9.

Vlastiti vektori i vlastite vrijednosti

Sadržaj poglavlja

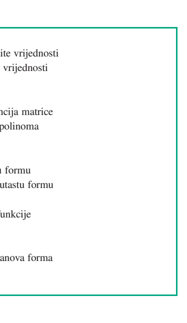
9.1. Karakteristični polinom i vlastite vrijednosti

9.1.1. Vlastiti vektori i vlastite vrijednosti

U ovom ćemo poglavlju opisati kako se traži ‘najprikladnija’ baza vektorskoga prostora X, baza u kojoj će linearni operator $A : X \to X$ imati najjednostavniji prikaz. U čitavom poglavlju, X će biti n-dimenzionalni vektorski prostor i svi operatori bit će definirani i uzimati vrijednosti u istome prostoru X.

Prisjetimo se primjera iz prethodnog poglavlja.

Neka je A operator simetrije s obzirom na pravac p koji prolazi ishodištem. Najprikladnija baza za opis ovoga operatora je ona koju sačinjava vektor smjera pravca p i vektor okomit na njega. Na slici su ti vektori označeni s $\mathbf{e}$ i s $\mathbf{f}$. Primijetimo da vrijedi $A(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$, $A(\mathbf{f}) = -\mathbf{f}$: slike vektora $\mathbf{e}$ i $\mathbf{f}$ imaju *isti nosač* kao i sami vektori. Primijetimo nadalje da su to (i njima kolinearni vektori!) jedini vektori s tim svojstvima. Uzmemo li bilo koji drugi vektor koji nije kolinearan s jednim od ova dva, $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{f}$ ($\alpha, \beta \neq 0$), tad je $A(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{e} - \beta\mathbf{f}$ i ovaj vektor nije kolinearan s $\mathbf{x}$; operator A *mijenja njegov nosač*.



Sl. 9.1. Operator simetrije s obzirom na pravac p ne mijenja nosače vektora $\mathbf{e}$ i $\mathbf{f}$. On ostavlja vektor $\mathbf{e}$ na miru, a vektor $\mathbf{f}$ preslikava u suprotni.

Vlastiti vektor i vlastita vrijednost

Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ zovemo **vlastitim (svojstvenim) vektorom** operatora A ako postoji skalar λ takav da vrijedi

$$A(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}. \qquad (1)$$

Skalar λ nazivamo **vlastita (svojstvena) vrijednost**[2] operatora A, koja odgovara vlastitom vektoru $\mathbf{v}$.

Iz definicije je jasno da je i $\alpha\mathbf{v}$ ($\alpha \neq 0$) vlastiti vektor, čim je $\mathbf{v}$ vlastiti vektor. Svi su ti vektori kolinearni i odgovaraju istoj vlastitoj vrijednosti.

Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dva vlastita vektora (ako postoje, ali ne nužno kolinearna) koji odgovaraju istoj vlastitoj vrijednosti λ. Tad vrijedi

$$A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y}) = \alpha\lambda\mathbf{x} + \beta\lambda\mathbf{y} = \lambda(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})$$

te je i $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ vlastiti vektor za istu vlastitu vrijednost (ukoliko je različit od $\mathbf{0}$).

Poopćujući ovo razmatranje, možemo za svaku vlastitu vrijednost λ promotriti potprostor $\ker(\lambda I - A)$, jezgru operatora $\lambda I - A$. Svaki vektor, različit od nule, iz toga potprostora vlastiti je vektor operatora A. Naime, $(\lambda I - A)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ povlači $A(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Ovaj se potprostor naziva **vlastiti potprostor** koji pripada vlastitoj vrijednosti λ.

Primjer 1. Za operator I svaki je vektor vlastiti, a zajednička vlastita vrijednost je broj 1, budući da vrijedi $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ za svaki $\mathbf{v}$.

Primjer 2. Neka je A_φ operator rotacije za kut φ, pri čemu je φ različit od 0 i od $180°$. Očigledno, operator A_φ ne ostavlja niti jedan vektor kolinearnim: ovaj operator nema vlastitih vektora s realnim komponentama ni realnih vlastitih vrijednosti.

Primjer 3. Neka je operator A zadan matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađimo njegove vlastite vrijednosti i vektore.

► Iz jednadžbe $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ dobivamo sljedeći sustav

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}.$$

Iz druge jednadžbe čitamo $\lambda = 1$ ili $x_2 = 0$. Ako je $\lambda = 1$, iz prve slijedi $x_1 + x_2 = x_1$ te je $x_2 = 0$, x_1 bilo kakav. Ako je pak $x_2 = 0$ tad iz prve jednadžbe vidimo da je $\lambda = 1$ i opet x_1 bilo kakav (različit od nule). Postoji zato jedna vlastita vrijednost $\lambda = 1$ i jednodimenzionalni vlastiti potprostor $\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ koji odgovaraju toj vlastitoj vrijednosti.

Umjesto da govorimo o jednodimenzionalnom potprostoru, radije ćemo izabrati jedan (bilo koji) njegov vektor i govoriti o vlastitom vektoru koji pripada toj vlastitoj vrijednosti. ◄

Nalaženje vlastitih vektora. Ovaj primjer pokazuje da će se nalaženje vlastitih vektora svesti na rješavanje homogenoga linearnoga sustava. Zaista, jednadžba $A(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ ekvivalentna je s

$$(\lambda I - A)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Dakle, $\mathbf{v}$ je vlastiti vektor ako i samo ako pripada jezgri operatora $\lambda I - A$. Ovaj uvjet govori o načinu na koji se mora birati skalar λ.

9.1.2. Karakteristični polinom

Da bi jednadžba (2) imala netrivijalno rješenje, operator $\lambda I - A$ ne smije biti regularan. Neka je $\mathbf{A}$ matrica operatora A u nekoj bazi. Matrica jediničnog operatora (u svakoj bazi) jedinična je matrica $\mathbf{I}$. Zato operatoru $\lambda I - A$ odgovara matrica $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$. Ta matrica nije regularna, pa njezina determinanta mora biti jednaka nuli:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Ova je determinanta polinom po nepoznanici λ, stupnja n.

Karakteristični polinom i karakteristična jednadžba

Polinom

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

nazivamo **karakteristični polinom** operatora A (ili matrice $\mathbf{A}$).

Jednadžba

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

naziva se **karakteristična jednadžba** operatora A (matrice $\mathbf{A}$). Njena rješenja vlastite su vrijednosti operatora A.

Vodeći koeficijent ovoga polinoma (uz potenciju λ^n) je 1. Stoga on ima oblik

$$\kappa(\lambda) = \lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} - \ldots - \sigma_{n-1}\lambda - \sigma_n.$$

Karakteristični polinom ne ovisi o izboru baze. Karakteristični se polinom računa preko determinante matrice koja odgovara operatoru $\lambda I - A$. Ta matrica *ovisi o izabranoj bazi*, međutim, njezina determinanta ne! Svake takve dvije matrice su slične i stoga imaju istu determinantu.

Vlastite vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma pa niti one ne ovise o izboru baze. Zato pri računanju vlastitih vrijednosti možemo uzeti bilo koju bazu za prikaz operatora A.

Primjer 4. Odredimo karakteristični polinom i vlastite vrijednosti matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

► Razvojem po trećem stupcu računamo:

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^3 \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8. \end{aligned}$$

Matrica ima trostruku vlastitu vrijednost $\lambda = 2$. ◄

Računanje vlastitih vrijednosti. Vlastite su vrijednosti nul-točke polinoma stupnja n. Da bismo ih odredili, moramo odrediti najprije taj polinom. Budući da je on determinanta matrice reda n, suočeni smo s dva ozbiljna problema:

- Kako odrediti determinantu matrice reda n, čiji elementi nisu numerički, već se u njoj pojavljuje i nepoznanica λ?
- Nakon što je taj polinom izračunat (na neki način!), kako odrediti njegove nul-točke?

Na prvo se pitanje ne može dati zadovoljavajući odgovor[3]. Postoji nekoliko načina za određivanje koeficijenata karakterističnog polinoma koji ne koriste direktno računanje determinanti, međutim svi su oni efikasni samo za matrice maloga reda.

Što se nalaženja vlastitih vrijednosti tiče, nul-točke polinoma velikoga stupnja mogu se računati samo približnim metodama. Razlog tome je što eksplicitne formule za nalaženje nul-točaka polinoma stupnja većeg od četiri ne postoje. Za polinome stupnja tri i četiri, formule postoje ali su praktički neuporabljive.

Sve ovo ukazuje da se vlastite vrijednosti (i vektori) matrica velikoga reda nalaze posve drukčijim metodama. Tim se problemom bavi posebno područje matematike, tzv. numerička linearna algebra.

Značenje kompleksnih brojeva. Polje realnih brojeva je nedostatno u problemu nalaženja vlastitih vrijednosti. Razlog tomu je što polinom (čak i onaj s realnim koeficijentima) ne mora imati niti jedan realni korijen. Ako je to karakteristični polinom, tad odgovarajući operator nema (realnih) vlastitih vrijednosti. S druge strane, po *osnovnom stavku algebre* svaki polinom stupnja n ima točno n kompleksnih nul-točaka (brojeći njihovu višestrukost). Stoga je korisno pri nalaženju vlastitih vrijednosti dozvoliti račun u polju kompleksnih brojeva. Na taj će način svaki operator imati bar jednu vlastitu vrijednost i bar jedan vlastiti vektor (koji ne mora imati geometrijsku interpretaciju).

Riječ *skalar* u definiciji vlastitih vrijednosti i vektora s početka ovoga poglavlja označavat će *kompleksan broj*. Dakako, realni su brojevi sadržani u kompleksnim, potonje ćemo koristiti samo onda kada račun pokaže da su neophodni.

Primjer 5. Promotrimo matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ona odgovara operatoru rotacije za $90°$, stoga očigledno neće imati (realnih) vlastitih vrijednosti i vektora. Odredimo njezin karakteristični polinom.

$$\kappa(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Njegove su nul točke $\lambda_1 = i$ te $\lambda_2 = -i$. Vlastiti vektori će također imati kompleksne koeficijente.

9.2. Minimalni polinom

9.2.1. Linearna zavisnost potencija matrice

Promatramo li sve potencije neke matrice $\mathbf{A}$ (krenuvši od $\mathbf{A}^0$ koju po definiciji smatramo jediničnom matricom), dobit ćemo niz:

$$\mathbf{I},\ \mathbf{A},\ \mathbf{A}^2,\ \mathbf{A}^3, \ldots$$

Tako na primjer, za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dobivamo sljedeći niz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \ldots$$

Možemo se upitati: je li neka od tih matrica linearna kombinacija prethodnih?

Odgovor je na ovo pitanje potvrdan! Ako ne prije, matrica $\mathbf{A}^{n^2}$ sigurno je linearna kombinacija prethodnih, budući da u nizu

$$\mathbf{I},\ \mathbf{A},\ \mathbf{A}^2,\ \mathbf{A}^3, \ldots, \mathbf{A}^{n^2}$$

imamo $n^2 + 1$ element prostora $\mathscr{M}_n$, a njegova je dimenzija n^2. Stoga su gornje matrice linearno zavisne.

Računajmo sad potencije matrice $\mathbf{A}$ i zaustavimo se kod prve koja je linearno zavisna s prethodnima. U prethodnom primjeru, matrica $\mathbf{A}$ je linearno nezavisna od jedinične, ali već za sljedeću matricu $\mathbf{A}^2$ vrijedi

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{A} - 3\mathbf{I}.$$

Pokazat ćemo u nastavku da to nije slučajnost, već da je kvadrat svake matrice drugog reda linearno zavisan o $\mathbf{I}$ i $\mathbf{A}$.

Općenito, postojat će eksponent k takav da su matrice

$$\mathbf{I},\ \mathbf{A},\ \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}$$

linearno nezavisne, a matrice

$$\mathbf{I},\ \mathbf{A},\ \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}, \mathbf{A}^k$$

su linearno zavisne. Tad se matrica $\mathbf{A}^k$ može napisati kao spoj prethodnih; postoje skalari $\mu_1, \ldots, \mu_k$ za koje vrijedi

$$\mathbf{A}^k = \mu_1\mathbf{A}^{k-1} + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{A} + \mu_k\mathbf{I}. \qquad (1)$$

Minimalni polinom

Minimalni polinom

$$\mu(\lambda) = \lambda^k - \mu_1\lambda^{k-1} - \ldots - \mu_{k-1}\lambda - \mu_k.$$

je polinom *najmanjeg stupnja* koji poništava matricu $\mathbf{A}$; za koji vrijedi:

$$\mu(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^k - \mu_1\mathbf{A}^{k-1} - \ldots - \mu_{k-1}\mathbf{A} - \mu_k\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Opravdanje za naziv *minimalni* nalazimo u sljedećem teoremu.

Teorem 1. Neka je $P(\lambda)$ bilo koji polinom koji se poništava u matrici $\mathbf{A}$. Tad je $P(\lambda)$ djeljiv s minimalnim polinomom $\mu(\lambda)$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $P(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Polinom $P(\lambda)$ uvijek možemo podijeliti polinomom $\mu(\lambda)$:

$$P(\lambda) = Q(\lambda)\mu(\lambda) + R(\lambda).$$

Tu je $Q(\lambda)$ kvocijent dijeljenja, a $R(\lambda)$ ostatak: polinom stupnja manjeg od stupnja k minimalnoga polinoma. Uvrštavajući matricu $\mathbf{A}$ na mjesto nepoznanice, dobivamo

$$P(\mathbf{A}) = Q(\mathbf{A})\mu(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A}).$$

Vrijedi $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ i $\mu(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, pa odavde slijedi $R(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. No to znači da postoji netrivijalna linearna kombinacija matrica $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2 \ldots, \mathbf{A}^{k-1}$ koja iščezava, što je u suprotnosti s definicijom broja k (kao prve potencije za koju je to svojstvo ispunjeno). ◄

Prema tome, zaključujemo sljedeće:

- Niti jedan polinom stupnja $< k$ ne može poništiti matricu $\mathbf{A}$.
- Svaki drugi polinom koji poništava matricu $\mathbf{A}$ djeljiv je minimalnim polinomom.

Ova svojstva opravdavaju naziv *minimalni* polinom.

9.2.2. Računanje minimalnog polinoma

Postoji više načina za računanje minimalnoga polinoma. Navest ćemo jedan način koji možemo lako opisati. Napravimo sljedeću matričnu tablicu:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \ldots & \mathbf{A}^m & \ldots \\ & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1m} & \ldots \\ & & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2m} & \ldots \\ & & & & \ldots & \\ & & & & \mathbf{A}_{mm} & \ldots \end{array}$$

Matrice u prvome redu dobivamo računanjem potencija zadane matrice $\mathbf{A}$. Matrice u drugome redu dobivamo iz prethodnoga reda, po formulama:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A} - \beta_{11}\mathbf{I}, \qquad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}^2 - \beta_{12}\mathbf{I}, \ldots \qquad \mathbf{A}_{1m} = \mathbf{A}^m - \beta_{1m}\mathbf{I}$$

Pri tom koeficijente β_{1j} određujemo tako da sve te matrice na istome mjestu (obično mjestu (1,1)) imaju nul-element.

Treći red računamo formulama

$$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{12} - \beta_{22}\mathbf{A}_{11}, \ldots \qquad \mathbf{A}_{2m} = \mathbf{A}_{1m} - \beta_{2m}\mathbf{A}_{11}.$$

Pri tom zahtijevamo da sve ove matrice imaju na drugom mjestu također nul-element. To je obično pozicija (1,2), no ako već od prije sve matrice na tom mjestu imaju nule, izabrat ćemo neku drugu poziciju. Element na mjestu (1,1) u svim matricama trećega retka jednak je nuli, pa ćemo nastavljanjem ovoga postupka na koncu dobiti nul-matricu. Uvažavajući sve izračunate relacije, iz nje možemo odrediti minimalni polinom.

Napomenimo još da u postupku računanja matrice računamo u poretku: $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{A}^3$ itd., dakle, po stupcima ove sheme, kako ne bismo nepotrebno računali potencije matrica (recimo potenciju $\mathbf{A}^3$ ukoliko je ispunjeno $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{0}$).

Primjer 6. Odredimo minimalni polinom matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

► Napravimo gore navedenu shemu:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pri tome je

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \mathbf{A} - 2\mathbf{I}, \\ \mathbf{A}_{12} &= \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{I}, \\ \mathbf{A}_{22} &= \mathbf{A}_{12} - 5\mathbf{A}_{11} \end{aligned}$$

Krenuvši od posljednje relacije, čitamo:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{12} - 5\mathbf{A}_{11} = (\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{I}) - 5(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 7\mathbf{I}.$$

Prema tome, minimalni polinom matrice $\mathbf{A}$ glasi

$$\mu(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 7. \ ◄$$

9.3. Hamilton-Cayleyev teorem

Dokažimo sad sljedeći važni teorem.

Teorem 2. (**Hamilton-Cayley**[4]) Matrica $\mathbf{A}$ poništava svoj karakteristični polinom: vrijedi $\kappa(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Dokaz. Neka je $\mathbf{B}(\lambda)$ adjunkta matrice $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$, tj. matrica za koju vrijedi

$$\mathbf{B}(\lambda)[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{I}.$$

Ako ju promotrimo kao funkciju nepoznanice λ, tad je $\mathbf{B}(\lambda)$ polinom stupnja $n-1$:

$$\mathbf{B}(\lambda) = \lambda^{n-1}\mathbf{B}_0 + \lambda^{n-2}\mathbf{B}_1 + \ldots + \mathbf{B}_{n-1}$$

(jer je svaki njezin element determinanta matrice reda $n-1$ dobivene brisanjem jednog retka i jednog stupca u matrici $\lambda I - \mathbf{A}$).

Usporedimo jednake potencije u objema stranama identiteta:

$$(\lambda^{n-1}\mathbf{B}_0 + \lambda^{n-2}\mathbf{B}_1 + \ldots + \mathbf{B}_{n-1})(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} - \ldots - \sigma_n)\mathbf{I}.$$

Dobivamo sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \mathbf{I} \\ \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0\mathbf{A} &= -\sigma_1\mathbf{I} \\ \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{A} &= -\sigma_2\mathbf{I} \\ &\vdots \\ \mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_{n-2}\mathbf{A} &= -\sigma_{n-1}\mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{n-1}\mathbf{A} &= -\sigma_n\mathbf{I} \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednakost s $\mathbf{A}^n$, drugu s $\mathbf{A}^{n-1}$, …, pretposljednju s $\mathbf{A}$ i zbrojimo rezultate:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}^n - \sigma_1\mathbf{A}^{n-1} - \ldots - \sigma_{n-1}\mathbf{A} - \sigma_n\mathbf{I} = \kappa(\mathbf{A}).$$

To smo i trebali dokazati. ◄

Teorem 3. Operator A je regularan ako i samo ako broj 0 nije njegova vlastita vrijednost.

Dokaz. Jednadžba $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ima netrivijalno rješenje onda i samo onda ako je $\lambda = 0$ vlastita vrijednost operatora. ◄

U jeziku matrica, $\mathbf{A}$ ima inverz ako i samo ako su sve njezine vlastite vrijednosti različite od nule. U tom se slučaju njezin inverz može dobiti, primjenom Hamilton-Cayleyevog teorema, po formuli

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{B}_{n-1}}{\sigma_n}. \qquad (1)$$

Primijetimo pri tom da je slobodni član σ_n u karakterističnom polinomu jednak $\pm\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$, te formula (1) ima smisla samo onda kad su sve vlastite vrijednosti različite od nule.

Primjer 7. Matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ima karakteristični polinom

$$\kappa(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8.$$

Umnožak vlastitih vrijednosti je 8; sve su različite od nule pa postoji inverz matrice. Po Hamilton-Cayleyevom teoremu je

$$\mathbf{A}^3 - 6\mathbf{A}^2 + 12\mathbf{A} - 8\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Množenjem s $\mathbf{A}^{-1}$ slijedi

$$\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 12\mathbf{I} = 8\mathbf{A}^{-1}.$$

Odavde možemo odrediti inverz $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8}\mathbf{A}^2 - \frac{3}{4}\mathbf{A} + \frac{3}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \ ◄$$

— ◆ —

Navedimo nekoliko posljedica Hamilton-Cayleyevoga teorema.

- Matrica $\mathbf{A}$ poništava karakteristični polinom, a minimalni je polinom najmanjega stupnja s tim svojstvom, pa je karakteristični polinom djeljiv s minimalnim.
- Nul-točke minimalnoga polinoma ujedno i nul točke vlastitoga: vlastite vrijednosti nul-točke su minimalnoga polinoma.
- Stupanj minimalnog polinoma nije veći od reda matrice n, ali može biti manji od tog broja.

9.4. Dijagonalizacija operatora

9.4.1. Svođenje na dijagonalnu formu

Teorem 4. Vlastiti vektori koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima međusobno su linearno nezavisni.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po broju različitih vlastitih vrijednosti. Ako je taj broj jednak 1, nemamo što dokazivati. Pretpostavimo da vrijedi za $k-1$ vlastitu vrijednost. Neka su sad $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ različite vlastite vrijednosti i $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ odgovarajući vlastiti vektori. Pogledajmo njihovu linearnu kombinaciju koja iščezava:

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Operator A prebacuje ovu kombinaciju ponovo u nul-vektor. Budući da su gornji vektori vlastiti za taj operator, vrijedi

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Pomnožimo relaciju (1) s λ_k i oduzmimo od (2). Dobivamo

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Vektori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ po pretpostavci su linearno nezavisni. Stoga su svi koeficijenti jednaki nuli. Vlastite su vrijednosti međusobno različite, to vrijedi $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} = 0$. Sad iz (1) slijedi i $\alpha_k = 0$, čime je tvrdnja dokazana. ◄

Izvedimo odmah važnu posljedicu ovog teorema: Ako su sve nul-točke karakterističnog polinoma različite, tad postoji baza prostora koju čine vlastiti vektori promatranog operatora.

Neka su to vektori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Kako izgleda matrica operatora A u toj bazi? Vrijedi $A(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{v}_1, \ldots, A(\mathbf{v}_n) = \lambda_n\mathbf{v}_n$. Zato je njegova matrica u ovoj bazi dijagonalna.

Uobičajen redoslijed postupaka je sljedeći: zadana je matrica $\mathbf{A}$ operatora u početnoj (obično kanonskoj) bazi. Računajući vlastite vektore te matrice mi odabiremo drugu bazu u kojoj će operator imati dijagonalni prikaz. U jeziku matrica, tražimo da li postoji dijagonalna matrica slična početnoj.

Algoritam za dijagonalizaciju matrice

Korak 1.
Odredimo karakteristični polinom $\kappa(\lambda)$ matrice $\mathbf{A}$.

Korak 2.
Odredimo nul-točke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakterističnog polinoma. To su vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Korak 3.
Riješavamo homogene sustave $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Njihova su rješenja vlastiti vektori matrice $\mathbf{A}$.

Ako postoji n linearno nezavisnih vlastitih vektora, tad je matrica slična dijagonalnoj (operator se može dijagonalizirati). Vlastite vektore zapišimo kao stupce matrice prijelaza $\mathbf{T}$.

Korak 4.
Matrica operatora u novoj bazi je dijagonalna

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dijagonalni elementi vlastite su vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Vrijedi i obrat. Zbog njegove važnosti, istaknimo tvrdnju:

Teorem 5. Operator se može dijagonalizirati onda i samo onda ako postoji baza koju čine njegovi vlastiti vektori.

Dokaz. Ako je matrica operatora (u nekoj bazi) dijagonalna, tad su vektori te baze vlastiti vektori, a elementi na dijagonali vlastite vrijednosti. To slijedi iz načina kako operatoru pridružujemo matricu. ◄

Primijetimo nadalje da pri tom nije bilo važno da su sve vlastite vrijednosti različite! Nužan i dovoljan uvjet da bi se A mogao dijagonalizirati jest da posjeduje n linearno nezavisnih vlastitih vektora. Pokazali smo da će se to sigurno dogoditi ukoliko su vlastite vrijednosti različite, no taj uvjet nije uvijek nuždan.

Primjer 8. Operator simetrije s obzirom na neku ravninu π (koja prolazi ishodištem) ima matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bazu smo izabrali tako da prva dva vektora leže u ravnini π (možemo uzeti bilo koja dva linearno nezavisna vektora!) a treći je okomit na ravninu. Karakteristični polinom ove matrice glasi $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Postoje dvije vlastite vrijednosti: 1 i -1. Prva je dvostruka i njoj odgovara *dvodimenzionalni* potprostor vlastitih vektora: svaki vektor u ravnini π je vlastiti, operator ga ostavlja nepromijenjenog. Dakle, operator ima dvije jednake vlastite vrijednosti, ali usprkos tome postoji baza koju čine vlastiti vektori.

Jedinični je operator najdrastičniji primjer: on posjeduje samo jednu vlastitu vrijednost 1, ali vrijedi $I(\mathbf{v}) = 1\cdot\mathbf{v}$ za svaki vektor $\mathbf{v}$, stoga je odgovarajući vlastiti potprostor čitav prostor X.

Primjer 9. Postoje i suprotni primjeri. Operator zakošenja ima u odgovarajućoj bazi matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njegov karaktristični polinom je $(\lambda - 1)^2$ i $\lambda = 1$ je jedina vlastita vrijednost. Potražimo vlastite vektore. Oni su rješenja linearnog sustava

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ovaj sustav ima za rješenje vektor(e) $\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ — vlastiti je potprostor jednodimenzionalan. Izaberimo za vlastiti vektor vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Drugoga vlastitog vektora nekolinearnog s ovim operator nema. Stoga se *ne postoji* baza u kojoj bi operator imao dijagonalni oblik.

Isti zaključak vrijedi i za operator čija je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

On ima samo jednu vlastitu vrijednost $\lambda = 1$ i jednodimenzionalan vlastiti potprostor!

9.4.2. Svođenje na gornju trokutastu formu

Prethodni primjeri pokazuju da se svaki operator ne može dijagonalizirati. Međutim, *svaki se može svesti na gornju trokutastu formu*. To znači da se može odabrati baza takva da je odgovarajuća matrica gornja trokutasta matrica.

Iskažimo ovu tvrdnju u jeziku matrica koje odgovaraju operatoru A. Neka je $\mathbf{A}$ matrica operatora u početnoj bazi. Gornja tvrdnja ekvivalentna je ovoj u narednom teoremu.

Teorem 6. Za svaku matricu $\mathbf{A}$ postoji matrica $\mathbf{T}$ takva da je matrica $\mathbf{B} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ gornja trokutasta.

Matrica $\mathbf{T}$ predstavlja matricu prijelaza iz baze u kojoj je operator prikazan matricom $\mathbf{A}$ u bazu u kojoj on ima za prikaz gornju trokutastu matricu $\mathbf{B}$. Njeni su koeficijenti općenito kompleksni brojevi.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po redu n matrice. Ako je $n = 1$, nemamo što dokazivati. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve matrice reda $n-1$ i uzmimo matricu $\mathbf{A}$ reda n. Ona posjeduje bar jednu vlastitu vrijednost λ_1 i bar jedan vlastiti vektor $\mathbf{e}_1$ (nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$!). Nadopunimo taj vektor do baze prostora X, neka $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ čine bazu. (Primijeti da ostali vektori ne moraju biti vlastiti za operator A.)

Neka je $\mathbf{T}_1$ matrica prijelaza iz početne u ovu bazu. Tad matrica $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_1$ ima oblik

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}'$$

U prvom stupcu imamo samo jedan element koji je možda različit od nule. Ovu matricu možemo zapisati shematski u obliku

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}'_1 \end{bmatrix}$$

Ovdje $*$ označava preostale elemente u prvome retku, $\mathbf{0}$ je nul-vektor, $\mathbf{A}'_1$ matrica reda $n-1$.

Sad koristimo pretpostavku indukcije. Postoji matrica $\mathbf{T}'_2$ reda $n-1$ takva da je $\mathbf{T}'^{-1}_2\mathbf{A}'_1\mathbf{T}'_2$ gornja trokutasta:

$$\mathbf{T}'^{-1}_2\mathbf{A}'_1\mathbf{T}'_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_3 & * & \ldots & * \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} =: \mathbf{B}$$

Matricu $\mathbf{T}'_2$ nadopunimo do kvadratne matrice $\mathbf{T}_2$ reda n na sljedeći način:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'_2 \end{bmatrix}.$$

Konstruirajmo sad traženu matricu $\mathbf{T}$ kao umnožak početne matrice $\mathbf{T}_1$ s ovako nadopunjenom matricom $\mathbf{T}_2$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2.$$

Za nju vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_2^{-1}(\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_1)\mathbf{T}_2 \\ &= \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{T}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'^{-1}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}'_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'^{-1}_2\mathbf{A}'_1\mathbf{T}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dobivena matrica je gornja trokutasta. Time je teorem dokazan. ◄

— ◆ —

Dosad smo pokazali (između ostaloga) sljedeća dva svojstva matrica:

- Ako su sve vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ različite, tad postoji matrica $\mathbf{T}$ takva da je $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ dijagonalna, sa vlastitim vrijednostima na dijagonali
- U općem slučaju, postoji matrica $\mathbf{T}$ takva da je $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ gornja trokutasta.

Teorem 7. Na dijagonali gornje trokutaste matrice nalaze se vlastite vrijednosti operatora.

Dokaz. Znamo da karakteristični polinom ne ovisi o izabranoj bazi. Neka je $\mathbf{A}$ matrica, neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sve njezine vlastite vrijednosti (koje mogu biti i kompleksni brojevi). Neka je $\mathbf{T}$ matrica takva da je $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ gornja trokutasta. Tad je karakteristični polinom matrice $\mathbf{B}$ jednak onome od matrice $\mathbf{A}$, jer su te dvije matrice slične. Međutim, taj karakteristični polinom možemo direktno izračunati. Ako $\mathbf{B}$ ima oblik

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & * & \ldots & * \\ 0 & b_{22} & \ldots & * \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

tad je

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda - b_{11} & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda - b_{22} & \ldots & * \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda - b_{nn} \end{bmatrix}$$

i determinanta ove matrice jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata:

$$\kappa(\lambda) = (\lambda - b_{11})(\lambda - b_{22})\ldots(\lambda - b_{nn}).$$

Nul točke ovoga polinoma su brojevi $b_{11}, \ldots, b_{nn}$ i stoga se oni podudaraju sa vlastitim vrijednostima. ◄

Dakle, nakon svođenja na gornju trokutastu formu, na dijagonali matrice $\mathbf{B}$ naći će se vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ (u nekom poretku). Time je naša tvrdnja dokazana.

9.5. Jordanova forma matrice

Ako je vlastita vrijednost operatora višestruka, odgovarajući vlastiti potprostor može biti manje dimenzije nego što je kratnost vlastite vrijednosti. U tom slučaju ne postoji baza koju čine vlastiti vektori, pa matrica ne može biti slična dijagonalnoj.

Pokazali smo da je tad matrica slična nekoj gornje-trokutastoj matrici. Najjednostavniji oblik te gornje-trokutaste matrice nazivamo **Jordanova**[5] **forma**.

Opišimo oblik Jordanove forme.[6] To je dijagonalna blok-matrica kojoj se na dijagonali nalaze **Jordanovi blokovi**:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}(\lambda_2) & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{J}(\lambda_k) \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Jordanov blok je kvadratna matrica specijalnoga oblika, koji ćemo uskoro opisati. Gornji zapis sugerira da svaki Jordanov blok odgovara pojedinoj vlastitoj vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Njegov je red jednak kratnosti vlastite vrijednosti. Tako na primjer, Jordanova matrica gornjeg oblika pojavit će se u slučaju kad karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ glasi

$$\kappa(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{r_k}.$$

Sad je $\mathbf{J}(\lambda_1)$ reda r_1, $\mathbf{J}(\lambda_2)$ reda r_2 itd. Primijetimo da je ovdje $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, n je red matrice $\mathbf{A}$.

U slučaju da su sve vlastite vrijednosti različite, svi su Jordanovi blokovi reda 1, $\mathbf{J}(\lambda_i) = \lambda_i$ i Jordanova matrica je dijagonalna. Tako je problem dijagonalizacije specijalni slučaj određivanja Jordanove forme matrice.

U općem slučaju, Jordanov blok $\mathbf{J}(\lambda_i)$ opisan je sljedećim uvjetima:

- na svim mjestima dijagonale ima vlastitu vrijednost λ_i;
- na gornjoj sporednoj dijagonali ima elemente 0 ili 1;
- svi su ostali elementi jednaki 0.

— ◆ —

Želimo li biti potpuno precizni, moramo pogledati detaljnije u strukturu pojedinog Jordanovog bloka. Pogledat ćemo, recimo, prvi Jordanov blok i — radi jednostavnosti zapisa — pisati ga bez indeksa. Svaki je blok i sam dijagonalna blok-matrica koja se sastoji od **elementarnih Jordanovih klijetki**[7]:

$$\mathbf{J}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{J}_m \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Elementarna Jordanova klijetka je matrica oblika:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Ona na dijagonali ima vlastitu vrijednost λ, na gornjoj sporednoj dijagonali vrijednost 1, a svi su ostali elementi jednaki 0. Pri tom se u formuli (2) elementarne Jordanove klijetke mogu poredati tako da redovi matrica $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2, \ldots$ opadaju.

Broj elementarnih Jordanovih klijetki u ovom bloku jednak je dimenziji vlastitog potprostora koji odgovara svojstvanoj vrijednosti λ. U zapisu (2) taj je broj jednak m.

Red ‘najveće’ Jordanove klijetke odgovara kratnosti vlastite vrijednosti u *minimalnom polinomu*. Ako je

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1}(\lambda - \lambda_2)^{s_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{s_k}.$$

minimalni polinom matrice $\mathbf{A}$, tad su redovi najvećih elementarnih klijetki upravo potencije s_1, s_2 itd. Primijetimo da je $s_1 \leqslant r_1$, $s_2 \leqslant r_2$ itd.

Evo nekoliko primjera Jordanovih blokova. Napisat ćemo cjelokupni blok, student bi trebao sam prepoznati pojedine elementarne Jordanove klijetke

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Pomoć: u prvoj su matrici dimenzije elementarnih klijetki 3-2-1, u drugoj 4-1-1, trećoj 2-1-1-1.)

Napisat ćemo i dva primjera Jordanove forme matrice. Zbog jednostavnosti (i pomoći) izdvojit ćemo samo Jordanove blokove (ostali nenapisani elementi matrice jednaki su nuli) Student bi trebao prepoznati pojedine elementarne Jordanove klijetke.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ & & & & 5 & & & \\ & & & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 3 & 1 & & & \\ & & & 0 & 3 & & & \\ & & & & & -2 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

— ◆ —

Kako se određuje Jordanova forma matrice? Postupak je sličan dijagonalizaciji. Odredimo najprije vlastite vrijednosti i potom vlastite vektore. U trenutku kad je dimenzija potprostora manja nego kratnost vlastite vrijednosti doći ćemo u situaciju da dobiveni vektori ne čine bazu prostora. Tad ih nadopunjujemo **pridruženim vlastitim vektorima**.

Prikažimo situaciju na matrici $\mathbf{A}$, čija je Jordanova forma prva matrica u (4). Neka je $\mathbf{v}_1$ vlastiti vektor koji odgovara prvoj vlastitoj vrijednosti matrice, $\lambda_1 = 2$. Vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$ i na osnovu toga je prvi stupac Jordanove forme. Iz drugog stupca čitamo da za drugi vektor $\mathbf{v}_2$ vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$. On *nije vlastiti vektor* matrice već upravo — pridruženi vlastiti vektor. Nalazimo ga dakle iz uvjeta

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1,$$

gdje je $\mathbf{v}_1$ ‘pravi’ vlastiti vektor.

Iz trećeg stupca čitamo $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$, što znači da je $\mathbf{v}_3$ također pridruženi vlastiti vektor. Iz četvrtog stupca čitamo $\mathbf{A}\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_4$ je ponovo ‘pravi’ vlastiti vektor.

Ilustrijajmo situaciju na (jednostavnom) primjeru.

Primjer 10. Odredimo Jordanovu formu matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

► Karakteristični polinom je

$$\kappa(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -4 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Vlastita vrijednost $\lambda = 2$ je dvostruka.

Potražimo vlastite vektore. Iz sustava $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Drugog vlastitog vektora matrica nema. Stoga moramo potražiti pridruženi vlastiti vektor. On je rješenje sustava

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1,$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Odavde slijedi $x_1 = 2x_2 - 1$ i za pridruženi vektor uzimamo na primjer $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tako dobivamo matricu prijelaza

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njen je inverz

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uvjerite se da umnožak $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ daje Jordanovu formu matrice:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \ ◄$$

[2] engl. *eigenvalue*, njem. *Eigenwert*, franc. *valeur propre*, rus. собственное значение, srp. *sopstvena vrednost*.
[3] Razvoj novih računalskih programa, s razvijenim simboličkim (a ne samo numeričkim) računom omogućavaju računanje i ovakvih determinanti.
[4] William Rowan Hamilton (1805–1865), irski matematičar; Arthur Cayley (1821–1895), engleski matematičar.
[5] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), francuski matematičar.
[6] Na nekoliko mjesta ovaj opis neće biti popraćen strogim dokazom, jer on prelazi okvire ovoga udžbenika. Čitatelj se upućuje na knjigu S. Kurepa, *Konačno-dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, gdje može pronaći sve potrebne detalje.
[7] U literaturi se pod pojmom elementarne Jordanove klijetke spominje i matrica sličnoga oblika koja na dijagonali ima nule.

— ◆ —

Sad možemo napisati algoritam za određivanje Jordanove forme matrice.

Algoritam za nalaženje Jordanove forme

Korak 1. Odredimo karakteristični polinom matrice
$$\kappa(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{r_k}.$$
Korak 2. Za odabranu vlastitu vrijednost λ_i odredujemo njezin Jordanov blok. Rješavamo sustav
$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$
Ako je time pronađeno m linearno nezavisnih vlastitih vektora, tad će Jordanov blok imati m elementarnih Jordanovih klijetki. Ako je $m = r_i$, postupak je završen i Jordanov blok je dijagonalan. Inače moramo odrediti $r_i - m$ pridruženih vlastitih vektora.

Korak 3. Veličina pojedine elementarne Jordanove klijetke nije unaprijed poznata. Također ne znamo koji od vlastitih vektora će imati pridružene a koji ne. Ako je $\mathbf{v}_1$ jedini vlastiti vektor, pridružene vlastite vektore tražimo iz jednadžbi
$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_2 &= -\mathbf{v}_1\\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_3 &= -\mathbf{v}_2\\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_4 &= -\mathbf{v}_3\\ &\vdots\end{aligned}$$
i postupak ponavljamo onoliko dugo dok postoji rješenje.

Ako postoji nekoliko linearno nezavisnih vektora, tad je korisno umjesto $\mathbf{v}_1$ u prethodnoj jednadžbi staviti njihovu linearnu kombinaciju s privremeno neodređenim koeficijentima. Te ćemo koeficijente odrediti tako da jednadžba ima rješenje.

Pokažimo to na primjeru.

Primjer 11. Odredimo Jordanovu formu matrice
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2\\ -3 & 8 & -2\\ -3 & 5 & 1\end{bmatrix}.$$

► Karakteristični polinom glasi
$$\kappa(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -5 & 2\\ 3 & \lambda-8 & 2\\ 3 & -5 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = (\lambda-3)^3.$$
Stoga postoji samo jedna, trostruka vlastita vrijednost. Čitava će Jordanova matrica imati samo jedan Jordanov blok.

Potražimo vlastite vektore. Jednadžba $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ glasi
$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$
odakle slijedi $x_1 = \frac{5}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3$. Stavljajući $x_2 = 3s$, $x_3 = 3t$ dobivamo
$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s-2t\\ 3s\\ 3t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 5\\ 3\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2\\ 0\\ 3\end{bmatrix}. \qquad (*)$$
Možemo izabrati $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$, to su vlastiti vektori matrice $\mathbf{A}$. Međutim, niti jedan od njih nema pridruženih vektora! Naime, sustav
$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1 \qquad (**)$$
vodi na
$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\\ -3\\ 0\end{bmatrix}$$
i on očigledno nema rješenja (prve dvije jednadžbe su proturječne). Zato umjesto $\mathbf{v}_1$ u $(**)$ stavljamo linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, a to je baš vektor oblika $(*)$:
$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5s+2t\\ -3s\\ -3t\end{bmatrix}$$
gdje vrijednosti od s i t tek treba odrediti. Gaussovim transformacijama dobivamo:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5s+2t\\ 3 & -5 & 2 & -3s\\ 3 & -5 & 2 & -3t\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5s+2t\\ 0 & 0 & 0 & 2s-2t\\ 0 & 0 & 0 & 5s-5t\end{array}\right]$$
te mora biti $s = t$. Stavimo $s = t = \frac{1}{3}$. Dobivamo popravljeni prvi vlastiti vektor
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$
Za njemu pridruženi vlastiti vektor vrijedi
$$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1.$$
Vidimo da ovaj uvjet zadovoljava dvoparametarska familija pridruženih vektora. Mi trebamo samo jedan među njima! Uvrštavajući, recimo, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dobivamo $x_3 = 3$. Tako je pridruženi vlastiti vektor $\mathbf{v}_3 = [1, 2, 3]^\top$.

Drugi vlastiti vektor možemo ostaviti nepromijenjen, jer je linearno nezavisan s promijenjenim prvim vektorom. Načinimo matricu prijelaza $\mathbf{T}$. Pri tom pripazimo na raspored vektora, pridružene vektore stavljamo odmah iza odgovarajućih vlastitih vektora:
$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix}.$$
Inverzna matrica glasi
$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 4\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$
Uvjerite se direktnim množenjem da uistinu vrijedi
$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 4\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 & -2\\ -3 & 8 & -2\\ -3 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$ ◄

9.6. Matrični polinomi i matrične funkcije

9.6.1. Matrični polinom

Pretpostavimo da je matrica $\mathbf{A}$ slična dijagonalnoj: postoji matrica $\mathbf{T}$ takva da je $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D}$ dijagonalna. (Primijetite da pri tom ne zahtijevamo da su vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ različite, s obzirom na činjenicu da postoje matrice slične dijagonalnoj čije sve vlastite vrijednosti nisu različite.)

Računanje s dijagonalnim matricama iznimno je lagan posao; takve se matrice ponašaju poput skalara. Tako npr. vrijedi
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_2 & \dots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n\end{bmatrix},\ \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_2^2 & \dots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n^2\end{bmatrix},\ \mathbf{D}^p = \begin{bmatrix} d_1^p & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_2^p & \dots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n^p\end{bmatrix}.$$
Općenitije, ako je $P(\lambda)$ bilo koji polinom, tad je vrijednost toga polinoma u dijagonalnoj matrici $\mathbf{D}$ ponovno dijagonalna matrica:
$$P(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} P(d_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & P(d_2) & \dots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & P(d_n)\end{bmatrix}. \qquad (1)$$
Kako se koristi ovaj rezultat? Iz veze $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D}$ slijedi
$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}. \qquad (2)$$
Zato je
$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{T}\mathbf{D}^2\mathbf{T}^{-1}.$$
Ponavljajući ovaj postupak, vidimo da za svaku potenciju vrijedi
$$\mathbf{A}^p = \mathbf{T}\mathbf{D}^p\mathbf{T}^{-1}.$$
Stoga, za polinom $P(\lambda)$ stupnja p možemo pisati
$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{T}P(\mathbf{D})\mathbf{T}^{-1} \qquad (3)$$
pri čemu $P(\mathbf{D})$ računamo formulom (1).

Primjer 12. Izračunajmo $\begin{bmatrix} 5 & 2\\ -6 & -2\end{bmatrix}^{1000}$.

► Rješenje ovoga problema nije jednostavno (kao ni pitanje, uostalom!). Da bismo odredili ovu potenciju, potražit ćemo dijagonalnu matricu sličnu matrici $\mathbf{A}$ (ukoliko postoji!) i primijeniti formulu (3).

Najprije moramo odrediti vlastite vrijednosti:
$$\kappa(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2\\ 6 & \lambda+2\end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$
Nul točke vlastitoga polinoma su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$. One su različite i stoga smo sigurni da je matrica slična dijagonalnoj.

Sad određujemo vlastite vektore. Onaj koji odgovara prvoj vlastitoj vrijednosti nalazimo iz sustava $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, odnosno
$$\begin{aligned} -4x_1 - 2x_2 &= 0\\ 6x_1 + 3x_2 &= 0\end{aligned} \implies \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1\\ -2\end{bmatrix}.$$
Drugi vlastiti vektor je rješenje jednadžbe $(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, odnosno
$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 &= 0\\ 6x_1 + 4x_2 &= 0\end{aligned} \implies \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 2\\ -3\end{bmatrix}.$$
Time dobivamo matricu $\mathbf{T}$:
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}.$$
Njena inverzna matrica iznosi
$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$
Za nju vrijedi $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D}$, gdje je $\mathbf{D}$ dijagonalna:
$$\begin{bmatrix} -3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2\\ -6 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$
Provjeri točnost učinjenih računa direktnim množenjem!

Formula (2) sad glasi
$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1} \iff \begin{bmatrix} 5 & 2\\ -6 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$
Potenciju $\mathbf{A}^{1000}$ računamo po formuli (3):
$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{1000} &= \mathbf{T}\mathbf{D}^{1000}\mathbf{T}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{1000}\begin{bmatrix} -3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2^{1000}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$
Direktnim množenjem sad dobivamo točan rezultat! ◄

9.6.2. Matrične funkcije

Osim polinoma, ovakvim se računom mogu dobiti i druge matrične funkcije.

Označimo sa $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ skup svih vlastitih vrijednosti operatora A (ili pripadne matrice). Taj se skup naziva **spektar operatora**. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bilo koja funkcija definirana u svakoj točki spektra operatora. Pretpostavimo da se $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati. Tad definiramo vrijednost te funkcije u matrici $\mathbf{A}$ na način
$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n)\end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}. \qquad (4)$$

Primjer 13. Provjerimo formulu (4) na matrici iz prethodnog primjera i na funkciji $f(t) = \dfrac{1}{t}$. Ova je funkcija definirana u svakoj točki skupa $\{1, 2\}$ koji je spektar matrice $\mathbf{A}$. Imamo
$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1\\ 3 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}.$$
U kakvoj je vezi ova matrica s matricom $\mathbf{A}$? Jednadžba preslikavanja $f(t) = \dfrac{1}{t} = t^{-1}$ sugerira da je riječ o inverznoj matrici. Provjerite da je to istina!

— ◆ —

Ukoliko je matrica $\mathbf{A}$ slična gornjoj trokutastoj matrici $\mathbf{B}$ (ali ne i dijagonalnoj), tad je samo dio gornjih formula istinit. Za gornju trokutastu matricu sve njezine potencije su opet gornje trokutaste, a na dijagonali se nalaze potencije dijagonalnih elemenata (o preostalim elementima ne možemo najčešće ništa kazati):
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & *\\ 0 & \lambda_2 & \dots & *\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} \implies \mathbf{B}^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & * & \dots & *\\ 0 & \lambda_2^p & \dots & *\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p\end{bmatrix}$$
Slično, ako je $P(\lambda)$ bilo koji polinom, za njega će vrijediti:
$$P(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & * & \dots & *\\ 0 & P(\lambda_2) & \dots & *\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & P(\lambda_n)\end{bmatrix}.$$
O elementima označenim s $*$ ne možemo općenito ništa kazati. Zapravo, odgovor u ovom slučaju daje **Jordanova forma** matrice.

9.6.3. Matrične funkcije i Jordanova forma

Znajući Jordanovu formu, možemo napisati i opći oblik matrične funkcije.

Neka je $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektar matrice $\mathbf{A}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ elementarna funkcija (čitaj: dovoljno puta diferencijabilna na području definicije) definirana u točkama spektra. Neka je $\mathbf{T}$ matrica koja prevodi matricu $\mathbf{A}$ u Jordanovu formu:
$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}.$$
Ovdje je $\mathbf{J}$ Jordanova forma. Tad definiramo **matričnu funkciju** $f(\mathbf{A})$ na način:
$$f(\mathbf{A}) := \mathbf{T}f(\mathbf{J})\mathbf{T}^{-1}.$$
Opišimo $f(\mathbf{J})$. Budući da je $\mathbf{J}$ dijagonalna blok matrica, bit će i $f(\mathbf{J})$ dijagonalna blok matrica istoga oblika:
$$f(\mathbf{J}) := \begin{bmatrix} f(\mathbf{J}(\lambda_1)) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & f(\mathbf{J}(\lambda_2)) & \mathbf{0} \dots & \mathbf{0}\\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots & f(\mathbf{J}(\lambda_k))\end{bmatrix} \qquad (5)$$
Svaki blok izgleda ovako:
$$f(\mathbf{J}(\lambda)) := \begin{bmatrix} f(\mathbf{J}_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & f(\mathbf{J}_2) & \mathbf{0} \dots & \mathbf{0}\\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots & f(\mathbf{J}_m)\end{bmatrix} \qquad (6)$$
i preostaje napisati kako se definira funkcija elementarne Jordanove klijetke:
$$f(\mathbf{J}_1) := \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \frac{1}{3!}f'''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda)\\ 0 & f(\lambda) & f'(g) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda)\\ 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\lambda)\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda)\end{bmatrix}. \qquad (7)$$
Razlog ovakvoj definiciji je u tome što formula vrijedi ako je f polinom. U to se možemo uvjeriti direktnim računom (koji nije sasvim jednostavan!). Zato je prirodno uzeti istu formulu i za definiciju matrične funkcije za po volji odabranu funkciju f.

— ◆ —

Napišimo još jedan primjer. Matrična funkcija druge matrice u (4) iz §9.5. glasi
$$\begin{bmatrix} f(0) & f'(0) & 0 & & & & & \\ 0 & f(0) & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & f(0) & & & & & \\ & & & f(3) & f'(3) & & & \\ & & & 0 & f(3) & & & \\ & & & & & f(-2) & f'(-2) & \frac{1}{2}f''(-2)\\ & & & & & 0 & f(-2) & f'(-2)\\ & & & & & 0 & 0 & f(-2)\end{bmatrix}.$$

Primjer 14. U primjenama je od najveće važnosti **eksponencijalna matrična funkcija**.

Po ovome postupku, za matricu $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ vrijedi
$$e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2\\ 0 & e^2\end{bmatrix}.$$
S druge strane, matricu $e^{\mathbf{J}}$ možemo pokušati računati na način
$$e^{\mathbf{J}} = \mathbf{I} + \mathbf{J} + \frac{1}{2}\mathbf{J}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{J}^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\mathbf{J}^n + \ldots$$
Uvjerite se, računajući ove potencije, da ćete dobiti isti rezultat.