Neven Elezović
Andrea Aglić Aljinović

1. Matrice

Sadržaj poglavlja

1.1. Definicija i primjeri matrica

1.1.1. Matrice

Matrica je pravokutna tablica realnih brojeva:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\3&-2\end{bmatrix};\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&0&-1\\2&1&\pi\end{bmatrix};\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{A}$ ima dva retka i dva stupca. $\mathbf{B}$ ima dva retka i tri stupca, dok $\mathbf{C}$ ima tri retka i dva stupca.

Zapis matrice. U ovom ćemo udžbeniku matrice označavati velikim masnim slovom latiničke abecede.

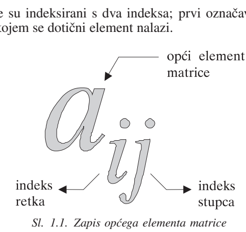
Brojevi unutar pravokutne tablice nazivaju se **elementima matrice**. Element matrice označavamo indeksima, pozivanjem prvo na redak pa zatim na stupac u kojem se on nalazi. Tako $(\mathbf{A})_{11}=2$ naznačava da je element matrice $\mathbf{A}$ koji se nalazi u prvom retku i prvom stupcu jednak 2. Na primjer, $(\mathbf{B})_{13}=-1$, $(\mathbf{B})_{21}=2$ i slično. Općenito, element matrice označavamo malim latinskim slovom, $a_{ij}=(\mathbf{A})_{ij}$.

Opći oblik matrice je

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

Ova matrica ima m redaka i n stupaca. Za nju kažemo da je **tipa** $m\times n$. Ako je broj redaka jednak broju stupaca i iznosi n, za matricu kažemo da je **kvadratna matrica reda** n.

Elementi matrice su indeksirani s dva indeksa; prvi označava broj retka, a drugi broj stupca u kojem se dotični element nalazi.



Sl. 1.1. Zapis općega elementa matrice

Prema tome, retci se sastoje od sljedećih elemenata:

$$\begin{array}{r|cccccc}
\text{prvi redak} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\
\vdots & & & & & & \\
i\text{-ti redak} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\
\vdots & & & & & & \\
m\text{-ti redak} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{array}$$

(prvi indeks je čvrst i označava broj retka, a drugi se mijenja).

Stupce pak sačinjavaju elementi čiji je drugi indeks čvrst i označava broj stupca, a prvi indeks se mijenja.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{prvi stupac} & \dots & j\text{-ti stupac} & \dots & n\text{-ti stupac}\\
\hline
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\
\vdots & & \vdots & & \\
a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\
\vdots & & \vdots & & \\
a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{array}$$

Kraće matricu $\mathbf{A}$ zapisujemo na način $\mathbf{A}=(a_{ij})$ navodeći samo ime njezinog općeg elementa.

Jednakost matrica

Dvije matrice, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ su **jednake** ako
- su istoga tipa (imaju jednak broj redaka i jednak broj stupaca),
- imaju jednake odgovarajuće elemente, tj. vrijedi $a_{ij}=b_{ij}$ za sve i,j.

1.1.2. Primjeri matrica

1. Nul-matrica. Matrica čiji su svi elementi nule naziva se **nul-matrica** i označava s $\mathbf{0}$, neovisno o tome kojega je tipa. Ta nepreciznost neće stvarati nikakvih problema. Tako su sve sljedeće matrice nul-matrice:

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad [0\ 0\ 0],\qquad \begin{bmatrix}0&\dots&0\\\vdots\\0&\dots&0\end{bmatrix}.$$

2. Dijagonalna matrica. Dijagonala matrice definirana je samo za kvadratne matrice. Ona sadrži elemente s jednakim indeksima: $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$. Kvadratna matrica kojoj su svi elementi van dijagonale jednaki nuli naziva se **dijagonalna** matrica.

Sljedeće su matrice dijagonalne

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\0&a_{22}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

U literaturi se dijagonalna matrica ponekad označava simbolom diag. Tako na primjer gornje se matrice mogu zapisati ovako: $\operatorname{diag}(2,1)$, $\operatorname{diag}(3,0,4)$, $\operatorname{diag}(a_{11},\dots,a_{nn})$.

3. Jedinična matrica. To je dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi jednaki 1. Označavamo ju slovom $\mathbf{I}$. (Ponegdje se u literaturi koristi i slovo $\mathbf{E}$.)

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\text{ili}\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\text{ili}\quad\begin{bmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&&\ddots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}.$$

Možemo pisati $\mathbf{I}=(\delta_{ij})$. Ovdje je δ_{ij} **Kroneckerov delta simbol**:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1&\text{ako je } i=j,\\0&\text{ako je } i\neq j.\end{cases}$$

4. Trokutaste matrice. Pojam je definiran samo za kvadratne matrice. Matrica je **gornja trokutasta** ako su svi njezini elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli. Evo nekih primjera:

$$\begin{bmatrix}2&-1\\0&2\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&2\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&&\ddots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Matrica je **donja trokutasta** ako su svi njezini elementi iznad dijagonale jednaki nuli:

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&\dots&0\\\vdots&&\ddots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

5. Transponirana matrica. Matrica $\mathbf{B}$ je **transponirana** matrica matrice $\mathbf{A}$ ako vrijedi

$$(\mathbf{B})_{ij}=(\mathbf{A})_{ji},\qquad \text{za sve}\quad i,j.$$

Kako dobivamo transponiranu matricu? Elemente prvoga retka matrice $\mathbf{A}$, ne mijenjajući njihov poredak, zapišemo na mjesto prvog stupca matrice $\mathbf{B}$ itd. Matrica $\mathbf{B}$ je tipa $n\times m$. Ovo pridruživanje nazivamo **transponiranjem**. Evo nekoliko primjera transponiranja

$$\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}3&-1\\0&2\\1&4\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&2&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\dots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\dots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots\\a_{1n}&a_{2n}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Transponiranu matricu označavamo simbolom $\mathbf{A}^\top$,

$$(\mathbf{A}^\top)_{ij}:=(\mathbf{A})_{ji},\quad \forall i,j.$$

Ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica, tad se transponirana matrica dobiva tako da se elementi matrice $\mathbf{A}$ zrcale s obzirom na njezinu dijagonalu.

Primjer 1.

a) Ako je $\mathbf{D}$ dijagonalna matrica, tad je $\mathbf{D}^\top=\mathbf{D}$.
b) Ako je $\mathbf{L}$ gornja trokutasta, tad je $\mathbf{L}^\top$ donja trokutasta, i obratno.
c) $(\mathbf{A}^\top)^\top=\mathbf{A}$, za svaku matricu $\mathbf{A}$.

Simetrične matrice. Matrica $\mathbf{A}$ je **simetrična** ako je $\mathbf{A}^\top=\mathbf{A}$, tj. $a_{ij}=a_{ji}$, $\forall i,j$. Simetrična matrica nužno je kvadratna. Zrcaljenjem s obzirom na dijagonalu matrica se ne mijenja:

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\qquad\text{itd.}$$

Matrica je **antisimetrična** ako vrijedi $\mathbf{A}^\top=-\mathbf{A}$, tj. $a_{ij}=-a_{ji}$, $\forall i,j$. Antisimetrična matrica nužno je kvadratna i ima nule na dijagonali; $a_{ii}=-a_{ii}$ daje $a_{ii}=0$. Evo primjera:

$$\begin{bmatrix}0&-3\\3&0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0&2&-1\\-2&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad\text{itd.}$$

Vektor kao matrica. Matrice koje imaju samo jedan redak ili samo jedan stupac nazivamo vektorima. Tako govorimo o vektor-retku ili pak o vektor-stupcu. Evo primjera vektor-stupaca:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\qquad \dots,\qquad \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}.$$

Za prvog kažemo da je dimenzije 2, drugi je dimenzije 3, a posljednji dimenzije n. Vektore obično označavamo masnim malim slovima latiničke abecede, iako ćemo ponekad koristiti i velika slova, jer vektor je i matrica tipa $n\times 1$ ili pak $1\times n$. Ako je $\mathbf{b}$ vektor-stupac, tad je njemu transponirani vektor $\mathbf{b}^\top$ vektor-redak

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}^\top=[b_1\ b_2\ \dots\ b_n],$$

i obratno, transponiranjem vektor-retka dobiva se vektor-stupac.

Govorimo li samo *vektor*, onda mislimo na *vektor-stupac*. S druge strane, u retcima knjige lakše je zapisati vektor-redak. Stoga se vektori često zapisuju s pomoću znaka transponiranja. Tako je npr. vektor $[0\ 1\ 3]^\top$ zapisan u ovome retku zapravo vektor-stupac, tipa 3×1:

$$[0\ 1\ 3]^\top=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}.$$

1.2. Operacije s matricama

Skup svih matrica istog tipa $m\times n$ označavamo sa $\mathscr{M}_{mn}$. Na tom su skupu definirane dvije operacije
- zbrajanje matrica,
- množenje skalara i matrice.

Zbrajanje matrica

Zbroj dviju matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je matrica s elementima:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}:=(\mathbf{A})_{ij}+(\mathbf{B})_{ij}.\tag{1}$$

Da bi zbroj matrica bio definiran, matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ moraju biti istoga tipa. Rezultat zbrajanja je opet matrica, istoga tipa $m\times n$. Element matrice $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ na mjestu (i,j) jednak je zbroju elemenata matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ na istom tom mjestu.

Tako vrijedi, na primjer

$$\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\6&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3\\x\\0\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\1\\y\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\x+1\\y\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&\ddots\\a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}&\dots&b_{1n}\\\vdots&\ddots\\b_{m1}&\dots&b_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&\dots&a_{1n}+b_{1n}\\\vdots&\ddots\\a_{m1}+b_{m1}&\dots&a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}.$$

Množenje matrice skalarom

Neka je $\lambda\in\mathbf{R}$ bilo koji skalar, te $\mathbf{A}\in\mathscr{M}_{mn}$. Umnožak matrice $\mathbf{A}$ skalarom λ je matrica $\lambda\mathbf{A}\in\mathscr{M}_{mn}$ definirana na način

$$(\lambda\mathbf{A})_{ij}:=\lambda(\mathbf{A})_{ij}.\tag{2}$$

Dakle, matrica se množi skalaromtako da se svaki njezin element množi tim skalarom:

$$2\begin{bmatrix}1&2\\0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\0&-6\end{bmatrix},$$

$$\lambda\begin{bmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&\ddots\\a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11}&\dots&\lambda a_{1n}\\\vdots&\ddots\\\lambda a_{m1}&\dots&\lambda a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Matricu $(-1)\mathbf{A}$ označavamo s $-\mathbf{A}$. Razlika dviju matrica svodi se na već uvedene operacije: $\mathbf{A}-\mathbf{B}:=\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}$.

1.3. Algebra matrica

1.3.1. Množenje matrica

Množenje matrica znatno je složenija operacija od zbrajanja. Prije no što navedemo definiciju, upozorit ćemo na sljedeće:
- Umnožak nije definiran za bilo kakve dvije matrice, pa čak niti za matrice istoga tipa $m\times n$, ukoliko je $m\neq n$.
- I kad je umnožak definiran, on ovisi o poretku matrica.

Krenimo od pojma umnoška vektora.

Umnožak vektor-retka i vektor-stupca. Neka je $\mathbf{a}$ vektor-redak i $\mathbf{b}$ vektor-stupac iste duljine:

$$\mathbf{a}=[a_1\ a_2\ \dots\ a_n],\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

Njihov se umnožak definira na način:

$$[a_1\ a_2\ \dots\ a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}:=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.\tag{3}$$

Rezultat je ovog množenja skalar. Evo primjera:

$$[2\ -1\ 3]\begin{bmatrix}3\\-2\\5\end{bmatrix}:=2\cdot 3+(-1)\cdot(-2)+3\cdot 5=23.$$

Definicija umnoška matrica. Da bi postojao umnožak dviju matrica, one moraju biti **ulančane**: broj stupaca prve mora biti jednak broju redaka druge matrice. (Odnosno, duljina retka prve mora biti jednaka duljini stupca druge matrice.) Tako, ako je $\mathbf{A}$ tipa $m\times n$ da bi umnožak $\mathbf{AB}$ postojao, matrica $\mathbf{B}$ mora biti tipa $n\times p$. Pri tom m i p mogu biti bilo kakvi. Rezultat množenja bit će matrica tipa $m\times p$.

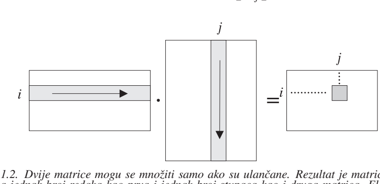
Množenje matrica

Neka je $\mathbf{A}=(a_{ij})$ tipa $m\times n$ i $\mathbf{B}=(b_{ij})$ tipa $n\times p$. Onda je definiran unmožak matrica $\mathbf{AB}$, to je matrica tipa $m\times p$, čiji je opći element dan formulom

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})_{ij}&:=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.\end{aligned}\tag{4}$$

Ovaj umnožak prepoznajemo kao umnožak i-toga retka matrice $\mathbf{A}$ i j-tog stupca matrice $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{AB})_{ij}=[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{bmatrix}.$$



Sl. 1.2. Dvije matrice mogu se množiti samo ako su ulančane. Rezultat je matrica koja ima jednak broj redaka kao prva i jednak broj stupaca kao i druga matrica. Element umnoška na mjestu (i,j) jednak je skalarnom umnošku i-toga retka prve i j-toga stupca druge matrice

Primjer 2.

Evo još nekoliko primjera umnožaka matrica

a) $\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times(-1)+1\times 2&2\times 3+1\times 4\\(-1)\times(-1)+3\times 2&(-1)\times 3+3\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&10\\7&9\end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&-3\\0&2\end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8&-5\\4&6&-2\\-2&-2&3\end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3&-1\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&4&-3\\2&2&1\end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix}-1&1\\3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}$.

Ovi primjeri potvrđuju sljedeća neuobičajena svojstva
- ako je umnožak $\mathbf{AB}$ definiran, $\mathbf{BA}$ to ne mora biti (primjer **d**),
- ako postoje $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$, tad je općenito $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ (primjer **c**). Čak i onda ako su matrice $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ istoga tipa, općenito je $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ (matrice u primjeru **a** i **e**),
- Ako je $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ (nul-matrica), tad ne mora biti $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ niti $\mathbf{B}=\mathbf{0}$.

Primjer 3.

Za matricu $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$ odredi sve matrice $\mathbf{B}$ istoga tipa za koje vrijedi $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$.

► Označimo elemente matrice $\mathbf{B}$ na način $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. Iz $\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ imamo

$$\begin{bmatrix}a+2c&b+2d\\3a+6c&3b+6d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem elemenata dobivamo sustave

$$\begin{cases}a+2c=0,\\3a+6c=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}b+2d=0,\\3b+6d=0.\end{cases}$$

Rješenje prvoga je $a=-2c$, a drugoga $b=-2d$, pa jednadžbu zadovoljava svaka matrica oblika $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2c&-2d\\c&d\end{bmatrix}$ gdje su c i d po volji odabrani realni brojevi. ◄

Primjer 4.

Odredi sve matrice koje komutiraju s $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

► Označimo traženu matricu s $\mathbf{A}$. Da bi oba umnoška $\mathbf{AX}$ i $\mathbf{XA}$ bila definirana, takva matrica mora biti kvadratna, istoga reda kao i $\mathbf{X}$. Dakle, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$. Iz $\mathbf{AX}=\mathbf{XA}$ slijedi

$$\begin{bmatrix}0&a_{11}&a_{12}\\0&a_{21}&a_{22}\\0&a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Odavde dobivamo niz jednakosti $a_{21}=a_{31}=a_{32}=0$, $a_{11}=a_{22}$, $a_{21}=a_{32}$, $a_{12}=a_{23}$, $a_{22}=a_{33}$. Označimo li praktičnije $a_{11}=x$, $a_{12}=y$, $a_{13}=z$, dobivamo traženu matricu u sljedećem obliku

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}x&y&z\\0&x&y\\0&0&x\end{bmatrix}.\ ◄$$

Matrični umnožak vektora. Neka su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ vektor-stupci istoga tipa. Shvatimo li ih kao matrice, onda su definirana oba umnoška, $\mathbf{a}^\top\mathbf{b}$ i $\mathbf{ab}^\top$. Pri tome
- $\mathbf{a}^\top\mathbf{b}$ je matrica tipa 1×1 s elementom

$$\mathbf{a}^\top\mathbf{b}=[a_1\ a_2\ \dots\ a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=[a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n].$$

Ovakvu matricu, s jednim elementom, poistovjećujemo sa skalarom i rezultat pišemo bez zagrada. Zato je, u ovom slučaju, matrični umnožak vektora jednak gore opisanom umnošku vektor retka s vektor stupcem.
- $\mathbf{ab}^\top$ je matrica tipa $n\times n$! Zaista,

$$\mathbf{ab}^\top=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}[b_1\ b_2\ \dots\ b_n]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\dots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\dots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots\\a_nb_1&a_nb_2&\dots&a_nb_n\end{bmatrix}$$

Primjer 5.

$$[2\ 1\ -3]\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}=2\times 3+1\times(-1)+(-3)\times 2=-1,$$

$$\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}[3\ -1\ 2]=\begin{bmatrix}6&-2&4\\3&-1&2\\-9&3&-6\end{bmatrix}.$$

Ovaj je primjer vrlo značajan. Jer, matrično množenje možemo opisati na potpuno identičan način, shvatimo li retke odnosno stupce matrica kao zasebne vektore.

Matrica

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

sastavljena je od sljedećih vektor-redaka

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1&=[a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}],\\\mathbf{a}_2&=[a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}],\\&\ \ \vdots\\\mathbf{a}_m&=[a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn}],\end{aligned}\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{a}_m\end{bmatrix},$$

ili pak od sljedećih vektor-stupaca

$$\mathbf{a}^1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\ \mathbf{a}^2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\dots,\mathbf{a}^n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}=[\mathbf{a}^1\ \mathbf{a}^2\ \dots\ \mathbf{a}^n].$$

Sad se umnožak dviju matrica može napisati ovako:

$$\begin{aligned}\mathbf{AB}&=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\dots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\dots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots\\b_{n1}&b_{n2}&\dots&b_{np}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{a}_m\end{bmatrix}[\mathbf{b}^1\ \mathbf{b}^2\ \dots\ \mathbf{b}^p]=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\mathbf{b}^1&\mathbf{a}_1\mathbf{b}^2&\dots&\mathbf{a}_1\mathbf{b}^p\\\mathbf{a}_2\mathbf{b}^1&\mathbf{a}_2\mathbf{b}^2&\dots&\mathbf{a}_2\mathbf{b}^p\\\vdots&\vdots&\ddots\\\mathbf{a}_m\mathbf{b}^1&\mathbf{a}_m\mathbf{b}^2&\dots&\mathbf{a}_m\mathbf{b}^p\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vidimo da je opći element matrice $\mathbf{AB}$ upravo

$$(\mathbf{AB})_{ij}=\mathbf{a}_i\mathbf{b}^j=[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

Primjer 6.

Ako je $\mathbf{x}=[3,\ 1,\ 2]$, $\mathbf{y}=[2,\ -1,\ 1]$, izračunajmo $\mathbf{x}^\top\mathbf{y}$ i $\mathbf{xy}^\top$.

►

$$\mathbf{x}^\top\mathbf{y}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}[2,\ -1,\ 1]=\begin{bmatrix}6&-3&3\\2&-1&1\\4&-2&2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{xy}^\top=[3,\ 1,\ 2]\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}=[7].$$

Matricu s jednim elementom poistovjećujemo s brojem. Zato je $\mathbf{xy}^\top=7$. ◄

1.3.2. Matrice i linearna preslikavanja

Umnožak matrice i vektora. Neka je $\mathbf{A}$ matrica tipa $m\times n$ i $\mathbf{x}$ vektor stupac duljine n. Tada je definiran umnožak $\mathbf{Ax}$ i to je vektor stupac duljine m. Jednakost

$$\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$$

u matričnom zapisu glasi:

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

Prema definiciji matričnog množenja, ovu jednakost možemo zapisati preko komponenti vektora:

$$\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\&\ \ \vdots\\y_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n.\end{aligned}$$

Na taj način matrica tipa $m\times n$ inducira preslikavanje $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ koje elementu $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ pridružuje element $(y_1,\dots,y_m)\in\mathbf{R}^m$, definiran ovim formulama. To prelikavanje nazivamo **linearno preslikavanje** inducirano matricom $\mathbf{A}$.

Kompozicija linearnih preslikavanja i umnožak matrica. Zašto je matrično množenje definirano baš formulama (4)? Obrazloženje za to nalazimo u vezi matrica i preslikavanja koje te matrice induciraju. Jednostavnosti radi, opišimo tu vezu na matricama tipa 2×2.

Neka je $\mathbf{B}$ kvadratna matrica reda 2 i $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ pripadno linearno preslikavanje. Označimo

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}.$$

Onda jednakost $\mathbf{y}=\mathbf{Bx}$ možemo napisati ovako:

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},$$

odnosno, po komponentama

$$\begin{aligned}y_1&=b_{11}x_1+b_{12}x_2,\\y_2&=b_{21}x_1+b_{22}x_2.\end{aligned}$$

Dakle, f paru (x_1,x_2) pridružuje par (y_1,y_2).

Neka je sada $\mathbf{A}$ matrica drugog reda koja preslikava vektor $\mathbf{y}$ u vektor $\mathbf{z}$, i g s njom određeno linearno preslikavanje:

$$\begin{aligned}z_1&=a_{11}y_1+a_{12}y_2,\\z_2&=a_{21}y_1+a_{22}y_2.\end{aligned}$$

Dakle, g paru (y_1,y_2) pridružuje par (z_1,z_2).

Onda za kompoziciju $g\circ f$ koje paru (x_1,x_2) pridružuje par (z_1,z_2) vrijedi:

$$\begin{aligned}z_1&=a_{11}(b_{11}x_1+b_{12}x_2)+a_{12}(b_{21}x_1+b_{22}x_2),\\z_2&=a_{21}(b_{11}x_1+b_{12}x_2)+a_{22}(b_{21}x_1+b_{22}x_2)\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}z_1&=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})x_2,\\z_2&=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})x_2,\end{aligned}$$

Odavde vidimo da kompoziciji $g\circ f$ odgovara matrica

$$\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$$

No, ta je matrica umožak matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$:

$$\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{AB}.$$

Dakle, kompoziciji linearnih preslikavanja odgovara umnožak matrica.

1.3.3. Svojstva matričnoga množenja

Izdvojimo neka svojstva matričnoga množenja. Ona pokazuju da unatoč ‘neobičnoj’ definiciji, to množenje ipak posjeduje neka očekivana dobra svojstva.

1. Asocijativnost matričnog množenja. Vrijedi

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

kad god je umnožak (s bilo koje strane) definiran.

Ovo se svojstvo naslije]uje iz odogovarajućeg svojstva asocijativnosti za kompoziciju preslikavanja. Ovdje ćemo ga dokazati direktno na temelju definicije umnoška marica. U izvodu obratite osobito pozornost na zamjenu poretka sumacije. Dakle, ako je

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=(a_{ij}),&&\text{tipa}\quad m\times n,\\\mathbf{B}&=(b_{jk}),&&\text{tipa}\quad n\times p,\\\mathbf{C}&=(c_{kl}),&&\text{tipa}\quad p\times r,\end{aligned}$$

tad imamo

$$(\mathbf{AB})_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk},$$

$$(\mathbf{BC})_{jl}=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl},$$

te je

$$\begin{aligned}[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_{il}&=\sum_{k=1}^{p}(\mathbf{AB})_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\Big)c_{kl}\\&=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\Big)\\&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{BC})_{jl}=[\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_{il}\end{aligned}$$

2. Distributivnost. Vrijedi

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}.$$

Zaista,

$$\begin{aligned}[(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}]_{ik}&=\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}c_{jk}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{jk}\\&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}c_{jk}\\&=(\mathbf{AC})_{ik}+(\mathbf{BC})_{ik}=[\mathbf{AC}+\mathbf{BC}]_{ik}\end{aligned}$$

3. Umnožak s jediničnom matricom. Ako je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda n, tad za svaku kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ istoga reda vrijedi

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}.$$

Uvjeri se u to na primjerima matrica reda 2 i reda 3! U općem slučaju, element umnoška $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}$ na mjestu (i,j) iznosi

$$(\mathbf{AI})_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}=a_{i1}\delta_{1j}+\ldots+a_{ij}\delta_{jj}+\ldots+a_{in}\delta_{nj}=a_{ij}=(\mathbf{A})_{ij}.$$

(Od svih pribrojnika u gornjoj sumi preostaje samo jedan, kod kojega je $k=j$.) Slično vrijedi i za umnožak $\mathbf{IA}$.

4. Transponiranje. Odnos množenja matrica prema transponiranju je sljedeći:

$$(\mathbf{AB})^\top=\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top.$$

Provjerimo najprije ulančanost! Matrica $\mathbf{B}^\top$ je tipa $p\times n$, $\mathbf{A}^\top$ tipa $n\times m$ te $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ postoji i ima tip $p\times m$, baš kao i matrica $(\mathbf{AB})^\top$. Sad pišemo:

$$\begin{aligned}[(\mathbf{AB})^\top]_{ik}&=(\mathbf{AB})_{ki}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}b_{ji}\\&=\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{B}^\top)_{ij}(\mathbf{A}^\top)_{jk}=(\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top)_{ik}.\end{aligned}$$

1.3.4. Matrični polinom

Ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica (i samo u tom slučaju!), definirana je potencija $\mathbf{A}^2:=\mathbf{AA}$. Induktivno definiramo potenciju:

$$\mathbf{A}^p:=\underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{p\text{ faktora}}.$$

Očevidno je (zbog asocijativnosti množenja) da za ove potencije vrijede jednakosti $\mathbf{A}^p\mathbf{A}^q=\mathbf{A}^q\mathbf{A}^p=\mathbf{A}^{p+q}$, $(\mathbf{A}^p)^q=\mathbf{A}^{pq}$, za sve prirodne brojeve p i q.

Po definiciji, stavljamo $\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$. Tako možemo definirati **matrični polinom**: ako je $f(x)=\alpha_px^p+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$ bilo koji polinom stupnja p, tad definiramo

$$f(\mathbf{A}):=\alpha_p\mathbf{A}^p+\ldots+\alpha_1\mathbf{A}+\alpha_0\mathbf{I}.$$

Primjer 7.

Neka je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-3&2\end{bmatrix}$ i $f(x)=x^3-x+3$, $g(x)=x^2-4x+7$. Tad vrijedi

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^3-\mathbf{A}+3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-9&8\\-24&-9\end{bmatrix}.$$

$$g(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+7\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Primjer 8.

Izračunaj $\mathbf{A}^n$ $(n\in\mathbf{N})$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}$.

► Izračunajmo prvih nekoliko potencija.

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}^4=\mathbf{A}^3\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a^4&4a^3\\0&a^4\end{bmatrix}.$$

Na osnovu ovog možemo naslutiti da vrijedi $\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{bmatrix}$. Slutnju ćemo provjeriti matematičkom indukcijom. Za $n=1$ baza indukcije je ispunjena. Pretpostavimo zato da je $\mathbf{A}^n$ gornjeg oblika. Tada imamo

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{n+1}=\mathbf{A}^n\mathbf{A}&=\begin{bmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a^n\cdot a&a^n+na^{n-1}\cdot a\\0&a^n\cdot a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^{n+1}&(n+1)a^n\\0&a^{n+1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. ◄