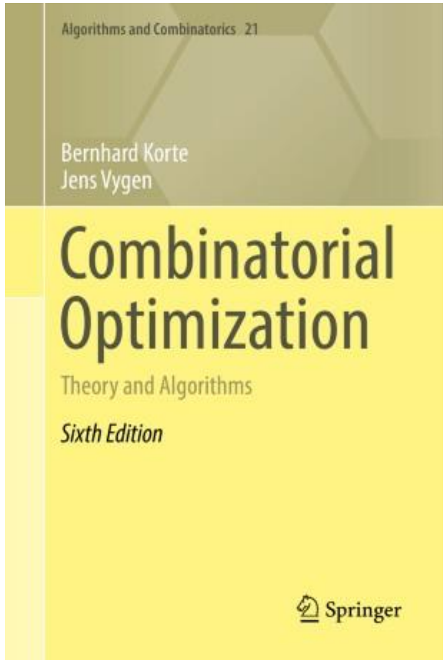
Operacijska istraživanja

9. predavanje: Cjelobrojno programiranje

Kontekst predavanja

- Cjelobrojna ljuska poliedra
- Unimodularne transformacije
- Potpuno unimodularne matrice
- Odsijecajuće ravnine
- Lagrangeova relaksacija



- Predavanje bazirano na:
  - Korte, B., Vygen, J.: Combinatorial optimization, 6th Ed. Springer Verlag (2018) – poglavlje 5

Cjelobrojni linearni programi

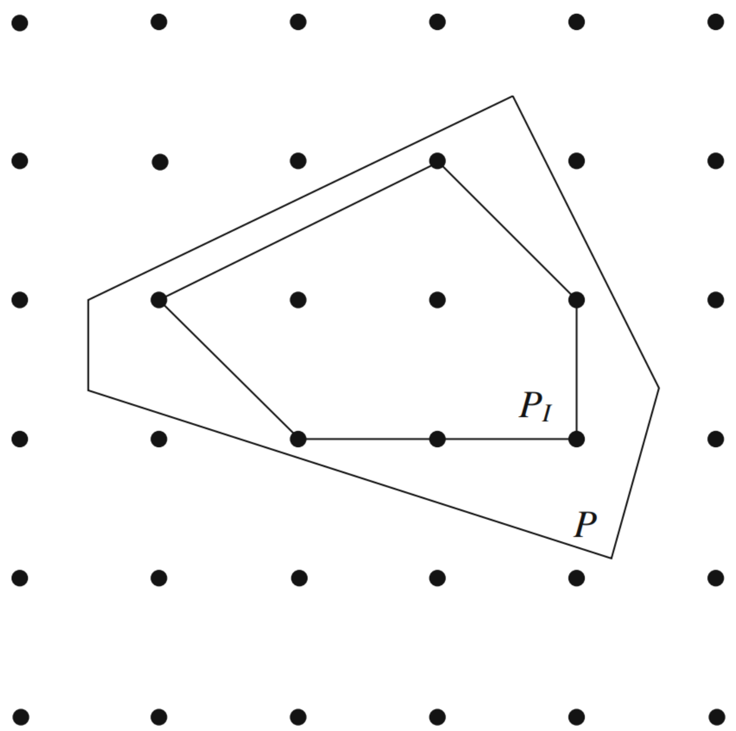
- Linearni programi sa ograničenjima cjelobrojnosti
- $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{gathered} \max c'x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{gathered}$$

- Forma za sve kombinatorne probleme
- Skup izvedivih rješenja $\{x | Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$
- Poliedar $P \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$

Cjelobrojna ljuska poliedra

- **Definicija**(**Cjelobrojna ljuska poliedra**). $P_I \subseteq P$ jest $P_I := \{x | Ax \leq b\}_I$, konveksna ljuska cjelobrojnih vektora u P.



Cjelobrojna ljuska poliedra

- **Teorem1**. Za svaki racionalni poliedar P (A,b racionalni), njegova cjelobrojna ljuska je racionalni poliedar.

- Ne vrijedi za iracionalni slučaj

Unimodularne transformacije

- **Definicija**. Kvadratna matrica je **unimodularna** ako je cjelobrojna i ako joj je determinanta -1 ili 1.
- Primjeri unimodularnih matrica U (pretp. p≠q):
  1. Jedinična matrica izuzev jednog elementa na dijagonali -1
  2. $u_{ij} = 1 \text{ ako i} = \text{j} \notin \{p, q\}\ ili\ \{i, j\} = \{p, q\}, 0\ inače$
  3. Jedinična matrica + jedan element (p,q) izvan dijagonale -1
- AU umnožak ekvivalentan:
  1. Množenje stupca sa -1
  2. Zamjena dva stupca
  3. Oduzimanje jednog stupca od drugog

Unimodularne transformacije

- **Definicija(Unimodularna transformacija)** Serija koja se sastoji od nekih od tri vrste operacija sa prethodnog slidea jest unimodularna transformacija.
- Unimodularnost zatvorena sa obzirom na:
  - Umnožak
  - Inverz

Totalne unimodularne matrice

- **Definicija(Totalna unimodularna matrica[TUM])** Matrica A je **totalno unimodularna** ako je svaka poddeterminanta od A jednaka 0, 1 ili -1.
- **Teorem 2.** Cjelobrojna matrica A je totalno unimodularna ako i samo ako je poliedar $P := \{x \colon Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ cjelobrojan za svaki cjelobrojni vektor b.
- **Svi vrhovi poliedra su cjelobrojni -> kombinatorni problemi rješivi sa LP -> polinomijalno vrijeme**

Totalne unimodularne matrice

- Matrica incidencije neusmjerenog grafa G je totalno unimodularna ako i samo ako je **G bipartitan graf**.
  - Primjer:
    - Bipartitni matching
- Matrica incidencije bilo kojeg **usmjerenog grafa** je totalno unimodularna.
  - Problemi u mrežama, npr.
    - Najkraći put
    - Tokovi u mrežama
    - Projektne mreže
- Ovi problemi rješivi u polinomijalnom vremenu (ako je ***b*** cjelobrojan!)

TUM – primjer1

- Četiri posla A, B, C, D moraju biti dodijeljeni na 4 stroja. Troškovi obavljanja za svaki par su dani u tablici:

	1	2	3	4
A	9	2	1	5
B	4	5	6	7
C	2	1	3	6
D	5	3	9	4

- Postavi problem kao ILP

TUM – primjer1

- c_{ij} – trošak za par (i,j)
- x_{ij} – 1 ako je (i,j) aktivno

  , 0 inače

	1	2	3	4
A	9	2	1	5
B	4	5	6	7
C	2	1	3	6
D	5	3	9	4

$$\min z = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{j} x_{ij} = 1, \forall i$$

$$\sum_{i} x_{ij} = 1, \forall j$$

$$\forall i \forall j\; x_{ij} \geq 0$$

Modelira se kao neusmjereni bipartitni graf između strojeva i poslova.

Matrica koeficijenata ograničenja A je totalno unimodularna i vektor desnih strana b je cjelobrojan. LP relaksacija rješava ILP!

TUM – primjer2 – transportni problem

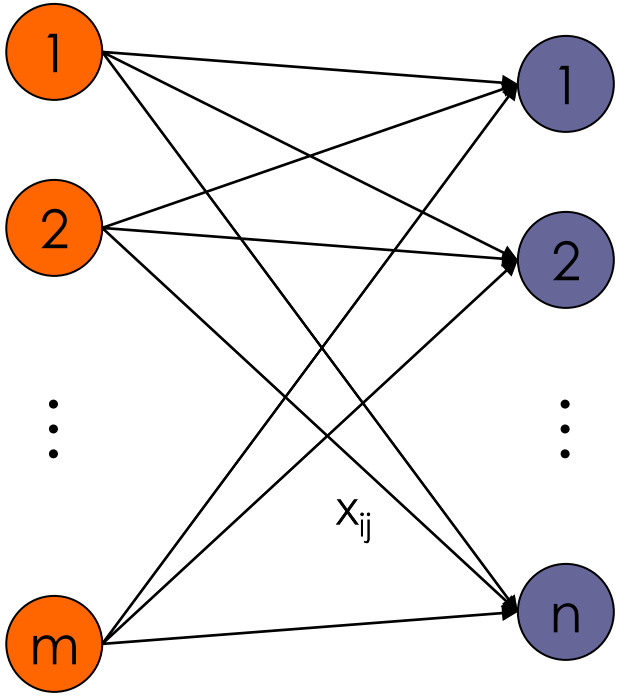
izvori

odredišta

ponuda s_1

ponuda s_2

ponuda s_m



potražnja d_1

potražnja d_2

potražnja d_n

troškovi c_{ij}

TUM – primjer2 - definicija

- Problem opskrbe **n** odredišta sa **m** izvora uz:
  - fiksne jedinične transportne troškove za pojedinu relaciju, $\mathbf{c_{ij}}$
  - ograničenu ponudu (raspoložive količine) na izvorima, $\mathbf{s_i}$
  - zadanu potražnju na odredištima, $\mathbf{d_j}$.
- Cilj: pronaći rješenje s najmanjim ukupnim transportnim troškovima.
- Ako je x_{ij} količina koju treba prenijeti sa izvora **i** na odredište **j** uz jedinični transportni trošak $\mathbf{c_{ij}}$, treba minimizirati linearnu funkciju z.
- min z = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

TUM – primjer2 - formulacija

- Problem se zapiše kao LP i riješi simpleksom! (**s**,**d** cjelobrojni!)
- Tri vrste problema:
  - Zatvoreni (ponuda=potražnja)
    - min z = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$
    - $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, j = 1 \dots m-1$
    - $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \forall i$
    - $x_{ij} \geq 0, \forall i \forall j$

    Jedno je ograničenje jednakosti linearno zavisno o ostalima pa se proizvoljno odabrano izostavlja

Otvoreni I (ponuda>potražnja)

- min z = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$
- $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, \forall j$
- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i, \forall i$
- $x_{ij} \geq 0, \forall i \forall j$

Otvoreni II (ponuda<potražnja)

- min z = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$
- $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j, \forall j$
- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq s_i, \forall i$
- $x_{ij} \geq 0, \forall i \forall j$

Ne-unimodularne matrice

- Postoje frakcionalni vrhovi
  - LP nije generalna metoda rješavanja
- Odjednom iz P prelazimo u NP
- Možemo tražiti rješenje operacijama nad poliedrima (poliedralna kombinatorika)
  - Odsijecajuće plohe
  - Grananje i ograđivanje

Odsijecajuće ravnine

- Pretp. postoje frakcionalni vrhovi

- Generirati plohe koje odsijecaju frakcionalne regije poliedra
  - Ideal: izgenerirati poliedar sa cjelobrojnim vrhovima $P_I \subseteq P$ da možemo naći rješenje LP relaksacijom
  - Praktično: samo odsijecati na mjestu gdje se optimum može nalaziti (ovisi o fji cilja), tj. naći P', takav da $P_I \subseteq P' \subseteq P$

Odsijecajuće ravnine

- Gomoryevi rezovi
  - općenito primjenjivi
  - Algoritam za rješavanje ILP
- Rezovi specifični za određene probleme
  - Jake formulacije problema

Odsijecajuće ravnine

- OSNOVA. Za konveksni $P \subseteq \mathbb{R}^n$, definiramo
$$P' \coloneqq \cap_{P \subseteq H} H_I$$

presjek preko svih racionalnih poluravnina H koje sadržavaju P. $P^{(0)} = P, P^{(i+1)} \coloneqq (P^{(i)})'$. $P^{(i)}$ je i-ta **Gomory-Chvatalova trunkacija** od P.

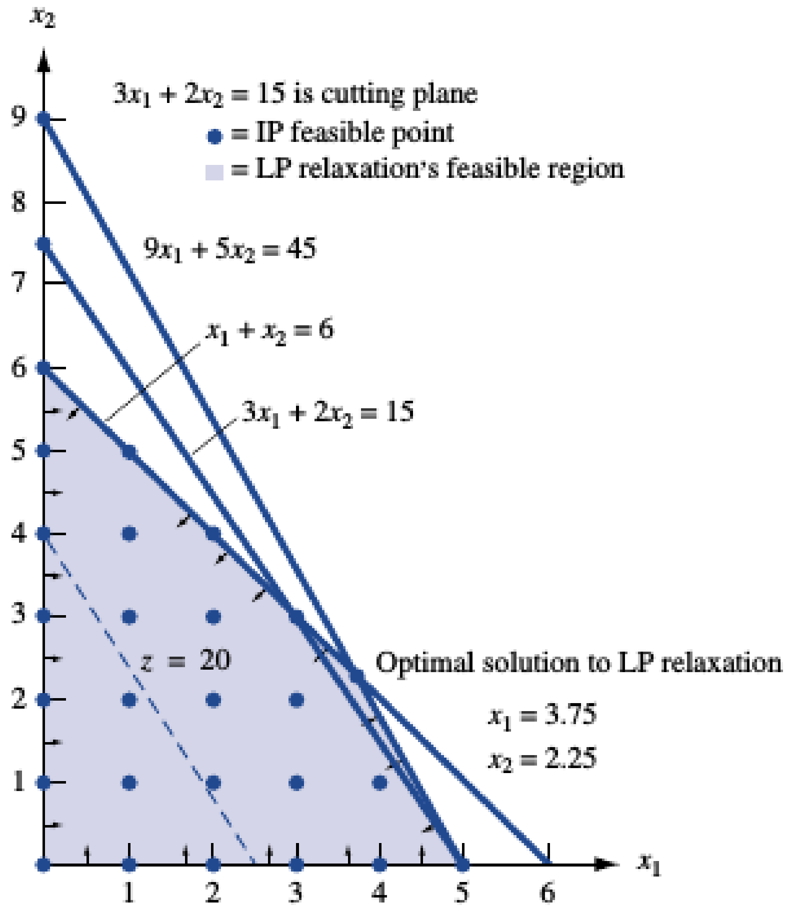
- POSTUPAK. Za svaki racionalni poliedar $P \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$,
$$P' = \{x \colon uAx \leq \lfloor ub \rfloor \; za \; svaki \; u \geq 0 \; koji \; čini \; uA \; cjelobrojan\}$$

- OBEĆANJE. Za svaki racionalni poliedar P postoji broj iteracija *t* takav da $P^{(t)} = P_I$

Odsijecajuće ravnine - algo

1. Init: $F := F_{LP}$
2. Riješi $x^* = \min\{c^T x | x \in F\}$
3. Ako $x^* \in F_{IP}$: **kraj!**

4. Dodaj nejednakost u F takvu da:
   1. Valjana za conv(F_{IP})
   2. Nevaljana za x*
5. Vrati se na korak 2.



Gomoryevi rezovi

- Arbitrarni IP sa optimalnim bazičnim rješenjem u LP relaksaciji
  - Za svaku frakcionalnu varijablu u LP rješenju nađe hiperravninu koja odvaja rješenje od skupa svih izvedivih u IP-u
  - Dodaj jednu (ili sve) hiperravnine LP relaksaciji, ponavljaj do uspjeha (može potrajati!)
- Bazična reprezentacija rješenja (x_i bazična, ostale nebazične)
  - $x_i + \sum a'_{ij} x_j = b'_i$
  - Odabere se redak sa frakcionalnom x_i

Gomoryevi rezovi

- $x_i + \sum a'_{ij} x_j = b'_i , b'_i \notin \mathbb{Z}$
- Dodavanje cjelobrojnosti
  - $x_i + \sum(a'_{ij} + \lfloor a'_{ij} \rfloor - \lfloor a'_{ij} \rfloor) x_j = b'_i + \lfloor b'_i \rfloor - \lfloor b'_i \rfloor$
- Sortiranje elemenata
  - $x_i + \sum \lfloor a'_{ij} \rfloor x_j - \lfloor b'_i \rfloor = b'_i - \lfloor b'_i \rfloor - \sum(a'_{ij} - \lfloor a'_{ij} \rfloor) x_j$

- Lijeva strana mora biti cjelobrojna za sva cjelobrojna rješenja
  - $b'_i - \lfloor b'_i \rfloor$ je manje od 1
  - $\sum(a'_{ij} - \lfloor a'_{ij} \rfloor) x_j$ suma nenegativnih vrijednosti
- Desna strana ≤0 za za cjelobrojna rješenja

Gomoryevi rezovi

- $-\sum(a'_{ij} - \lfloor a'_{ij} \rfloor) x_j \leq \lfloor b'_i \rfloor - b'_i$
  - valjana nejednakost za IP
  - Nevaljana za bazično LP rješenje
    - Lijeva strana je 0, dok je desna strana negativna!

- Gomoryev rez!

- Slična ideja za MILP

Lagrangeova relaksacija

- Pretpostavimo cjelobrojni program $\max\{c^T x : Ax \leq b, A'x \leq b', x \in \mathbb{Z}^n\}$
  - Znatno lakši za rješavanje ako se izostavi ograničenja $A'x \leq b'$

- Lagrangeova relaksacija – zaobilaženje teških ograničenja
  - Relaksacija teških ograničenja i prebacivanje u fju cilja
  - Iterativno rješavanje – podgradijentna optimizacija

Lagrangeova relaksacija

- Pretpostavimo cjelobrojni program $\max\{c^T x : Ax \leq b, A'x \leq b', x \in \mathbb{Z}^n\}$
- Razbijmo problem na dva dijela:
  - Unutarnji problem $Q \coloneqq \{x \in \mathbb{Z}^n | Ax \leq b\}$
  - Vanjski problem $\max\{c^T x : A'x \leq b', x \in Q\}$
- **Lagrangeova relaksacija** (uz $\lambda \geq 0$) - parametrizirani problem
  - $LR(\lambda) \coloneqq \max\{c^T x + \lambda^T (b' - A'x) : x \in Q\}$
- Za svaki $\lambda \geq 0$, $LR(\lambda)$ je gornja granica na vanjski problem
- **Pronaći** najnižu gornju granicu $\min\{\mathrm{LR}(\lambda) : \lambda \geq 0\}$
  - **Lagrangeov dual**

LR(λ) – podgradijentna optimizacija

Parametri: ϵ – numerička tolerancija, t_i - veličina optimizacijskog koraka u *i*

1. Inicijalizacija – arbitrarni $\lambda^{(0)} \geq 0$, i=0
2. Riješi $\mathrm{x}^{(i)} \coloneqq \operatorname{argmax} LR\left(\lambda^{(i)}\right)$
3. Izračunaj **podgradijent** $s^{(i)} = b' - A'x^{(i)}$
4. Ako $||s^{(i)}||_\infty \leq \epsilon$ onda KRAJ, optimum nađen
5. $\lambda^{(i+1)} = \max\{0, \lambda^{(i)} - t_i s^{(i)}\}$
6. $i := i + 1$, idi na 2. korak

*Konvergira (sporo) za npr. $t_i = \frac{1}{i+1}$

LR(λ) – podgradijentna optimizacija

- Ako $\lim\limits_{i \to \infty} t_i = 0$ i $\sum_{i=0}^{\infty} t_i = \infty$
  - Onda $\lim\limits_{i \to \infty} LR\left(\lambda^{(i)}\right) = \min\{LR(\lambda): \lambda \geq 0\}$
- Ako je poliedar polaznog problema neprazan, nađe se rješenje
- Za cjelobrojne programe, Lagrangeov dual ima istu gornju granicu kao LP relaksacija

Lagrangeova relaksacija - primjer

Job Assignment Problem

Instance: A set of numbers $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ (the processing times for n jobs), a number $m \in \mathbb{N}$ of employees, and a nonempty subset $S_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$ of employees for each job $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Task: Find numbers $x_{ij} \in \mathbb{R}_+$ for all $i = 1, \ldots, n$ and $j \in S_i$ such that $\sum_{j \in S_i} x_{ij} = t_i$ for $i = 1, \ldots, n$ and $\max_{j \in \{1, \ldots, m\}} \sum_{i: j \in S_i} x_{ij}$ is minimum.

Lagrangeova relaksacija - primjer

$$
\begin{array}{llcll}
\min & T & & & \\
\text{s.t.} & \sum_{j \in S_i} x_{ij} & = & t_i & (i \in \{1, \ldots, n\}) \\
& x_{ij} & \geq & 0 & (i \in \{1, \ldots, n\},\; j \in S_i) \\
& \sum_{i : j \in S_i} x_{ij} & \leq & T & (j \in \{1, \ldots, m\})
\end{array}
$$

Lagrangeova relaksacija – primjer - raspis

vanjski

$$\min\left\{T : \sum_{j\in S_i} x_{ij} \geq t_i \ (i = 1,\ldots,n),\ (x,T)\in P\right\}$$

unutarnji

$$P = \left\{ (x,T) \ : \ 0 \leq x_{ij} \leq t_i \ (i = 1,\ldots,n,\ j\in S_i), \quad \sum_{i:j\in S_i} x_{ij} \leq T \ (j = 1,\ldots,m), \quad T \leq \sum_{i=1}^{n} t_i \right\}.$$

Lagrangeova relaksacija – primjer - raspis

$$LR(\lambda) \; := \; \min\left\{T + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(t_i - \sum_{j \in S_i} x_{ij}\right) : (x, T) \in P\right\}$$