11.

Kvadratne forme. Krivulje i plohe drugog reda

Sadržaj poglavlja

11.1. Kvadratne forme

11.1.1. Matrice pridružene kvadratnoj formi

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica. Funkcija $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definirana formulom

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Ax} \,|\, \mathbf{x} \rangle \tag{1}$$

naziva se **kvadratna forma**[1].

Napišimo njezin prikaz koristeći prikaz $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^\top$ i $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Onda je i-ta komponenta vektora $\mathbf{Ax}$ jednaka

$$(\mathbf{Ax})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

te je

$$\langle \mathbf{Ax} \,|\, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) x_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{2}$$

Koristeći vezu skalarnoga produkta i matričnog množenja, kvadratnu formu možemo pisati i na način:

$$\langle \mathbf{Ax} \,|\, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{Ax} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax}. \tag{3}$$

Tako na primjer za matricu reda 2, kvadratna forma ima oblik

$$[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2.$$

Primjer 1. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Napišimo kvadratne forme koje odgovaraju ovim matricama:

► Za matricu $\mathbf{A}$ odgovarajuća forma je

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+3y \end{bmatrix} = 2x^2 + 2xy + 3y^2,$$

dok je za matricu B pokušajmo odmah direktno ispisati

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2x^2 + 2xz + 4xy - 2yz + 3z^2. \ ◄$$

Promotrimo i obratan problem: kako iz zadane forme rekonstruirati matricu?

Obratna veza nije jednoznačna. Naime, jednoj kvadratnoj formi odgovara više matrica. Tako na primjer, spomenutoj formi

$$2x^2 + 2xz + 4xy - 2yz + 3z^2.$$

odgovaraju, uz gornju, još i matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ itd.}$$

Primijetimo da sve one imaju iste dijagonalne elemente, kao i zbroj $a_{ij} + a_{ji}$ dvaju elemenata simetričnih s obzirom na glavnu dijagonalu. Taj je zbroj upravo koeficijent uz član x_ix_j u kvadratnoj formi. Odavde slijedi da će za zadanu kvadratnu formu postojati *jedinstvena* odgovarajuća simetrična matrica.

Zato ćemo u daljnjem promatrati *samo simetrične matrice*.

Primjer 2. Odredimo simetričnu matricu koja odgovara kvadratnoj formi

$$x^2 + 8xy - 3y^2.$$

► Možemo napisati

$$x^2 + 8xy - 3y^2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

te je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tako npr. formi

$$x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3^2$$

odgovara matrica

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ ◄$$

11.1.2. Kanonske kvadratne forme

Za kvadratnu formu kažemo da je **kanonska** ukoliko ona ne sadrži 'miješane' članove, poput umnožaka x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 i sl. Drugim riječima, to je forma koja je pridružena dijagonalnoj matrici i ona ima oblik

$$f(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2.$$

Prirodno je postaviti pitanje: može li se (kada i kako) neka kvadratna forma svesti na kanonski oblik? Pogledajmo na jednostavnom primjeru.

Primjer 3. Odredimo kanonski oblik forme

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2.$$

► Primijenit ćemo jednostavnu metodu: svođenje na potpuni kvadrat. Zbog jednostavnijega računa, u početku ćemo izvući faktor $\frac{1}{5}$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{5}\Big[25x_1^2 + 20x_1x_2\Big] + 8x_2^2 \\ &= \frac{1}{5}\Big[(5x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2\Big] + 8x_2^2 \\ &= \frac{1}{5}(5x_1 + 2x_2)^2 + \frac{36}{5}x_2^2 \\ &= \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{36}{5}y_2^2. \end{aligned}$$

Ovdje smo stavili

$$\begin{aligned} y_1 &= 5x_1 + 2x_2, \\ y_2 &= x_2. \end{aligned}$$

Vidimo da prijelazom na nove varijable forma ima kanonski oblik. ◄

Nekoliko se pitanja nameće u vezi s ovim postupkom:

- Postoji li uvijek kanonska forma?
- Ako postoji, je li jedinstvena?
- Ako postoji, kako se određuje?

Odgovorimo redom na ova pitanja.

U gornjem primjeru, veza između starih i novih varijabli uspostavlja se s pomoću regularne matrice:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Napišimo ovu vezu u obliku

$$\mathbf{y} = \mathbf{Tx}. \tag{4}$$

Označimo sa $\mathbf{S}$ inverznu matricu, $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Sy}. \tag{5}$$

Sad kvadratnu formu možemo napisati na način

$$f = \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax} = (\mathbf{Sy})^\top \mathbf{A}(\mathbf{Sy}) = \mathbf{y}^\top (\mathbf{S}^\top \mathbf{AS})\mathbf{y}. \tag{6}$$

Ona će biti kanonska onda kad je matrica $\mathbf{S}^\top \mathbf{AS}$ dijagonalna. Tako je prvo pitanje ekvivalentno s ovim:

- Postoji li za svaku simetričnu matricu $\mathbf{A}$ matrica $\mathbf{S}$ takva da je $\mathbf{S}^\top \mathbf{AS}$ dijagonalna?

Odgovor je sad definitivno: da! Znamo da za svaku simetričnu matricu postoji *ortogonalna* matrica $\mathbf{S}$ takva da je umnožak $\mathbf{S}^\top \mathbf{AS}$ dijagonalna matrica.

Pogledamo li gornji primjer, vidjet ćemo da je

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ova matrica nije ortogonalna! Za nju ipak vrijedi

$$\mathbf{S}^\top \mathbf{AS} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{36}{5} \end{bmatrix}.$$

Stoga je odgovor na drugo pitanje: ne! Kanonska forma nije jedinstvena.

Uvjerimo se još jednom u to. U istom primjeru, izvršimo zamjenu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Uvjerite se da se ovom supstitucijom kvadratna forma svodi na

$$f = 9u_1^2 + 9u_2^2.$$

Prema tome, neka druga zamjena dat će drugu kanonsku formu.

Primjer 4. Odredimo skup svih točaka ravnine koje zadovoljavaju jednadžbu

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 9.$$

► Riječ je o *krivulji drugoga reda*. Trebamo odrediti radi li se ovdje o elipsi, hiperboli, paraboli ili je jednadžbom opisana neka degenerirana krivulja... Pri tom ćemo nastojati zamjenom varijabli jednadžbu svesti na što jednostavniji oblik.

Izaberimo supstituciju (7). Dobivamo jednadžbu

$$u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

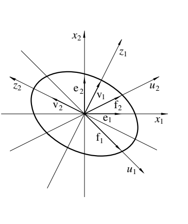
Predstavlja li zadana jednadžba kružnicu? Odgovor je ne!, razlog tome je što *koordinatne osi nisu okomite*. Naime, zamjena (7) prevodi kartezijev sustav u sustav kojemu osi *nisu ortogonalne*.

Ako su $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vektori baze početnog kartezijevog sustava Ox_1x_2, a $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ vektori baze novog sustava Ou_1u_2, tad je po (7.2) njihova veza dana s

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Odavde čitamo

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_2.$$



Sl. 11.1. Ista krivulja u različitim sustavima ima različite jednadžbe. U sustavu Ox_1x_2 njezina jednadžba sadrži mješovite umnoške. U sustavu Ou_1u_2 jednadžba je najjednostavnija, međutim osi nisu okomite što narušava metričke odnose. Najprikladniji je sustav Oz_1z_2 čije se osi podudaraju s glavnim osima krivulje.

Novi će sustav imati ortogonalne osi onda i samo onda ako je matrica $\mathbf{S}$ (ili $\mathbf{T}$, svejedno!) ortogonalna. U gornjem primjeru, u supstituciji

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

matrica $\mathbf{S}$ je ortogonalna. Ona opisuje rotaciju početnog sustava tako da se osi sustava podudaraju s glavnim osima krivulje.

U novom sustavu, određenom ortonormiranim vektorima $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, jednadžba će glasiti

$$9z_1^2 + 4z_2^2 = 9.$$

Vidimo da je riječ o elipsi. Na slici 11.1 nacrtana je ta elipsa te tri para koordinatnih osiju o kojima je bilo riječi. ◄

11.1.3. Lagrengeov postupak svođenja na kanonski oblik

Odgovorili smo dijelom i na treće pitanje: kojim algoritmom se kvadratna forma svodi na kanonski oblik. Vjerojatno je najjednostavniji algoritam **Lagrangeov postupak**.

Jednostavan primjer ovoga postupka smo naveli u prvom primjeru (svođenje na potpuni kvadrat). Opišimo taj postupak sa svim potrebnim detaljima.

Korak 1. Pretpostavimo da je barem jedan od koeficijenata a_{ii} na dijagonali matrice različit od nule. Neka je to a_{11}. Ako takvih nema, prelazimo na korak 4.

Korak 2. Izdvojimo sve članove koji sadrže nepoznanicu x_1. Time kvadratnu formu svodimo na oblik

$$f(x_1, \ldots, x_2) = a_{11}x^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + q(x_2, \ldots, x_n).$$

Ovdje je $q(x_2, \ldots, x_n)$ kvadratna forma po tim nepoznanicama. Prvi se dio ovoga izraza može napisati na način

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n = \frac{1}{a_{11}}\Big(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\Big)^2 - \frac{1}{a_{11}}\Big(a_{12}^2x_2^2 + \ldots + a_{1n}^2x_n^2 + 2a_{12}a_{13}x_2x_3 + \ldots + 2a_{1n-1}a_{1n}x_{n-1}x_n\Big).$$

Zato cijela forma ima oblik

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{a_{11}}\Big(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\Big)^2 + q_1(x_2, \ldots, x_n),$$

gdje je q_1 kvadratna forma po nepoznanicama $x_2, \ldots, x_n$.

Korak 3. Načinimo transformaciju

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= x_2, \\ &\ \vdots \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Time dobivamo formu

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + f_1(y_2, \ldots, y_n)$$

u kojoj je prva nepoznanica izdvojena od ostalih. Postupak se nastavlja s kvadratnom formom f_1.

Korak 4. Ako su pak u polaznoj formi (ili u nekom trenutku nakon koraka 3.) svi dijagonalni koeficijenti jednaki nuli, tad uvodimo pomoćnu zamjenu, kojom će se forma svesti na oblik u kojemu to nije slučaj. Barem jedan od nedijagonalnih elemenata mora biti različit od nule. Neka je to, recimo, a_{12}. Tad pišemo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 2x_1(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n) + q(x_2, \ldots, x_n).$$

Načinimo zamjenu:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= -x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_3 &= x_3, \\ &\ \vdots \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Time dobivamo kvadratnu formu u kojoj postoji član $2y_1^2$. Dalje nastavljamo kao u koraku 1.

11.1.4. Ortogonalne matrice i kvadratne forme

Vratimo se na drugu mogućnost. Možemo odrediti *ortogonalnu* matricu $\mathbf{S}$ koja dijagonalizira početnu simetričnu matricu. Taj je postupak vezan s određivanjem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. On je zasigurno složeniji od Lagrangeovog postupka, no dobivene nove koordinate osi bit će također ortogonalne, dobivene rotacijom iz početnog koordinatnog sustava (ovaj zaključak vrijedi i u prostorima veće dimenzije).

Izaberemo li matricu $\mathbf{S}$ tako da njezini stupci budu ortonormirani svojstveni vektori simetrične matrice $\mathbf{A}$, tad će vrijediti

$$\mathbf{S}^\top \mathbf{AS} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

i kvadratna forma će biti kanonska, po novim varijablama $x_1', \ldots, x_n'$:

$$f = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2.$$

Koeficijenti ove kanonske forme su upravo *svojstvene vrijednosti* matrice $\mathbf{A}$.

Korisno je primijetiti da su obratne veze novih varijabli prema starima dane formulom

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}^\top \mathbf{x}$$

jer je $\mathbf{S}$ ortogonalna matrica.

Primjer 5. Svedimo na kanonski oblik kvadratnu formu

$$f(x, y) = 2xy. \tag{9}$$

► Odgovarajuća matrica je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Njen karakteristični polinom glasi $\lambda^2 - 1 = 0$ te su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Svojstvene vektore nalazimo rješavajući sustave

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica ortonormiranih svojstvenih vektora glasi

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za nju vrijedi

$$\mathbf{S}^\top \mathbf{AS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zato kvadratna forma po novim varijablama ima oblik

$$f(x', y') = x'^2 - y'^2. \tag{10}$$

U to se možemo direktno uvjeriti zamjenjujući stare varijable novima s pomoću veze:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

odakle čitamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x' - y'\big), \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x' + y'\big). \end{aligned}$$

Zaista, stavljajući ove formule u (9) dobivamo jednadžbu (10). ◄

Veze između novih i starih varijabli dane su transponiranom matricom:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je ovom jednadžbom određena rotacija starog sustava za kut od 45° u negativnom smjeru. Time postaje jasnija geometrijska interpretacija određivanja kanonskog oblika kvadratne forme.

Promotrimo jednadžbu $f(x, y) = 1$ u starom sustavu:

$$2xy = 1.$$

Znamo da ona predstavlja jednadžbu hiperbole, kojoj su koordinatne osi asimptote. Prijelazom na nove koordinate jednadžba te hiperbole postaje

$$x'^2 - y'^2 = 1$$

i os Ox' prolazi tjemenima hiperbole. Novi sustav je zarotiran u odnosu na stari za kut od 45°.

11.2. Pregled krivulja drugoga reda

Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ simetrična matrica drugoga reda, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ vektor i γ skalar. U općem slučaju, jednadžbom

$$p(x, y) = [x \ y] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [b_1 \ b_2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \gamma = 0 \tag{11}$$

zadana je krivulja drugoga reda. O kojoj je krivulji riječ, možemo saznati nakon svođenja kvadratne forme na kanonski oblik. Oblik forme ovisit će o izabranom postupku, međutim njezina vrsta ne. Zbog jasnoće, opisat ćemo rezultate koje možemo dobiti nakon svođenja forme na kanonski oblik pomoću *ortogonalne* transformacije. Što moramo učiniti?

• Određujemo kanonski oblik kvadratne forme. Time se jednadžba (11) svodi na oblik

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu_1 x' + \mu_2 y' + \nu = 0.$$

• Uvođenjem novih varijabli po pravilu

$$x'' = x' + \frac{\mu_1}{2\lambda_1}, \qquad \text{ako je } \lambda_1 \neq 0,$$

slično za varijablu y''.

Prva transformacija odgovara *rotaciji* koordinatnog sustava tako da koordinatne osi budu paralelne s glavnim osima krivulje drugoga reda. Druga pak transformacija predstavlja *translaciju* koordinatnog sustava tako da se ishodište sustava poklopi sa 'središtem' krivulje drugoga reda.

Primjer 6. Odredimo koja je krivulja zadana jednadžbom

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 2y - 3 = 0.$$

► Prva tri člana predstavljaju kvadratnu formu određenu matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ona ima dvije svojstvene vrijednosti: $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. Odgovarajući jedinični svojstveni vektori su

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Time je definirana matrica

$$\mathbf{S} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

te su veze prema novim varijablama dane sa:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x' + y'\big), \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}\big(-x' + y'\big) \end{aligned}$$

Prva tri člana (koji određuju kvadratnu formu) nakon ove supstitucije postaju $2y'^2$, a linearne izračunamo. Dobivamo jednadžbu u novom sustavu:

$$2y'^2 - \sqrt{2}y' - 3\sqrt{2}x' - 3 = 0$$

Uvedimo nove varijable translacijom sustava, na način

$$y' = y'' + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

što daje:

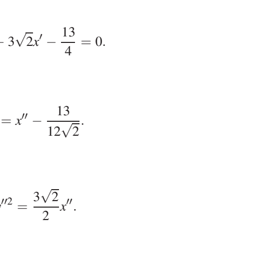
$$2y''^2 - 3\sqrt{2}x' - \frac{13}{4} = 0.$$

Sad stavljamo

$$x' = x'' - \frac{13}{12\sqrt{2}}.$$

Tako dobivamo jednadžbu

$$y''^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}x''.$$



Sl. 11.2. Jednadžba predstavlja parabolu s osima koje su zarotirane prema kartezijevim. Matrica pripadne kvadratne forme ima jednu svojstvenu vrijednost jednaku nuli, zbog čega se jedna nepoznanica u završnom sustavu $Ox''y''$ ne javlja s kvadratom

Vidimo da je početnom jednadžbom zadana parabola. Njena je glavna os zarotirana za kut od 45° u negativnom smjeru. Vidi sliku 11.2. ◄

Karakter krivulje drugoga reda možemo utvrditi na osnovu informacije o svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2 matrice $\mathbf{A}$. Postoje sljedeće mogućnosti (zbog jednostavnosti ćemo imena nepoznanica označiti s x i y):

A. Obje svojstvene vrijednosti različite su od nule. U ovome slučaju, rang matrice je 2. Dobivene jednadžbe mogu se napisati u obliku:

1. **Elipsa.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. **Hiperbola**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

3. **Dva pravca koja se sijeku**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

4. **Jedna točka**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

5. **Prazan skup**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

B. Jedna svojstvena vrijednost jednaka je nuli. Rang matrice jednak je 1. Ovdje spadaju

6. **Parabola**

$$x^2 = 2py, \qquad (y^2 = 2px).$$

7. **Dva paralelna pravca**

$$x^2 = a^2, \qquad (y^2 = a^2).$$

8. **Jedan pravac**

$$x^2 = 0, \qquad (y^2 = 0).$$

9. **Prazan skup**

$$x^2 = -a^2, \qquad (y^2 = -a^2).$$

Ovim su pokriveni svi mogući slučajevi. Slike ovih krivulja nećemo crtati, one su poznate iz srednjoškolske matematike. Međutim, načinit ćemo detaljnu analizu situacije koja se događa u prostoru dimenzije 3: tu će umjesto krivulja biti riječi o plohama drugoga reda.

11.3. Plohe drugoga reda

Jednadžba

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{Ax} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + \gamma = 0$$

u prostoru dimenzije 3 ima oblik:

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [b_1 \ b_2 \ b_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \gamma = 0.$$

Ovom jednadžbom određena je, u općem slučaju, *ploha drugoga reda*. Karakter te plohe određujemo ponovo svođenjem kvadratne forme na kanonski oblik. Pretpostavimo, zbog jednostavnosti, da je vektor $\mathbf{b}$ jednak nuli. Inače, uvođenjem novih nepoznanica (koje odgovaraju translaciji sustava) možemo uvijek postići da bude $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, uz nepromijenjenu matricu $\mathbf{A}$.

Vrsta plohe određena je karakterom svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Nakon određivanja kanonskog oblika kvadratne forme, dobit ćemo (u nedegeneriranom slučaju) jednu od sljedećih sedamnaest! jednadžbi. Svaka će jednadžba opisivati različitu plohu drugoga reda. Opišimo detaljno te plohe i izdvojimo (bez posebnog dokazivanja) neka njihova manje-više očita svojstva.

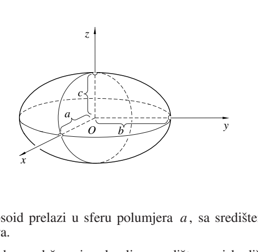
Karakter ploha ovisi o tome koliko je svojstvenih vrijednosti različitih od nule te kakvoga su predznaka. Iznos broja γ utječe na pojavu degeneracije. U svim primjerima koji slijede, a, b i c će označavati pozitivne brojeve.

A. Sve svojstvene vrijednosti različite od nule (rang matrice jednak 3).

1. Elipsoid. Ploha zadana jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{12}$$

Ovdje a, b, c predstavljaju duljinu poluosi elipse. Često govorimo (neprecizno, ali jednostavnije) da su a, b i c poluosi elipse. Točke $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ koje leže na elipsoidu (tamo gdje ga sijeku koordinatne osi) nazivaju se tjemena elipsoida.



Sl. 11.3. Elipsoid. To je ploha nastala rastezanjem sfere duž koordinatnih osiju. Simetrična je u odnosu na koordinatne ravnine i ishodište koordinatnog sustava

Ako je $a = b = c$, elipsoid prelazi u sferu polumjera a, sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

Elipsoid je ograničena ploha: sadržana je u kugli sa središtem u ishodištu i čiji je polumjer jednak najvećoj poluosi. Ona je simetrična s obzirom na koordinatne ravnine. Naime, zamjenom varijable x u $-x$ vidimo da čim točka (x, y, z) pripada plohi, njoj pripada i točka $(-x, y, z)$ što predstavlja simetričnost plohe s obzirom na koordinatnu ravninu yOz. Slično vrijedi za druge dvije koordinatne ravnine. Zamjenom $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ dobivamo simetriju s obzirom na ishodište.

Presjeci elipsoida s ravninama paralelnim s koordinatnim ravninama su elipse. Uvjerimo se u to. Uzmimo ravninu paralelnu s xOy ravninom, njezina je jednadžba $z = h$. Presječne točke elipsoida i ove ravnine zadovoljavaju jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Odavde vidimo:

- presjek je neprazan ako je $-c \leqslant h \leqslant c$;
- u tom je slučaju presjek elipsa s poluosima

$$a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \qquad b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}};$$

- najveća se elipsa dobiva presjekom s koordinatnom ravninom $z = 0$.

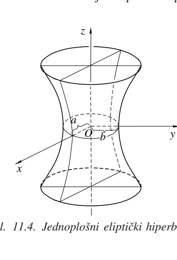
Volumen dijela prostora omeđenog elipsoidom dan je formulom $\frac{4}{3}abc\pi$. Za površinu plohe elipsoida ne postoji formula iskazana preko elementarnih funkcija.

Ako su neke dvije osi elipsoida jednake, tad ga nazivamo **rotacijski elipsoid** jer se može dobiti rotacijom elipse oko jedne koordinatne osi (one koja ne odgovara tim jednakim osima).

2. Jednoplošni eliptički hiperboloid. To je neograničena ploha, simetrična s obzirom na koordinatne osi i s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. Njena je jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{13}$$

Plohu ponekad nazivamo i kraćim imenom *jednoplošni hiperboloid*.



Sl. 11.4. Jednoplošni eliptički hiperboloid

Objasnimo naziv plohe. Prva riječ tvrdi da se ploha sastoji od jednog povezanog dijela — drugu ćemo mogućnost vidjeti kod dvoplošnog eliptičkog hiperboloida. Druge dvije riječi u nazivu dolaze od oblika presjeka plohe s ravninama paralelnim koordinatnim.

Siječemo li plohu s ravninom $z = h$ paralelnom s koordinatnom xOy ravninom, za presjek ćemo dobiti elipsu s jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Vidimo da je taj presjek neprazan, za svaku vrijednost parametra h. Presječna elipsa ima poluosi

$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \qquad b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

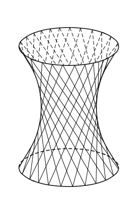
Najmanja se elipsa dobiva za $h = 0$, presjekom s ravninom $z = 0$. Njene su poluosi a i b, sve druge elise su slične ovoj, ali s većim poluosima. Tjemena te najmanje elipse su točke $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ i one se nazivaju tjemenima plohe.

Presjek plohe s okomitim ravninama, npr $x = h$ (ili $y = h$) je hiperbola, s jednadžbom

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2},$$

i slično za drugu mogućnost ($y = h$). Proučimo i predznak desne strane, vidjet ćemo da se tu radi o dvije familije hiperbola: ako je $|h| \leqslant a$ riječ je o hiperbolama čija je realna os (ona koju hiperbola siječe) paralelna s pravcem Oy, a ako je $|h| > a$, tad je predznak desne strane negativan i realna je os hiperbole paralelna s pravcem Oz.

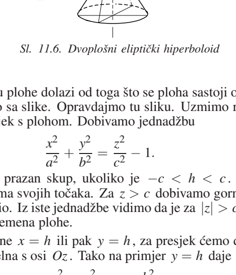
Sl. 11.5. Jednoplošni hiperboloid je pravčasta ploha. Time izričemo jednu neobičnu tvrdnju: čitava se ploha može dobiti kao unija pravaca! Možda najzorniji dokaz tome (uz žičane modele plohe koje je sve teže pronaći) je način izgradnje dimnjaka nuklearnih centrala koje većinom imaju oblik jednoplošnog hiperboloida, a okosnicu im čine ravni betonski blokovi. Gradnjom na taj način postiže se veća stabilnost konstrukcije nego, recimo, ako je ona cilindričnog oblika.



[1] engl. *quadratic form*, njem. *quadratische Form*, franc. *forme quadratique*, rus. квадратичная форма.

3. Dvoplošni eliptički hiperboloid. To je neograničena ploha, simetrična s obzirom na koordinatne osi i s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. Njena je jednadžba

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{14}$$



Sl. 11.6. Dvoplošni eliptički hiperboloid

Dvoplošni u imenu plohe dolazi od toga što se ploha sastoji od dva odvojena dijela, kako je vidljivo sa slike. Opravdajmo tu sliku. Uzmimo ravninu $z=h$ i potražimo njezin presjek s plohom. Dobivamo jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1.$$

Vidimo da je presjek prazan skup, ukoliko je $-c<h<c$. Zato u pojasu $-c<z<c$ ploha nema svojih točaka. Za $z>c$ dobivamo gornji dio plohe, za $z<-c$ njezin donji dio. Iz iste jednadžbe vidimo da je za $|z|>c$ presjek elipsa. Točke $(0,0,\pm c)$ su tjemena plohe.

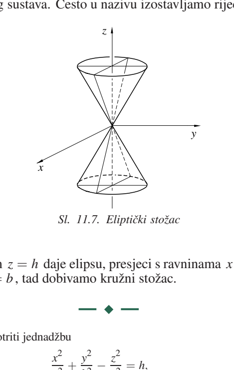
Izaberemo li ravnine $x=h$ ili pak $y=h$, za presjek ćemo dobiti hiperbole čija je realna os paralelna s osi Oz. Tako na primjer $y=h$ daje

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{h^2}{b^2}.$$

4. Eliptički stožac. To je ploha s jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Ona je neograničena, simetrična s obzirom na koordinatne ravnine i s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. Često u nazivu izostavljamo riječ 'eliptički'.



Sl. 11.7. Eliptički stožac

Presjek s ravninom $z=h$ daje elipsu, presjeci s ravninama $x=h$ i $y=h$ su hiperbole. Ako je $a=b$, tad dobivamo kružni stožac.

— ◆ —

Interesantno je promotriti jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=h,$$

gdje je h neki parametar. Za $h=1$ dobivamo jednoplošni hiperboloid, za $h=0$ stožac, za $h=-1$ dvoplošni hiperboloid. Zapravo, jednadžba predstavlja jednoplošni hiperboloid *čim je* $h>0$. Dijeljenjem s h dobivamo jednadžbu oblika (13). Slično tome, za $h<0$ jednadžba predstavlja dvoplošni hiperboloid.

Ova činjenica omogućava jednu zanimljivu interpretaciju nastanka ovih triju ploha. Postoji *neprekidna deformacija* (koja odgovara mijenjanju vrijednosti parametra h i koja jednoplošni hiperboloid pretvara najprije u stožac, a zatim u dvoplošni hiperboloid. Napišimo jednadžbu

$$u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$$

Ona predstavlja jednadžbu trodimenzionalnog tijela u četiridimenzionalnom prostoru opisanom varijablama (x,y,z,u) ! Fiksiramo li vrijednost varijable u, pa stavimo na primjer $u=h$ dobivamo presjek tog tijela s trodimenzionalnim prostorom paralelnim s 'našim' prostorom $Oxyz$. Postupak je sličan gore opisanim presjecima ploha s ravninama paralelnim koordinatnoj ravnini xOy. Projekcija tog presjeka u naš trodimenzionalni prostor daje gore navedenu jednadžbu. Mijenjanjem parametra h koji preko nule prelazi u negativne vrijednosti, ti se presjeci neprekidno transformiraju iz jednoplošnog preko stošca u dvoplošni hiperboloid. Tako se mijenjanjem parametra h dobiva efekt *prodora* četiridimenzionalne plohe kroz naš trodimenzionalni prostor.

— ◆ —

5. Točka.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{15}$$

To je prvi degenerirani slučaj plohe drugoga reda. U nastavku ćemo susresti još neke, poput sljedećeg.

6. Prazan skup.

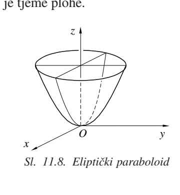
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0. \tag{16}$$

B. Jedna svojstvena vrijednost matrice jednaka nuli (rang matrice jednak 2).

1. Eliptički paraboloid.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz. \tag{17}$$

To je ploha simetrična s obzirom na koordinatne ravnine xOz, yOz. Neograničena je. Ako je $p>0$, pripadaju joj točke samo unutar poluprostora $z>0$, slično za $p<0$. Točka $(0,0,0)$ je tjeme plohe.



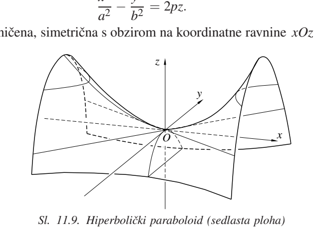
Sl. 11.8. Eliptički paraboloid

Presjeci plohe s ravninama $z=h$ su elipse, presjeci s ravninama $x=h$ ili $y=h$ parabole — odatle ime plohi.

2. Hiperbolički paraboloid. To je ploha s jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz. \tag{18}$$

Ona je neograničena, simetrična s obzirom na koordinatne ravnine xOz i yOz.



Sl. 11.9. Hiperbolički paraboloid (sedlasta ploha)

Presjeci s ravninama $z=h$ su hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2ph.$$

U ovisnosti o predznaku broja h, realna se os ovih hiperbola mijenja. U graničnom slučaju, za $h=0$ presjek čine *dva pravca* $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$, koja se sijeku u ishodištu. Ta su dva pravca ujedno asimptote tih hiperbola.

Presjeci s ravninama $x=h$ i $y=h$ su parabole.

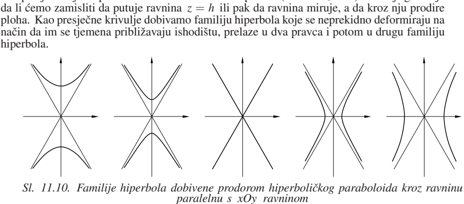
Sama ploha naziva se još *sedlasta ploha*. Točka $(0,0,0)$ je *sedlo*.

— ◆ —

Ako je čitatelj imao (s pravom!) problema s gledanjem prodora četiridimenzionalnih ploha kroz trodimenzionalni prostor, može ponoviti istu priču s tvorevinama za dimenziju manjim. Uzimajući promjenjivu vrijednost $z=h$ u jednadžbi plohe

$$2pz=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

mi opisujemo njezin prodor kroz dvodimenzionalni prostor (ravninu $z=h$). Stvar je gledanja da li ćemo zamisliti da putuje ravnina $z=h$ ili pak da ravnina miruje, a da kroz nju prodire ploha. Kao presječne krivulje dobivamo familiju hiperbola koje se neprekidno deformiraju na način da im se tjemena približavaju ishodištu, prelaze u dva pravca i potom u drugu familiju hiperbola.



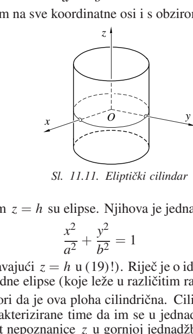
Sl. 11.10. Familije hiperbola dobivene prodorom hiperboličkog paraboloida kroz ravninu paralelnu s xOy ravninom

— ◆ —

3. Eliptički cilindar. To je ploha s jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{19}$$

Simetrična je s obzirom na sve koordinatne osi i s obzirom na ishodište.



Sl. 11.11. Eliptički cilindar

Presjeci s ravninom $z=h$ su elipse. Njihova je jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(koju dobivamo uvrštavajući $z=h$ u (19)!). Riječ je o identičnim jednadžbama, svi su ti presjeci sukladne elipse (koje leže u različitim ravninama).

Riječ cilindar govori da je ova ploha cilindrična. Cilindrične su plohe plohe različitih oblika, okarakterizirane time da im se u jednadžbi *ne pojavljuje* neka od nepoznanica, poput nepoznanice z u gornjoj jednadžbi. Kao posljedicu toga imamo sljedeću činjenicu: ako točka $(x,y,0)$ leži u plohi (zadovoljava njezinu jednadžbu), tad tu istu jednadžbu zadovoljavaju i sve točke (x,y,z), za bilo koju vrijednost nepoznanice z. Stoga je cilindrična ploha unija pravaca paralelnih s osi Oz (nazivamo ih *izvodnicama*), koji prolaze kroz neku krivulju u xOy ravnini — zvanu *ravnalica* plohe. U ovom je slučaju ta ravnalica elipsa.

4. Prazan skup.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0. \tag{20}$$

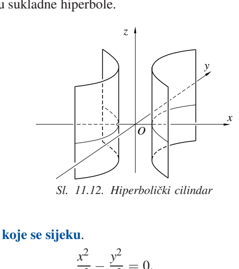
5. Pravac.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0. \tag{21}$$

6. Hiperbolički cilindar. To je cilindrična ploha s jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{22}$$

Njena je izvodnica hiperbola u Oxy ravnini, identične jednadžbe. Presjeci s ravninama $z=h$ su sukladne hiperbole.



Sl. 11.12. Hiperbolički cilindar

7. Par ravnina koje se sijeku.

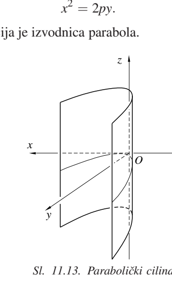
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0. \tag{23}$$

C. Dvije svojstvene vrijednosti matrice jednake nuli (rang matrice jednak 1).

1. Parabolički cilindar

$$x^2=2py. \tag{24}$$

To je cilindrička ploha čija je izvodnica parabola.



Sl. 11.13. Parabolički cilindar

2. Prazan skup.

$$x^2+a^2=0. \tag{25}$$

3. Par paralelnih ravnina.

$$x^2-a^2=0. \tag{26}$$

4. Jedna ravnina.

$$x^2=0. \tag{27}$$

Time smo naveli sve moguće slučajeve. Pritom smo izdvojili samo jedan mogući izbor nepoznanica. Mijenjajući imena varijablama, mijenjamo i položaj nacrtanih ploha, no to će čitatelj sam lako zaključiti.

11.4. Pozitivnost kvadratne forme

Među svojstvima koje nas zanimaju kod neke kvadratne forme $f(\mathbf{x})$ svakako spada i problem njezine pozitivnosti. Promatramo li vrijednosti koje ona može poprimiti za različite izbore vektora $\mathbf{x}$, moguće je navesti pet različitih situacija. Uz osnovnu definiciju navest ćemo odmah i kada će se dogoditi ta mogućnost. Kriterij nam je predznak svojstvenih vrijednosti.

Pozitivnost kvadratne forme

Svaka se kvadratna forma može napisati (nakon zamjene varijabli) u kanonskom obliku

$$f(y_1,\dots,y_n)=\lambda_1 y_1^2+\dots+\lambda_n y_n^2$$

gdje su $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ svojstvene vrijednosti pripadne matrice.

1. $f(\mathbf{x})>0$ za svaki $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. Tad kažemo da je forma **pozitivno definitna**. Ovaj će se slučaj zbiti kad su sve svojstvene vrijednosti pozitivne.
2. $f(\mathbf{x})\geqslant 0$, ali postoje vektori za koje je $f(\mathbf{x})=0$. kažemo da je forma **pozitivno semidefinitna**. Tu su svojstvene vrijednosti pozitivne, osim nekoliko njih koje su jednake nuli.
3. $f(\mathbf{x})<0$ za svaki $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. Forma je **negativno definitna**, sve svojstvene vrijednosti manje su od nule.
4. $f(\mathbf{x})\leqslant 0$ i postoji $\mathbf{x}$ za koji je $f(\mathbf{x})=0$. Forma je **negativno semidefinitna**. Svojstvene vrijednosti su manje od nule, osim nekoliko njih koje su jednake nuli.
5. $f(\mathbf{x})$ mijenja znak. Forma je **indefinitna**. Među svojstvenim vrijednostima postoje neke različitog predznaka.

Cilj nam je odgovoriti na pitanje koje je vrste neka forma, a da ju ne svodimo na kanonski oblik. Time izbjegavamo računanje svojstvenih vrijednosti ili neki drugi postupak dijagonalizacije kvadratne forme.

Opišimo prvi kriterij.

Jacobijev kriterij. Izvodimo ga iz poznate veze definitnosti i svojstvenih vrijednosti. Karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ koja odgovara kvadratnoj formi napišimo u obliku

$$\kappa(\lambda)=\lambda^n+\mu_1\lambda^{n-1}+\dots+\mu_{n-1}\lambda+\mu_n=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n). \tag{28}$$

Tu su $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice. Forma je pozitivno definitna ako su sve svojstvene vrijednosti veće od nule. Kakvi su tad koeficijenti polinoma (28)? Iskoristimo Viètèove formule. Ispišimo ih, radi jednostavnosti zapisa, za $n=3$

$$\begin{aligned}\mu_1&=-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)<0,\\ \mu_2&=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3>0,\\ \mu_3&=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3<0.\end{aligned}$$

Vidimo da ovi koeficijenti *alterniraju*. Prvi je negativan, drugi pozitivan, treći negativan itd. Ista situacija vrijedi i za bilo koji prirodni broj n.

Vrijedi i obrat ovoga rezultata: ako koeficijenti karakterističnog polinoma alterniraju, forma je pozitivno definitna. Tu tvrdnju nećemo dokazivati.

Primijetimo još da će za negativno definitnu formu (kad su sve svojstvene vrijednosti manje od nule) svi koeficijenti karakterističnog polinoma biti pozitivni. I ovdje vrijedi obratna tvrdnja.

— ◆ —

Silvesterov kriterij. Pozitivnost kvadratne forme može se utvrditi čak i bez računanja karakterističnog polinoma. Vrijedi sljedeći

Teorem 1. (**Silvester**) Kvadratna forma je pozitivna onda i samo onda ako su sve glavne minore odgovarajuće matrice pozitivne:

$$\Delta_1:=a_{11}>0,\quad \Delta_2:=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_3:=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0,\dots,$$

$$\Delta_n:=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

Slična tvrdnja vrijedi i za negativnu definitnost. Forma je negativno definitna onda i samo onda ako vrijedi

$$\Delta_1<0,\quad \Delta_2>0,\quad \Delta_3<0,\dots\quad ,(-1)^n\Delta_n>0.$$

Ponovo je jedan smjer teorema (nužnost) jednostavno pokazati, kroz vezu determinanti sa svojstvenim vrijednostima koje moraju biti pozitivne. Obratna tvrdnja — iz pozitivnosti minora slijedi pozitivna definitnost forme — mnogo je složenija. Njezin dokaz izlazi izvan okvira ovoga udžbenika[1].

[1] Marljivi čitatelj koji je uz ostatak knjige pročitao i ovu rečenicu i sam je svjestan da je dobio tek početno znanje iz ovoga uistinu lijepoga područja matematike. Za nastavak studija može pogledati preporučenu literaturu, osobito izvrstan udžbenik S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*.