

Operacijska istraživanja

7. predavanje: Mrežno planiranje

Sažetak predavanja

- Metoda kritičnog puta (CPM)
- CPM i analiza troškova

Operacijska istraživanja
8. predavanje: Mrežno planiranje

Metoda kritičnog puta

13. prosinca 2017.

Primjene CPM-a (engl. Critical Path Method)

„Uspješno upravljanje velikim projektima umnogome zavisi o pažljivom planiranju, terminiranju i koordinaciji brojnih povezanih aktivnosti.”

(Kalpić, Mornar, 1996.)

- građevinski zahvati (zgrade, tvornice, mostovi, ceste),
- proizvodnja i sastavljanje velikih strojeva, aviona, brodova, elektroničkih računala,
- znanstvena istraživanja,
- razvoj novih proizvoda, oružja, informacijskih sustava.

Važnost CPM-a

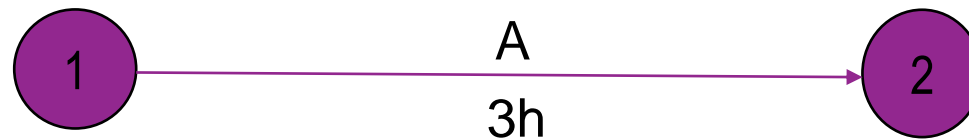
- nalaženje kritičnog puta najvažniji je dio praćenja projekta
- aktivnosti na kritičnom putu predstavljaju zadatke čija odgoda produljuje cijeli projekt
- menadžer postiže fleksibilnost identificiranjem nekritičnih aktivnosti i ponovnim planiranjem, raspoređivanjem, i realociranjem resursa poput osoblja i strojeva

Projektna mreža

- projektna mreža je model aktivnosti po redoslijedu izvođenja
- strelice = aktivnosti
- čvorovi = početak/kraj aktivnosti
- kritični put
 - = slijed aktivnosti bez vremenske rezerve (engl. zero slack)
 - = **najdulji** put u projektnoj mreži

Crtanje projektne mreže

- izvođenje aktivnosti prikazuje se **strelicom**: zadatak koji koristi vrijeme ili drugi resurs
- čvor = događaj, prikazuje se krugom: početak ili kraj aktivnosti, označen brojem radi identifikacije njegove lokacije.
- primjer: aktivnost A na slici



- slika predstavlja da aktivnost A počinje u čvoru 1, a završava u čvoru 2, te traje ukupno 3 sata

Proces CPM analize

- identificirati aktivnosti i odrediti prioritete među aktivnostima
- identificirati koje aktivnosti **MORAJU** biti gotove prije drugih
- EST – identificirati najraniji početak aktivnosti (engl. earliest start time)
- LFT – identificirati najkasniji završetak aktivnosti (engl. latest finish time)
- identificirati vremensku rezervu (engl. float) – zadatke koji se mogu završiti izvan kritičnog puta
- identificirati kritični put – točke koje povezuju ESTs i LFTs (gdje su ove iste)

Nalaženje kritičnog puta: 1. korak

- 1. korak: proći od početka do kraja kroz mrežu na sljedeći način; za svaku aktivnost i , počevši od početnog čvora, izračunati:
 - najraniji početak (engl. Earliest Start Time - ES) = maksimum između najranijih završetaka svih aktivnosti koje su neposredno prije aktivnosti i . (0 za aktivnost bez prethodnika); ovo je najranije vrijeme kad aktivnost može započeti bez narušavanja zahtjeva svojih prethodnika
 - najraniji završetak (engl. Earliest Finish Time - EF) = ES + vrijeme potrebno za završiti aktivnost i ; ovo je najranije vrijeme završetka aktivnosti
- završetak projekta je maksimum od svih EF u završnom čvoru

2. korak

- 2. korak: proći unazad od kraja do početka kroz mrežu na sljedeći način; za svaki čvor j , uzeti sve aktivnosti koje završavaju u čvoru j i za svaku od njih (i, j) izračunati:
 - najkasniji završetak (engl. Latest Finish Time - LF) = minimum između najkasnijih početaka iz čvora j (za čvor N , ovo je vrijeme završetka projekta); ovo je najkasniji završetak aktivnosti bez produljenja cijelog projekta
 - najkasniji početak (engl. Latest Start Time - LS) = $(LF) - (\text{vrijeme da se završi aktivnost } (i, j))$; ovo je najkasniji početak aktivnosti bez produljenja cijelog projekta

Pronalazak kritičnog puta

- 3. korak: izračunati rezervu (engl. slack time) svake aktivnosti:

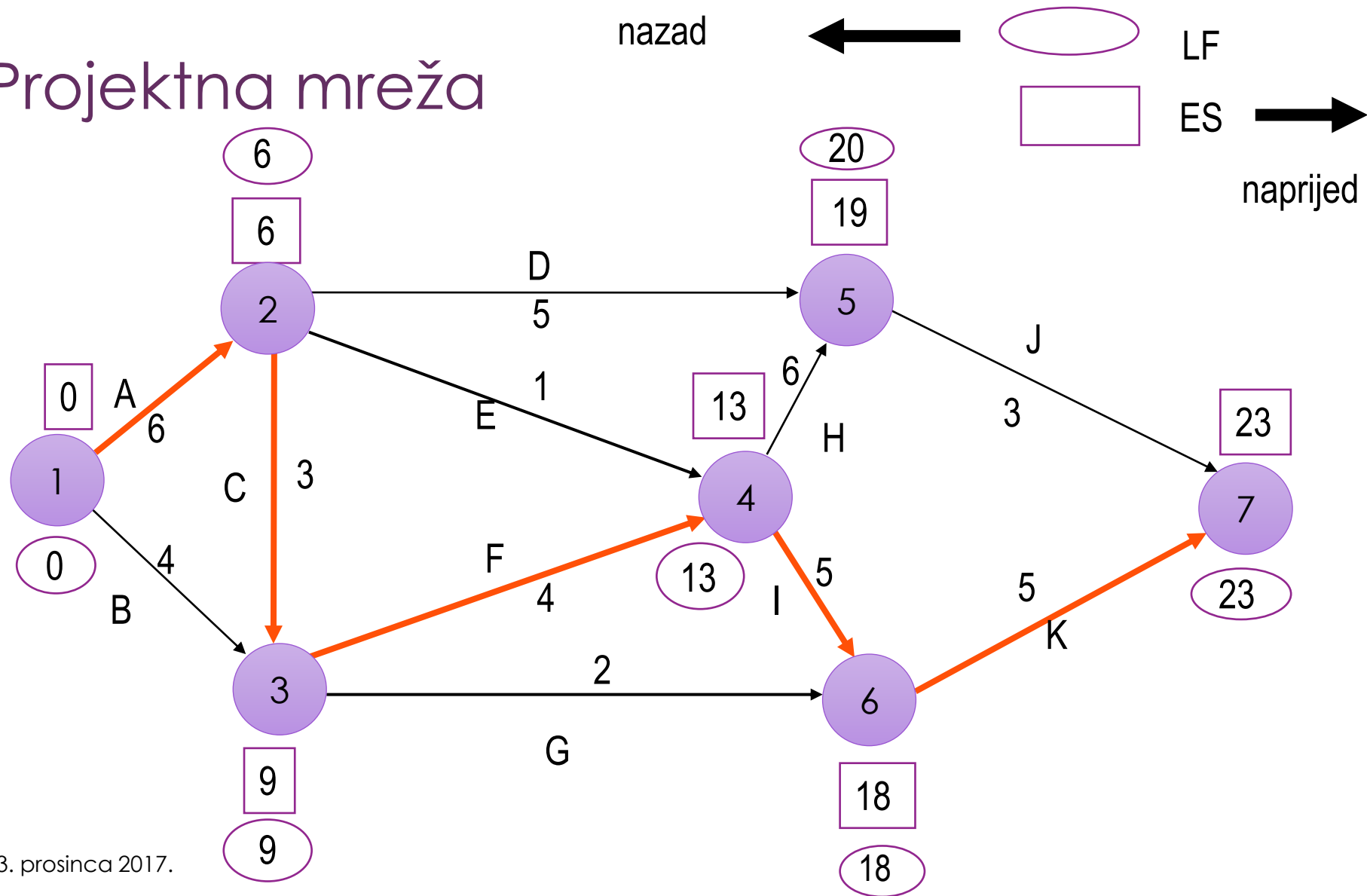
$$\begin{aligned}\text{rezerva} &= (LS) - (ES), \text{ ili} \\ &= (LF) - (EF)\end{aligned}$$

kritični put = put aktivnosti, od početnog do završnog, s 0 rezervi

1. primjer: zadane su aktivnosti projekta

aktivnost	preduvjet	trajanje
A	-	6
B	-	4
C	A	3
D	A	5
E	A	1
F	B, C	4
G	B, C	2
H	E, F	6
I	E, F	5
J	D, H	3
K	G, I	5

Projektna mreža



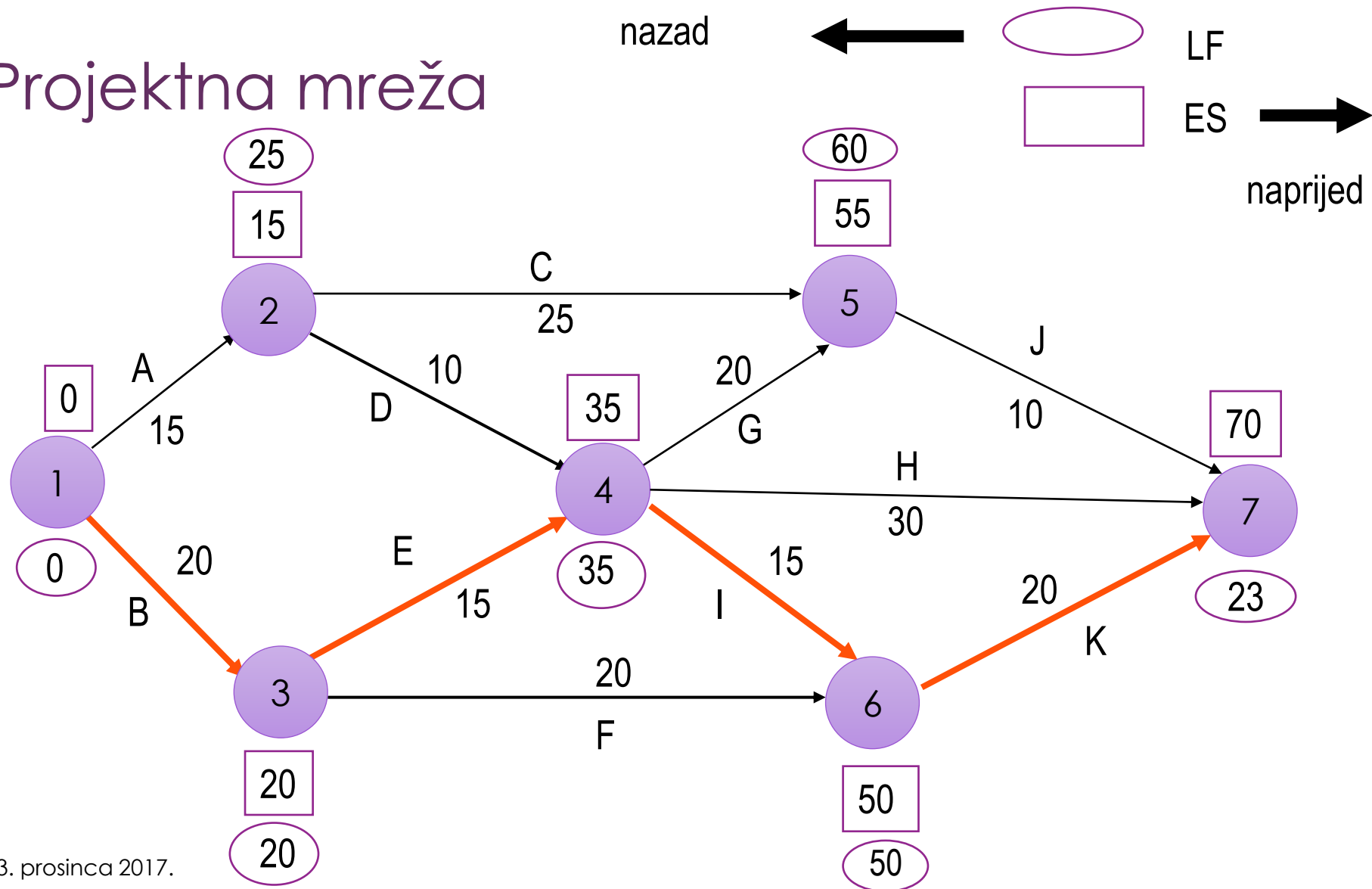
$$EF = ES + t, LS = LF - t, \text{rezerva} = LF - EF = LS - ES$$

aktivnost	preduvjeti	trajanje	ES	EF	LS	LF	rezerva
A	-	6	0	6	0	6	0*
B	-	4	0	4	5	9	5
C	A	3	6	9	6	9	0*
D	A	5	6	11	15	20	9
E	A	1	6	7	12	13	6
F	B, C	4	9	13	9	13	0*
G	B, C	2	9	11	16	18	7
H	E, F	6	13	19	14	20	1
I	E, F	5	13	18	13	18	0*
J	D, H	3	19	22	20	23	1
K	G, I	5	18	23	18	23	0*

2. primjer

aktivnost	preduvjet	trajanje
A	-	15
B	-	20
C	A	25
D	A	10
E	B	15
F	B	20
G	D, E	20
H	D, E	30
I	D, E	15
J	C, G	10
K	F, I	20

Projektna mreža



Najdulji put = $\max. \sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij}$

- $X_{ij} = 1$, ako je u kritičnom putu, 0 u protivnome; c_{ij} , trajanje aktivnosti (i, j)

uz ograničenja:

$$X_{12} + X_{13} = 1$$

$$-X_{12} + X_{24} + X_{25} = 0$$

$$-X_{13} + X_{34} + X_{36} = 0$$

$$-X_{24} - X_{34} + X_{45} + X_{46} + X_{47} = 0$$

$$-X_{25} - X_{45} + X_{57} = 0$$

$$-X_{36} - X_{46} + X_{67} = 0$$

$$-X_{47} + X_{57} + X_{67} = -1$$

Dual najduljeg puta = min. $w_1 - w_7$

$$w_1 - w_2 \geq 15$$

$$w_1 - w_3 \geq 20$$

$$w_2 - w_4 \geq 10$$

$$w_2 - w_5 \geq 25$$

$$w_3 - w_4 \geq 15$$

$$w_3 - w_6 \geq 20$$

$$w_4 - w_5 \geq 20$$

$$w_4 - w_6 \geq 15$$

$$w_4 - w_7 \geq 30$$

$$w_5 - w_7 \geq 10$$

$$w_6 - w_7 \geq 20$$

$$w'_2 - w'_1 \geq 15 \quad *$$

$$w'_3 - w'_1 \geq 20 \quad *$$

$$w'_4 - w'_2 \geq 10 \quad *$$

$$w'_5 - w'_2 \geq 25$$

$$w'_4 - w'_3 \geq 15 \quad *$$

$$w'_6 - w'_3 \geq 20$$

$$w'_5 - w'_4 \geq 20 \quad *$$

$$w'_6 - w'_4 \geq 15 \quad *$$

$$w'_7 - w'_4 \geq 30$$

$$w'_7 - w'_5 \geq 10$$

$$w'_7 - w'_6 \geq 20 \quad *$$

$$w'_1 = 0, w'_2 = 15$$

$$w'_3 = 20$$

$$w'_4 = 35$$

$$w'_6 = 50$$

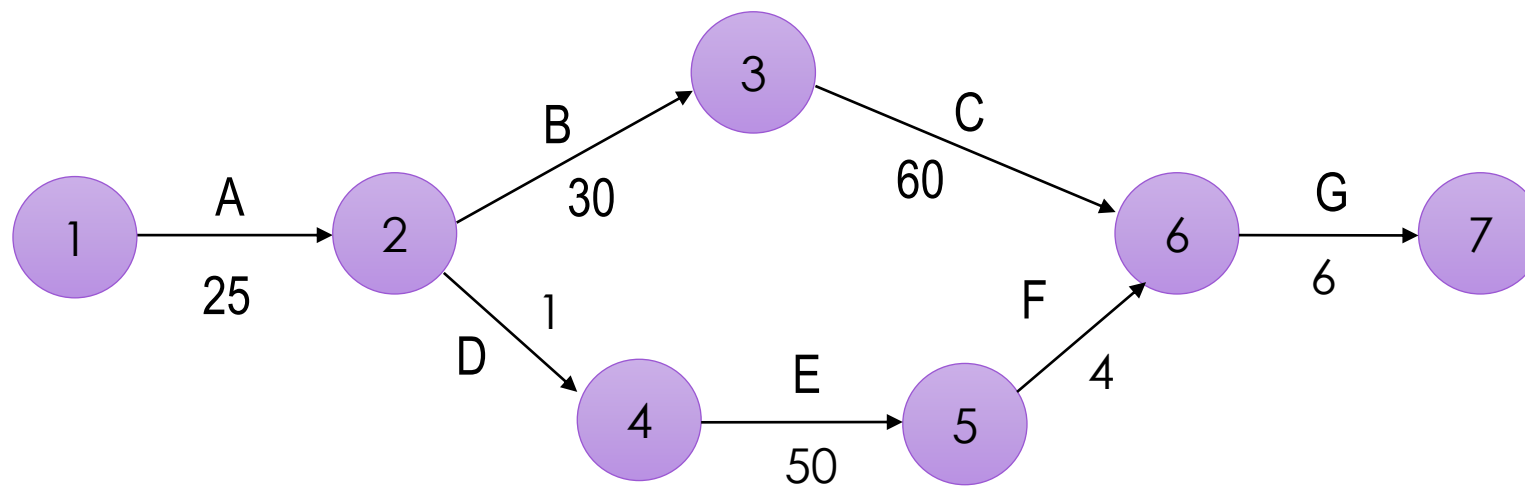
$$w'_5 = 55$$

$$w'_7 = 70$$

3. primjer: izgradnja tvornice

aktivnost	preduvjeti	trajanje
A	-	25
B	-	30
C	A	60
D	A	1
E	A	50
F	B, C	4
G	B, C	6

Projektna mreža



Linearno programiranje: simpleksna metoda

- t_i , vrijeme događaja i , tj. trenutak u kojem može započeti aktivnost a_{ij}
- $\min. z = t_7 - t_1$
- $t_2 - t_1 \geq 25$
- $t_3 - t_2 \geq 30$
- $t_4 - t_2 \geq 1$
- $t_5 - t_4 \geq 50$
- $t_6 - t_5 \geq 4$
- $t_7 - t_6 \geq 6$
- ako $t_1 = 30, t_2 = 25, t_3 = 55, t_4 = 26, t_5 = 76, t_6 = 115, t_7 = 121$

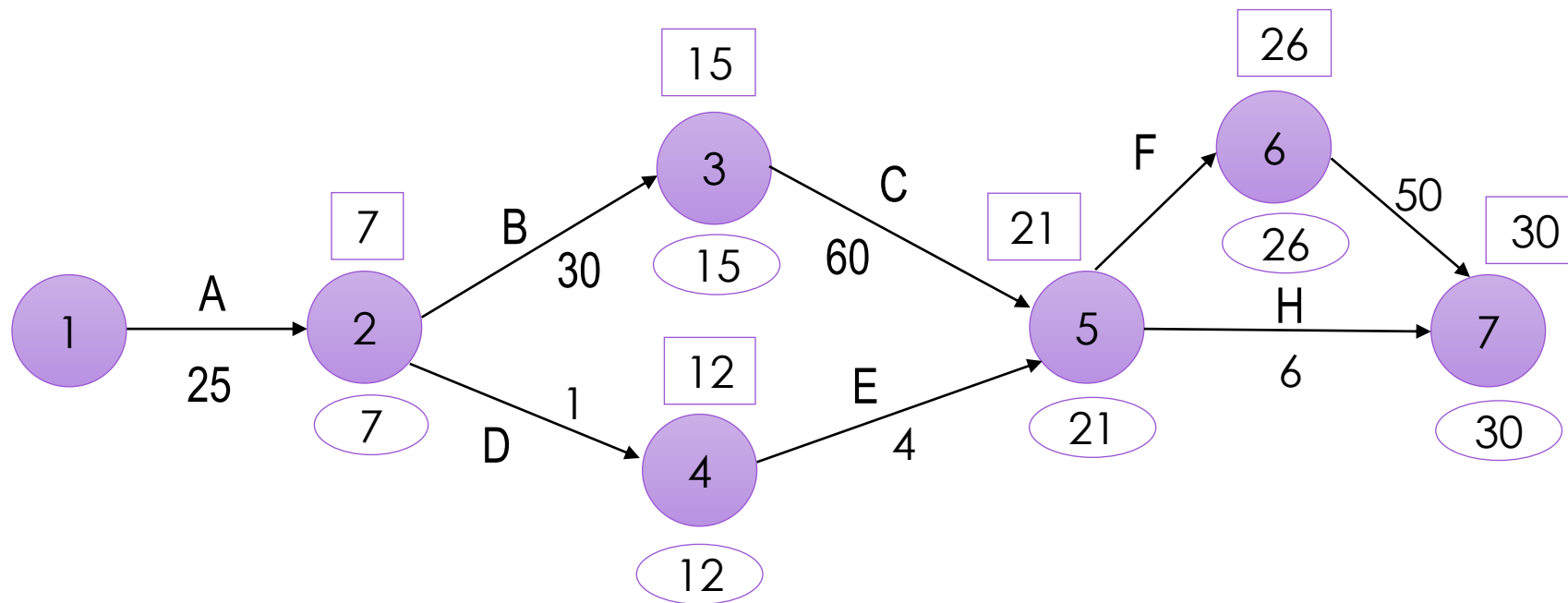
Rješenje analizom mreža

- $ES_{ij} = U_i$
- $LS_{ij} = V_j - t_{ij}$
- $EF_{ij} = U_i + t_{ij}$
- $LF_{ij} = V_j$
- $R_{ij} = LF_{ij} - ES_{ij} - t_{ij}$
- aktivnost je kritična ako je $R_{ij} = 0$, odnosno $LF_{ij} - ES_{ij} = t_{ij}$

CPM i analiza troškova: primjer

aktivnost	preduvjeti	trajanje	skraćeno trajanje	jedinični trošak skraćanja
A	-	7	5	5
B	A	8	3	3
C	B	6	4	5
D	A	5	2	2
E	D	9	6	5
F	C, E	5	2	5
G	F	4	3	4
H	C, E	8	6	6

Projektna mreža



Rješavanje primjera

- fiksni trošak iznosi 6NJ za svaku vremensku jedinicu trajanja projekta
- ukupni trošak: $T_u = f \cdot t + T_s = 6 \cdot 30 + 0 = 180$
- T , trajanje projekta
- T_s , troškovi skraćivanja
- uz max. skraćivanje: $T_u = 6 \cdot 19 + (7-5) \cdot 5 + (8-3) \cdot 3 + (6-4) \cdot 5 + (5-2) \cdot 2$
 $+ (9-6) \cdot 5 + (5-2) \cdot 5 + (4-3) \cdot 4 + (8-6) \cdot 6 = 201$

Analiza troškova matematičkim programiranjem

- n_{ij} — normalno trajanje aktivnosti (i, j)
- s_{ij} — skraćeno trajanje aktivnosti (i, j)
- c_{ij} — jedinični trošak skraćanja aktivnosti (i, j)
- t_{ij} — trajanje aktivnosti (i, j)
- T_{ij} — trošak skraćanja = $c_{ij} \cdot (n_{ij} - t_{ij})$ za $s_{ij} \leq t_{ij} \leq n_{ij}$
- ukupni troškovi skraćanja cijelog projekta: $\sum_{(i,j)} c_{ij} \cdot (n_{ij} - t_{ij})$
- ako je f fiksni trošak po jedinici trajanja projekta, t_1 najranije vrijeme događaja i , 1 prvi, a n posljednji događaj projekta tada su fiksni troškovi:

$$T_f = f \cdot (t_n - t_1)$$

Model linearnog programiranja

- ukupni troškovi suma su fiksnih troškova i troškova skraćivanja: $T_u = T_f + T_s$
- minimizirati $T_u = f \cdot (t_n - t_1) + \sum_{(i,j)} c_{ij} \cdot (n_{ij} - t_{ij})$
- uz ograničenja
- $t_j - t_i \geq t_{ij}$ za sve aktivnosti (i, j)
- $s_{ij} \leq t_{ij} \leq n_{ij}$ za sve aktivnosti (i, j)
- $t_i \geq 0$ za svaki događaj i

Rješenje primjera

- Min. $6 \cdot (t_7 - t_1) + 5 \cdot (7 - t_{12}) + 3 \cdot (8 - t_{23}) + 5 \cdot (6 - t_{35}) + 2 \cdot (5 - t_{24}) + 5 \cdot (9 - t_{45}) + 5 \cdot (5 - t_{56}) + 4 \cdot (4 - t_{67}) + 6 \cdot (8 - t_{57})$

uz ograničenja

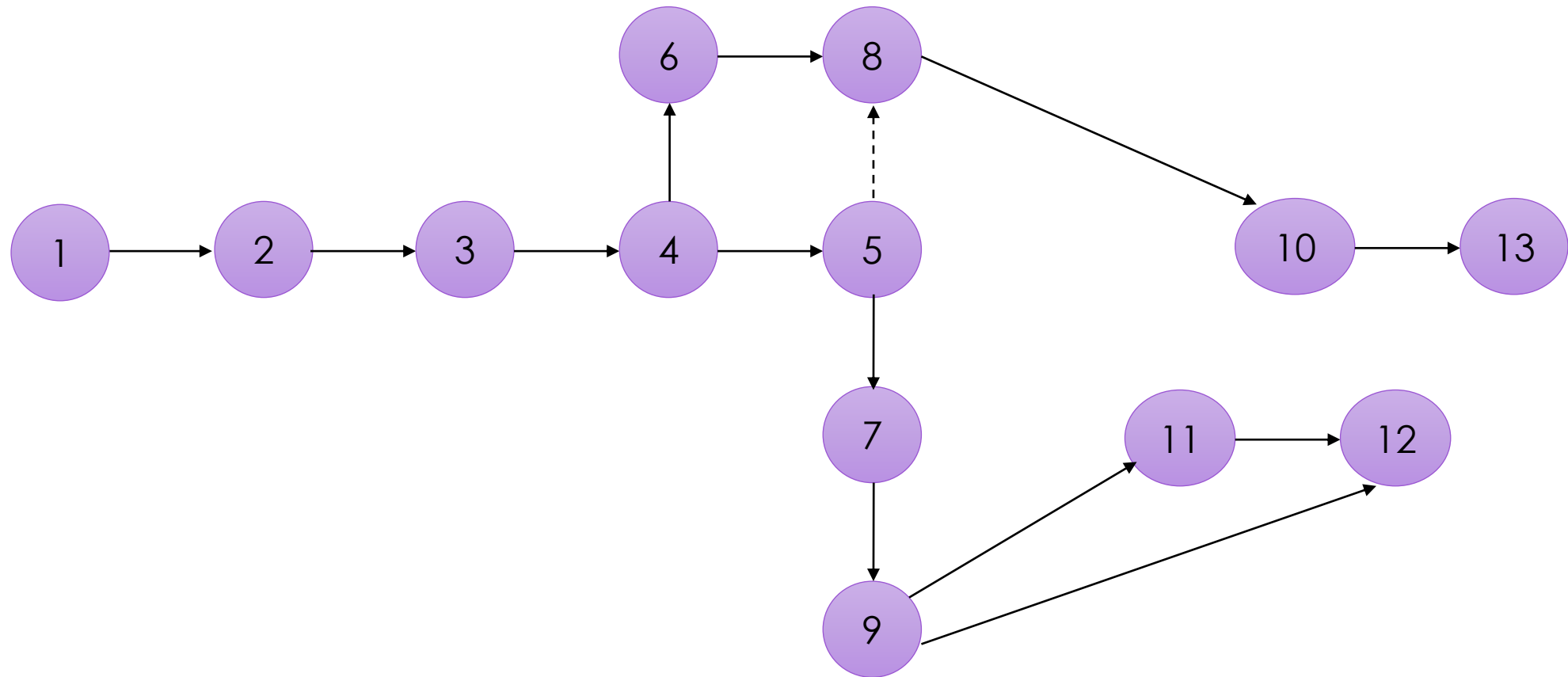
- $t_2 - t_1 \geq t_{12} \quad 5 \leq t_{12} \leq 7$
- $t_3 - t_2 \geq t_{23} \quad 3 \leq t_{23} \leq 8$
- $t_4 - t_2 \geq t_{24} \quad 4 \leq t_{35} \leq 6$
- $t_5 - t_3 \geq t_{35} \quad 2 \leq t_{24} \leq 5$
- $t_5 - t_4 \geq t_{45} \quad 6 \leq t_{45} \leq 9$
- $t_6 - t_5 \geq t_{56} \quad 2 \leq t_{56} \leq 5$
- $t_7 - t_6 \geq t_{67} \quad 3 \leq t_{67} \leq 4$
- $t_7 - t_5 \geq t_{57} \quad 6 \leq t_{57} \leq 8$

Analiza troškova: 2. primjer

aktivnost	trajanje	skraćeno trajanje	jedinični trošak skraćenja
1 - 2	2	1	300
2 - 3	4	3	200
3 - 4	10	7	300
4 - 5	4	2	350
4 - 6	6	4	150
4 - 7	7	5	100
5 - 7	5	3	150
5 - 8	-	-	-
6 - 8	7	4	200
7 - 9	8	6	100
8 - 10	9	5	100
9 - 11	4	3	100
9 - 12	5	3	150
10 - 13	2	1	100
11 - 12	-	-	-
12 - 13	6	3	133.3

13. prosinca 2017.

Projekt prikazan grafom



13. prosinca 2017.

Postupak modeliranja

- fiksni trošak f trajanja projekta jest 200 novčanih jedinica po jedinici vremenatranjanja projekta
- trajanje aktivnosti $t_{ij} : s_{ij} \leq t_{ij} \leq n_{ij}$ za sve aktivnosti (i, j)
- $t_j - t_i \geq t_{ij}$ za sve aktivnosti (i, j)
- $R_{ij} = t_j - t_i - t_{ij} \geq 0$
- $\text{TROŠAK} = f \cdot (t_n - t_1) + \sum_{(i,j)} c_{ij} \cdot (n_{ij} - t_{ij}) = 200 \cdot t_{13} + 13400 - \sum_{(i,j)} c_{ij} \cdot t_{ij}$