i}) = \pi/3$;
(f) $\arg(z^3) = \pi$;
(g) $z = \bar{z}$;
(h) $\mathrm{Re}\,\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = 0$;
(i) $\mathrm{Im}(1/(z-\mathrm{i})) = 1$

Zadatak 1.12 Skicirajte sljedeće skupove u ravnini:
(a) $1 < |z| \le 2$;
(b) $\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}$;
(c) $\mathrm{Im}\,z \ge 0$ i $1 < \mathrm{Re}\,z \le 2$;
(d) $1 < |z+1-\mathrm{i}| \le 2$.

Zadatak 1.13 Odredite skup kompleksnih brojeva zadanih sa:
(a) $|z-\mathrm{i}| = |z+i| = 1$;
(b) $\arg(z^3) = \pi$ i $|z| = 1$;
(c) $|z| = 1$ i $|z^3+\mathrm{i}| = 1$;
(d) $\arg\frac{z}{1+\mathrm{i}} = \frac{\pi}{12}$.

Zadatak 1.14 Kompleksne brojeve $-2\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, $1-\sqrt{2}\mathrm{i}$ prikažite u trigonometrijskom obliku.

Zadatak 1.15 Izračunajte (a) i^{157}, (b) $(1+\mathrm{i})^{859}$, (c) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6$.

Zadatak 1.16 Nađite sve kompleksne brojeve z za koje je $z^6 = (1+\mathrm{i})^2$.

Zadatak 1.17 Riješite jednadžbu u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$:
(a) $z^4+z^2+1 = 0$, (b) $z^8+3z^4+2 = 0$.

Zadatak 1.18 Nađite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $(z+\frac{3}{4}\mathrm{i})^3 = \mathrm{i}$.

Zadatak 1.19 Da li iz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1$, gdje je φ realan broj, slijedi $\varphi = 0$?

Zadatak 1.20 Neka je x racionalan broj. Uvjerite se da je skup $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi xk} : k \in \mathbb{Z}\}$ konačan.

Zadatak 1.21 Neka je x iracionalan broj. Uvjerite se da je skup $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi xk} : k \in \mathbb{Z}\}$ beskonačan.

Neke dodatne primjere o kompleksnim brojevima s uporabom računala možete vidjeti putem sljedećeg Interaktivnog uvoda u Matematičku analizu, pripremljenog u programu Jupyter.

1.5.3 Rješenja zadataka koji počinju na str. 27

1.10 (a) Sud A nije istinit, jer na primjer za $w = 1$ dobivamo jednadžbu $z^3 = 1$, koja ima tri *različita* rješenja, smještena u vrhovima jednakostraničnog trokuta s vrhovima na jediničnoj kružnici u Gaussovoj ravnini (jedan od vrhova je, naravno, $z = 1$). Dakle, iz jednakosti $z^3 = 1$ (u skupu kompleksnih brojevi) ne slijedi da je nužno $z = 1$.

(b) Sud B je istinit. Naime, u skupu realnih brojeva je vađenje trećeg korijena dobro definirana funkcija, koja je inverzna od funkcije kubiranja.

(c) Sud C je istinit, primjenom Osnovog teorema algebre (ili Gaussova teorema; vidi Teorem 1.1.1). Štoviše, znamo da jednadžba ima točno pet kompleksnih rješenja (računajući i njihovu eventualnu kratnost).

1.11 (a) Jedinična kružnica sa središtem u ishodištu;

(b) kružnica polumjera 2 sa središtem u $1-\mathrm{i}$;

(c) jednadžbom $|z-1|+|z+1|=3$ je određena elipsa s fokusima u točkama 1 i -1 u Gaussovoj ravnini; nejednakošću $|z-1|+|z+1|\leq 3$ je određen zatvoren skup omeđen elipsom s fokusima u točkama 1 i -1 u Gaussovoj ravnini;

(d) zraka s početkom u ishodištu koja s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut $5\pi/3 \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi}$;

(e) zraka s početkom u točki $1-\mathrm{i}$, koja s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut $\pi/3$;

(f) tri zrake s početkom u ishodištu: prva s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut $\pi/3$, druga π, a treća $5\pi/3 \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi}$;

(g) stavljajući $z=x+\mathrm{i}y$, jednadžba $z=\bar{z}$ prelazi u $x+\mathrm{i}y=x-\mathrm{i}y$, tj. $y=-y$, ili $y=0$, što nam daje realnu os Gaussove ravnine;

(h) za $z=x+y\mathrm{i}$ je $\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+(y-1)\mathrm{i}}{x+(y+1)\mathrm{i}}=\frac{x^2+y^2-1-2x\mathrm{i}}{x^2+(y+1)^2}$, odakle slijedi da je realni dio jednak nula ako je $x^2+y^2=1$, uz dodatni uvjet da je $x^2+(y+1)^2\neq 0$; radi se o kružnici polumjera jedan sa središtem u ishodištu, bez točke $(x,y)=(0,-1)$;

(h) kružnica $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, bez točke $(x,y)=(0,1)$.

1.12 (a) Odgovarajući skup je kružni vijenac sa središtem u ishodištu, unutarnjeg polumjera 1, a vanjskog 2. Unutarnja rubna kružnica polumjera 1 nije uključena u skup, a vanjska polumjera 2 jest.

(b) Traženi skup je područje između dviju odgovarajućih zraka u Gaussovoj ravnini.

(c) Budući da za $z=x+y\mathrm{i}$ vrijedi $\mathrm{Re}\,z=x$ i $\mathrm{Im}\,z=y$, radi se o skupu u Gaussovoj ravnini određenom nejednakostima $y\geq 0$ i $1<x\leq 2$, tj. o presjeku gornje poluravnine i trake $x\in\langle 1,2]$, čiji lijevi rub nije uključen.

(d) Budući da je $|z+1-\mathrm{i}|=|z-(-1+\mathrm{i})|$ udaljenost od z do $-1+\mathrm{i}$, radi se o prstenastom skupu sa središtem u $-1+\mathrm{i}$, unutarnjeg polumjera 1, a vanjskog 2, takvom da unutarnja rubna kružnica nije uključena u skup, a vanjska jest.

1.13 (a) Jednakošću $|z-\mathrm{i}|=|z+i|$ je očevidno određena simetrala dužine koja spaja brojeve i i $-\mathrm{i}$, a to je x-os. Od imaginarne jedinice i je na x-osi jedino $x=0$ udaljen za 1. (Nacrtajte sliku.) Rješenje je $z=0$.

(b) Prvi uvjet definira tri zrake kroz ishodište, a drugi kružnicu polumjera 1 oko ishodišta. Presijek definira tri točke na kružnici. Nacrtajte sliku.

(c) Uz oznaku $\varphi:=\arg z$, iz uvjeta u zadatku slijedi da je $\varphi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$, tj. $\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$, čime je određena odgovarajuća zraka u provom kvadrantu s početkom u ishodištu. Nacrtajte sliku.

1.14 Broj $-2\mathrm{i}$ ima argument $\varphi=-\pi/2$ (ili $3\pi/2$) i $r=2$, pa je $-2\mathrm{i}=2(\cos(-\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{2})$, ili u Eulerovu zapisu, $-2\mathrm{i}=2\exp(\frac{\pi}{2}\mathrm{i})$.

1.15 (a) Znamo da je $\mathrm{i}^4=1$ (jer je $\mathrm{i}^2=-1$). Podijelimo li 157 sa 4, dobijemo djelomični kvocijent 39 i ostatak 1, tj. $157=4\cdot 39+1$. Prema tome je $\mathrm{i}^{157}=\mathrm{i}^{4\cdot 39+1}=\mathrm{i}^{4\cdot 39}\mathrm{i}^1=(\mathrm{i}^4)^{39}\mathrm{i}=\mathrm{i}$. Do istog rezultata može se doći uporabom Moivreove formule.

U slučajevima (b) i (c) prikažite odgovarajuće baze u trigonometrijskom obliku, pa zatim upotrijebite Moivreovu formulu.

1.16 Oprez! Ova jednadžba ima po Gaussovu teoremu (vidi Teorem 1.1.1) ukupno šest rješenja, i ona leže u vrhovima pravilnog šesterokuta; vidi (1.22). Ona dakle nije ekvivalentna s jednadžbom $z^3=1+\mathrm{i}$, koja ima samo tri rješenja. Ali jest ekvivalentna sa $z^3=\pm(1+\mathrm{i})$, a ove dvije jednadžbe je lako riješiti nakon što desne strane prikažemo u trigonometrijskom obliku.

1.17 (a) Uvođenjem nove varijable $w:=z^2$, dobivamo $w_{1,2}=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Rješavajući jednadžbe $z^2=w_1$ i $z^2=w_2$ dobivamo

$$z_{1,2}=\sqrt{\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}\right)},\quad z_{3,4}=\sqrt{\exp\left(\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}\right)}.$$

Odavde je

$$z_1 = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \quad z_2 = \exp\left(\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$
$$z_3 = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \quad z_4 = \exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

(b) $z_{1,2,3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $z_{5,6,7,8} = 2^{1/4}(\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})$.

1.18 Uvođenjem nove varijable $w := z + \frac{3}{4}\mathrm{i}$ najprije riješimo jednadžbu $w^3 = \mathrm{i}$ (tj. nađemo sva tri treća korijena iz i), nakon čega dobivamo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{i}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{i}$, $z_3 = -\frac{7}{4}\mathrm{i}$.
1.19 Ne. Po Eulerovoj formuli (vidi (1.16) na str. 20) dobivamo $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = 1$, tj. $\cos\varphi = 1$ i $\sin\varphi = 0$. Odatle slijedi da je $\varphi = 2\pi k$, gdje je k bilo koji cijeli broj. Prema tome, jednadžba $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1$, gdje je nepoznanica φ realan broj, ima beskonačno mnogo rješenja.

1.20 Ako je $x = m/n$, gdje je m cijeli broj i n prirodan, onda za $k = 2n$ vrijedi $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi xk} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 2m} = 1$. Prema tome, traženi skup je jednak skupu $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi xk} : k = 0, 1, \ldots, 2n-1\}$, koji je konačan.

1.21 Kad bi taj skup bio konačan, onda bi morale postojati dvije različite cjelobrojne potencije k i l takve da je $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi xk} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi xl}$, tj. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x(k-l)} = 1$, tj. postojao bi $m \in \mathbb{Z}$ tako da je $\pi x(k-l) = 2\pi m$. Odatle slijedi da je $x = 2m/(k-l)$. To je međutim racionalan broj, što je kontradikcija (protuslovlje). Prema tome, skup iz zadatka je beskonačan. (Može se pokazati da je on čak i gust na jediničnoj kružnici oko ishodišta u Gaussovoj ravnini.)

1.6 Povijesne crtice o kompleksnim brojevima

Kompleksni brojevi se prvi puta pojavljuju kod talijanskog matematičara *Gorolama Cardana* još godine 1545. Oznaku $\sqrt{-1}$ za imaginarnu jedinicu uveo je talijanski inženjer Rafael Bombelli (1526.-1572.) u svojem poznatom djelu 'Algebra' objavljenom 1572. Oznaku i za imaginarnu jedinicu uveo je *Leonhard Euler* godine 1777., a naziv 'imaginarna jedinica' za i, kao i naziv 'kompleksni broj', uveo je *K.F. Gauss*. Operacija konjugiranja kompleksnih brojeva bila je poznata već u 15. st., a pojam konjugiranja je uveo *August Cauchy* 1821. g.

Kao što je već rečeno (vidi str. 13), *Carl Friedrich Gauss* je Osnovni teorem algebre (vidi Teorem 1.1.1) dokazao 1799., u dobi od samo 20 godina.

Mnogi su matematičari i prije Gaussa, kao G.W. Leibniz, L. Euler, slutili da za *opći* polinom petog ili višeg stupnja ne postoji *algebarska formula* za nalaženje korijena (nultočaka), tj. formula izražena u ovisnosti o koeficijentima polinoma samo s pomoću operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korjenovanja. Tu je slutnju tek godine 1826. dokazao norveški matematičar *Niels Abel* (1802.-1829.), u dobi od 24 godine. Naravno, za neke specijalne polinome petog ili višeg stupnja se lako mogu pronaći sve nultočke, na primjer za $P(z) = z^n$ (sve nultočke su jednake nuli), $z^n - 1$ (nultočke su n-ti korijeni iz jedinice; vidi (1.22)), $(z-1)^n$ (sve nultočke su jednake jedan).

Vrlo mladi francuski matematičar *Évariste Galois* (1811.-1832., čitaj 'Galoá') je u razdoblju od 1830. do 1832. opisao metodu s pomoću koje se može odrediti postoji li algebarska formula za nalaženje korijena polinoma ili ne. Njegovi su rezultati doveli do razvoja nove grane algebre, koja se bavi primjenama teorije grupa na rješivost algebarskih jednačaba. U njegovu čast, ta se teorija zove *Galoisovom teorijom*. Galois je smrtno stradao u tragičnom dvoboju, dok još nije imao niti 21 godinu.

Relacija $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ potječe od Leonharda Eulera (18. st.) kao i njen iznenađujuć specijalan slučaj $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, tj. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$, koji se dobiva za $\varphi = \pi$. Mnogi tu jednakost smatraju najljepšom formulom u matematici, jer na neočekivan način povezuje naznačajnije matematičke konstante u povijesti.

Poistovjećujući bilo koji kompleksni broj $x+yi$ s odgovarajućom točkom (x,y) u dvodimenzionalnoj ravnini $\mathbb{R}^2$, možemo u ravninu $\mathbb{R}^2$ 'prenijeti' operacije zbrajanja i množenja, rabeći (1.2) i (1.3):

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)+(x_2,y_2) &:= (x_1+x_2, y_1+y_2),\\ (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) &:= (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Posebno, element $(0,1)$ odgovara imaginarnoj jedinici $\mathrm{i}=0+1\cdot\mathrm{i}$. Vrijedi

$$(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0).$$

Skup $\mathbb{R}^2$ s operacijama zbrajanja i množenja definiranim sa (1.24) se može *poistovjetiti* sa skupom kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ s obzirom na množenje i zbrajanje definirano u (1.2) i (1.3). Ovaj pristup kompleksnim brojevim uveden je 1831. g., a potječe od *Williama R. Hamiltona* (1805.-1865.), istaknutog irskog matematičara. Kao što vidimo, u tom pristupu nema ničeg 'imaginarnog', pa niti imaginarne jedinice. Poredani dvojac (x,y) zove se *Hamiltonov par*. U terminima Hamiltonovih parova, invertiranju kompleksnog broja $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ odgovara invertiranje para realnih brojeva $(x,y)\neq(0,0)$, koje izgleda ovako:

$$(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Za bilo koji zadani kompleksan broj $z=x+\mathrm{i}y$ (gdje su $x,y\in\mathbb{R}$) moguće je definirati kompleksan broj $\mathrm{e}^z=e^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, tj. (prema Eulerovoj formuli):

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

Proučavanjem funkcija kompleksne varijable bavi se dio matematike koji se zove *Kompleksna analiza*. Dijelove tog zanimljivog i značajnog područja matematike upoznat ćemo u Matematici 3.

Kao temelj za pripremu prva dva poglavlja ovog teksta poslužilo nam je prvo poglavlje knjige [AAB]. Zainteresirani čitatelj može nastaviti sa studijem funkcija kompleksne varijable u knjizi [El1], namijenjenoj studentima FER-a.

Popis oznaka

Prekrasan kameni pleterni ornament u obliku znaka ∞, prikazan na gornjoj slici, nalazi se u gradiću Stonu na poluotoku Pelješcu, a dio je većeg reljefa. Označuje vječnost, kao i vječnu ljubav, a u matematici odgovarajući znak ∞ označuje beskonačnost.

Bibliografija

[AAB] Andrea Aglić Aljinović, Ilko Brnetić, Neven Elezović, Ljubo Marangunić, Mervan Pašić, Vesna Županović, Darko Žubrinić: *Matematika 1*, Element, Zagreb 2014.

[Bom] Mea Bombardelli: *Kako dokazati Pitagorin poučak na trideset načina?*, objavljeno u 'Biltenu seminara iz matematike za nastavnike mentore', 5. državani susret, Kraljevica 16.-19. svibnja 1996., Hrvatsko matematičko društvo i Ministarstvo prosvjete i športa, 1996., str. 11–25.

[Bla] Danilo Blanuša: *Viša matematika*, 1. dio, prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb 1963.

[Br] *Zadaci s pismenih ispita. Matematička analiza 1*, priredio prof.dr. Ilko Brnetić, Element, Zagreb 2005.

[Brü1] Franka Miriam Brückler: *Matematički dvoboji*, Školska knjiga, Zagreb 2011.

[Brü2] Franka Miriam Brückler: *Povijest matematike*

[CouRo] Richard Courant i Herbert Robbins: *What is Mathematics*, Oxford University Press, 1996

[Cvi] Maja Cvitković: *Kombinatorika*, zbirka zadataka, Element, Zagreb, 1994.

[Duj1] Andrej Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[Duj2] Andrej Dujella: *Diskretna matematika (Matematičke osnove kriptografije javnog ključa)*, PMF MO, Sveučilište u Zagrebu

[DujMar] Andrej Dujella i Marcel Maretić: *Kriptografija*, Element, Zagreb 2007.

[El1] Neven Elezović: *Funkcije kompleksne varijable*, Element, Zagreb 2010.

[El2] Neven Elezović: *Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb 2010.

[El3] Neven Elezović: *Diskontna matematika 1*, Element, Zagreb 2017.

[Fe] William Feller: *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Princeton, 1950.

[GKnP] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison – Wesley, 1995.

[Gus] Ivica Gusić: *Matematički rječnik*, Element, Zagreb 1995.

[Ham] Richard Hammack: *Book of Proof*, Virginia Commonwealth Univeristy, 2013.

[Iva] Ivan Ivanšić: *Zavod za primijenjenu matematiku*, FER, Sveučilište u Zagrebu, 2008.

[Jav] Petar Javor: *Matematička analiza*, Element, Zagreb 2000.

[Jupy] Jupyter

[KoŽu] Domagoj Kovačević i Darko Žubrinić: *Uvod u diskretnu matematiku*, Element, Zagreb 2017.

[Knu] Donald Knuth: *The Art of Computer Programming / Fundamental Algorithms*, Volume 1, Addison Wesley, 1973.

[La] Serge Lang: *A First Course in Calculus*, Fifth Edition, Springer, 1986.

[Mar] Željko Marković: *Uvod u višu analizu* I. dio, 4. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[MacT] *MacTutor History of Mathematics*

[NaPa] Anamari Nakić i Mario Osvin Pavčević: *Uvod u teoriju grafova*, Element, Zagreb 2013.

[Pap] Pavle Papić: *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[Paš] Mervan Pašić: *Matematika 1*, Merkur A.B.D., 2005.

[PaVe] Boris Pavković i Darko Veljan: *Elementarna matematika 1 i 2*, Školska knjiga 2004. i 2005.

[Pick] Clifford Pickover: *The Math Book*, Sterling, New York 2009. (u pripremi je hrvatski prijevod)

[Slap] Ivan Slapničar: *Matematika 1*, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split 2002.

[Ve] Darko Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[Žu1] Darko Žubrinić: *Vilim Feller istaknuti hrvatsko-američki matematičar / William Feller – Distinguished Croatian-American Mathematician*, Graphis, Zagreb 2006.

[Žu2] Darko Žubrinić: Interaktivni uvod u Matematičku analizu, pripremljen u programu Jupyter, Zagreb 2018.

Kazalo