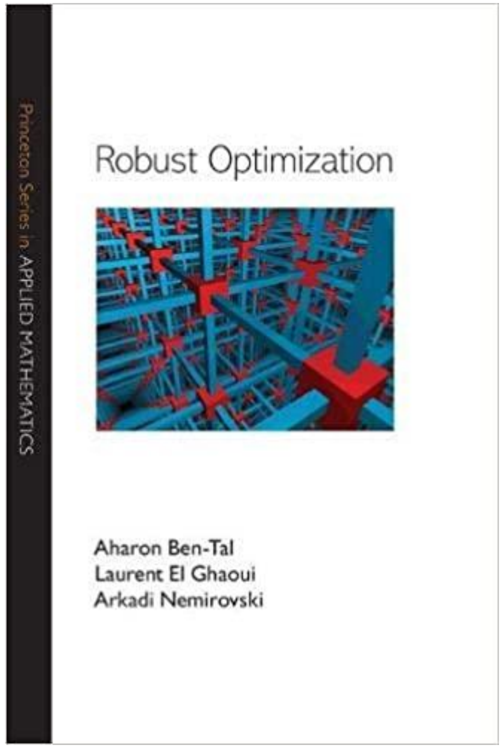
Operacijska istraživanja

11. predavanje: Robusna optimizacija

Kontekst predavanja

- Optimizacija u uvjetima neizvjesnosti
- Robusna optimizacija
- Poliedralna neizvjesnost
- Robusno linearno programiranje



- Predavanje bazirano na:
  – Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., Nemirovski, A.: Robust Optimization, Princeton University Press (2009) –predgovor i poglavlje 1

Motivirajući primjer

- Tvrtka proizvodi dvije vrste lijekova; DrugI i DrugII koji sadrže aktivni reagens A. A se izvlači iz dvije vrste sirovina – RawI i RawII. Pronađite plan koji maksimizira profit tvrtke, uz podatke dane ispod:

Parameter	DrugI	DrugII
Selling price, $ per 1000 packs	6,200	6,900
Content of agent A, g per 1000 packs	0.500	0.600
Manpower required, hours per 1000 packs	90.0	100.0
Equipment required, hours per 1000 packs	40.0	50.0
Operational costs, $ per 1000 packs	700	800

Raw material	Purchasing price, $ per kg	Content of agent A, g per kg
RawI	100.00	0.01
RawII	199.90	0.02

Budget, $	Manpower, hours	Equipment, hours	Capacity of raw materials storage, kg
100,000	2,000	800	1,000

Motivirajući primjer - LP

$$\begin{aligned}
\text{Opt} \quad = \quad & \min \Big\{ \overbrace{[100 \cdot RawI + 199.90 \cdot RawII + 700 \cdot DrugI + 800 \cdot DrugII]}^{\text{purchasing and operational costs}} \\
& - \underbrace{[6200 \cdot DrugI + 6900 \cdot DrugII]}_{\text{income from selling the drugs}} \Big\} \qquad \text{[minus total profit]}
\end{aligned}$$

subject to

$$\begin{aligned}
& 0.01 \cdot RawI + 0.02 \cdot RawII - 0.500 \cdot DrugI - 0.600 \cdot DrugII \geq 0 && \text{[balance of active agent]} \\
& RawI + RawII \leq 1000 && \text{[storage constraint]} \\
& 90.0 \cdot DrugI + 100.0 \cdot DrugII \leq 2000 && \text{[manpower constraint]} \\
& 40.0 \cdot DrugI + 50.0 \cdot DrugII \leq 800 && \text{[equipment constraint]} \\
& 100.0 \cdot RawI + 199.90 \cdot RawII + 700 \cdot DrugI + 800 \cdot DrugII \leq 100000 && \text{[budget constraint]} \\
& RawI, RawII, DrugI, DrugII \geq 0
\end{aligned}$$

Motivirajući primjer – rješenje i problem

$$\text{Opt} = -8819.658; RawI = 0, RawII = 438.789, DrugI = 17.552, DrugII = 0.$$

- 8.8% profita
- Pretp. da su ***aI*** i ***aII*** količine A u RawI i RawII, i da variraju 0.5% i 2% oko nominalne vrijednosti, tj.
  - $aI \in [0.00995, 0.0105], aII \in [0.0196, 0.0204]$
  - Uz pretpostavku da sa po 50% realiziraju ekstremne vrijednosti, **u 50% slučajeva je dobiveno optimalno rješenje neizvedivo!**
  - Ako smanjimo proizvodnju u skladu sa stvarnom količinom A, onda je rezultat slučajna varijabla – profit u najgorem slučaju 6.9% (6929$)
- Varijacija 2% dovela do redukcije profita **u najgorem slučaju za 21%**
  - Tj. 11% u očekivanju

Optimizacija u uvjetima neizvjesnosti

- Dosad:
  - Stohastička optimizacija – slučajni podatci koji slijede neku (djelomično) poznatu distribuciju
  - Analiza osjetljivosti – post-hoc, robusnost nominalnog optimalnog rješenja
- Sada:
  - Robusna optimizacija – nad familijom svih distribucija podržanih na danom skupu U

Robusna optimizacija - povijest

- Robusna kontrola
  - H-infinity
- Robusna statistika
  - Robusnost na outliere (Huber)
- Strojno učenje – metoda potpornih vektora
- Robusna linearna i konveksna optimizacija

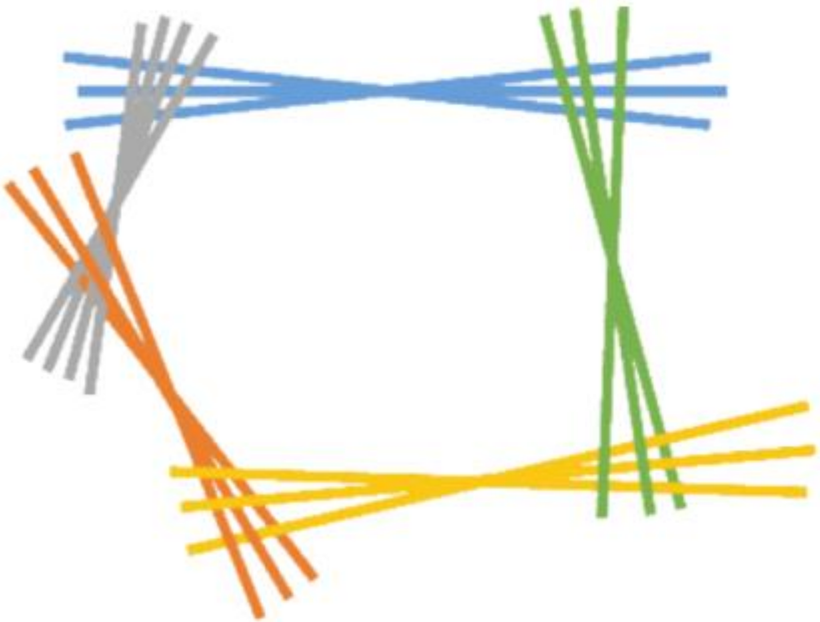
Neizvjesnosti

1. Podatci koji ne postoje – **predikcijska pogreška**
2. Podatci koji se ne mogu precizno izmjeriti – **pogreška u mjerenju**
3. Odluke se ne mogu pouzdano implementirati – **implementacijske pogreške**

- Dosad su se male pogreške <1% tolerirale

Robusna optimizacija

- Dosad pretpostavljeno A,b,c savršeno poznati
- Sada, A,b,c pripadaju određenim skupovima – „skupovi neizvjesnosti”
- Napraviti odluku koja je:
  - **izvediva bez obzira na realizaciju**
  - **optimalna za najgoru realizaciju**



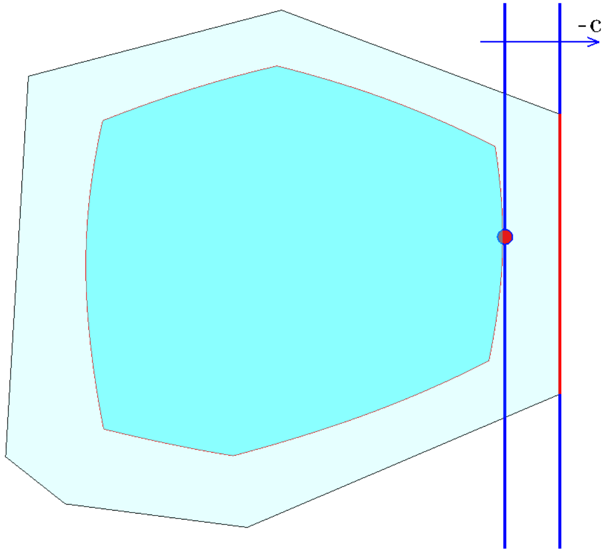
Neizvjesni LP

- Kolekcija LPova, sa varirajućim parametrima

$$\left\{\min_x \{c^T x : Ax \leq b\}\right\}_{(c,A,b)\in U}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ je **robusno izvedivo rješenje** ako zadovoljava sve realizacije iz skupa neizvjesnosti
- Robusna vrijednost izvedivog rješenja x jest $r(x) = \max_{c\in U_c} c^T x$

Robusno linearno programiranje



- **Robusni ekvivalent neizvjesnog linearnog programa**

$$\min c^T x$$
$$a_i^T x \leq b_i, \forall a_i \in U_{a_i}, \forall b_i \in U_{b_i}, i = 1, \dots, m$$

- $U_{a_i} \subseteq \mathbb{R}^n$ i $U_{b_i} \subseteq \mathbb{R}$ su skupovi neizvjesnosti
- Nije nužno LP, ali je uvijek konveksan program neovisno o skupovima neizvjesnosti

Robusno linearno programiranje

- Što sa funkcijom cilja?
- Ne gubimo na općenitosti jer:

$$\begin{gathered}\min_{\mathrm{x}} \max_{c \in U_c} c^T x \\ a_i^T x \le b_i, \forall a_i \in U_{a_i}, \forall b_i \in U_{b_i}, i = 1, \dots, m\end{gathered} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{gathered}\min_{\mathrm{x},\alpha} \alpha \\ c^T x \le \alpha, \forall c \in U_c \\ a_i^T x \le b_i, \forall a_i \in U_{a_i}, \forall b_i \in U_{b_i}, i = 1, \dots, m\end{gathered}$$

Politopna neizvjesnost

- Specijalni slučaj - U_{a_i} i U_{b_i} su politopi:

$$U_{a_i} = \{a_i | D_i a_i \leq d_i\}$$

gdje je $D_i \in \mathbb{R}^{k_i \times n}$ i $d_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, U_{b_i} je interval u $\mathbb{R}$

Politopna neizvjesnost – robusni LP

- Za b_i najgori scenarija je na donjem kraju intervala!
  - Eliminacija U_{b_i}

$$\min c^T x$$
$$a_i^T x \leq b_i, \forall a_i \in U_{a_i}, i = 1, \dots, m$$
$$U_{a_i} = \{a_i | D_i a_i \leq d_i\}$$

  - gdje je sada b_i donji kraj intervala U_{b_i}

Politopna neizvjesnost – robusni LP

$$\min_{x} c^T x$$

$$\begin{bmatrix} \max\limits_{a_i} a_i^T x \\ D_i a_i \le d_i \end{bmatrix} \le b_i, i = 1, \dots, m$$

- Min-max problem!

- Dual unutarnjeg problema

$$\min_{p_i \in \mathbb{R}^{k_i}} p_i^T d_i$$

$$D_i^T p_i = x$$

$$p_i \ge 0$$

Politopna neizvjesnost – robusni LP

- Jaka dualnost! Zamjena unutarnjeg problema njegovim dualom za **min-min** problem:

$$\min_{\mathrm{x}} c^T x$$

$$\begin{bmatrix} \min\limits_{\mathrm{p_i} \in \mathbb{R}^{k_i}} p_i^T d_i \\ D_i^T p_i = x \\ p_i \geq 0 \end{bmatrix} \leq b_i, i = 1, \dots, m$$

LP ekvivalent!

- Program sa prethodnog slidea je ekvivalentan ovome:

$$\min_{\mathrm{x,p_i}} c^T x$$

$$p_i^T d_i \leq b_i, i = 1, \dots, m$$

$$D_i^T p_i = x, i = 1, \dots, m$$

$$p_i \geq 0, \; i = 1, \dots, m$$

– Robusni LP sa poliedralnom neizvjesnosti se može riješiti sa običnim determinističkim LPom

Robusni LP

- Oprez!
  - Ekvivalentni izrazi u ograničenjima glede $\leq, \geq, =$ i slack varijabli u determinističkom LP kod uvođenja neizvjesnosti **potencijalno gube to svojstvo**!

Robusni LP – početni primjer

- Postavljanjem početnog problema kao robusnog LP:
  - slijedeći generalni postupak sa prethodnih slideova
  - **Ili** u ovom jednostavnom slučaju samo uvrštavanjem najgoreg slučaja u početni LP, dobijemo:

$$\mathrm{RobOpt} = -8294.567;\ RawI = 877.732,\ RawII = 0,\ DrugI = 17.467,\ DrugII = 0.$$

  - Profit 8.3% -> gubitak profita samo 6% u odnosu na 21% u nominalnom rješenju!
  - Robusno rješenje uzima `RawI` jer ima manju varijabilnost