Matematička analiza 1 - Poglavlje 12

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

VERZIJA OD: 16. RUJNA 2021.
PUBLISHED BY FER
WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

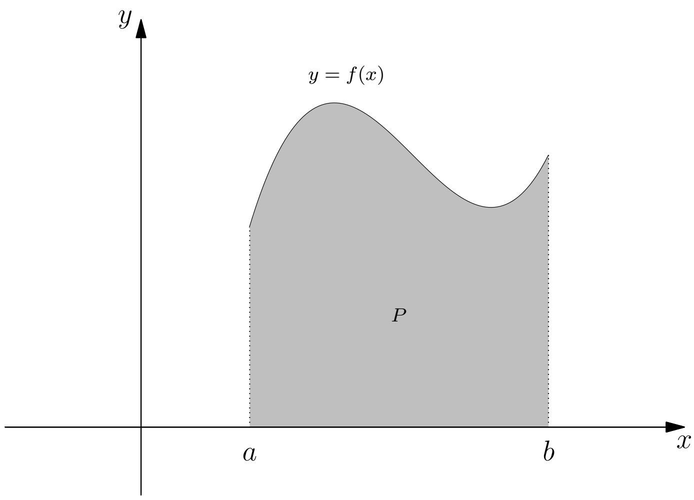
12. Nepravi integrali

U ovom poglavlja upoznat ćemo se s nepravim integralima. To su integrali kod kojih ćemo pustiti da granice integracije teže u beskonačnost ili kod kojih podintegralna funkcija neće biti omeđena na intervalu integracije. Ovakvi integrali se često pojavljuju u primjeni kada promatramo granično ponašanje nekog procesa, a posebno će biti važni u vjerojatnosti i statistici.

Ključni pojmovi: nepravi integral s granicama u beskonačnosti, usporedni kriteriji za integrale s granicama u beskonačnosti, nepravi integral neomeđenih funkcija, usporedni kriteriji za integrale neomeđenih funkcija

12.1 Uvod i motivacija

Prisjetimo se da integral $\int_a^b f(x)\,dx$ predstavlja površinu ispod krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$ (Slika 13.1).

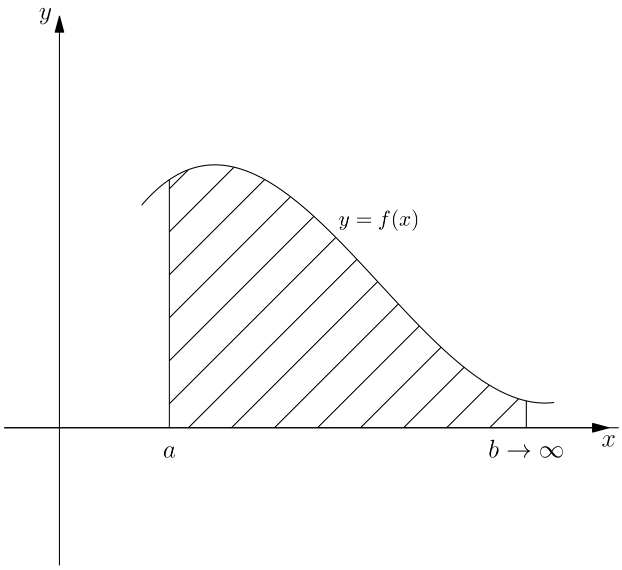


Slika 12.1: Površina ispod krivulje $y = f(x)$

Primijetimo da se ovdje radi o konačnom intervalu $[a,b]$ te podintegralnoj funkciji koja je na tom intervalu omeđena. Prirodno nam se nameću dva pitanja:

- Što se događa ako pustimo da granice integracije a ili b budu $-\infty$ ili $+\infty$?
- Što se događa ako podintegralna funkcija ima vertikalnu asimptotu u nekoj točki $c \in [a,b]$, tj. ako je funkcija $f(x)$ neomeđena na intervalu integracije?

Možda se na prvi pogled čini da nema smisla promatrati ovakve integrale no oni su itekako važni i često se pojavljuju u primjeni, pogotovo kada proučavamo bilo kakvo granično ponašanje nekog procesa. Neprave integrale s granicama u beskonačnosti ćemo često susretati u vjerojatnosti i statistici te u integralnim transformacijama koje su od velike važnosti u elektrotehničkoj struci.



Slika 12.2: Nepravi integral s granicom u beskonačnosti

12.2 Nepravi integrali s granicama u beskonačnosti

12.2.1 Definicija nepravog integrala s granicama u beskonačnosti

Krenimo od prvog problema s određenim integralima koji imaju granice integracije $-\infty$ ili $+\infty$, npr. problem površine sa Slike 13.2. Takve integrale ćemo zvati **nepravi integrali s granicama u beskonačnosti**.

Definicija 12.2.1 Neka je $f : [a,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilna na svakom segmentu $[a,b]$, gdje je $b < +\infty$. Ako postoji **konačan limes** $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, onda se on zove **nepravi integral** funkcije f na skupu $[a,+\infty\rangle$, i označava se:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{12.1}$$

Ako taj limes postoji i konačan je, još kažemo da integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **konvergira**.
Ako je limes (12.1) jednak $+\infty$ ili $-\infty$, ili limes ne postoji, kažemo da integral **divergira**. ■

Napomena 12.1 Analogno definiramo i sljedeće neprave integrale:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{12.2}$$

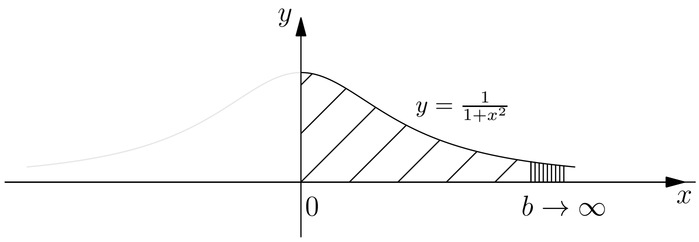
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{12.3}$$

■ **Primjer 12.1** Ispitajte konvergenciju integrala $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Rješenje. Po prethodnoj definiciji slijedi:

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg} x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Zaključujemo da integral konvergira i ima vrijednost $I = \dfrac{\pi}{2}$, vidi Sliku 13.3.



Slika 12.3: Primjer 13.1

■

■ **Primjer 12.2** Ispitajte konvergenciju integrala $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$.

Rješenje.

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty}(-\cos x)\Big|_0^b = 1 - \lim_{b\to+\infty}\cos b.$$

S obzirom da prethodni limes ne postoji, zadani integral divergira. ■

■ **Primjer 12.3** Izračunajte $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

Rješenje. Već smo pokazali u Primjeru 12.29 da parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C,$$

te stoga imamo

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}(-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(-be^{-b} - e^{-b} + 1) = 1.$$

Sami za vježbu pokažite da je $\lim\limits_{b\to+\infty} be^{-b} = 0$. ■

Dodatak

Integral iz prethodnog primjera ćete često susretati u vjerojatnosti i statistici, npr. kod eksponencijalne razdiobe i kod definiranja nekih specijalnih funkcija. No takav tip integrala je i od velike važnosti u elektrotehnici. Jedna od najvažniji integralnih transformacija je Laplaceova transformacija funkcije $f(t)$ definirana nepravim integralom

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,$$

za svaki s za koji ovaj integral konvergira. Primjerice, Laplaceova transformacija funkcije $f(t) = \sin(\omega t)$ jednaka je

$$\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}\,dt = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad s > 0.$$

Provjerite to sami koristeći rezultat Vježbe 12.6. Glavne primjene Laplaceove transformacije koje ćete upoznati u nastavku studija su u analizi strujnih krugova i rješavanju diferencijalnih jednadžbi.

■ **Primjer 12.4** Izračunajte $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)(2x+1)}$.

Rješenje. Nakon rastava na parcijalne razlomke dobivamo

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\int_0^\infty \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{2x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\Big(-\ln|x+2| + \ln|2x+1|\Big)\Big|_0^b \\
&= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{|2x+1|}{|x+2|}\Big|_0^b = \frac{1}{3}\Big(\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{2b+1}{b+2} - \ln\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\ln 4.
\end{aligned}$$

Napomena 12.2 Primijetite da ne smijemo rastavljati početni nepravi integral na dva nova neprava integrala i računati pripadne limese odvojeno. Naime, u tom slučaju bismo dobili

$$-\frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{dx}{2x+1} = -\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\ln|x+2|\Big|_0^b + \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\ln|2x+1|\Big|_0^b = -\infty + \infty$$

što nas vodi na pogrešan zaključak da početni integral divergira.

■

■ **Primjer 12.5** Ispitajte konvergenciju integrala $I = \displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, (za $a > 0$), u ovisnosti o parametru $p \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Slijedi:

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-p}\,dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}, & \text{za } p \neq 1 \\ \displaystyle\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\ln b - \ln a = +\infty, & \text{za } p = 1. \end{cases}$$

S obzirom da je:

$$\lim_{b\to+\infty} b^{1-p} = \begin{cases} +\infty, & \text{za } p < 1 \\ 0, & \text{za } p > 1, \end{cases}$$

možemo zaključiti sljedeće

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{divergira za } p \le 1, \\ \text{konvergira za } p > 1. \end{cases}$$

U slučaju konvergencije, vrijednost integrala iznosi $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$. ■

Često ćemo koristiti rezultat prethodnog primjera pa ga naglasimo i zapišimo u obliku propozicije.

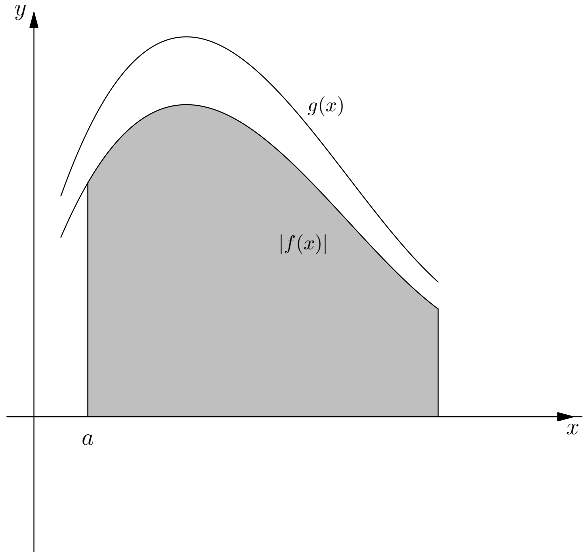
Propozicija 12.2.1 Za $a>0$ vrijedi sljedeće:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{divergira za } p \leq 1, \\ \text{konvergira za } p > 1. \end{cases}$$

Vježba 12.1 Ispitajte konvergenciju integrala $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ i $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$. Skicirajte i usporedite pripadajuće geometrijske interpretacije navedenih integrala.

12.2.2 Kriteriji usporedbe za neprave integrale s granicama u beskonačnosti

Ponekad je dovoljno znati konvergira li promatrani integral, iako njegovu vrijednost ne znamo izračunati (primjerice, kada se radi o neelementarnom integralu). Tada uspoređujemo zadani integral s drugim nepravim integralom čija nam je konvergencija poznata. Idući teorem jasno slijedi sa Slike 13.4.



Slika 12.4: Usporedba nepravih integrala

Teorem 12.2.1 — Usporedni kriterij za neprave integrale s granicama u beskonačnosti. Neka graf funkcije $f(x)$ leži u području između grafova funkcija $-g(x)$ i $g(x)$, odnosno $|f(x)| \leq g(x)$, $g(x) \geq 0$, za $x \in [a,+\infty\rangle$. Tada vrijedi:

(a) Ako integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konvergira, onda konvergira i integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

(b) Ako integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira, onda divergira i integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Napomena 12.3 Analogne tvrdnje iz prethodnog teorema vrijede i za integrale $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ i $\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$, te za integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$.

Pokazat ćemo primjenu teorema na nekoliko primjera.

■ **Primjer 12.6** Ispitajte konvergenciju integrala $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$.

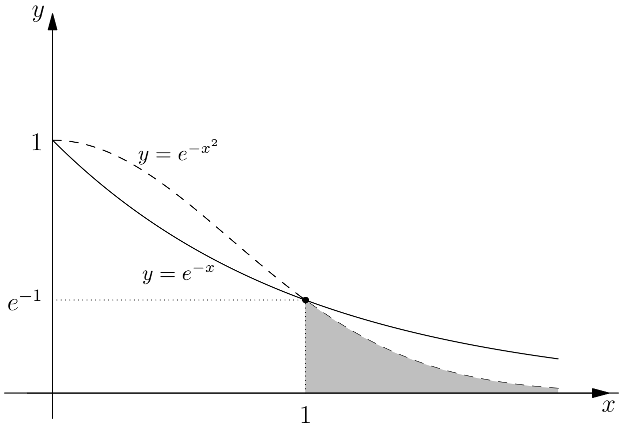
Rješenje. Za podintegralnu funkciju vrijedi

$$\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{za } x \in [0,\infty\rangle.$$

S obzirom da integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ konvergira (Primjer 13.1), zadani integral također konvergira po Teoremu 12.2.1 (a). ■

■ **Primjer 12.7** Ispitajte konvergenciju integrala $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Rješenje. Funkcija e^{-x^2} nije elementarno integrabilna pa je potrebno napraviti usporedbu s funkcijom koju ćemo lagano integrirati. Prirodno se nameće usporedba s e^{-x}, no pogledamo li Sliku 13.5, vidimo da vrijedi $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, no tek za $x \in [1,+\infty\rangle$.



Slika 12.5: Primjer 13.7

Stoga ćemo zadani integral prikazati kao zbroj dva integrala na sljedeći način:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = I_1 + I_2.$$

S obzirom da je prvi integral konačan, a drugi nepravi, konvergencija zadanog integrala se podudara s konvergencijom integrala I_2. Njega uspoređujemo s nepravim integralom $I_2^\star = \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ čiju konvergenciju možemo lako utvrditi:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b}) + e^{-1} = e^{-1}.$$

Integral $I_2^\star$ konvergira pa prema Teoremu 12.2.1 konvergira i I_2, odnosno i promatrani integral I konvergira.

> **Napomena 12.4** Zadani integral se naziva Euler-Poissonov integral te je u uskoj vezi osnovnim elementima teorije vjerojatnosti. Može se izračunati egzaktno što ćete vidjeti u kasnijim matematičkim kolegijima, a vrijednost mu je $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

■

Iskazat ćemo još jedan usporedni kriterij konvergencije koji će nam pomoći u određivanju konvergencije.

Teorem 12.2.2 — Alternativni usporedni kriterij za neprave integrale s granicama u beskonačnosti. Neka su $f(x), g(x)$ definirane za $x \in [a, \infty\rangle$ i neka postoji konačan limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, $L \neq 0$. Onda integrali $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ i $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ imaju istu konvergenciju, tj. ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Napomena 12.5 Dodatno, ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, koristimo sljedeću oznaku

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Primijetite ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$, tada je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{Lg(x)} = 1$, odnosno možemo pisati

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \sim L \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

■ **Primjer 12.8** Ispitajte konvergenciju integrala $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Rješenje. Možemo pisati $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ jer vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = 1$.

S obzirom da integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ konvergira zbog $p = \frac{3}{2} > 1$ (Propozicija 12.2.1), prema Teoremu 12.2.2 konvergira i zadani integral. ■

■ **Primjer 12.9** Ispitajte konvergenciju integrala $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Rješenje. Opet pišemo $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ jer je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = 1$, a budući $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ divergira zbog $p = \frac{2}{3} < 1$, divergira i početni integral. ■

Vježba 12.2 Prethodna dva primjera smo mogli riješiti i koristeći osnovni usporedni kriteriji 12.2.1. Napravite to sami za vježbu.

Vježba 12.3 Ispitajte konvergenciju integrala $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}}$.

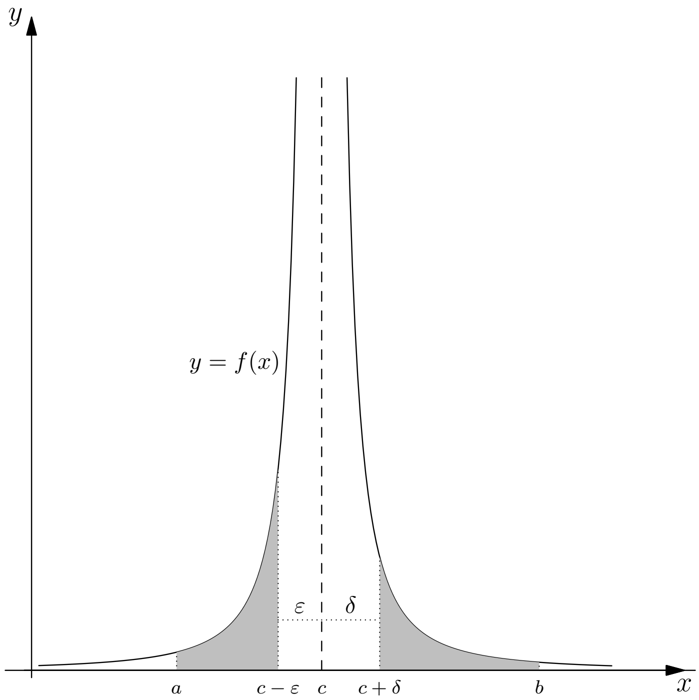
12.3 Nepravi integrali neomeđenih funkcija

12.3.1 Definicija nepravih integrala neomeđenih funkcija

Sada ćemo promatrati drugi problem: podintegralna funkcija ima vertikalnu asimptotu u nekoj točki intervala integracije, odnosno nije omeđena na promatranom intervalu (vidi Sliku 13.6).

Definicija 12.3.1 Neka je $f : [a, c\rangle \cup \langle c, b] \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi:

1. f je integrabilna na svakom segmentu $[a, c-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$,
2. f je integrabilna na svakom segmentu $[c+\delta, b]$, $\delta > 0$,
3. f **nije omeđena** u bilo kojoj okolini točke c, tj. $\lim\limits_{x\to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.



Slika 12.6: Nepravi integral neomeđene funkcije

Nepravi integral od f na skupu $[a,b]$ je izraz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \tag{12.4}$$

ako ova oba limesa postoje i konačni su. U tom slučaju kažemo da nepravi integral $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergira**. Ako bilo koji od limesa u izrazu (12.4) ne postoji ili nije konačan kažemo da nepravi integral od f na skupu $[a,b]$ **divergira**. ■

Napomena 12.6 Prethodna definicija ima dva posebna slučaja, kada je $c = a$:

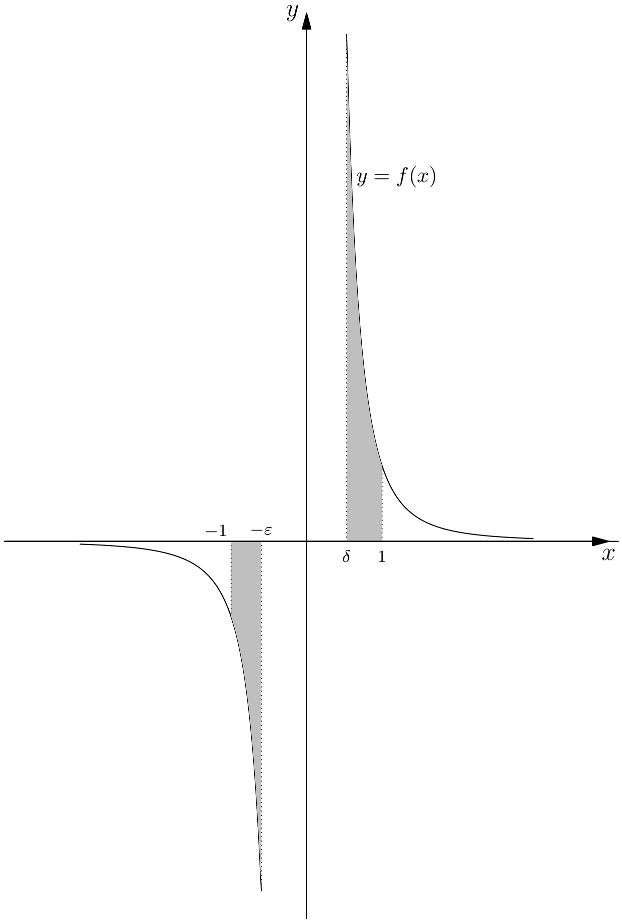
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

i kada je $c = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a}^{b-\delta} f(x)\,dx.$$

■ **Primjer 12.10** Ispitajte konvergenciju integrala $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$.

Rješenje. Prvo je potrebno primijetiti da je podintegralna funkcija $f(x) = \frac{1}{x^3}$ neomeđena u točki $0 \in [-1,1]$ (Slika 13.7). Za izračunavanje integrala koristit ćemo prethodnu definiciju no uz



Slika 12.7: Primjer 13.10

jednostavniji zapis limesa bez uvođenja ε i δ okoline.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{c\to 0^-}\int_{-1}^{c}\frac{dx}{x^3}+\lim_{c\to 0^+}\int_{c}^{1}\frac{dx}{x^3}=\lim_{c\to 0^-}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{c}+\lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{c}^{1} \\ &= \lim_{c\to 0^-}\left(-\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{2}\right)+\lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2c^2}\right)=-\infty+\infty \end{aligned} \tag{12.5}$$

Budući da limesi nisu konačni, zaključujemo da promatrani integral divergira.

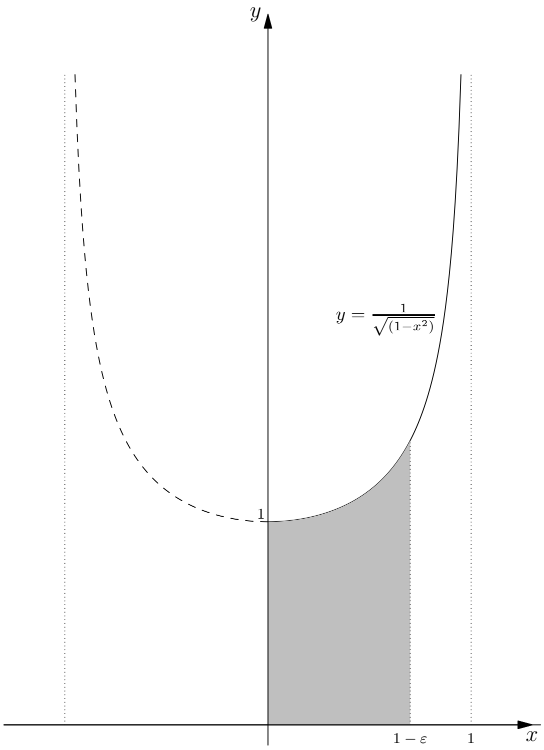
Napomena 12.7 Primijetimo što bi se dogodilo direktnim integriranjem:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}=\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$$

Pogreška je nastala jer nismo provjeravali (ne)omeđenost funkcije na intervalu $[-1,1]$ pa smo nepravi integrali tretirali kao pravi. Kod računanja određenih integrala treba uvijek pripaziti na to!

■

■ **Primjer 12.11** Ispitajte konvergenciju integrala $I=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.



Slika 12.8: Primjer 13.11

Rješenje. Ovdje se radi o jednostavnijem slučaju definicije 12.3.1:

$$I = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} (\arcsin x)\Big|_0^c = \lim_{c\to 1^-} \arcsin(c) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, zadani integral konvergira i ima vrijednost $I = \dfrac{\pi}{2}$.

■

Analogno Propoziciji 12.2.1 za neprave integrale s granicama u beskonačnosti, lako se pokaže sljedeća tvrdnja.

Propozicija 12.3.1 Za $a > 0$ vrijedi sljedeće:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konvergira za } p < 1, \\ \text{divergira za } p \geq 1. \end{cases}$$

Vježba 12.4 Dokažite prethodnu propoziciju sami za vježbu. Također pokažite da u slučaju konvergencije, vrijednost integrala iznosi $\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$.

Vježba 12.5 Ispitajte konvergenciju integrala $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

■ **Primjer 12.12** Izračunajte integral $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Rješenje. Prvo primijetimo da je podintegralna funkcija omeđena na $[0, 2\pi]$. No prilikom izračunavanja integrala koristimo univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. S obzirom da funkcija $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

ima prekid u točki $x = \pi$ te nije omeđena ni u kojoj okolini te točke, potrebno je računati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{ll} t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2}) & x \to \pi^- \Rightarrow t \to +\infty \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} & x \to \pi^+ \Rightarrow t \to -\infty \end{array} \right| \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} + \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{2\,dt}{t^2+3} + \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{2\,dt}{t^2+3} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \Big|_0^b + \lim_{a\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \Big|_a^0 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(0 - (-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da promatrani integral konvergira i ima vrijednosti $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. ■

12.3.2 Kriteriji usporedbe za neprave integrale neomeđenih funkcija

Kao i kod nepravih integrala s granicama u beskonačnosti, i ovdje je moguće iskazati kriterije usporedbe pomoću kojih možemo ustanoviti konvergenciju promatranih integrala, no ne i njihovu točnu vrijednosti. Najefikasniji je sljedeći kriterij koji je analogan kriteriju 12.2.2 za usporedbu nepravih integrala s granicama u beskonačnosti.

Teorem 12.3.1 — Usporedni kriterij za neprave integrale neomeđenih funkcija. Neka je $\int_a^b f(x)\,dx$ nepravi integral kojem je podintegralna funkcija $f(x)$ neomeđena u točki $c \in [a,b]$. Ako postoji konačan limes $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, $L \neq 0$, onda integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ imaju istu konvergenciju, odnosno ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Napomena 12.8 Analogno nepravim integralima s granicama u beskonačnosti (Napomena 13.5), ako je $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, koristimo sljedeću oznaku

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \int_a^b g(x)\,dx,$$

a ako je $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$, tada vrijedi $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{L\,g(x)} = 1$, pa pišemo

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim L \int_a^b g(x)\,dx.$$

■ **Primjer 12.13** Ispitajte konvergenciju integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^5}}\,dx$.

Rješenje. Problematična točka podintegralne funkcije je $x = 0$ pa provjerimo pripadni limes

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^5}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{5}{2}\sqrt{x^3}} = +\infty$$

Funkcija je neomeđena u okolini ishodišta pa prema prethodnom usporednom kriteriju, konvergencija integrala se neće promijeniti ako podintegralnu funkciju zamijenimo s nekom ekvivalentnom funkcijom za $x \to 0$. U Poglavlju 7.4.3 vidjeli smo da vrijedi $\ln(1+x) \sim x$, za $x \to 0$.

Stoga možemo pisati:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^5}} dx \sim \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

S obzirom da je $p = \frac{3}{2} > 1$, po Propoziciji 12.3.1 zaključujemo da zadani integral divergira. ∎

Vježba 12.6 Na sličan način pokažite da integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^4}} dx$ konvergira.

∎ **Primjer 12.14** Ispitajte konvergenciju integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Rješenje. Podintegralna funkcija je neomeđena u okolini točke $x = 1$. S obzirom da vrijedi

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{2},$$

po Napomeni 13.8 slijedi da je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{za } x \to 1^-$$

Sada prema kriteriju usporedbe imamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} &= \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{c\to 1^-} (-\sqrt{1-x})\Big|_0^c = \lim_{c\to 1^-} (-\sqrt{1-c}+1) = 1.\end{aligned}$$

Dakle, zadani integral konvergira. (No primijetite da mu ne možemo izračunati točnu vrijednost pomoću elementarnih funkcija.) ∎

12.4 Pitanja za ponavljanje

1. Definirajte nepravi integral na intervalu $[a, +\infty\rangle$.
2. Definirajte nepravi integral na intervalu $[a, b]$ ako je f neomeđena u točki a.
3. Odredi koji su od sljedećih integrala nepravi:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\sin x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-6}^{-2} \frac{1}{x^2+3x}\,dx$

4. Ispitajte konvergenciju integrala $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ u ovisnosti o realnom parametru p.
5. Ispitajte konvergenciju integrala $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$ u ovisnosti o realnom parametru p.
6. Napišite primjere funkcija $f(x)$ takvih da je integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nepravi:
   (a) u rubu a (b) u rubu b (c) u oba ruba
7. Ako u određeni integral na intervalu $[0, \pi]$ uvedemo univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, kako glase nove granice integracije? Objasnite u čemu je problem.
8. Iskažite usporedni kriterij za nepravi integral s granicama u beskonačnosti i grafički ga objasnite.
9. (a) Ako nepravi integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira, možete li išta zaključiti o graničnom ponašanju funkcije $f(x)$, odnosno o limesu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

   (b) Ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, možete li išta zaključiti o nepravom integralu $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$?

   (c) Je li sljedeća tvrdnja točna ili netočna:

$$\text{Ako je } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \text{ tada nepravi integral } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ konvergira.}$$

   Ako je tvrdnja točna, objasnite je, a ako je netočna, pokažite to protuprimjerom.

12.5 Zadaci za vježbu

Izračunajte sljedeće neprave integrale ili utvrdite da su divergentni:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$
2. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^4}$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
5. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^4+4}\,dx$
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)(x^2+1)}$
11. $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ (za $a>1$)
12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^x\,dx$
13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{4x}+3e^{2x}+2}\,dx$
14. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^4 x}\,dx$
15. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx$
16. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$
17. $\displaystyle\int_{0}^{1} \arcsin x\,dx$
18. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}^2 x+1}\,dx$
19. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(2x)\,dx$
20. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$

12.6 Rješenja

1. divergira
2. $\frac{1}{3}$
3. 2
4. divergira
5. divergira
6. $\frac{\pi}{4}$
7. divergira
8. $\frac{\pi}{8}$
9. π
10. $\frac{\pi}{10}+\frac{1}{5}\ln 4$
11. $\frac{1}{\ln a}$
12. 0
13. $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$
14. $\frac{1}{3}$
15. 2
16. $\frac{\pi}{2}+1$
17. $\frac{\pi}{2}-1$
18. $\frac{\pi}{4}$
19. divergira
20. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$