3.

Rang i inverz matrice

Sadržaj poglavlja

3.1. Matrična jednadžba i inverzna matrica

U ovom ćemo poglavlju promatrati samo kvadratne matrice. U skupu kvadratnih matrica reda n definirane su sve operacije: zbrajanje matrica, množenje skalara i matrice te množenje matrica.

3.1.1. Matrična jednadžba

Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dvije kvadratne matrice reda n. Matrična jednadžba je jednadžba oblika

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{1}$$

gdje je $\mathbf{X}$ nepoznata kvadratna matrica reda n.

Postavlja se pitanje:

- Kad će jednadžba (1) imati jedinstveno rješenje $\mathbf{X}$?

Vidjet ćemo da odgovor na ovo pitanje ovisi samo o matrici $\mathbf{A}$, dakle, ne ovisi o matrici $\mathbf{B}$.

Primjer 1.

Riješi jednadžbu

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

► Stavimo $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Množenjem matrica s lijeve strane i izjednačavanjem s matricom na desnoj strani dolazimo do jednadžbi

$$\begin{aligned} 3a + c &= -1, & 3b + d &= 2, \\ 5a + 2c &= 3, & 5b + 2d &= 1, \end{aligned}$$

odakle lagano slijedi $a = -5$, $c = 14$, $b = 3$, $d = -7$, tj.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}. \ ◄$$

— ◆ —

Problem možemo riješiti neznatno drukčijim pristupom. Ideja se sastoji u tome da se promotri pomoćna jednadžba

$$\mathbf{YA} = \mathbf{I}. \tag{2}$$

Pretpostavimo da ona ima rješenje $\mathbf{A}'$, dakle, $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Množeći jednadžbu (1) s $\mathbf{A}'$ (s lijeve strane!) dobivamo

$$\mathbf{A}'(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}'\mathbf{B}.$$

Budući da vrijedi $\mathbf{A}'(\mathbf{AX}) = (\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{IX} = \mathbf{X}$, odavde slijedi da je traženo rješenje jednadžbe (1) matrica $\mathbf{A}'\mathbf{B}$.

Primjer 2.

Riješi ovim pristupom prijašnju jednadžbu

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

► Pomoćna jednadžba $\mathbf{YA} = \mathbf{I}$ glasi:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odakle imamo

$$\begin{aligned} 3e + 5f &= 1, & 3g + 5h &= 0, \\ e + 2f &= 0, & g + 2h &= 1. \end{aligned}$$

Odavde je rješenje $\mathbf{Y} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Sad imamo

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}'\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}. \ ◄$$

Korist od ovoga pristupa sastoji se u tome da znajući matricu $\mathbf{A}'$ možemo jednostavnije odrediti rješenje jednadžbe (1) za bilo koju matricu $\mathbf{B}$.

Uvjerite se da matrica $\mathbf{A}'$ zadovoljava i jednadžbu $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanje rješenja $\mathbf{X} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$ u (1) daje

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$$

što sugerira da vrijedi $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$. Pokazat ćemo uskoro da je to istina.

3.1.2. Inverzna matrica

Inverzna matrica

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n. Matrica $\mathbf{A}'$ za koju vrijedi

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{AA}' = \mathbf{I} \tag{3}$$

naziva se **inverzna matrica** (kratko: **inverz**) matrice $\mathbf{A}$.

Inverznu matricu obično označavamo s $\mathbf{A}^{-1}$.

Za matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je **regularna** (ili **invertibilna**) ukoliko postoji njezina inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$.

Primjer 3.

Vrijedi

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvjeri se da umnožak matrica slijeva u drugom poretku daje isti rezultat.

Pokažimo da je inverzna matrica (ako postoji!) jednoznačno određena.

Teorem 1.

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n. Postoji najviše jedna matrica $\mathbf{A}'$ za koju vrijedi

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{AA}' = \mathbf{I}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dvije matrice, $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{A}''$ koje zadovoljavaju ovu jednakost. Tad iz $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$, množeći zdesna matricom $\mathbf{A}''$ dobivamo

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{A}'' = \mathbf{IA}'' = \mathbf{A}''.$$

S obzirom da po pretpostavci vrijedi

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{A}'' = \mathbf{A}'(\mathbf{AA}'') = \mathbf{A}'\mathbf{I} = \mathbf{A}',$$

odavde slijedi tvrdnja. ◄

— ◆ —

Teorem 1 ne govori ništa o *postojanju* matrice $\mathbf{A}^{-1}$, već samo da, ukoliko postoji, postoji najviše jedna takva matrica. Inverz ne mora uvijek postojati. Pri tom ne mislimo samo na inverz nul matrice, za koju je takva tvrdnja očevidna.

Tako npr. matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nema inverza. Zaista, iz uvjeta $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što je nemoguće.

Učini li vam se da je razlog tome što i ova matrica ima previše nula, pokušajte pronaći inverz matrice $\begin{bmatrix} 21 & 39 \\ 49 & 91 \end{bmatrix}$.

Teorem 2.

(**Umnožak regularnih matrica**) Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne matrice istog reda, tad je i $\mathbf{AB}$ regularna i vrijedi

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{4}$$

Dokaz. Matrica $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ postoji po pretpostavci. Direktna provjera sad daje

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Slično se dobiva i

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

Zato postoji inverz od $\mathbf{AB}$ i on je jednak $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. ◄

Formula (4) vrijedi i za umnožak n regularnih matrica: ako su $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ regularne, tad je i matrica $\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n$ regularna i vrijedi

$$(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}.$$

U to se možemo uvjeriti direktnim množenjem.

— ◆ —

U nastavku ćemo odgovoriti na sljedeća važna pitanja

- Kad je matrica $\mathbf{A}$ regularna?
- Ako je $\mathbf{A}$ regularna, kako se računa njezin inverz?

3.2. Determinante i inverzna matrica

Pokazali smo da regularna matrica ima jedinstven inverz, matricu $\mathbf{A}^{-1}$ za koju vrijedi $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Iz ove relacije, primjenom Binet–Cauchyjevog teorema slijedi

$$\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1})\det\mathbf{A} = \det\mathbf{I} = 1.$$

Odavde zaključujemo da za regularnu matricu mora biti $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Pokažimo odmah da vrijedi i obratna tvrdnja:

Teorem 3.

Matrica $\mathbf{A}$ je regularna onda i samo onda ako vrijedi $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Teorem ćemo dokazati tako da ćemo izvesti eksplicitnu formulu za računanje inverzne matrice.

3.2.1. Računanje inverzne matrice Cramerovim pravilom

Krenimo od definicije determinante

$$\det\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\mathbf{A}_{jk} \tag{5}$$

(razvoj determinante po k-tom stupcu). Ovdje je $\mathbf{A}_{jk}$ algebarski komplement elementa a_{jk}. Što se događa ako u ovakvoj sumi uzmemo algebarske komplemente nekoga drugog stupca? Tad vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\mathbf{A}_{ji} = 0, \quad \text{za } i \neq k. \tag{6}$$

Evo obrazloženja: ova je suma razvoj po i-tom stupcu determinante koja ima dva jednaka stupca: i-ti i k-ti; zato je njezina vrijednost jednaka nuli. Obje ove relacije daju sljedeći identitet

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\mathbf{A}_{ji} = \begin{cases} \det\mathbf{A}, & \text{ako je } i = k, \\ 0, & \text{ako je } i \neq k, \end{cases} \tag{7}$$

ili, nakon dijeljenja s $\det\mathbf{A} \neq 0$,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{A_{ji}}{\det\mathbf{A}}\right)a_{jk} = \delta_{ik}. \tag{8}$$

Označimo sa $\tilde{\mathbf{A}}$ matricu (A_{ij}). Jednadžba (8) ekvivalentna je s

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\top} \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I} \tag{9}$$

Matrica $\tilde{\mathbf{A}}^{\top}$ naziva se **adjunkta** matrice. Primijetimo da (9) vrijedi čak i ako je $\det\mathbf{A} = 0$.

— ◆ —

Što relacija (8) kaže? Označimo

$$a'_{ij} := \frac{A_{ji}}{\det\mathbf{A}}.$$

i s $\mathbf{A}'$ matricu s elementima a'_{ij}. Tad se (8) svodi na

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}a_{jk} = \delta_{ik},$$

ili, u matričnom zapisu $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Drugim riječima, matrica $\mathbf{A}'$ je upravo *inverzna matrica* matrice $\mathbf{A}$.

— ◆ —

Teorem 4.

(**Računanje inverzne matrice — Cramerovo pravilo**) Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n. Ona je regularna ako i samo ako vrijedi $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Elementi inverzne matrice su

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = a'_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det\mathbf{A}}.$$

Eksplicitni zapis inverzne matrice možemo predočiti na sljedeći način:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\top}. \tag{10}$$

— ◆ —

Algoritam za računanje inverzne matrice Cramerovim pravilom

Korak 1.
Izračunaj determinantu $\det\mathbf{A}$. Ako je ona različita od nule, nastavi. Inače, matrica nema inverza.

Korak 2.
Odredi algebarski komplement svakoga matričnog elementa i zapiši ih u odgovarajuće mjesto u matrici.

Korak 3.
Transponiraj dobivenu matricu i podijeli je s determinantom od $\mathbf{A}$.

Primjer 4.

Inverz matrice reda 2. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Pretpostavimo da je njezina determinanta $\det\mathbf{A} = ad - bc$ različita od nule. Matrica algebarskih komplemenata glasi

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Zato je inverzna matrica

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Primjer 5.

Odredi inverznu matricu matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

► Koristit ćemo formulu (10).

Najprije treba provjeriti postoji li inverzna matrica! Izračunat ćemo $\det\mathbf{A}$ jer nam je ta determinanta ionako potrebna u gornjoj formuli.

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 18 - (-3 - 3 + 16) = 2.$$

Determinanta je različita od nule, stoga postoji inverzna matrica. Za matricu reda 3 najpraktičnije je odmah formirati (veliku!) matricu reda 3 čiji su elementi algebarski komplementi. Primijeti da se predznaci ispred minora mijenjaju na isti način kao i pri računanju determinante razvojem po retku ili stupcu. Također, praktičnije je transponiranje matrice načiniti u drugome koraku:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\top}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -9 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}^{\top} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}. \ ◄$$

— ◆ —

Dokažimo sad sljedeći rezultat koga smo najavili na početku poglavlja:

Teorem 5.

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica i neka za matricu $\mathbf{A}'$ vrijedi $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Tad vrijedi i $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$, tj. $\mathbf{A}'$ je inverzna matrica.

Dokaz. Po Binet-Cauchyjevom teoremu je $1 = \det\mathbf{I} = \det(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = \det\mathbf{A}'\det\mathbf{A}$. Zato mora biti $\det\mathbf{A} \neq 0$ te je prema Teoremu 3 matrica $\mathbf{A}$ regularna i postoji njezin inverz $\mathbf{A}^{-1}$. Množenjem relacije $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$ zdesna matricom $\mathbf{A}^{-1}$ dobivamo $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$ čime je teorem dokazan. ◄

Napomenimo da ovaj teorem ne vrijedi ukoliko matrica $\mathbf{A}$ nije kvadratna. Evo primjera. Za sljedeće matrice

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

vrijedi $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ali $\mathbf{AA}' \neq \mathbf{I}$.

— ◆ —

Postupak za nalaženje inverzne matrice Cramerovim pravilom izgleda prihvatljiv, zbog eksplicitnoga zapisa inverzne matrice i relativno laganoga računa. On to i jeste — sve dok su u pitanju matrice reda 2 i reda 3. Za matrice višega reda postupak više nije efikasan i svakako ga treba izbjegavati. Dakako, razlog tome je što direktno računanje determinanti postaje komplicirano. Poželimo li pak minore računati drukčije, recimo primjenom elementarnih transformacija, čitav algoritam postaje besmislen jer se primjenom tih istih transformacija može izračunati i sama inverzna matrica i to na jednostavniji način. O tome će biti riječ u nastavku.

S obzirom na učestalost računa s malim matricama (geometrija dvodimenzionalnoga i trodimenzionalnoga prostora opisuje se takvim matricama), ovaj algoritam ima svoju važnost. Ne treba zaboraviti niti korist u teorijskim razmatranjima gdje je izuzetno korisno moći eksplicitno prikazati inverz matrice.

3.3. Elementarne transformacije i reducirani oblik matrice

U ovom ćemo poglavlju opisati Gaussov algoritam za računanje inverzne matrice. On se osniva na sljedećim jednostavnim transformacijama nad retcima matrice koje ćemo nazivati **elementarnim transformacijama**:

1) Zamjena dvaju redaka.
2) Množenje nekoga retka skalarom različitim od nule.
3) Dodavanje nekoga retka (pomnoženog skalarom) nekom drugom retku.

Ove transformacije javljaju se pri rješavanju nekoliko različitih problema matrične algebre:

- Pri rješavanju linearnih sustava (vidi sljedeće poglavlje).
- Pri računanju determinanti.
- Pri određivanju ranga matrice.
- Pri nalaženju inverzne matrice.

Koja je ideja zajednička pri rješavanju ovih problema? Cilj nam je matricu svesti na što jednostavniji oblik, ali tako da jednadžba u kojoj figurira transformirana matrica bude (na način koji u svakom gornjem problemu treba razjasniti) ekvivalentna početnoj.

3.3.1. Reducirani oblik matrice

Na početku ovoga poglavlja opisat ćemo koji oblik matrice mi uzimamo kao najprihvatljiviji. Taj ćemo oblik nazivati **reducirani oblik matrice**.

Reducirani oblik matrice

Matrica je dovedena na reducirani oblik ako vrijedi sljedeće:

- Prvi ne-nul element (stožer) svakoga retka iznosi 1. Svi preostali elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.
- Svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera. Strogo zapisano, ako stožer u retku i_1 leži u stupcu j_1, a stožer u retku i_2, $i_2 > i_1$ leži u stupcu j_2, tad je $j_2 > j_1$.

Primjer 6.

Evo nekoliko primjera reduciranog oblika matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjer 7.

Sljedeće matrice nisu svedene na reducirani oblik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svaka od njih narušava neko od gore navedenih pravila:

U prvoj matrici element u prvom retku i trećem stupcu iznosi 2, a trebao bi biti jednak nuli, jer se nalazi iznad stožera.

U drugoj matrici stožeri nisu ispravno poredani, prva dva retka trebaju biti zamijenjena.

U trećoj se nul redak nalazi previsoko, trebalo bi zamijeniti drugi i treći redak.

Dakle, nastavljanjem elementarnih transformacija i ove se matrice mogu svesti na reducirani oblik.

Algoritam svođenja matrice na reducirani oblik

Korak 1. Izaberimo u prvom stupcu neki element različit od nule. Primjenjujući prvu elementarnu transformaciju (zamjenu redaka), možemo ga dovesti na poziciju **stožernog elementa** a_{11} (ako je a_{11} različit od nule, prvi je korak nepotreban). (Ako su svi elementi prvog stupca jednaki nuli, prelazimo na sljedeći stupac i ponavljamo postupak.)

Korak 2. Podijelimo elemente prvoga retka s a_{11} (druga elementarna transformacija). Time stožerni element postaje jednak 1.

Korak 3. Pomoću stožernog elementa poništavamo sve preostale elemente u njegovom stupcu, primjenjujući treću elementarnu transformaciju.

Nakon toga postupak nastavljamo s korakom 1, tražeći među elementima sljedećeg stupca ne-nul element. Smijemo birati samo u preostalim retcima (dakle, ne uzimamo u retke koji sadrže prije odabrane stožere).

Izaberimo jednu matricu i pratimo ovaj algoritam.

Primjer 8.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Korak 1. Zamijenimo prvi i drugi redak, da bismo dobili stožer različit od nule na poziciji prvog retka:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Korak 2. Podijelimo elemente prvoga retka s $a_{11} = 2$. Time stožerni element postaje jednak 1.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Korak 3. Drudi redak ima na poziciji $(2,1)$ nulu i s njim u ovom koratku ne moramo ništa činiti. Pomnožimo prvi redak s $-a_{31} = -2$ i dodajmo ga trećem retku. Dobit ćemo nulu na poziciji $(3,1)$:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Postupak nastavljamo s korakom 1, tražeći među sljedećim retcima na poziciji drugog stupca ne-nul element. Takav ne postoji, pa prelazimo na treći stupac. U ovom primjeru, stožer postaje element a_{23} koji ima vrijednost 10. Sljedeća transformacija je množenje drugoga retka s $\frac{1}{10}$:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nakon ovoga, elemente drugoga retka množimo s -2 i dodajemo prvom, želeći poništiti element a_{13}:

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Istu operaciju ponavljamo i s preostalim elementom u trećem stupcu. Drugi redak množimo s -4 i dodajemo trećem. Slučajno, time se poništava cijeli treći redak:

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobiven je reducirani oblik matrice.

Primjer 9.

Svedi na reducirani oblik matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

►

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \textit{prvi redak} \times(-2) \\ \textit{dodajemo drugom} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \textit{drugi redak} \\ \textit{dijelimo s } -4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \textit{drugi redak} \times(-2) \\ \textit{dodajemo prvom} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \textit{treći redak} \\ \textit{dijelimo s } 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente u} \\ \textit{trećem stupcu} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \textit{zamjenjujemo} \\ \textit{prvi i treći} \\ \textit{redak} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{prvog stupca} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{drugog stupca} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \textit{dijelimo} \\ \textit{drugi redak s } 3 \end{array}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{prvog stupca} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{trećeg stupca} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \textit{dijelimo prvi redak s } 2 \\ \textit{drugi s -1} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◄

3.4. Elementarne matrice. Ekvivalentne matrice

Elementarne transformacije mogu se opisati pomoću množenja s matricama triju tipova, koje se neznatno razlikuju od jedinične. Promotrimo taj postupak detaljno u sljedećem primjeru.

Primjer 10.

Odredi reducirani oblik matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

► *Korak 1.* Izabrat ćemo u prvom stupcu za stožerni element $a_{13} = 2$. Zato ćemo zamijeniti prvi i treći redak:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ovu operaciju možemo realizirati tako da matricu A s lijeve strane pomnožimo matricom $\mathbf{E}_1$ sljedećega oblika:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ta je matrica dobivena iz jedinične istom transformacijom kao i matrica $\mathbf{A}_1$ iz matrice $\mathbf{A}$: zamijenjeni su joj prvi i treći redak.) Zaista, vrijedi

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1.$$

Korak 2. Podijelimo elemente prvoga retka s a_{11} (druga elementarna transformacija). Time stožerni element postaje jednak 1.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ovu elementarnu transformaciju: množenje retka skalarom λ opisuje matrica koja na dijagonali u odgovarajućem retku umjesto jedinice ima taj skalar λ. U ovom primjeru to je matrica

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Množenjem s matricom $\mathbf{A}_1$ dobivamo

$$\mathbf{E}_2\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2.$$

Korak 3. Pomoću stožernog elementa možemo poništiti sve preostale elemente u prvome stupcu, primjenjujući treću elementarnu transformaciju.

Tako npr. množenjem prvoga retka s $-a_{21}$ i dodavanjem drugome retku dobivamo nulu na poziciji $(2,1)$. Isti postupak ponovimo sa svim preostalim retcima.

U zadanom primjeru, prvi redak množimo s 2 i dodajemo drugom

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Treća je elementarna matrica nešto složenija, no i nju dobivamo iz jedinične identičnom elementarnom transformacijom: element jednog retka pomnožen brojem λ dodajemo drugom retku. Mi smo prvi redak pomnožili s 2 dodali ga drugom, zato odgovarajuća elementarna transformacija glasi

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvjerimo se množenjem da vrijedi

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3.$$

Postupak nastavljamo tražeći među elementima drugoga stupca ne-nul element. Smijemo birati samo u preostalim retcima (dakle, ne uzimamo u obzir prvi redak). U ovom primjeru, stožer postaje element a_{22} koji ima vrijednost 4. Sljedeća transformacija je množenje drugoga retka s $\frac{1}{4}$. Transformirana matrica i odgovarajuća elementarna glase:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nakon ovoga, elemente drugoga retka množimo s $\frac{1}{2}$ i dodajemo prvom, želeći poništiti element a_{12}:

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Istu operaciju ponavljamo i s preostalim elementom u drugom stupcu. Dodajemo drugi redak trećem.

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na koncu postupka dobivamo matrični prikaz reduciranog oblika matrice A:

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{E}_6\mathbf{E}_5\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}. \ ◄ \tag{11}$$

3.4.1. Elementarne matrice

Opišimo sad oblik elementarnih matrica za svaku od tri elementarne transformacije, u općenitom slučaju. Ako je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, tad su elementarne matrice kvadratne reda m. Naglasimo još jednom da elementarnoj transformaciji nad retcima matrice $\mathbf{A}$ odgovara u elementarnoj matrici identična takva transformacija nad retcima jedinične matrice.

- *Prva elementarna matrica*: i-ti redak zamijenimo s j-tim,

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow i \\ \\ \longleftarrow j \\ \\ \end{array}$$

(Matrica ima sve elemente kao i jedinična, osim $e_{ii} = e_{jj} = 0$, $e_{ij} = e_{ji} = 1$.)

- *Druga elementarna matrica*: i-ti redak množimo skalarom λ različitim od nule,

$$\mathbf{E}_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

(Svi ostali nenapisani elementi jednaki su onima u jediničnoj matrici.)

- *Treća elementarna matrica*: i-ti redak pomnožen skalarom λ dodajemo j-tom retku.

$$\mathbf{E}_{ij}(\lambda) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & \lambda & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow i \\ \\ \longleftarrow j \\ \\ \end{array} \quad \text{ili} \quad \mathbf{E}_{ij}(\lambda) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow j \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \end{array}$$

Dva oblika matrice odgovaraju dvjema mogućnostima: $i < j$ ili $i > j$. Matrica je istovjetna jediničnoj, osim što vrijedi $e_{ji} = \lambda$.

3.4.2. Ekvivalentne matrice

Postupak elementarnih transformacija prevodi matricu $\mathbf{A}$ na sve jednostavniji oblik. Pri tom moramo postaviti pitanje: postoje li neka svojstva zajednička svim tim matricama? Pretpostavimo da je matrica $\mathbf{B}$ dobivena iz matrice $\mathbf{A}$ nizom elementarnih transformacija:

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{A}.$$

Tad ćemo za matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ reći da su **po retcima ekvivalentne** ili pak, jednostavnije, **ekvivalentne**. Pisat ćemo pri tom $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Da je ova definicija jezično i matematički usklađena osigurat će nam sljedeći

Teorem 6.

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije.

Izdvojit ćemo jednu tvrdnju koja nam je potrebna u dokazu ovoga teorema u zasebnu lemu:

Lema 7.

Elementarne matrice su regularne. Inverz elementarne transformacije opet je elementarna transformacija.

Dokaz. Inverz prve glasi

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}.$$

Za matricu drugoga tipa je pak $\mathbf{E}_i(\lambda)^{-1} = \mathbf{E}_i(1/\lambda)$.

Za matricu treće transformacije vrijedi $\mathbf{E}_{ij}(\lambda)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-\lambda)$.

Lako se možemo uvjeriti (matričnim množenjem ili naprosto opisom djelovanja) u istinitost ovih formula.

Dokaz teorema. Prisjetimo se definicije relacije ekvivalencije. Ovaj teorem tvrdi da vrijedi:

- $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$ (matrica je ekvivalentna sama sebi) — refleksivnost.
- Ako je $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, tad je $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$ — simetričnost.
- Ako je $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, tad je $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$ — tranzitivnost.

Refleksivnost. Matrica $\mathbf{A}$ ekvivalentna je sama sebi, jer je jedinična matrica na popisu elementarnih (množenje prvoga retka brojem 1!).

Simetričnost. Ovo je najvažnije svojstvo. Da bismo ga dokazali, dovoljno je primijetiti da za svaku elementarnu transformaciju možemno naći njezinu inverznu, koja poništava djelovanje prve.

Tu inverznu transformaciju možemo lako opisati riječima. Štoviše, matrica koja odgovara inverznoj transformaciji upravo je inverzna matrica početne elementarne matrice. Iskoristimo to u sva tri moguća slučaja.

- Ako je matrica $\mathbf{B}$ dobivena iz matrice $\mathbf{A}$ zamjenom i-toga i j-toga retka, tad je inverzna transformacija istoga oblika, $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$. Zato, iz relacije $\mathbf{B} = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$ slijedi (množenjem s matricom $\mathbf{E}_{ij}$ slijeva) $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{B}$.
- Ako je matrica $\mathbf{B}$ dobivena iz matrice $\mathbf{A}$ množenjem i-toga retka skalarom $\lambda \neq 0$, tad je inverzna transformacija množenje istoga retka skalarom $1/\lambda$. U matričnom zapisu $\mathbf{E}_i(\lambda)^{-1} = \mathbf{E}_i(1/\lambda)$. Zato iz $\mathbf{B} = \mathbf{E}_i(\lambda)\mathbf{A}$ slijedi $\mathbf{A} = \mathbf{E}_i(\lambda)^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E}_i(1/\lambda)\mathbf{B}$.
- Ako je matrica $\mathbf{B}$ dobivena iz matrice $\mathbf{A}$ tako da se i-ti redak pomnoži skalarom λ i doda j-tom, inverzna transformacija je opisana postupkom: pomnoži i-ti redak skalarom $-\lambda$ i dodaj ga j-tom. Očito će se djelovanje ovih dviju transformacija poništiti.

Time smo pokazali kako se poništava pojedina elementarna transformacija. Da dokažemo tvrdnju, dovoljno je primijetiti da relacija $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ znači da je $\mathbf{B}$ dobivena iz $\mathbf{A}$ nizom elementarnih transformacija:

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{A}.$$

Obrnuta veza glasi

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1)^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_r^{-1}\mathbf{B}.$$

Svaka od matrica $\mathbf{E}_i^{-1}$ opisuje ponovo elementarnu transformaciju. Zato je $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$.

Tranzitivnost. Ovo je svojstvo očigledno. $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ znači da se $\mathbf{B}$ dobiva iz $\mathbf{A}$ nizom elementarnih transformacija. Ako je $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, tad se $\mathbf{C}$ dobiva iz $\mathbf{B}$ (nekim drugim) nizom elementarnih transformacija. Očigledno se i $\mathbf{C}$ dobiva iz $\mathbf{A}$ nizom elementarnih transformacija te je $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.

— ◆ —

Pouka ovoga teorema je: matrica $\mathbf{A}$ i njezina reducirana forma $\mathbf{A}_R$ ekvivalentne su matrice, jedna se može rekonstruirati iz druge.

3.5. Rang i inverz matrice

U dosadašnjemu razmatranju nismo odgovorili na važno pitanje: je li reducirana forma matrice jedinstvena? Odgovor je: da! Izbor elementarnih transformacija nije jednoznačan, no rezultat ne ovisi o izabranome poretku.

Dokaz ovoga svojstva, korištenjem metoda koje smo do sad usvojili, zahtijevao bi previše opisivanja. Student ga može sam obrazložiti, imajući u vidu gore dokazani teorem: svake dvije (moguće različite!) završne forme međusobno su ekvivalentne. To znači da se jedna iz druge mogu dobiti elementarnim transformacijama. Međutim, ako se one razlikuju u bilo kojem od svojstava reducirane matrice, tad se može uvidjeti da je nemoguće prevesti jednu matricu u drugu korištenjem elementarnih transformacija.

Prema tome, smatrat ćemo da je reducirana matrica $\mathbf{A}_R$ zadane matrice $\mathbf{A}$ jedinstvena. Tako ima smisla sljedeća definicija.

Rang matrice

Rang matrice jest broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice. Označavamo ga simbolom $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$.

3.5.1. Određivanje ranga matrice

Pojam ranga vrlo je važan pojam koji će nas pratiti u daljnjim izlaganjima. Da bismo utvrdili rang, potrebno je matricu svesti na reducirani oblik. Istina, ako je samo rang u pitanju, dovoljno se je zaustaviti na obliku u kojem prepoznajemo stožerne elemente *ispod* kojih se nalaze nule (a ne nužno i iznad kojih). Međutim, određivanje ranga obično je povezano s drugim zadacima poput nalaženja inverzne matrice ili pak rješavanja linearnih sustava za što nam je potreban upravo reducirani oblik matrice.

Primjer 11. Matrica $\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ je ranga 3, matrica $\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&4&4\end{bmatrix}$ je ranga 2, a matrica $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\2&2&2&2\end{bmatrix}$ ima rang 1.

3.5.2. Rang i regularne matrice

Iz definicije ranga slijedi da $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$ nije veći od broja redaka matrice $\mathbf{A}$, $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \leqslant m$. Iz definicije reducirane forme slijedi da rang nije veći niti od broja stupaca matrice $\mathbf{A}$, $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \leqslant n$, jer je najviše toliko mjesta za mogući raspored stožernih elemenata po stupcima reducirane matrice.

Zbog jednoznačnosti i definicije reducirane forme možemo smatrati da je dokazana sljedeća lema

Lema 8. Kvadratna matrica $\mathbf{A}$ reda n ima rang jednak n ako i samo ako je $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}$.

Lema 9. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{A}$ regularna i $\mathbf{B}$ ekvivalentna s njom, tad je i matrica $\mathbf{B}$ regularna.

Dokaz. Budući da je $\mathbf{B}$ po retcima ekvivalentna matrici $\mathbf{A}$, možemo napisati

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}.$$

Svaka od elementarnih matrica je regularna pa postoji umnožak $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_r^{-1}$, no to je upravo izraz za inverz matrice $\mathbf{B}$.

Tu tvrdnju možemo izvesti iz samoga oblika matrice $\mathbf{B}$: ona je produkt regularnih matrica pa je i sama regularna matrica.

— ◆ —

Na osnovu ovih razmatranja sad možemo izvesti nekoliko dalekosežnih posljedica koje se tiču inverza matrice.

Pretpostavljat ćemo nadalje da je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n. Za nju ćemo reći da je ona **punoga ranga**, ako je $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$. Tad je, po gornjoj lemi $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}$. To znači da se jedinična matrica može dobiti nizom elementarnih transformacija iz matrice $\mathbf{A}$. Stoga možemo napisati:

$$\mathbf{I} = (\mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1)\mathbf{A}.$$

Zaključujemo da je $\mathbf{A}$ regularna matrica. Štoviše, njezina inverzna matrica jednaka je umnošku elementarnih matrica koje su sudjelovale u transformacijama:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1.$$

Time smo dokazali jedan (za nas važniji) smjer u ovome teoremu

Teorem 10. Kvadratna matrica $\mathbf{A}$ je regularna ako i samo ako ima puni rang.

Dokažimo sad i drugi smjer.

Dokaz. Neka je matrica $\mathbf{A}$ regularna. Svedimo i nju na reducirani oblik $\mathbf{A}_R$. Dvije su mogućnosti:

1) $\mathbf{A}_R$ nema niti jedan nul redak.
2) $\mathbf{A}_R$ ima barem jedan nul redak.

U drugom slučaju matrica $\mathbf{A}_R$ nije regularna, jer je njezina determinanta jednaka nuli. Zato, po lemi 9, niti $\mathbf{A}$ nije regularna jer je ekvivalentna matrici $\mathbf{A}_R$. Ovo je kontradikcija s polaznom pretpostavkom u teoremu.

Prema tome, preostaje prvi slučaj. Matrica $\mathbf{A}_R$ nema niti jedan nul redak, dakle ima n stožernih elemenata. Zato je njezin rang n, čime je dokaz završen.

— ◆ —

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica punoga ranga. Iskažimo sad algoritam za nalaženje inverzne matrice. Taj se algoritam zasniva na gore navedenoj formuli: Inverzna matrica jednaka je produktu elementarnih matrica upotrebljenih da se matrica $\mathbf{A}$ svede na reduciranu formu $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}$. Međutim, želimo ukazati na to da pri računu inverzne matrice nije potrebno ispisivati eksplicitno matrice $\mathbf{E}_i$ i računati njihove umnoške. Dovoljno se je prisjetiti da se elementarne matrice dobivaju iz jedinične matrice *istim transformacijama* koje su učinjene na matrici $\mathbf{A}$. Također, uzastopna primjena dviju transformacija odgovara umnošku elementarnih matrica. Stoga možemo koristiti sljedeći algoritam:

Algoritam za računanje inverzne matrice

Korak 1.

Napišimo matricu tipa $n \times 2n$ u kojoj je s desna matrice A napisana jedinična matrica $\mathbf{I}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right].$$

Shematski, ovu proširenu matricu možemo zapisati u obliku $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$.

Korak 2.

Primjenimo elementarne transformacije na matrici $\mathbf{A}$. Sve transformacije pritom vršimo i na desnoj strani proširene matrice. Elementarne transformacije daju niz matrica oblika

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \sim [\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{E}_1] \sim [\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1] \sim \ldots \sim [\mathbf{A}_R \mid \mathbf{E}_n \cdots \mathbf{E}_1].$$

Rezultat je matrica oblika $[\mathbf{A}_R \mid \mathbf{B}]$.

Korak 3.

Ako je $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}$, tad je matrica regularna i s njezine desne strane nalazi se inverzna matrica, t.j. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$! Ako je pak $\mathbf{A}_R \neq \mathbf{I}$, matrica nije regularna i ne postoji njoj inverzna matrica.

— ◆ —

Zašto ovaj algoritam funkcionira? Pratimo jednu po jednu transformaciju. U početku imamo matricu oblika

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}].$$

Nakon prve transformacije (primijenjene na obje matrice!) imamo

$$[\mathbf{E}_1\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_1].$$

Nastavimo s transformacijama. Svaka transformacija odgovara množenju s elementarnom matricom kako lijeve, tako i desne strane. Na koncu postupka ćemo imati, u slučaju regularne matrice

$$[\mathbf{I} \mid \mathbf{B}] = [\mathbf{A}_R \mid \mathbf{B}] = [\mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1].$$

Vrijedi $\mathbf{B} = \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1$ i $\mathbf{I} = \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{A}$, pa zaključujemo da je upravo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Primjer 12. Odredi inverz matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&-1&3\\1&0&-2\\4&0&2\end{bmatrix}$.

► Iz proširene matrice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ elementarnim transformacijama nad retcima trebamo dobiti oblik $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&3&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\4&0&2&0&0&1\end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l}\textit{pomnožimo}\\ \textit{1. r. s } \frac{1}{2}\end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\4&0&2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l}\textit{dodajmo 1. r. } \times(-1) \textit{ drugom r.}\\ \textit{dodajmo 1. r. } \times(-4) \textit{ trećem r.}\end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{7}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&2&-4&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim (\textit{pomnožimo 2. r. s } 2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-7&-1&2&0\\0&2&-4&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l}\textit{dodajmo 2. r. } \times\frac{1}{2} \textit{ prvom r.}\\ \textit{dodajmo 2. r. } \times(-2) \textit{ trećem r.}\end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&-7&-1&2&0\\0&0&10&0&-4&1\end{array}\right]$$

$$\sim \left(\textit{pomnožimo 3. r. s } \tfrac{1}{10}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&-7&-1&2&0\\0&0&1&0&-\frac{4}{10}&\frac{1}{10}\end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l}\textit{dodajmo 3. r. } \times 2 \textit{ prvom r.}\\ \textit{dodajmo 2. r. } \times 7 \textit{ drugom r.}\end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{2}{10}&\frac{2}{10}\\0&1&0&-1&-\frac{8}{10}&\frac{7}{10}\\0&0&1&0&-\frac{4}{10}&\frac{1}{10}\end{array}\right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{B}].$$

Zaključujemo da je $\mathbf{A}$ regularna te da njezina inverzna matrica iznosi

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}0&\frac{2}{10}&\frac{2}{10}\\-1&-\frac{8}{10}&\frac{7}{10}\\0&-\frac{4}{10}&\frac{1}{10}\end{bmatrix}. \ ◄$$

Primjer 13. Odredi inverz matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-3&1&-1\\1&0&1\\-2&2&2\end{bmatrix}$.

► Postupimo kao u prošlome primjeru.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}-3&1&-1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l}\textit{pomnožimo}\\ \textit{1. r. s } -\frac{1}{3}\end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\1&0&1&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l}\textit{dodajmo 1. r. } \times(-1) \textit{ drugom r.}\\ \textit{dodajmo 1. r. } \times 2 \textit{ trećem r.}\end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\0&\frac{4}{3}&\frac{8}{3}&-\frac{2}{3}&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l}\textit{pomnožimo}\\ \textit{2. r. s } 3\end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\0&1&2&1&3&0\\0&\frac{4}{3}&\frac{8}{3}&-\frac{2}{3}&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{l}\textit{dodajmo 2. r. } \times\frac{1}{3} \textit{ prvom r.}\\ \textit{dodajmo 2. r. } \times -\frac{4}{3} \textit{ trećem r.}\end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&2&1&3&0\\0&0&0&-2&-4&1\end{array}\right].$$

Dobili smo s lijeve strane reducirani oblik $\mathbf{A}_R$ matrice $\mathbf{A}$ koji nije jednak jediničnoj matrici $\mathbf{I}$. Stoga matrica $\mathbf{A}$ nije regularna i nema inverza. ◄

3.6. Linearna nezavisnost vektora i rang matrice

Sa V^n ćemo označavati prostor svih vektor-stupaca duljine n. Taj se prostor samo u načinu zapisivanja elemenata razlikuje od prostora $\mathbf{R}^n$ uređenih n-torki realnih brojeva.

Linearna kombinacija. Prostor razapet vektorima

Neka su $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ bilo koji vektori iz prostora V^n

Linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ je vektor oblika

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k.$$

pri čemu su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ po volji odabrani skalari.

Skup svih ovakvih linearnih kombinacija nazivamo **prostorom razapetim vektorima** $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ i označavamo s

$$L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}\}.$$

Primjer 14. Izaberimo u prostoru V^2 vektor $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Prostor razapet s ovim vektorom je

$$L(\mathbf{a}_1) = \{\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}_1,\ \lambda \in \mathbf{R}\} = \left\{\begin{bmatrix}\lambda\\ \lambda\end{bmatrix},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Geometrijski, to je pravac kroz ishodište, određen vektorom $\mathbf{a}_1$.

Primjer 15. Uz vektor $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ uzmimo još $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Tad vrijedi

$$L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \left\{\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\right\}.$$

Tvrdimo da je ovaj prostor jednak V^2. To znači da se svaki vektor iz V^2 može napisati u obliku linearne kombinacije vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$. Da se uvjerimo u to, uzet ćemo bilo koji vektor $\mathbf{x} \in V^2$. Jednadžbu

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 \iff \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad (12)$$

možemo napisati u obliku linearnog sustava

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= x_1\\ \lambda_1 &= x_2\end{aligned}$$

Odavde je $\lambda_1 = x_2$, $\lambda_2 = x_1 - x_2$. Dakle, za svaki vektor $\mathbf{x}$ možemo pronaći odgovarajuće koeficijente λ_1 i λ_2 za koje će vrijediti (12).

Ovaj primjer ukazuje da je pojam linearne kombinacije usko povezan s problemima rješavanja linearnih sustava. Ako se zadani vektor može rastaviti na izabrane komponente $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$, tad se koeficijenti u takvome rastavu određuju rješavanjem linearnih sustava. O tome će biti više riječi u narednome poglavlju.

Primjer 16. Izaberimo u prostoru V^3 vektore $\mathbf{a}_1 = [1,1,0]^\top$, $\mathbf{a}_2 = [1,0,0]^\top$. Uvjeri se da je $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ prostor vektora u xOy ravini.

Primjer 17. Neka je sad $\mathbf{a}_1 = [1,1,0]^\top$, $\mathbf{a}_2 = [1,0,1]^\top$. Prostor $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ sadrži sve radij vektore koji leže u ravnini određenoj s $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$.

Izaberimo $\mathbf{a}_3 = [0,1,-1]^\top$. Za ovakav vektor vrijedi pak $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ zato što se $\mathbf{a}_3$ nalazi u tom prostoru! Zaista, vrijedi $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ i stoga je $\mathbf{a}_3$ linearna kombinacija prvih dvaju vektora.

Izaberimo $\mathbf{a}_4 = [0,0,1]^\top$. Uvjeri se da je $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4) = V^3$.

Ovi primjeri nameću potrebu za prolaženjem algoritma pomoću kojeg ćemo moći točno utvrditi kako izgleda prostor razapet izabranim skupom vektora.

Mi takav algoritam već poznajemo: to je svođenje matrice na reducirani oblik! Da bismo objasnili tu vezu, potrebne su nam najprije sljedeće važne definicije.

— ◆ —

Linearna nezavisnost

Kažemo da su vektori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ **linearno nezavisni** ako iz jednakosti

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

slijedi da svi skalari moraju biti jednaki nuli: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Drugim riječima, vektori su linearno nezavisni ako njihova linearna kombinacija *iščezava samo na trivijalni način.*

Vektori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ su **linearno zavisni** ako nisu linearno nezavisni.

S obzirom na važnost ovoga pojma, ispišimo i tu definiciju eksplicitno: $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ su linearno zavisni ako postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ od kojih barem jedan nije jednak nuli takvi da vrijedi

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Kažemo još da linearna kombinacija vektora *iščezava na netrivijalan način.*

Primjer 18. Dva su vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (različita od nul-vektora) linearno zavisna onda i samo onda ako postoji $\lambda \neq 0$ takav da je $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. To znači da vektor $\mathbf{b}$ leži u prostoru razapetom s vektorom $\mathbf{a}$, t.j., on je kolinearan s vektorom $\mathbf{a}$. U isto vrijeme i vektor $\mathbf{a}$ leži u prostoru razapetom s $\mathbf{b}$.

Primjer 19. Vektori $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ i $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ linearno su nezavisni. Uvjeri se u to!

Provjeri također (po definiciji!) da je trojka $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ iz primjera 17 linearno zavisna.

Primjer 20. Ovaj je primjer jednostavan, no važan. Izdvojimo sljedeće vektore iz prostora V^n:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, \ldots \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}.$$

Oni su linearno nezavisni. Zaista, linearna kombinacija ovih vektora iznosi

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}$$

i ona je jednaka nuli ako i samo ako je $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Primijeti da se svaki vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$ može prikazati u obliku linearne kombinacije vektora $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$. Ta linearna kombinacija glasi $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.

Primjer 21. Neka je zadana reducirana forma neke matrice, recimo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&2&0&3&-2\\0&1&-1&0&2&1\\0&0&0&1&2&4\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Primijeti da su njezini ne-nul retci linearno nezavisni vektori. Zaista, linearna kombinacija tih vektora glasi

$$\lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\3\\-2\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\\2\\1\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ 2\lambda_1-\lambda_2\\ \lambda_3\\ 3\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3\\ -2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3\end{bmatrix}$$

i ako je ona jednaka nuli, tad iz prvog, drugog i četvrtog retka zaključujemo da svi skalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ moraju biti jednaki nuli.

Primijetimo nadalje da se svi *stupci* matrice mogu prikazati u obliku linearne kombinacije prvoga, drugoga i četvrtoga stupca (jer ti nalikuju vektorima $\mathbf{e}_i$ iz prošloga primjera.

Ovaj primjer je tipičan za svaku matricu. Sličan zaključak očevidno vrijedi za reducirani oblik bilo koje matrice.

— ◆ —

Cilj nam je u nastavku povezati pojmove linearne zavisnosti redaka odnosno stupaca matrice s pojmom njezinoga ranga.

Za zadane vektore $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ uvijek je jednoznačno određen najveći broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$. Taj broj nazivamo **dimenzijom** prostora $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Teorem 11. Elementarnim transformacijama ne mijenja se broj linearno nezavisnih redaka matrice.

Dokaz. Opišimo što čini svaka od elementarnih transformacijama na skupu $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ redaka matrice $\mathbf{A}$. Označimo sa $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m$ retke matrice dobivene nakon pojedine elementarne transformacije.

• Zamjena redaka. Tu skup $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ prelazi u isti takav skup kojemu su zamijenjen poredak dvaju vektora. Očito je $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = L(\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m)$ pa se ni broj nezavisnih vektora ne mijenja.

• Množenje retka skalarom $\lambda \neq 0$. Neka je, zbog jednostavnosti zapisa, $\mathbf{a}'_1 = \lambda\mathbf{a}_1$. Onda je

$$L(\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m) = \{\lambda_1\lambda\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m : \lambda_i \in \mathbf{R}\} = L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m).$$

• Pretpostavimo sad da je $\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 + \lambda\mathbf{a}_1$. Svaka linearna kombinacija skupa $\{\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m\}$ ujedno je i linearna kombinacija početnoga skupa:

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{a}'_1 + \lambda_2\mathbf{a}'_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}'_m &= \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2(\mathbf{a}_2 + \lambda\mathbf{a}_1) + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m\\ &= (\lambda_1 + \lambda\lambda_2)\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m.\end{aligned}$$

Zato broj linearno nezavisnih vektora novoga skupa nije veći od broja linearno nezavisnih vektora početnoga skupa. Dakle, trećom elementarnom transformacijom broj linearno nezavisnih vektora ne može se povećati.

Ne može se niti smanjiti! Naime, istovjetnom (inverznom) transformacijom možemo iz redaka $\{\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m\}$ dobiti retke $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ te vrijedi i obratan zaključak.

Prema tome, i trećom elementarnom transformacijom broj linearno nezavisnih redaka matrice ostaje nepromijenjen.

Time je teorem dokazan.

Bit je ovoga teorema u tome što po završetku postupka svođenja matrice na reducirani oblik mi možemo pročitati broj njezinih linearno nezavisnih redaka: svi ne-nul retci međusobno su linearno nezavisni. Tako je dokazan

Teorem 12. Rang matrice jednak je broju njezinih linearno nezavisnih redaka.

Teorem 13. Svaka se regularna matrica može napisati u obliku produkta elementarnih matrica.

Dokaz. Neka je $\mathbf{A}$ regularna. Elementarnim transformacijama svodimo ju na jediničnu matricu, budući da je $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}$. Iz jednakosti $\mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$ slijedi

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_r^{-1}.$$

Inverz elementarne matrice ponovo je elementarna matrica, pa je tvrdnja dokazana.

Korolar 1. Neka je $\mathbf{A}$ regularna matrica. Onda je $\operatorname{rang}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rang}(\mathbf{B})$.

Dokaz. Prikažimo regularna matricu A kao produkt elementarnih. Iz $\mathbf{A} = \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1$ i Teorema 11 slijedi tvrdnja jer se množenje s matricom $\mathbf{A}$ svodi na elementarne transformacije matrice $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}_r \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{B}.$$

Primjer 22. Jesu li sljedeći vektori linearno nezavisni?

A. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$ i $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}5\\0\\7\end{bmatrix}$;

B. $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$ i $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$.

► **A.** Računamo rang matrice kojoj su zadani vektori retci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&1&5\\-1&2&3\\5&0&7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-2&-3\\2&1&5\\5&0&7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&5&11\\0&10&22\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&5&11\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Iako posljednja matrica još nije svedena na reducirani oblik, očito je da će $\mathbf{A}_R$ imati dva stožera pa je $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = 2$ i vektori nisu linearno nezavisni.

Uvjeri se da vrijedi $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Također se uvjeri da bismo isti rezultat dobili da smo u početku zadane vektore upisali ne kao retke već kao stupce matrice $\mathbf{A}$.

B. Sada imamo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&1&-1&0\\1&1&2&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&-3&-7&2\\0&-1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&1&-2\\0&-3&-7&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&1&-2\\0&0&-4&-4\end{bmatrix}$$

Sad zaključujemo da će reducirani oblik $\mathbf{B}_R$ imati tri stožera pa je $\operatorname{rang}(\mathbf{B}) = 3$ i vektori su linearno nezavisni. ◄

— ◆ —

U Teoremu 12 smo pokazali da je rang matrice jednak broju njezinih linearno nezavisnih redaka. Posve je netrivijalan — i donekle zbunjujući — rezultat da ista tvrdnja vrijedi i za stupce matrice. Bez obzira kakvoga ona bila tipa i bez obzira kako izgledali njezini elementi, broj linearno nezavisnih redaka jednak je broju linearno nezavisnih stupaca! Dakako, taj broj upravo je rang matrice.

Pokažimo to.

Teorem 14. Broj linearno nezavisnih redaka bilo koje matrice jednak je broju njezinih linearno nezavisnih stupaca, dakle $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^\top)$.

Dokaz. Označimo s $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_m$ retke, a s $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ stupce matrice $\mathbf{A}$. Neka je r broj linearno nezavisnih redaka, a s broj linearno nezavisnih stupaca.

Pretpostavimo (samo zbog jednostavnijeg zapisa) da je prvih r redaka matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisno. To znači da se svi preostali mogu napisati u obliku linearne kombinacije vektora $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$. Preciznije, vrijede sljedeće jednakosti za retke matrice $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_1,\\ &\vdots\\ \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_r,\\ \mathbf{a}_{r+1} &= \lambda_{r+1,1}\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{r+1,r}\mathbf{a}_r,\\ &\vdots\\ \mathbf{a}_m &= \lambda_{m,1}\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{m,r}\mathbf{a}_r.\end{aligned}$$

Izdvojimo j-tu komponentu u svakoj od ovih m vektorskih jednadžbi. Dobit ćemo sljedeću jednakost:

$$\begin{bmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{rj}\\ a_{r+1,j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix} = a_{1j}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 0\\ \lambda_{r+1,1}\\ \vdots\\ \lambda_{m,1}\end{bmatrix} + \ldots + a_{rj}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \lambda_{r+1,r}\\ \vdots\\ \lambda_{m,r}\end{bmatrix}.$$

Drukčije (jednostavnije) zapisano:

$$\mathbf{a}^j = a_{1j}\mathbf{w}_1 + \ldots + a_{rj}\mathbf{w}_r.$$

Ova relacija govori da se svaki od stupaca matrice $\mathbf{A}$ može zapisati kao linearna kombinacija nekih vektora $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$. Zato je broj linearno nezavisnih stupaca manji ili jednak od r.

Time smo dokazali da vrijedi $s \leqslant r$.

Obrnutu nejednakost ćemo dobiti ako još jednom prođemo kroz dosadašnji dokaz i u svakoj prilici zamijenimo riječ 'redak' sa 'stupac' i obratno. Istim postupkom, zaključit ćemo da vrijedi i suprotna nejednakost, $r \leqslant s$.

Time je teorem dokazan.

— ◆ —

Netom dokazani teoremi imat će dalekosežne posljedice.

Kao ilustraciju, dokažimo jedan rezultat koji će nas uvesti u sljedeće poglavlje.

Teorem 15. Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n. Jednadžba $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ako i samo ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica.

Dokaz. Umnožak $\mathbf{Ax}$ možemo napisati u obliku linearne kombinacije stupaca matrice!

$$\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{a}^1 + x_2\mathbf{a}^2 + \ldots + x_n\mathbf{a}^n.$$

Ako je $\mathbf{A}$ regularna, tj. ranga n, svi su njezini stupci linearno nezavisni. Zato iz $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ slijedi $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Obratno, ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jedino rješenje sustava, tad ova linearna kombinacija može iščezavati samo na trivijalan način pa su stupci matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisni. To znači da je njezin rang jednak n pa je matrica regularna.

— ◆ —

Istaknimo najvažnije rezultate iz ovog poglavlja.

Uvjeti za regularnost matrice

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda n sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

a) $\mathbf{A}$ je regularna;
b) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$;
c) $r(\mathbf{A}) = n$;
d) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ samo za $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Uvjeti za singularnost matrice

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda n sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

a) $\mathbf{A}$ je singularna;
b) $\det(\mathbf{A}) = 0$;
c) $r(\mathbf{A}) < n$;
d) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ za neki $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.