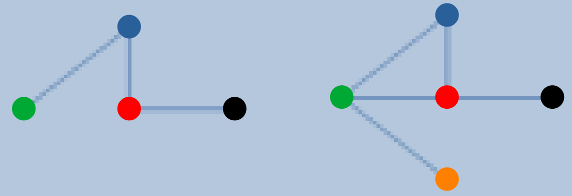
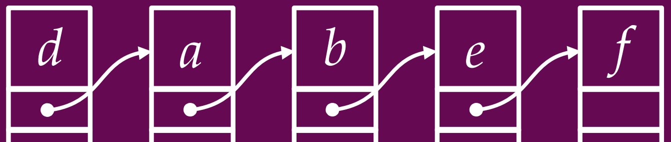
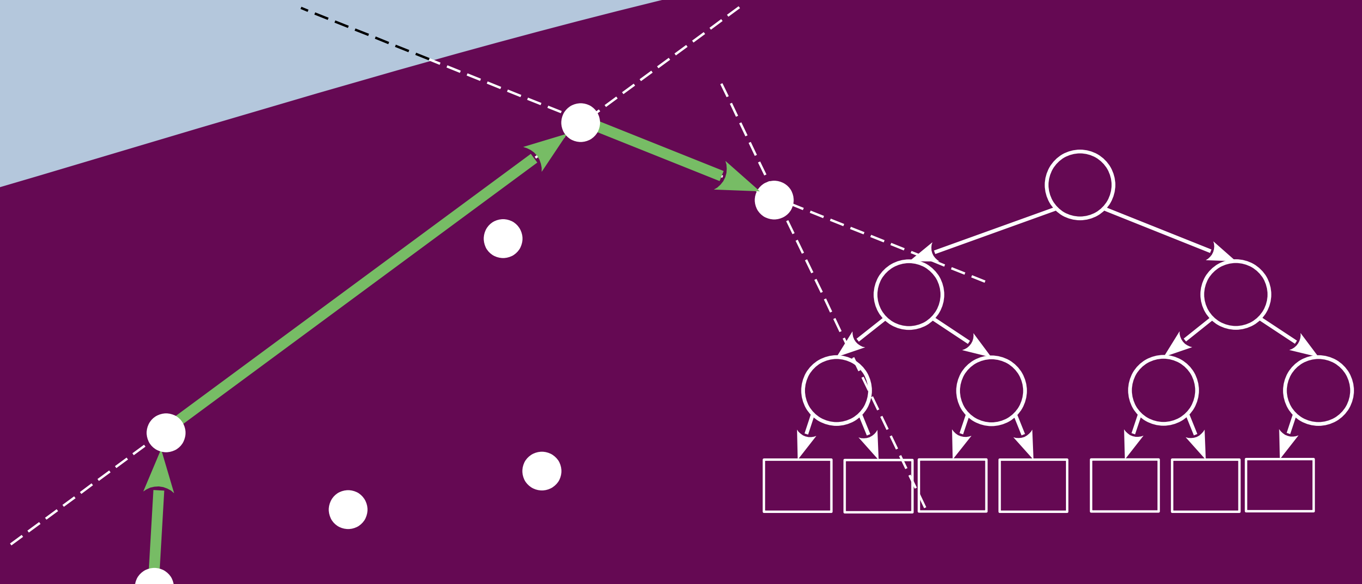
Napredni algoritmi i strukture podataka

Tjedan 5: Linearno programiranje







Što je linearni program (LP)?

- Dosta **generalna** klasa problema koja se može rješavati efikasno

- Brojne primjene u industriji
  - Lanci nabave
  - Raspoređivanje
  - Optimizacije u električnim mrežama

- Spada u kategoriju **konveksnih optimizacijskih problema**
  - LP je prva podkategorija koja je efikasno riješena (cca 1940tih)
  - Ostale kategorije su slijedile kasnije, otvoreno područje istraživanja

Literatura:

- Krleža, Brčić: „Advanced Algorithms and Data Structures”, Lecture book. (4. poglavlje)
- D. Bertsimas, and J. Tsitsiklis.: Introduction to linear optimization. Athena Scientific, 1997. (poglavlja 3.1-3.3, 3.5)

Što je linearni program (LP)?

- Rješavanje linearnih programa je dignuto na razinu industrijske pouzdanosti
  - Pouzdani i brzi alati
    - Gurobi – trenutno najbrži rješavač
    - Python – **scipy.optimize.linprog**
    - Čak integrirani u Excel

- Bitni i za dizajn i analizu algoritama, npr.
  - Algoritmi nad grafovima
  - Približni algoritmi

Linearni program (LP)?! Generalno...

minimizirati $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

uz uvjet $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{e}$

pri čemu je: $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{c} \in R^n$, $\mathbf{b} \in R^m$, $\mathbf{e} \in R^k$,

matrica $\mathbf{A} \in R^{mxn}$, matrica $\mathbf{D} \in R^{kxn}$

- Ciljna funkcija *f* (*objective function*, *cost function*)
- Varijable odluke ***x*** (*control*, *structural*, *decision variables*)
- Ograničenja sa parametrima ***A,b,D,e*** (*constraints*)

Primjer I – humanitarni transportni problem

- Pfizer proizvodi cjepiva za COVID-19 te ima proizvodne pogone u tri mjesta T1...3 s raspoloživim kapacitetima zadanima u tablici. Naručitelji su iz četiri mjesta O1...4 sa potrebama zadanima u zadnjem retku tablice. Jedinični transportni troškovi za sve kombinacije proizvodnih pogona i naručitelja su navedeni u tablici.
- Kako na najefikasniji način zadovoljiti potrebe naručitelja?

Transportni troškovi

	O1	O2	O3	O4	Kap.
T1	10	9	14	8	432
T2	7	11	9	11	138
T3	8	12	12	9	35
Nar.	500	200	115	100	

Primjer I – humanitarni transportni problem

x_{ij} - količina isporučenu iz *i*-te tvornice *j*-tom naručitelju

c_{ij} - trošak transporta po jedinici između *i* i *j*

$$\min\left(\sum_{i,j} x_{ij} c_{ij}\right)$$

uz uvjete $\sum_{j} x_{ij} \leq s_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3$

$$\sum_{i} x_{ij} = \mathrm{d}_j \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Primjer II – optimalno uparivanje u online datingu

Na dating siteu u hetero rubrici postoji M muškaraca i F žena. Na temelju popunjenih upitnika raznim modelima su izračunate kompatibilnosti za sve potencijalne parove. Site želi upariti sve u parove da bi ukupna suma normaliziranih kompatibilnosti bila što veća (utilitarizam).

kompatibilnosti

	M1	M2	M3	M4
F1	9	1	8	7
F2	1	2	1	7
F3	8	2	4	8
F4	2	4	6	4

Kombinatorni problem

Naivno rješenje: ispitati sve kombinacije F-M. Treba ispitati F! kombinacija (ako je F=M)

Primjer II – optimalno uparivanje u online datingu

x_{ij} - 1 ako je ***i*** uparen sa ***j***, 0 inače

k_{ij} – kompatibilnost za uparivanje *(i,j)*

$$\max\left(\sum_{i,j} x_{ij} k_{ij}\right)$$

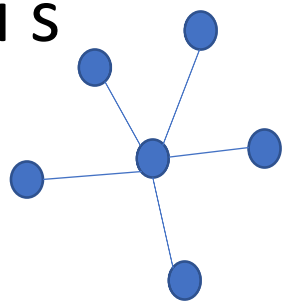
uz uvjete $$\sum_{j} x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, F$$

$$\sum_{i} x_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, M$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Primjer III – bežične raspodijeljene mreže

Centralna postaja treba ostvariti pouzdanu bežičnu komunikaciju s *N* raspodijeljenih senzora za praćenje klimatskih promjena.



Senzori se napajaju Sunčevom energijom i važno je smanjiti njihovu potrošnju. Signal *i*-tog senzora do centralne postaje stiže ***prigušen.*** Ako *i*-ta senzor emitira snagom p_i, centralna postaja prima signal snage $\lambda_i \cdot p_i$ (λ<1). Tijekom komunikacije s *i*-tim senzorom, signali svih drugih senzora koji dolaze u centralnu postaju predstavljaju smetnju i komunikacija je moguća samo ako je omjer signal/šum najmanje ρ_i.

Kolike trebaju biti emitivne snage p_i senzora kako bi se ostvarila pouzdana komunikacija uz najmanju moguću potrošnju energije?

Primjer III – bežične raspodijeljene mreže

Ukupna potrošnja je proporcionalna ukupnoj snazi pa ćemo to minimizirati:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N} p_i\right)$$

uz uvjete

$$\frac{\lambda_i p_i}{\sum_{j \neq i} \lambda_j p_j} \geq \rho_i \quad ; \quad i, j = 1, \ldots, N$$

$$p_k \geq 0 \quad ; \quad k = 1, \ldots, N \quad .$$

Budući da uvjetne (ne)jednadžbe moraju biti linearne po p_k, prevodimo ih u oblik

$$\lambda_i p_i - \rho_i \sum_{j \neq i} \lambda_j p_j \geq 0$$

LP formulacije

- Općenita formulacija je „neuredna”

- Dvije formulacije kojima težimo radi lakšeg rješavanja i pisanja algoritama
  - **Kanonska forma LP** – idealna za geometrijsku perspektivu
  - **Standardna forma LP** – idealna za algebarsku perspektivu

- Svi ostali LP se mogu prevesti u obje forme*

*pročitajte o transformacijama u skripti

Kanonska forma LP

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & \mathbf{c}^{T}\mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

pri čemu je: $\mathbf{c} \in R^{n}$, $\mathbf{b} \in R^{m}$, matrica $\mathbf{A} \in R^{mxn}$.

Standardna forma LP

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

pri čemu je: $\mathbf{c} \in R^n$, $\mathbf{b} \in R^m$ i $\mathbf{b} \geq 0$, matrica $\mathbf{A} \in R^{mxn}$

Nije dio definicije, ali pretpostavljat ćemo u sklopu predavanja da je $rang(\mathbf{A}) = m$ i $m < n$. Ako je rang manji, linearno-zavisna ograničenja se mogu ukloniti.

Grafička metoda - primjer

max $x_1 + 5 \cdot x_2$

uz uvjete
$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$x \geq 0$

GeoGebra – interaktivna geometrija

Grafička metoda - primjer

max $\quad x_1 + 5 \cdot x_2$

uz uvjete $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix}$

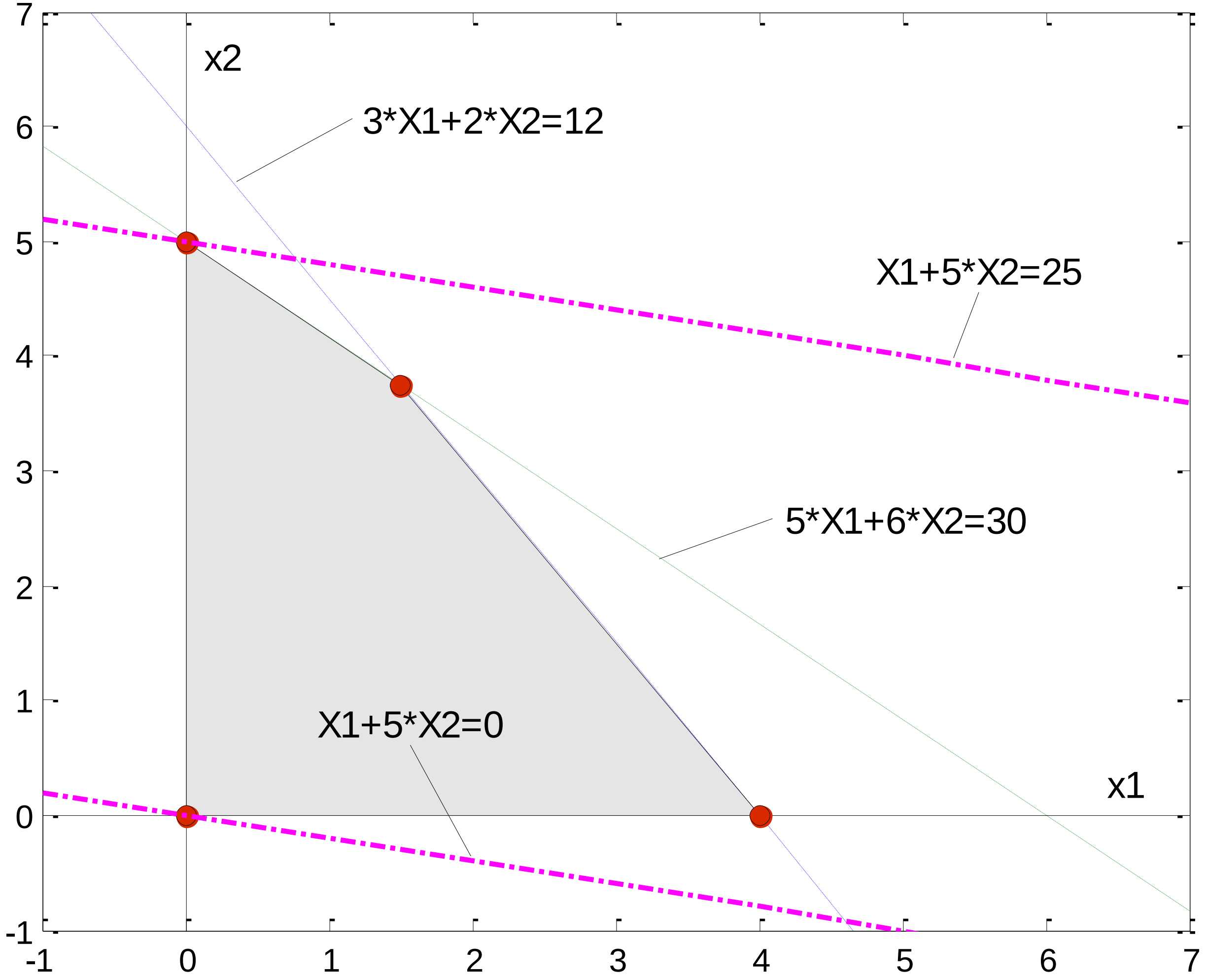
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Rješenje je sjecište pravca $x_1 + 5 \cdot x_2 = f$ s prostorom svih mogućih rješenja (sivi poligon na slici) za koje je f najveća.

Rješenje

$x = [0, 5]^T$

$f_{max} = 25$

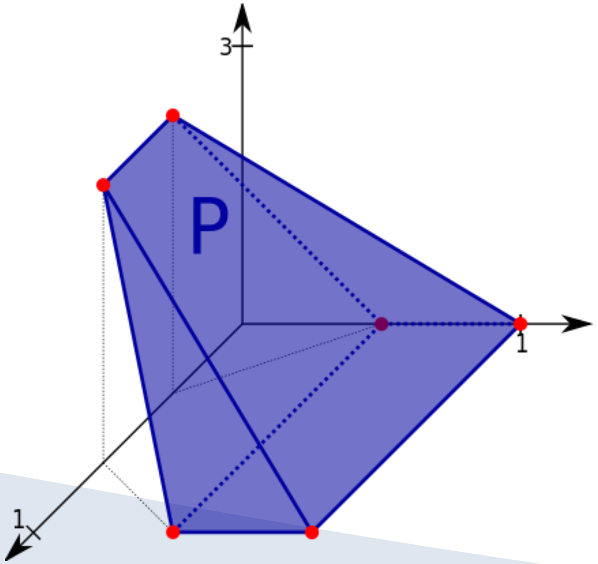


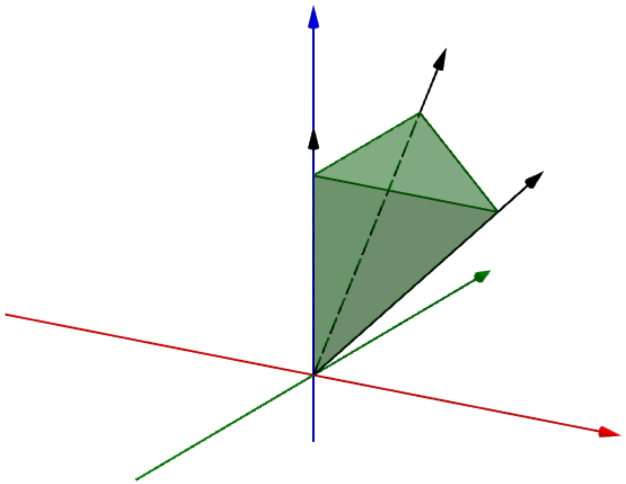
Geometrijska analiza

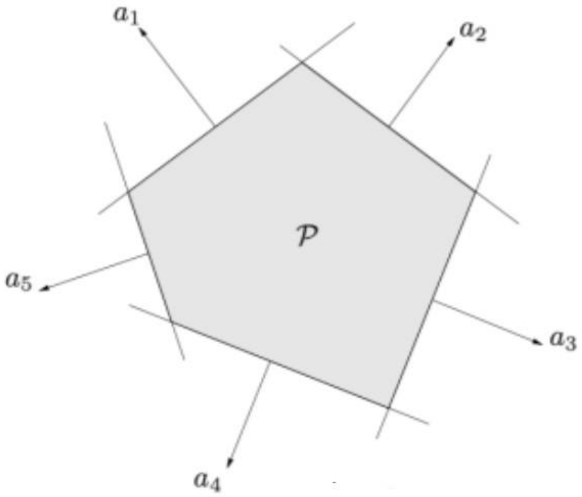
Definicija. ***Konveksni politop*** u n-dimenzionalnom prostoru jest skup vektora (točaka):

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

- Ograničenja linearnih programa!







Geometrijska analiza

Tijela opisana ograničenjima u LP su konveksni politopi P

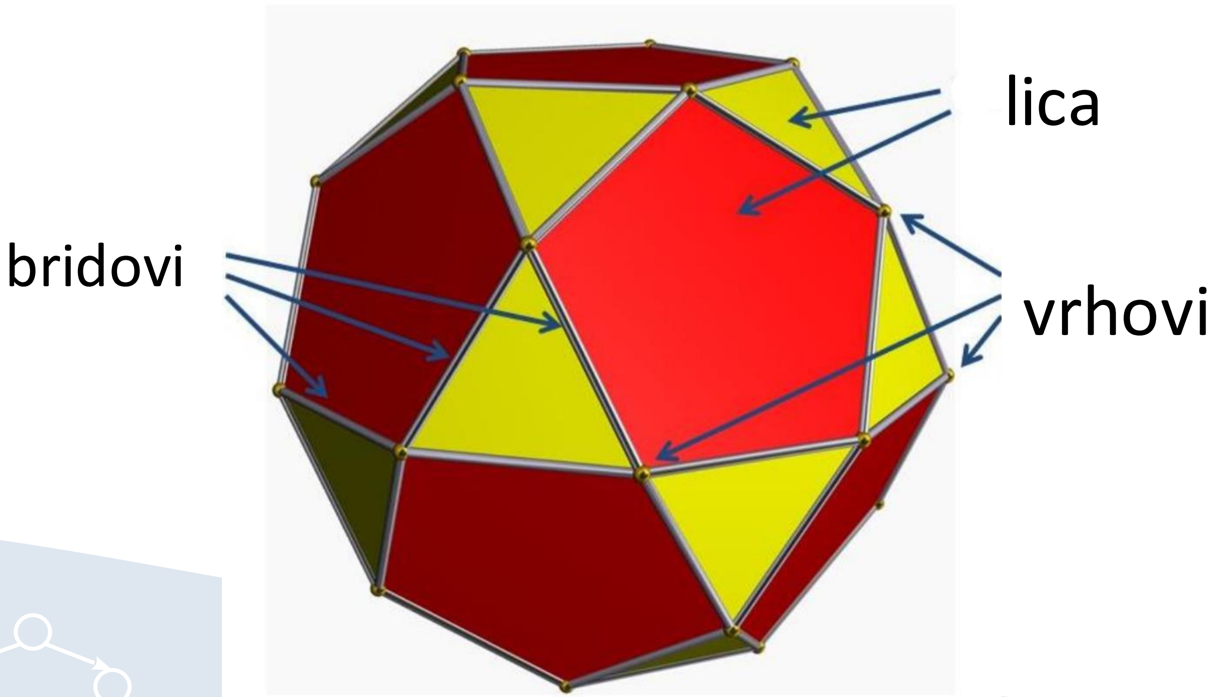
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid Ax \leq b \}$$

https://polyhedra.tessera.li/

Geometrijska analiza

Tijela opisana ograničenjima u LP su konveksni politopi P

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid Ax \leq b\}$$



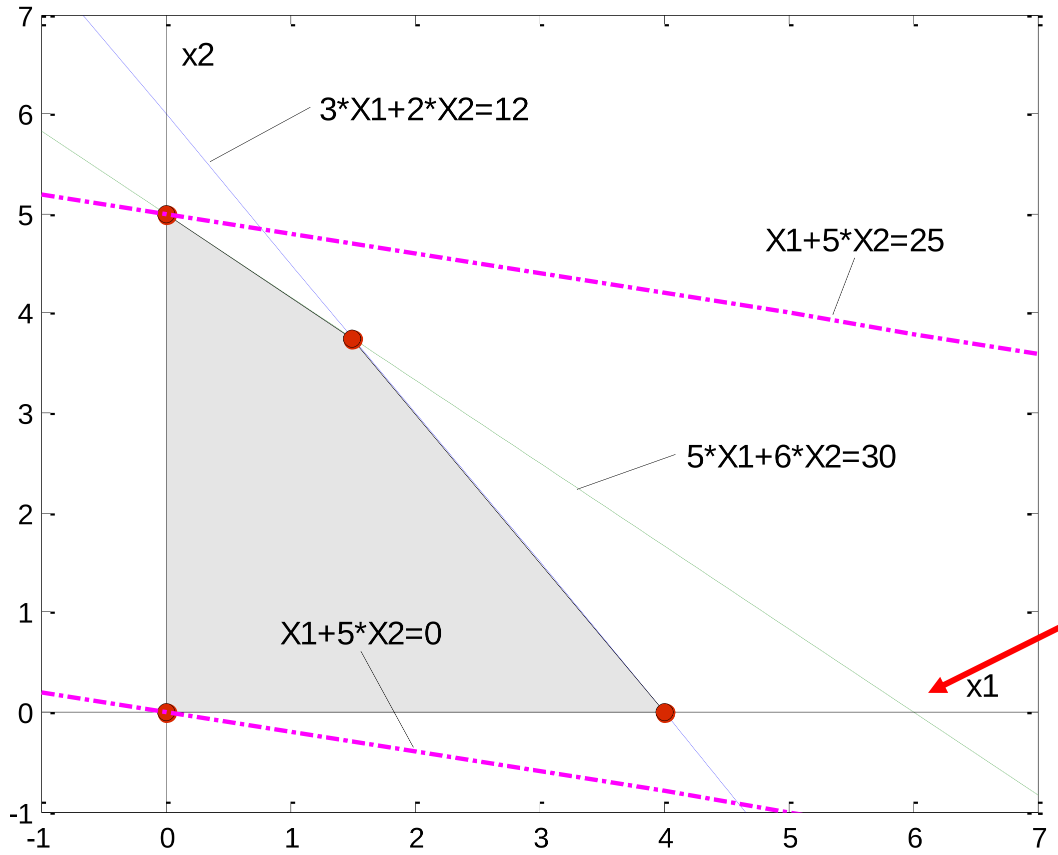
Definicija. Aktivno ograničenje u nekoj točki x je svako ograničenje koje je ispunjeno sa jednakosti u toj točki x.

Definicija. U ***n***-dimenzionalnom prostoru, **vrh politopa** je definiran kao presjecište barem ***n*** aktivnih linearno nezavisnih ograničenja pri čemu su ostala ograničenja zadovoljena.

Geometrijska analiza

Tijela opisana ograničenjima u LP su konveksni politopi P

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid Ax \leq b\}$$



Definicija. U ***n***-dimenzionalnom prostoru, **vrh politopa** je definiran kao presjecište barem ***n*** aktivnih linearno nezavisnih ograničenja pri čemu su ostala ograničenja zadovoljena.

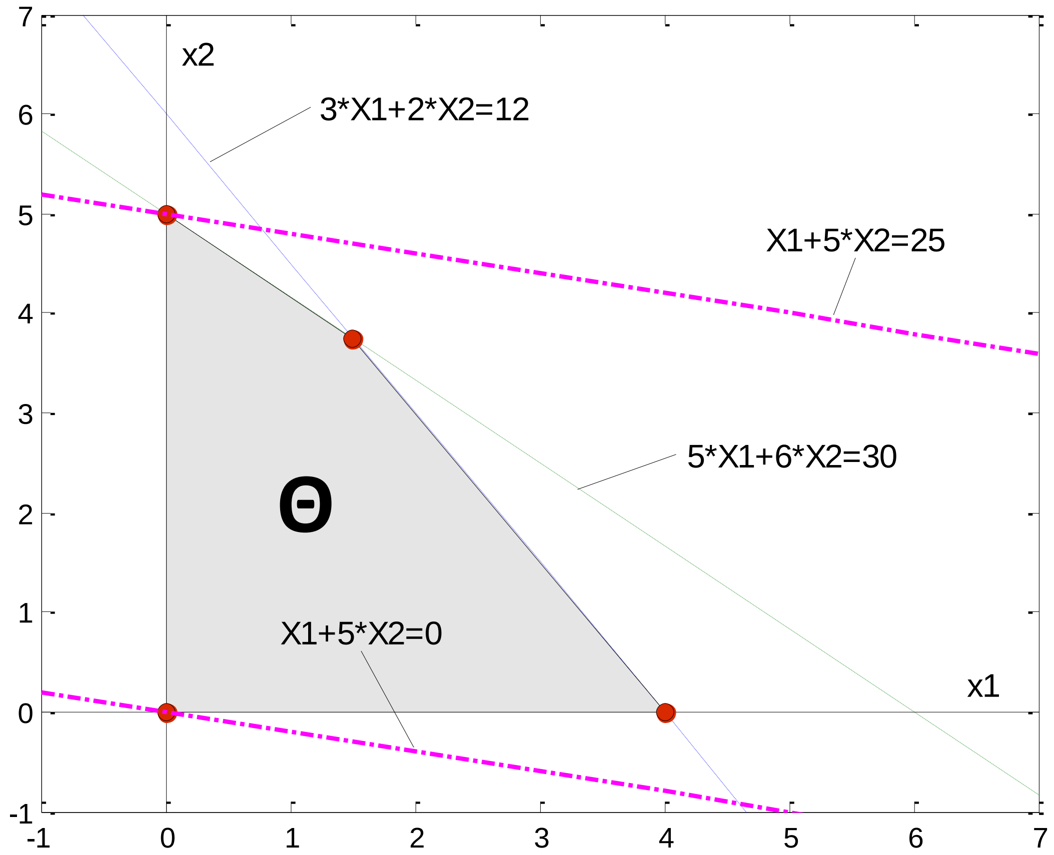
Oprez! Nije svako presjecište n aktivnih ograničenja **vrh**! Neaktivna ograničenja moraju biti ispoštovana da bismo bili u vrhu.

Susjedi?

Geometrijska analiza

- **Definicija.** Skup Θ je **konveksni skup** ako sadrži sve točke ravne spojnice između bilo kog para točaka iz skupa Θ.

  $\forall x,y \in \Theta, \forall \alpha \in (0,1): \alpha x+(1-\alpha)y \in \Theta$

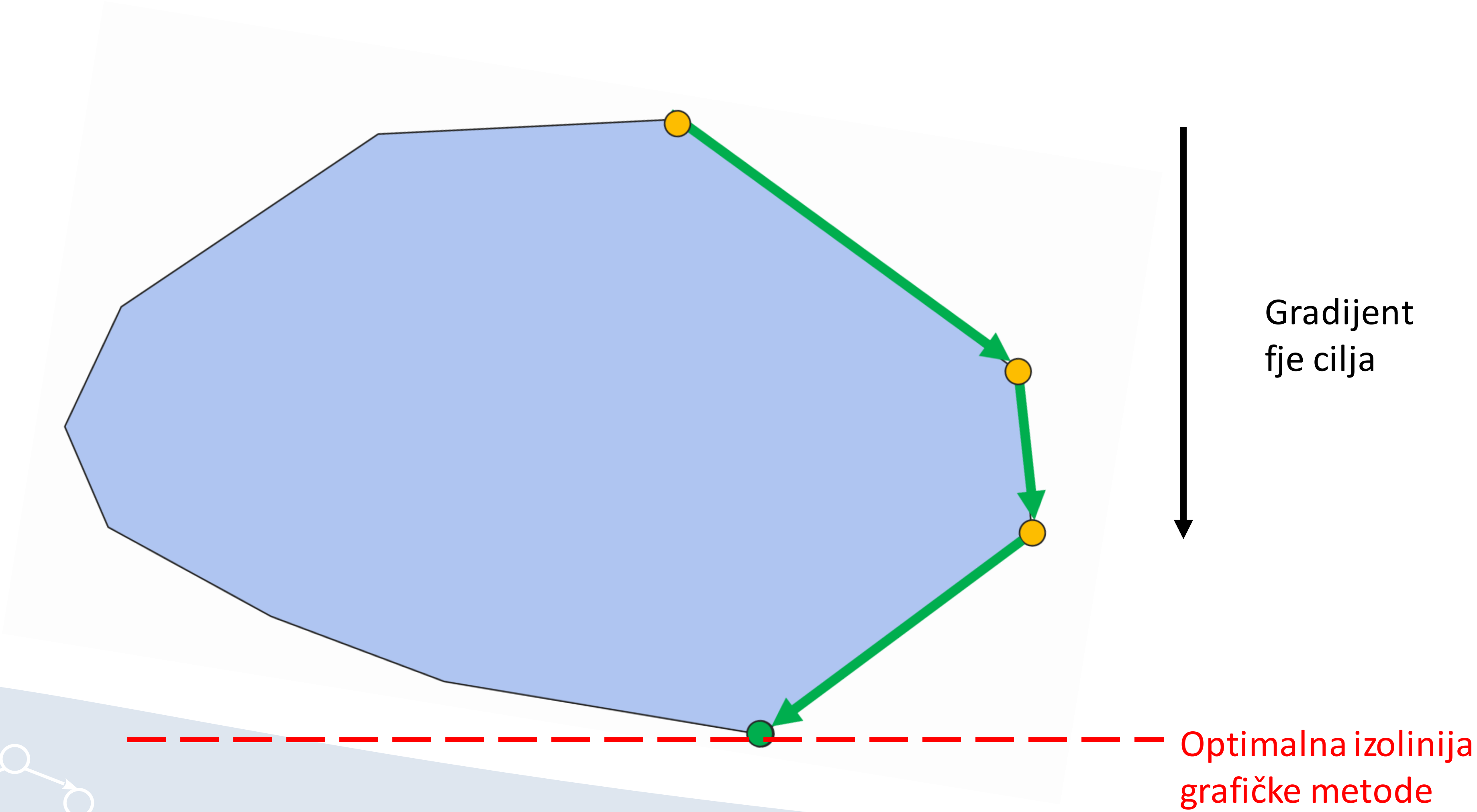


- **Definicija. Ekstrem konveksnog skupa** Θ je svaka točka $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Theta}$ koja nije na ravnoj spojnici ikojih drugih dviju točaka skupa Θ.

$$(\nexists x_1, x_2 \in \Theta \backslash \{x\})(\nexists \alpha \in (0,1))$$
$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$$

- Ekstremi u politopu su **vrhovi –** geometrijski koncept

Simplex - ideja



Simplex – ulazni problem

Za simpleks koristimo **LP u standardnoj formi**

minimizirati $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

uz uvjet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

pri čemu je: $\mathbf{c} \in R^n$, $\mathbf{b} \in R^m$ i $\mathbf{b} \geq 0$, matrica $\mathbf{A} \in R^{mxn}$, $rang(\mathbf{A}) = m$ i $m < n$

Imamo **m** ograničenja jednakosti, **n** ograničenja nejednakosti ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$)

Nalazimo se u **n**-dimenzionalnom prostoru (n≥m)

Vrhovi određeni sa n aktivnih ograničenja (oprez!)

Simplex – jezgra metode

- Nalazimo se u **n**-dimenzionalnom prostoru ($n \geq m$)
  - Vrhovi određeni sa **n aktivnih ograničenja**
  - m aktivnih ograničenja je već fiksirano
  - **„Proizvoljnih”** (n-m) biramo među nejednakostima
    - **One fiksiraju vrijednosti (n-m) varijabli na 0**
    - Te varijable ćemo nazivati **nebazičnima**
    - Kad ih uvrstimo u m ograničenja, dobijemo sustav m jednadžbi sa m nepoznanica! (znamo riješiti iz linearne algebre) – varijable koje rješavamo nazivamo **bazične**
- Particionira se skup svih varijabli na **bazične** i **nebazične**

Simplex – definicije

Definicija. Bazično rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ je vektor $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T\ \mathbf{0}]$, gdje je $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, a $\mathbf{B} \in R^{m \times m}$ odabrana baza (stupci u matrici **A**) u sustavu od m jednadžbi s n nepoznanica, pri čemu je $m < n$ i $\det(\mathbf{B}) \neq 0$.

Teorem (osnovni teorem linearnog programiranja):

Promatrajmo linearni problem u standardnoj formi. Vrijedi sljedeće:

1. Ako postoji bilo kakvo rješenje, postoji i **izvedivo bazično rješenje**.
2. Ako postoji optimalno rješenje, postoji i bazično optimalno rješenje.

Tabličenje

Hajdemo staviti sve parametre u tablicu:

- m+1 redaka
- n+1 stupaca

$\boldsymbol{c}^T$	$\mathbf{0}$
A	b

Tabličenje

- Particioniranje A po stupcima na bazične B i nebazične N stupac-vektore

$c_B{}^T$	cN^T	$\mathbf{0}$
B	N	b

Simplex tableau

Iterativno implicitno izračunavanje inverza B^{-1}

- Efikasnije izvođenje jer se susjedni vrhovi razlikuju samo u **jednom aktivnom ograničenju** (koje postavlja neku drugu varijablu na 0)

faktori redukcije po bridovima

-fja cilja

0^T	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	$-c_B^T B^{-1} b$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

bridovi do susjednih baz.rješ

Vrijednosti baz.var.

Simplex – pseudokod

1. **Početak** iz izvedivog baznog rješenja u simpleks tablici
2. Optimalno? Ako su svi faktori redukcije nenegativni, **STOP**
3. Tranzicija u boljeg susjeda:
   a) Odabir ulazne nebazične varijable koja odgovara stupcu ***q***
   b) Odabir izlazne bazične varijable koja odgovara retku ***p***. Ako ne postoji – problem je neograničen, **STOP**
   c) Gauss-Jordan eliminacija za pivot ***(p,q)***
4. Povratak na korak 2

Simplex – pseudokod

- Odabir ulazne nebazične varijable koja odgovara stupcu ***q***
  - Odabere se neka koja ima **NEGATIVNI** faktor redukcije

- Odabir izlazne bazične varijable $\boldsymbol{x_{[p]}}$ koja odgovara retku ***p***
  - $p = \mathrm{argmin}_{i \in \{1,..,m\}}\{x_{[i]}/B^{-1}A_{iq} \mid B^{-1}A_{iq} > 0\}$

*[p] označava odabir varijable preko reference retkom

Simplex – primjer

$$
\begin{array}{ll}
\max & 7x_1 + 6x_2 \\
\text{uz} & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1 + 4x_2 \leq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Uvođenjem dviju *slack* varijabli x_3 i x_4 prevodimo LP u standardnu formu

$$
\begin{array}{ll}
\min & -7x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\
\text{uz} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
 & x_1 + 4x_2 + \quad + x_4 = 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Simplex – primjer

Tablični zapis je

	a_1	a_2	a_3	a_4	b = RHS	
c^T	–7	–6	0	0	0	$= r^T$
	2	1	1	0	3	
	1	4	0	1	4	

- Tablica već valjana, vrijedi $r_i = c_i$
- najlakše je odabrati početnu bazu $\mathbf{B}_0 = [\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4] = \mathbf{I}_2$
  - bazično rješenje $\mathbf{x}_{(0)} = [0\ 0\ 3\ 4]^T$, $f(\mathbf{x}_{(0)})=0$
- Nulti redak sadrži faktore redukcije
  - ima negativnih pa nije optimum

Simplex – primjer

Tablični zapis je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	**RHS**	
$\mathbf{c}^T$	**–7**	–6	0	0	0	$= \mathbf{r}^T$
	2	1	1	0	**3**	
	1	4	0	1	**4**	

Nulti redak ima negativne faktore redukcije pa nije optimum!

Odabiremo **q=1** (prvi stupčani vektor, a_1, ulazi u bazu)

Odabiremo redak p koji odgovara izlaznom vektoru

$p = \text{argmin}_{i\in\{1,2\}} \{x_{[i]} / B^{-1}A_{i1} \ ; B^{-1}A_{i1} > 0\} = \text{argmin}\{3/2, 4/1\} = 1$

Pivot (1,1): u bazu ulazi a_1, a izlazi a_3

Gauss-Jordanova eliminacija tako da $\boldsymbol{a_1} = [0,1,0]^T$

Simplex – primjer

Tablični zapis je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	**RHS**	
$\mathbf{c}^T$	–7	–6	0	0	0	$= \mathbf{r}^T$
	2	1	1	0	3	
	1	4	0	1	4	

- Pivot (1,1): u bazu ulazi a_1, a izlazi a_3

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	**RHS**
$\mathbf{r}^T$	0	–5/2	7/2	0	21/2
	1	1/2	1/2	0	3/2
	0	7/2	–1/2	1	5/2

Nova baza $\mathbf{B}_1 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_4] = \mathbf{I}_2$

- rješenje $\mathbf{x}_{(1)} = [3/2\ \ 0\ \ 0\ \ 5/2]^T$, $f(\mathbf{x}_{(1)})=-21/2$

Simplex – primjer

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	**RHS**
$\mathbf{r}^T$	0	**–5/2**	7/2	0	21/2
	1	1/2	1/2	0	3/2
	0	7/2	–1/2	1	5/2

- Negativan faktor redukcije r_2 - nije optimum!
- Odabir stupca q=2
- Odabir retka
  - $p = \text{argmin}_{i \in \{1,2\}}\{x_{[i]} / B^{-1}A_{i2} \; ; B^{-1}A_{i2} > 0\} = \text{argmin}\{\mathbf{3, 5/7}\} = 2$
- Pivot (2,2)

Simplex – primjer

	a_1	a_2	a_3	a_4	RHS
$\mathbf{r}^T$	0	**–5/2**	7/2	0	21/2
	1	1/2	1/2	0	3/2
	0	7/2	–1/2	1	5/2

- Pivot (2,2): u bazu ulazi a_2, a izlazi a_4

	a_1	a_2	a_3	a_4	RHS
$\mathbf{r}^T$	0	0	22/7	5/7	86/7
	1	0	4/7	–1/7	8/7
	0	1	–1/7	2/7	5/7

Simplex – primjer

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	**RHS**
$\mathbf{r}^T$	0	0	22/7	5/7	86/7
	1	0	4/7	–1/7	8/7
	0	1	–1/7	2/7	5/7

- nema negativnih faktora redukcije
  - Optimum!
- Baza $\mathbf{B}_2 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$
  - Rješenje $\mathbf{x}^* = [8/7\ \ 5/7\ \ 0\ \ 0]^T$, $f(\mathbf{x}^*) = -86/7$

- Rješenje polaznog problema
  - $x_1 = 8/7$ i $x_2 = 5/7$
  - $f_{max} = 86/7$

Simplex – problem početne baze!

- Nekad se nakon pretvorbe u standardni oblik ne vidi odmah bazično rješenje!
- Dvofazni simpleks – rješavaju se 2 LPa u nizu
  - 1. FAZA – **pomoćni umjetni korak** za naći početno bazično rješenje
    - Uvijek ima svoju trivijalnu početnu bazu (tako je konstruiran)
  - 2. FAZA – zapravo riješava LP od interesa

Dvofazni simpleks – umjetni problem

- Pretp. da imamo problem u standardnoj formi

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

pri čemu imamo m ograničenja jednakosti. Dodajemo ***m*** umjetnih varijabli da bismo stvorili jediničnu podmatricu

NOVI PROBLEM LP’:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{1}^T\mathbf{x}_{n+1:n+m} \\ \text{uz uvjet} & [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_m] \, [\mathbf{x}_{1:n} \,|\, \mathbf{x}_{n+1:n+m}] = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_{1:n+m} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Dvofazni simpleks – 1. FAZA

- Riješimo novi problem već definiranim postupkom
- Tri moguća ishoda:

1. Optimum $f^*_{LP'} \neq 0 \Rightarrow originalni\ LP\ neizvediv$! **KRAJ!**
2. Optimum $f^*_{LP'} = 0$
    a) Sve umjetne varijable su nebazične. Adaptacija za 2. FAZU
    b) Neke umjetne varijable su bazične. Izvodi iteracije simpleksa dok ne izađu sve umjetne varijable iz baze. Adaptacija za 2. FAZU

Dvofazni simpleks – 2. FAZA

- Adaptacija tablice od LP' (sadrži bazu za originalni LP)

1. Pobrisati kolone umjetnih varijabli
2. Zamijeniti fju cilja originalnom
3. Dovesti prvi red u faktore redukcije

- Riješiti LP od te točke nadalje

Dvofazni simpleks – primjer

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{uz}\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

standardna forma:

$$\begin{aligned} \min\quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{uz}\quad & 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ & x_1 + 4x_2 - x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Dvofazni simpleks – primjer

Dodajemo dvije nove varijable i novu fju cilja

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{RHS}$
$\mathbf{c}^T$	0	0	0	0	1	1	0
	4	2	–1	0	1	0	12
	1	4	0	–1	0	1	6

Dvofazni simpleks – primjer

Nakon nekoliko iteracija...

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	**RHS**
$\mathbf{r}^T$	0	0	0	0	1	1	0
	1	0	–2/7	1/7	2/7	–1/7	18/7
	0	1	1/14	–2/7	–1/14	2/7	6/7

baza $\mathbf{B}_2 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$

faktori redukcije su nenegativni -> **OPTIMUM** umjetnog problema

umjetne varijable su =0 i umjetna ciljna funkcija =0

gotova 1. FAZA

Dvofazni simpleks – primjer

2. faza – iz prethodne tablice se izbace stupci umjetnih varijabli i zamijeni se ciljna fja

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	**RHS**
$\mathbf{c}^T$	2	3	0	0	0
	1	0	–2/7	1/7	18/7
	0	1	1/14	–2/7	6/7

Ispravak 0-tog retka - eliminacijom iznad baznih stupaca

Dvofazni simpleks – primjer

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	**RHS**
$\mathbf{r}^T$	0	0	5/14	4/7	–54/7
	1	0	–2/7	1/7	18/7
	0	1	1/14	–2/7	6/7

- nema negativnih faktora redukcije
  - **OPTIMUM**
  - Rješenje proširenog izvornog problema je $\mathbf{x} = [18/7 \;\; 6/7 \;\; 0 \;\; 0]^T$
  - rješenje izvornog problema $\mathbf{x} = [18/7 \;\; 6/7]^T$, $f(\mathbf{x})=54/7$

Dualnost

- Teorija nastala poopćenjem metode Lagrangeovih množitelja

- Svaki LP (kojeg ćemo zvati „primal”) ima svoj povezani LP kojeg zovemo „dual”

Dualnost – kanonska forma

minimizirati $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

uz uvjet $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

- Dual:

maksimizirati $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$

uz uvjet $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$

$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Dual - izvođenje

primal	dual
broj ograničenja	broj varijabli
broj varijabli	broj ograničenja
rhs	funkcija cilja
funkcija cilja	rhs
A matrica koeficijenata	$\mathbf{A}^T$
jednakost	urs varijabla
urs varijabla	jednakost
<= ograničenje	>= varijabla
>= ograničenje	<= varijabla
>= varijabla	>= ograničenje
<= varijabla	<= ograničenje

Veze duala i primala - teoremi

- „Dual duala je primal”
- Slaba dualnost
- Jaka dualnost
- Komplementarnost

Veze duala i primala - teoremi

- Slaba dualnost
  - Ako je x izvedivo primalno rješenje i y je izvedivo dualno rješenje, tada je $y^T b \leq c^T x$
- Jaka dualnost
  - Ako linearni program ima optimalno rješenje, onda ga ima i dual i njihove vrijednosti su jednake.

Veze duala i primala - teoremi

- Komplementarnost
  - Ako su x i y izvediva rješenja primala i duala, onda su ***optimalna*** **ako i samo ako** vrijedi:

$$x_j\underbrace{\left(c_j - y^T A_{:,j}\right)}_{\text{Faktor redukcije varijable } x_j} = 0, \forall j$$

$$y_i\underbrace{\left(A_{i,:}x - b_i\right)}_{\text{Dopunjenje i-tog ograničenja primala}} = 0, \forall i$$

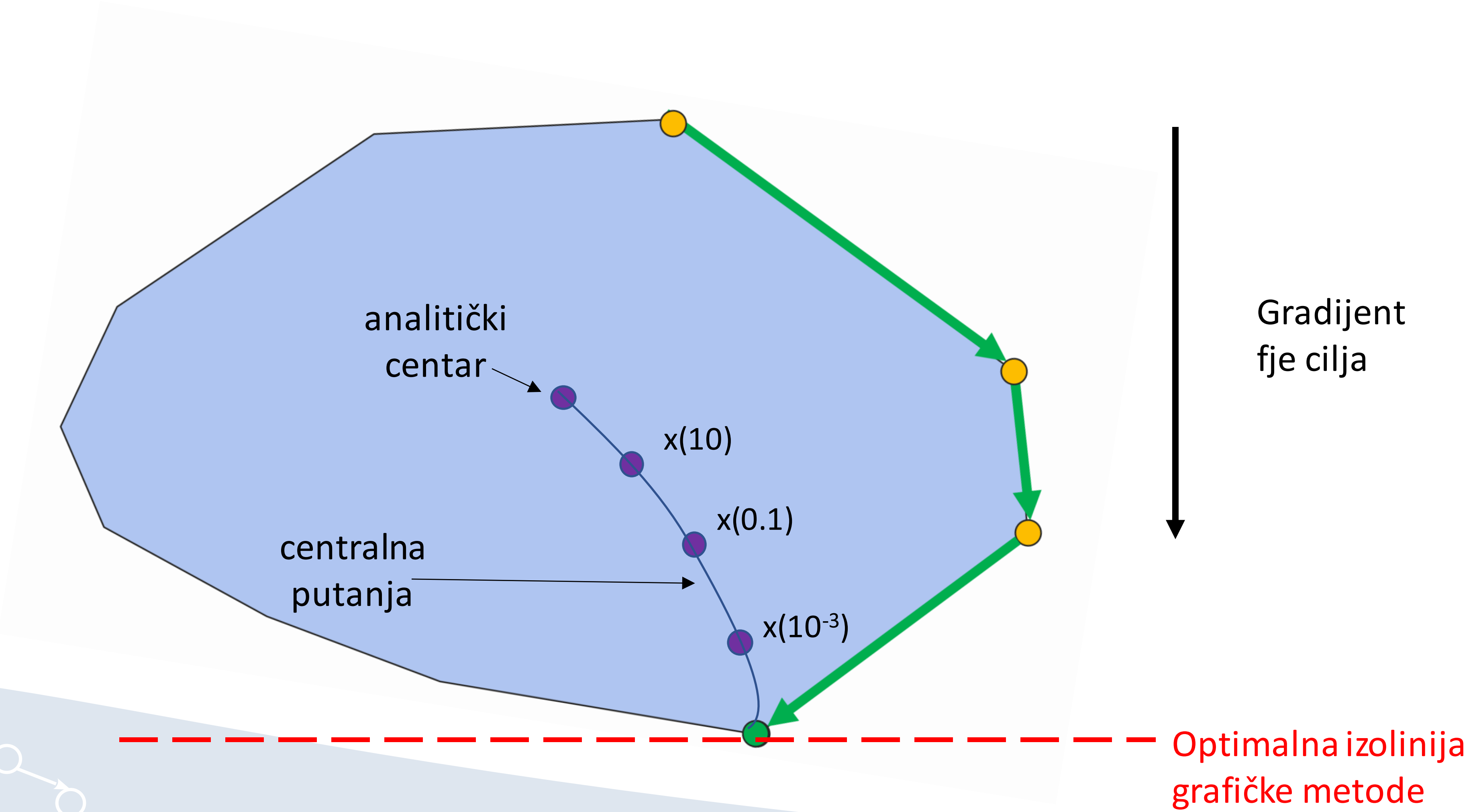
Dualnost - korisnost

- Ekonomska interpretacija – cijene nad ograničenim resursima
- Minimax teorem u teoriji igara
- Analiza osjetljivosti
- Dualna simpleksna metoda
- …

Simplex – problem!

- Klee-Minty 1972. – konstrukcija perturbirane jedinične hiperkocke za za popularna pravila biranja pivota
- Simplex u najgorem slučaju ima eksponencijalnu složenost
- LP je unutar klase problema P

Metoda unutarnjih točaka - ideja



Metoda unutarnjih točaka – ideja 1/3

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Metoda unutarnjih točaka – ideja 2/3

$$\min \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mu\, \mathbf{1}^T \log(\mathbf{x})$$
$$\text{uz uvjet} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Barijerni problemi!

Logaritamska barijera

$$\max \quad \mathbf{b}^T\mathbf{y} + \mu\, \mathbf{1}^T \log(\mathbf{s})$$
$$\text{uz uvjet} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}$$

Metoda unutarnjih točaka – ideja 3/3

KKT uvjeti za μ-barijerne probleme

$$\mathbf{Ax(\mu) = b}$$

$$\mathbf{x(\mu) \geq 0}$$

$$\mathbf{A^T y\,(\mu) + s\,(\mu) = c}$$

$$\mathbf{s(\mu) \geq 0}$$

$$\mathbf{X(\mu)S(\mu)1=1\mu}$$

pri čemu $X(\mu)=\mathrm{diag}(x(\mu))$, $S(\mu)=\mathrm{diag}(s(\mu))$

Primalni algoritam praćenja putanje

- Barijerni problem „pretežak” iz KKT
- Taylorov raspis barijerne fje cilja do kvadratnog člana
- Optimizacija Taylorove aproksimacije metodom Lagrangeovih množitelja za pronalazak minimizirajućeg smjera iz trenutne točke