6. Pravac i ravnina

Sadržaj poglavlja

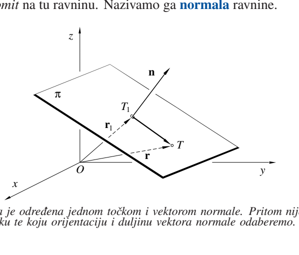
Poglavlja označena znakom * nisu obvezna i nalaze se u tiskanom izdanju.

6.1. Ravnina

6.1.1. Jednadžba ravnine

Ravnina π u prostoru određena je na jedan od sljedećih načina:
- s tri točke koje nisu kolinearne a leže u toj ravnini;
- s pravcem i jednom točkom van njega, koji leže u toj ravnini;
- s dva pravca koji leže u toj ravnini.

Međutim, najjednostavnije je ravninu opisati pomoću jedne točke i jednog vektora koji je *okomit* na tu ravninu. Nazivamo ga **normala** ravnine.



Sl. 6.1. Ravnina je određena jednom točkom i vektorom normale. Pritom nije važno koju točku te koju orijentaciju i duljinu vektora normale odaberemo.

Neka je T_1 zadana točka i $\mathbf{n}$ vektor normale. Taj je vektor okomit na svaki drugi koji leži u ravnini π. Neka je T bilo koja točka u ravnini. Tad je $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{T_1T}$. Napišemo li vektor $\overrightarrow{T_1T}$ kao razliku radij-vektora, $\overrightarrow{T_1T} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, dobit ćemo jednadžbu ravnine zapisanu u *vektorskom obliku*:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \qquad (1)$$

Izvedimo odavde jednadžbu ravnine u algebarskom obliku. Neka je $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ vektor normale a $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T(x, y, z)$ koordinate zadanih točaka. Uvrštavanjem u (1) dobivamo jednadžbu ravnine:

Jednadžba ravnine zadane točkom i vektorom normale

Jednadžba ravnine koja sadrži točku $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i ima vektor normale $\mathbf{n} = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}$ jest

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (2)$$

Primjer 1. Odredimo jednadžbu ravnine koja:
1) prolazi ishodištem i ima vektor normale $\mathbf{n} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$;
2) prolazi točkom $M(1, 0, -1)$ i ima vektor normale $\mathbf{n} = \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$;
3) prolazi točkom $T(1, -2, 0)$ i okomita je na spojnicu $\overrightarrow{TS}$, $S(0, -1, 1)$.

► Po formuli (2) možemo odmah napisati tražene jednadžbe;
1) $2(x - 0) + 1(y - 0) + 0(z - 0) = 0$, tj. $2x + y = 0$.
2) $0(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z + 1) = 0$, tj. $y + 2z + 2 = 0$.
3) Vektor $\overrightarrow{TS} = (0 - 1)\mathbf{i} + (-1 + 2)\mathbf{j} + (1 - 0)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ je normala ravnine, pa je njezina jednadžba $-1(x - 1) + 1(y + 2) + 1(z - 0) = 0$, tj. $-x + y + z + 3 = 0$. ◄

6.1.2. Opća jednadžba ravnine

Pomnožimo li izraze u (2), dobit ćemo jednadžbu oblika

$$Ax + By + Cz - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = 0$$

odnosno

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3)$$

Ova se jednadžba naziva **opća** jednadžba ravnine. Iz nje čitamo vektor normale: to je vektor s komponentama A, B, C. Znajući ovu jednadžbu, možemo odrediti i po volji mnogo točaka te ravnine. Dovoljno je uvrstiti dvije koordinate po volji i iz jednadžbe odrediti treću.

Primjer 2. Napišimo jednadžbu ravnine π koja je:
1) okomita na ravnine $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z + 1 = 0$ i prolazi točkom $T(1, 2, -1)$;
2) okomita na ravninu $\pi_1 \equiv 3x - 2y + z - 3 = 0$ i prolazi točkama $T(2, 1, 3)$, $S(1, 0, -1)$.

► **1)** Vektori $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 1)$ su vektori normala ravnina π_1, odnosno π_2. Budući da je ravnina π okomita na te ravnine, njezina je normala $\mathbf{n}$ okomita na $\mathbf{n}_1$ i na $\mathbf{n}_2$. Dakle, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ i zato $\pi \equiv -1(x - 1) - 1(y - 2) + 1(z + 1) = -x - y + z + 4 = 0$.
2) Točke T i S leže u ravnini π i zato je njezina normala $\mathbf{n}$ okomita na vektor $\overrightarrow{TS}$: $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \overrightarrow{TS} = 9\,\mathbf{i} + 11\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}$. Izaberimo sad bilo koju od točaka T ili S, recimo S, i postavimo traženu ravninu točkom S i s vektorom normale $\mathbf{n}$:

$$\pi \equiv 9(x - 1) + 11(y - 0) - 5(z + 1) = 9x + 11y - 5z - 14 = 0. \ ◄$$

6.1.3. Jednadžba ravnine zadane s tri točke

Neka su $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ tri zadane nekolinearne točke. Kako glasi jednadžba ravnine koja ih sadrži? Označimo ponovo s $T(x, y, z)$ po volji odabranu točku ravnine. Sad je dovoljno primijetiti da vektori $\overrightarrow{T_1T}$, $\overrightarrow{T_1T_2}$, $\overrightarrow{T_1T_3}$ leže u ravnini. Stoga je njihov mješoviti umnožak jednak nuli: $[\overrightarrow{T_1T}, \overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}] = 0$. Uvrstimo li komponente ovih vektora, dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Rastavom ove determinante po prvom stupcu dobivamo jednadžbu oblika

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

pa uviđamo da je riječ o općoj jednadžbi ravnine. Ta ravnina sadrži točke T_1, T_2, T_3, jer njihove koordinate zadovoljavaju ovu jednadžbu. Zato je (4) jednadžba tražene ravnine.

Primjer 3. Odredimo jednadžbu ravnine određenu točkama $M(1, -1, 2)$, $N(3, 2, 0)$, $P(1, -2, 1)$.

► Prema formuli (4) dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y - (-1) & z - 2 \\ 3 - 1 & 2 - (-1) & 0 - 2 \\ 1 - 1 & -2 - (-1) & 1 - 2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5(x - 1) + 2(y + 1) - 2(z - 2) = 0.$$

i odavde $\pi \equiv -5x + 2y - 2z + 11 = 0$. ◄

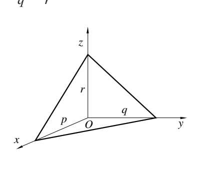
6.1.4. Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj ravnine u prostoru najlakše ćemo skicirati tako da izdvojimo točke na koordinatnim osima koje pripadaju toj ravnini. Neka je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednadžba ravnine π. Ukoliko je $D = 0$, ravnina prolazi ishodištem. Ako je pak $D \neq 0$, dijeljenjem s $-D$ jednadžbu možemo svesti na oblik

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{Bx}{-D} + \frac{Cx}{-D} = 1.$$

Pretpostavimo da su i koeficijenti A, B, C različiti od nule. Onda se ova jednadžba može napisati ovako:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \qquad (5)$$



Sl. 6.2. Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Očigledno je da točke $P(p, 0, 0)$, $Q(0, q, 0)$ i $R(0, 0, r)$ s koordinatnih osi leže u ravnini. Brojeve p, q, r nazivamo **segmentima**, jer su njihove apsolutne vrijednosti jednake duljinama odrezaka ravnine na koordinatnim osima. Oblik (5) nazivamo **segmentni oblik** jednadžbe ravnine.

Primjer 4. Odredimo odreske koje na koordinatnim osima odsijeca ravnina **1)** $2x + 4y + 5z - 6 = 0$; **2)** $x + y - 3z - 12 = 0$; **3)** $3x - 2y - 6 = 0$.

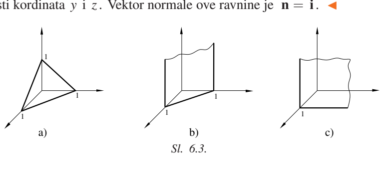
► Jednadžbe ravnina moramo dovesti u segmentni oblik.
1)

$$2x + 4y + 5z = 6 \implies \frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} + \frac{z}{\frac{6}{5}} = 1$$

i odresci su $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$, $r = \frac{6}{5}$.
2) $p = 12$, $q = 12$, $r = -4$.
3) Ravnina se ne može dovesti u segmentni oblik, jer je koeficijent uz nepoznanicu z jednak nuli. Najviše što možemo učiniti jest da je napišemo u obliku $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ i odavde čitamo $p = 2$, $q = -3$. Naime, odrezak r na osi Oz ne postoji, budući da je ravnina paralelna s osi Oz. Formalno, možemo staviti $r = \infty$ i pisati $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{\infty} = 1$. ◄

Primjer 5. Nacrtajmo sljedeće ravnine:
1. $x + y + z = 1$; **2.** $x + y = 1$; **3.** $x = 1$.

► **1)** Ravnina prolazi točkama $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ na koordinatnim osima (slika 6.3.a).
2) Crtamo pravac $x + y = 1$ u ravnini xOy. Ravnina prolazi tim pravcem i paralelna je s osi Oz, jer je njezin vektor normale $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ okomit na os Oz (slika 6.3.b).
3) Ravnina siječe os Ox u točki s apscisom 1 i paralelna je s ravninom yOz. Naime, njoj pripadaju sve točke s koordinatama $T(1, y, z)$, za po volji odabrane vrijednosti kordinata y i z. Vektor normale ove ravnine je $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. ◄



a) b) c)
Sl. 6.3.

6.1.5. Parametarska jednadžba ravnine

Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ dva nekolinearna vektora koja leže u ravnini π. Radij-vektor neke točke T te ravnine može se napisati u obliku

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{T_1T}.$$

pri čemu je T_1 točka ravnine π. Budući da $\overrightarrow{T_1T}$ leži u ravnini π, taj se vektor može rastaviti u linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Zato vrijedi

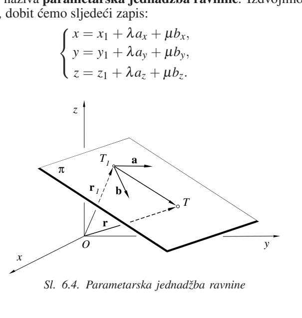
$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}. \qquad (6)$$

Napisana preko koordinata vektora, jednadžba glasi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}.$$

Ova se jednadžba naziva **parametarska jednadžba ravnine**. Izdvojimo li pojedine komponente, dobit ćemo sljedeći zapis:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda a_x + \mu b_x, \\ y = y_1 + \lambda a_y + \mu b_y, \\ z = z_1 + \lambda a_z + \mu b_z. \end{cases}$$



Sl. 6.4. Parametarska jednadžba ravnine

Primjer 6. Kako se određuje parametarska jednadžba ravnine? Pogledajmo na primjeru ravnine

$$x - 2y + 3z - 5 = 0.$$

Iz ove jednadžbe vidljiva je jednadžba normale ravnine: $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, ali ne i vektori koji leže u ravnini. Shvatit ćemo gornju jednadžbu kao *linearni sustav* i odrediti njegovo rješenje. Nepoznanica x je vezana, a y i z su slobodne. Izaberimo $y = \lambda$, $z = \mu$. Dobivamo

$$\begin{aligned} x &= 5 + 2\lambda - 3\mu, \\ y &= \lambda, \\ z &= \mu, \end{aligned}$$

odnosno

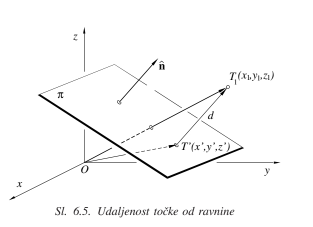
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dakako da izbor vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, pa time niti ovaj prikaz, nije jednoznačan.

6.1.6. Normirani oblik jednadžbe ravnine

6.1.7. Udaljenost točke od ravnine

Neka je $T_1(x_1, y_1, z_1)$ neka točka i π ravnina s jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$. Udaljenost $d(T_1, \pi)$ točke T_1 do ravnine π jednaka je udaljenosti točke T_1 do njezine projekcije $T'(x', y', z')$ na ravninu π, odnosno, jednaka je duljini dužine $\overline{T'T_1}$



Sl. 6.5. Udaljenost točke od ravnine

Vektor $\overrightarrow{T'T_1}$ kolinearan je s vektorom normale $\mathbf{n}$ ravnine π. Prikaz ovih vektora je:

$$\overrightarrow{T'T_1} = (x_1 - x')\mathbf{i} + (y_1 - y')\mathbf{j} + (z_1 - z')\mathbf{k},$$
$$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$$

Stoga za duljinu dužine $\overline{T'T_1}$ vrijedi

$$|T'T_1| = |\overrightarrow{T'T_1} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \left| \frac{\overrightarrow{T'T_1} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right|$$
$$= \left| \frac{A(x_1 - x') + B(y_1 - y') + C(z_1 - z')}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Točka T' leži u ravnini, pa njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu ravnine:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0 \implies -Ax' - By' - Cz' = D.$$

Tako za udaljenost točke od ravnine dobivamo sljedeću formulu.

Udaljenost točke od ravnine

Udaljenost točke $T(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine $\pi \ldots Ax + By + Cz + D = 0$ iznosi

$$d(T_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Primjer 7. Kolika je udaljenost vrha kocke brida a, od ravnine koja prolazi kroz njemu tri susjedna vrha kocke?

► Postavimo kocku u koordinatni sustav tako da joj vrh leži u ishodištu, a tri susjedna vrha imaju koordinate $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$. Jednadžba ravnine π koja prolazi ovim vrhovima je

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$$

tj.

$$x + y + z - a = 0.$$

Tražena je udaljenost jednaka

$$d = d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + 0 + a|}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

◄

Primjer 8. **Simetralna ravnina.** Odredi jednadžbu ravnine ρ koja sadrži sve točke koje su jednako udaljene od dviju ravnina

$$\pi_1 \equiv x - 3y - 2z + 1 = 0,$$
$$\pi_2 \equiv 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

► Mora biti $d(T, \pi_1) = d(T, \pi_2)$ za svaku točku $T(x, y, z)$ tražene ravnine ρ:

$$\frac{|x - 3y - 2z + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|2x - y + 3z + 3|}{\sqrt{14}}$$

i odavde

$$x - 3y - 2z + 1 = \pm(2x - y + 3z + 3).$$

Postoje zato dva rješenja (dvije simetralne ravnine):

$$\rho_1 \equiv 3x - 4y + z + 4 = 0, \qquad \rho_2 \equiv x + 2y + 5z + 2 = 0.$$

Ove su dvije ravnine međusobno okomite. ◄

Primjer 9. **Simetrala dužine.** Odredi jednadžbu ravnine ρ koja sadrži sve točke jednako udaljene od dviju točaka $T_1(2, -1, 3)$, $T_2(1, 2, -1)$.

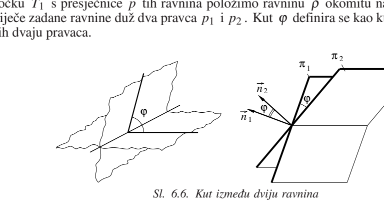
► Neka je $T(x, y, z)$ bilo koja točka tražene ravnine ρ. $d(T, T_1) = d(T, T_2)$ daje

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2,$$

odakle, nakon sređivanja, dobivamo $\rho \equiv x - 3y + 4z - 4 = 0$. ◄

6.1.8. Kut između dviju ravnina

Kut φ između dviju ravnina π_1 i π_2 definira se ovako: ako su ravnine paralelne ili se podudaraju, tad je $\varphi = 0$. Ako se ravnine sijeku, tad kroz bilo koju točku T_1 s presječnice p tih ravnina položimo ravninu ρ okomitu na p. Ona siječe zadane ravnine duž dva pravca p_1 i p_2. Kut φ definira se kao kut između tih dvaju pravaca.



Sl. 6.6. Kut između dviju ravnina

Taj je kut jednak kutu što ga zatvaraju normale ravnina π_1 i π_2 ili njegovu suplementu:

$$\varphi = \sphericalangle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \qquad \text{ili} \qquad \varphi = 180^\circ - \sphericalangle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$$

Zato ga računamo pomoću

$$\cos\varphi = |\cos\sphericalangle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|}$$

ili, u raspisanom obliku,

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Izdvojimo dva specijalna slučaja: dvije ravnine su *paralelne* (možda čak identične) ako je $\mathbf{n}_1 = \lambda\,\mathbf{n}_2$, tj., ako vrijedi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

One su *okomite* ako je $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, ili

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Primjer 10. Točke $A(2, 5, 0)$, $B(1, 6, 2)$, $C(-1, 4, 1)$, $D(1, 4, 3)$ određuju tetraedar. Odredimo kut među stranama ABC i ABD.

► Potrebno je odrediti kut φ što ga zatvaraju ravnina π_1 određena točkama A, B, C i ravnina π_2 određena točkama A, B, D. Odredimo njihove normale $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$:

$$\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$
$$\mathbf{n}_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-\mathbf{i} + j + 2\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Zato

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{18}{\sqrt{50}\sqrt{30}} = 0.465, \qquad \varphi = 62^\circ 18'. \ ◄$$

Primjer 11. Odredimo jednadžbu ravnine koja sadrži os Oz, a s ravninom $\rho \equiv 2x + y - \sqrt{5}z = 0$ zatvara kut od 60°.

► Potrebno je odrediti vektor normale $\mathbf{n}$ tražene ravnine π. Stavimo $\mathbf{n} = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}$. Ravnina π sadrži os Oz pa je $\mathbf{n}$ okomit na $\mathbf{k}$: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$, odakle je $C = 0$ i zato $\mathbf{n} = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j}$. Ako sa $\mathbf{m} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \sqrt{5}\,\mathbf{k}$ označimo vektor normale ravnine ρ, tad vrijedi

$$\cos 60^\circ = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{m}|} = \frac{|2A + B|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{10}}$$

tj.

$$(4A + 2B)^2 = 10(A^2 + B^2)$$
$$3\left(\frac{A}{B}\right)^2 + 8\frac{A}{B} - 3 = 0$$

i odavde $A = -3B$ ili $3A = B$. Postoje, dakle, dvije ravnine:

$$\pi_1 \equiv x + 3y = 0, \qquad \pi_2 \equiv -3x + y = 0. \ ◄$$

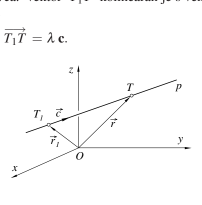
6.1.9. Poluprostor i orijentacija normale

6.2. Pravac

6.2.1. Jednadžba pravca

Pravac p u prostoru određen je jednom svojom točkom T_1 i vektorom smjera $\mathbf{c}$. Neka je T bilo koja točka pravca. Vektor $\overrightarrow{T_1T}$ kolinearan je s vektorom $\mathbf{c}$, pa postoji skalar λ za koji vrijedi

$$\overrightarrow{T_1T} = \lambda\,\mathbf{c}.$$



Sl. 6.7. Pravac je određen jednom točkom i vektorom smjera.

Prikažimo sad vektor $\overrightarrow{T_1T}$ kao razliku radijvektora: $\overrightarrow{T_1T} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. Tako dobivamo **vektorsku jednadžbu** pravca

$$p \ldots \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\,\mathbf{c}.$$

Prikažimo ove vektore u kanonskoj bazi $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Neka je $\mathbf{c} = l\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + n\,\mathbf{k}$ prikaz vektora smjera pravca:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} + \lambda(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}).$$

Odavde čitamo da koordinate točke pravca moraju zadovoljavati jednadžbe

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda l, \\ y = y_1 + \lambda m, \\ z = z_1 + \lambda n. \end{cases} \qquad (7)$$

Ove se jednadžbe nazivaju **parametarska jednadžba pravca**.

Svakoj vrijednosti parametra λ odgovara jedna točka na pravcu p. Time je uspostavljena bijekcija $\mathbf{R} \leftrightarrow p$ koja svakom realnom broju pridjeljuje točku u prostoru E^3 koja leži na pravcu p. Nuli odgovara točka T_1. Zamislimo li da putujemo po realnoj osi jednolikom brzinom tako da u jedinici vremena prevaljujemo jediničnu udaljenost, točka T određena jednadžbama (7) putovat će po pravcu tako da u jedinici vremena prevaljuje udaljenost jednaku duljini vektora $\mathbf{c}$.

6.2.2. Kanonska jednadžba pravca

Eliminirajmo parametar λ iz jednadžbi (7). Iz prve jednadžbe dobivamo $\lambda = \dfrac{x - x_1}{l}$, slično za drugu i treću. Zapišimo dobivene jednadžbe na način

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \qquad (8)$$

Ovaj se sustav jednadžbi naziva **kanonska jednadžba pravca**.

Ove će jednadžbe imati smisla samo ako su komponente vektora $\mathbf{c}$ različite od nule. Međutim, uobičajeno je pisati kanonsku jednadžbu u ovom obliku čak i u slučaju kad je neka od tih komponenti jednaka nuli. Tako, na primjer, držimo da je jednadžbom

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z + 2}{-1}$$

određen pravac koji prolazi točkom $T_1(2, 1 - 2)$ i ima vektor smjera $\mathbf{c} = 3\,\mathbf{i} - \mathbf{k}$. Izraz $\dfrac{y - 1}{0}$ interpretiramo na način: y mora biti jednak 1. I zaista, svaka točka ovog pravca ima ordinatu jednaku 1.

Primjer 12. Parametarsku jednadžbu pravca p:

1) $p \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3 - 2t; \end{cases}$ **2)** $p \equiv \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1, \\ z = 1 + t, \end{cases}$

napišimo u kanonskom obliku.

► Trebamo izračunati i zatim eliminirati parametar t iz danih jednadžbi.
1)

$$t = \frac{x - 1}{2}, \quad t = y + 2, \quad t = \frac{z - 3}{-2}.$$

Prema tome, kanonska jednadžba glasi:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 3}{-2}.$$

Primijetimo da u ovakvu zapisu uvijek ostavljamo broj 1 u nazivniku. Brojevi u nazivniku su komponente vektora smjera, dakle, $\mathbf{c} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$.
2)

$$t = \frac{x}{2}, \qquad y = 1, \qquad t = z - 1.$$

Možemo napisati samo

$$\frac{x}{2} = \frac{z - 1}{1}, \qquad y = 1.$$

Vektor smjera glasi $\mathbf{c} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$ i nema komponente u smjeru vektora $\mathbf{j}$. Pisat ćemo kanonsku jednadžbu u formalnom obliku

$$\frac{x}{2} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z - 1}{1},$$

tumačeći da ove jednadžbe imaju smisla samo ako je za svaku točku $T(x, y, z)$ pravca ispunjeno $y \equiv 1$. ◄

6.2.3. Pravac kroz dvije točke

Neka su zadane točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkama T_1 i T_2? Možemo odmah napisati bilo parametarsku, bilo kanonsku jednadžbu pravca ako primijetimo da je vektor smjera $\mathbf{c}$ ovog pravca upravo vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$. Njegove su komponente $l = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$, $n = z_2 - z_1$. Tako dobivamo parametarsku jednadžbu

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1), \end{cases} \qquad (9)$$

ili pak njezin kanonski oblik

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (10)$$

Primjer 13. Napiši kanonsku i parametarsku jednadžbu pravca koji
1) prolazi točkom $M(1, 2 - 1)$ i ima vektor smjera $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$;
2) prolazi točkama $M(1, 2, -1)$, $N(2, 0, 3)$;
3) prolazi točkama $M(1, 2, -1)$, $N(1, 1, 2)$.

► Možemo odmah napisati po formulama (7) i (8)
1)

$$x = 1 + t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = -1 - t,$$
$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 1}{-1}.$$

2) Vektor smjera je $\mathbf{c} = \overrightarrow{MN} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$. Zato

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -1 + 4t, \end{cases} \qquad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z + 1}{4}.$$

3) Sad je $\mathbf{c} = -\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ i zato parametarska jednadžba glasi

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + 3t, \end{cases}$$

dok kanonsku jednadžbu možemo formalno pisati u obliku

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 1}{3}. \ ◄$$

Primjer 14. Pravac p prolazi točkama $A(-2, 1, 3)$, $B(0, -1, 2)$. Odredimo kuteve što ih on zatvara s koordinatnim osima.

► Dovoljno je poznavati vektor smjera pravca, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Tražene kuteve nalazimo iz formule

$$\mathbf{c}_0 = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}. \qquad (11)$$

Vrijedi

$$\mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{9}} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

i zato $\alpha = \arccos\frac{2}{3} = 48^\circ 11'$, $\beta = \arccos(-\frac{2}{3}) = 131^\circ 49'$, $\gamma = \arccos(-\frac{1}{3}) = 109^\circ 28'$. ◄

6.2.4. Udaljenost točke od pravca

6.2.5. Udaljenost pravaca u prostoru

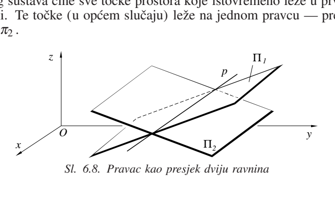
6.3. Međusobni položaj pravaca i ravnina

6.3.1. Pravac kao presjek dviju ravnina

Neka su zadane dvije ravnine π_1 i π_2 svojim općim jednadžbama:

$$\pi_1 \ldots \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2 \ldots \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Rješenje ovog sustava čine sve točke prostora koje istovremeno leže u prvoj i u drugoj ravnini. Te točke (u općem slučaju) leže na jednom pravcu — presjeku ravnina π_1 i π_2.



Sl. 6.8. Pravac kao presjek dviju ravnina

Tri slučaja mogu nastupiti pri rješavanju ovog sustava:
1. Sustav nema rješenja. To će se, na primjer, dogoditi u sustavu

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + y - z + 3 = 0, \end{cases}$$

jer su njegovim jednadžbama određene dvije paralelne ravnine, koje nemaju zajedničkog presjeka.
2. Ako su ravnine identične:

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x + 2y - 2z + 2 = 0, \end{cases}$$

njihov presjek nije pravac, već ta ravnina.
3. U svim preostalim slučajevima se ravnine sijeku po pravcu. Njegovu (kanonsku ili parametarsku) jednadžbu određujemo rješavajući sustav po dvije odabrane nepoznanice.

Primjer 15. Odredimo jednadžbu pravca po kojem se sijeku ravnine:

$$\pi_1 \ldots \quad x + y - z + 1 = 0,$$
$$\pi_2 \ldots \quad x + 2y + z + 2 = 0.$$

► Ravnine nisu paralelne, pa se uistinu sijeku po pravcu. Trebamo riješiti sustav:

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + 2y + z + 2 = 0, \end{cases}$$

koji pišemo u obliku

$$\begin{cases} x + y = z - 1, \\ x + 2y = -z - 2. \end{cases}$$

Odavde lako dobivamo

$$\begin{cases} x = 3z, \\ y = -2z - 1. \end{cases}$$

Iz ovog sustava možemo odrediti i parametarsku i kanonsku jednadžbu pravca. Da bismo dobili parametarsku jednadžbu, primijetimo da su tu vrijednosti dviju nepoznanica određene pomoću treće, koju možemo birati po volji. Stavimo zato da je $z = \lambda$, po volji odabrani broj, pa slijedi

$$\begin{cases} x = 3\lambda, \\ y = -2\lambda - 1, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

Tu prepoznajemo parametarsku jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T = (0, -1, 0)$ i ima vektor smjera $\mathbf{c} = 3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Kanonsku jednadžbu možemo sad napisati jer poznajemo točku na pravcu i njegov vektor smjera. Možemo je dobiti i direktno iz prijašnjeg sustava tako da izračunamo vrijednost nepoznanice z iz obje dobivene jednadžbe:

$$z = \frac{x}{3}, \qquad z = \frac{y + 1}{-2}.$$

Ovaj sustav pišemo u obliku proširene jednakosti:

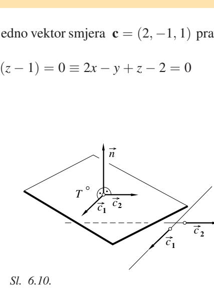
$$\frac{x}{3} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{1},$$

a to je upravo kanonska jednadžba pravca.

6.3.2. Kut između pravca i ravnine

Taj se kut definira kao kut između pravca p i njegove ortogonalne projekcije na ravninu π. To je *najmanji* od svih kutova što ga zatvara vektor $\mathbf{c}$ smjera pravca p s bilo kojim vektorom koji leži u ravnini π. Označimo li ovaj kut sa ψ, tad je $90^\circ - \psi$ kut što ga zatvara vektor $\mathbf{c}$ s normalom $\mathbf{n}$ ravnine π. Zato vrijedi

$$\sin\psi = \cos(90^\circ - \psi) = \frac{|\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{c}|\,|\mathbf{n}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$



Sl. 6.9. Kut između pravca i ravnine.

Pravac je paralelan s ravninom ako vrijedi $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = 0$, tj.

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Pravac je okomit na ravninu ako je $\mathbf{c} = \lambda\,\mathbf{n}$, tj.

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Primjer 16. Odredi jednadžbu ravnine π koja: prolazi točkom $T(1, 1, 1)$ i okomita je na pravac $p \equiv \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z - 3}{1}$.

► Vektor normale $\mathbf{n}$ ravnine je ujedno vektor smjera $\mathbf{c} = (2, -1, 1)$ pravca, zato je

$$\pi \equiv 2(x - 1) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \equiv 2x - y + z - 2 = 0$$

(slika 6.10.a). ◄

Sl. 6.10.

Primjer 17. Odredi jednadžbu ravnine π koja prolazi pravcem

$$p \equiv \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{1},$$

a okomita je na ravninu

$$\rho \equiv 2x + 3y + z + 1 = 0.$$

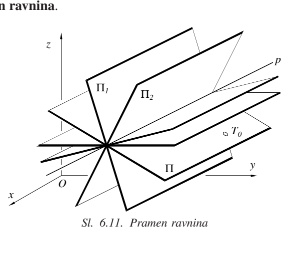
► Točka $T(1, 1, 1)$ leži na pravcu p pa zato i u ravnini π. Normala $\mathbf{n}$ ravnine π okomita je na vektor smjera $\mathbf{c}$ pravca p i na normalu $\mathbf{m}$ ravnine ρ. Dakle,

$$\mathbf{n} = \mathbf{c} \times \mathbf{m} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

i jednadžba ravnine π je $-2x + y + z = 0$. ◄

6.3.3. Pramen ravnina

Dvije ravnine (u općem položaju) sijeku se duž jednog pravca. Uvjet za to je da njihove normale $\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$ i $\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$ ne budu kolinearne. Kroz presječni pravac može se provući familija ravnina koju nazivamo **pramen ravnina**.



Sl. 6.11. Pramen ravnina

Odredimo jednadžbu neke ravnine iz tog pramena. Neka su

$$\begin{aligned} \pi_1 &\ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 &\ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

jednadžbe početnih dviju ravnina koje određuju pramen. Neka je $T(x, y, z)$ bilo koja točka koja leži na presječnom pravcu. Koordinate te točke moraju zadovoljavati obje jednadžbe u (12). To znači da će ta točka zadovoljavati jednadžbu oblika

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

za ma kakve vrijednosti parametara μ i λ. Ovu jednadžbu možemo napisati na način

$$(\mu A_1 + \lambda A_2)x + (\mu B_1 + \lambda B_2)y + (\mu C_1 + \lambda C_2)z + (\mu D_1 + \lambda D_2) = 0.$$

Vidimo da i ona predstavlja ravninu. Vektor normale te ravnine ima oblik $\mu\mathbf{n}_1 + \lambda\mathbf{n}_2$ te je on linearna kombinacija vektora normala početne dvije ravnine. Odabirom konstanti μ i λ mi možemo tu normalu odabrati po volji u ravnini razapetoj s $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ i na taj način ravninu u pramenu rotirati oko presječnog pravca.

Izbor parametara $\mu = 0$ daje ravninu π_2. Izbor $\lambda = 0$ daje ravninu π_1. Za sve ostale ravnine pramena su oba parametra različita od nule i, dijeleći izraz s jednim od njih dobivamo jednostavniju jednadžbu u kojoj se pojavljuje samo jedan parametar (označimo ga ponovo s λ):

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \qquad (13)$$

(Ovom su jednadžbom opisane sve ravnine pramena osim ravnine π_2).

Primjer 18. Odredi jednadžbu pramena ravnina koje prolaze pravcem

$$p \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 1}{1}.$$

► Dovoljno je jednadžbu pravca napisati u obliku

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3}, \qquad \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 1}{1}$$

i shvatiti ta dva dijela kao jednadžbe dviju ravnina koje u presjeku daju zadani pravac. To su ravnine $\pi_1 \equiv 3x - 2y - 7 = 0$, $\pi_2 \equiv y - 3z + 5 = 0$. Jednadžba traženog pramena glasi

$$\lambda(3x - 2y - 7) + \mu(y - 3z + 5) = 0 \implies 3\lambda x + (-2\lambda + \mu)y - 3\mu z - 7\lambda + 5\mu = 0.$$

◄

Primjer 19. Odredimo jednadžbu ravnine koja prolazi presječnicom ravnina $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x - y + 2z - 3 = 0$ i točkom $T(3, 1, 0)$.

► Tražena ravnina pripada pramenu (ali nije jednaka ravnini π_2), zato biramo oblik (13):

$$(2 + \lambda)x + (-3 - \lambda)y + (1 - 2\lambda)z - 1 - 3\lambda = 0.$$

Ravnina sadrži točku $T(3, 1, 0)$:

$$(2 + \lambda)3 + (-3 - \lambda) - 1 - 3\lambda = -\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = 2.$$

Tako dobivamo rješenje $\pi \equiv 4x - 5y - 3z - 7 = 0$. ◄