Dodatni materijali uz poglavlje "5. Vektori"

Ovi materijali su predviđeni kao pomoć u savladavanju gradiva koje se izlaže u sklopu poglavlja 5. Vektori. Sastoje se od raznih napomena, vezanih za pojedine dijelove gradiva, koje bi u uvjetima uobičajene nastave bile navedene u sklopu regularnih predavanja kao nadopuna materijalima iz udžbenika. Te napomene su ponekad i neformalne prirode te im zapravo uglavnom nije mjesto u udžbeniku nego na predavanjima. Zbog iznimnih okolnosti COVID-19 pandemije i smanjenog obima predavanja, odlučili smo navesti ih u ovom posebnom dokumentu.

Predviđeno je da se ovaj dokument čita paralelno s poglavljem "5. Vektori" udžbenika i to tako da se nakon svakog manjeg poglavlja ili potpoglavlja u udžbeniku pročitaju odgovarajuće napomene, koje bi trebale olakšati savladavanje gradiva.

Također su uz ove dodatne materijale, kao još jedan element on-line nastave, pripremljeni i *interaktivni zadaci* u Moodle-u. Interaktivni zadaci su jednostavno zadaci uzeti tipično sa ispitnih rokova prethodnih godina, a koji pokrivaju gradivo 5. poglavlja. Ti zadaci su posebno dodatno obrađeni i zahvaljujući tome što se prezentiraju u on-line obliku, sadržavaju više takozvanih *Razina pomoći* za studente prilikom rješavanja. Svaku razinu pomoći možete po potrebi aktivirati klikom na tekst "Razina pomoći 1, 2, ..." ispod teksta zadatka. Ideja je da prvo sami pokušate riješiti zadatak. Ako vam to ne polazi za rukom, otvorite prvu razinu pomoći. Ako i dalje ne možete riješiti zadatak, probajte drugu razinu pomoći, itd. Razine pomoći kreću od generalnih uputa na prvoj razini do specifičnih detaljnih uputa na višim razinama, koje će vas voditi korak po korak do rješenja zadatka. Također, za svaki zadatak postoji i napisano potpuno rješenje.

Ideja iza ovog pristupa je da interaktivni zadaci u nekom smislu simuliraju nastavnika koji stoji uz vas dok rješavate zadatak i pokušava vam pomoći pri tome, ali opet s druge strane želi i da se vi sami pokušate potruditi riješiti zadatak. Ako sami bez pomoći inicijalno ne uspijevate riješiti zadatak, nikako nije dobro da odmah pogledate potpuna rješenja. Puno je bolje kad bi vam netko mogao ciljano i selektivno pomagati, pa da uz malo (ili malo više) pomoći ipak uspijete sami riješiti zadatak. Upravo to smo pokušali ostvariti putem koncepta razine pomoći. Sve razine pomoći namjerno nisu odmah vidljive (potrebno je kliknuti na njih da se pojave), tako da možete sami iskoristiti samo onoliko pomoći koliko smatrate da vam je potrebno i nećete si toliko "pokvariti" iskustvo samostalnog rješavanja zadatka, kao kada bi samo odmah pročitali cjelokupno rješenje zadatka.

5 Vektori

5.1 Operacije s vektorima

Zamislite praznu prostoriju. Ako u svakoj točki te prostorije želite opisati temperaturu, za to će vam u nekoj točki biti potreban samo jedan realni broj (skalarna veličina). S druge strane, zamislite da se zrak u prostoriji giba (otvorili ste prozore i vrata te napravili propuh). Da biste opisali brzinu čestica zraka u nekoj točki prostorije neće vam biti dovoljan samo realni broj (koji bi samo bio dovoljan za opisivanje iznosa brzine), nego će vam uz to biti potrebna i informacija o "smjeru" gibanja čestica. Kombinirana informacija o "smjeru" gibanja u prostoriji skupa sa informacijom o iznosu brzine je ono što ćemo opisivati vektorima.

5.1.1 Definicija vektora

Ključno je razumjeti kako *vektor nije isto što i usmjerena dužina*. Vektor je klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju ekvivalencije definiranu na skupu svih usmjerenih dužina. Sjetite se iz Matematičke analize kako je relacija ekvivalencije R na nekom skupu S binarna relacija koja je podskup Kartezijevog produkta $S \times S$ sa svojstvima refleksivnosti (aRa za svaki $a \in S$), simetričnosti (ako je aRb onda je i bRa za sve $a, b \in S$) i tranzitivnosti (ako je aRb i bRc onda je i aRc za sve $a, b, c \in S$). Relacija ekvivalencije R dijeli skup S na disjunktne klase, tj. čini jednu particiju skupa S. Primijetite da neku klasu ekvivalencije možemo odrediti pomoću samo jednog njezinog člana, kojeg u tom slučaju zovemo reprezentant klase ekvivalencije.

Dvije usmjerene dužine su ekvivalentne ako jednu možemo prevesti u drugu nekom translacijom. Preciznije, usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ je ekvivalentna usmjerenoj dužini $\overrightarrow{CD}$ ako postoji translacija koja točku A preslikava u točku C, a točku B preslikava u točku D. Ovdje je bitno da se početak preslikao u početak, a kraj u kraj. Još primijetite da za zadani vektor u svakoj točki postoji usmjerena dužina s početkom u toj točki koja je reprezentant tog vektora.

Zapis vektora. Ovdje je bitno naglasiti da je svaki vektor jedinstveno određen sa tri podatka: nosačem, orijentacijom i duljinom. Mi ćemo i kasnije, kad god uvodimo neki novi vektor (recimo kada uvodimo što je rezultat zbrajanja dva vektora ili množenja vektora skalarom) uvijek precizno navesti što je nosač, koja je orijentacija i koja je duljina novog vektora. Kada smo zadali ta tri podatka, smatramo da je zadan i vektor.

Alternativno možemo govoriti samo u smjeru vektora. Pojam smjera objedinjuje istovremeno nosač i orijentaciju vektora. Primijetite da za svaki nosač postoje dvije orijentacije, tako da svaki nosač određuje dva moguća smjera vektora. Znači vektor je alternativno određen samo svojim smjerom i duljinom (tj. iznosom). Primijetite da ima beskonačno mnogo smjerova tj. beskonačno mnogo nosača.

Nul vektor. Zašto nema smisla govoriti nosaču, orijentaciji ili smjeru nul vektora? Zamislite da odaberete vektor čija je duljina strogo veća od nule i da mu smanjujete duljinu. (Najbolje je zamišljati jednu konkretnu usmjerenu dužinu.) Dok god je duljina tok vektora veća od nule, smjer mu je dobro definiran. Smanjujte i dalje vektor u vašim mislima. U trenutku kada mu duljina postane nula, sva informacija o njegovom smjeru (nosaču i orijentaciji) se gubi. Svi smjerovi u nekom smislu postaju isti. Početna i završna točka mu postaje ista, što znači da više nije moguće razlučiti orijentaciju. Štoviše, kroz jednu točku možete provući beskonačno mnogo pravaca, za razliku od samo jednog pravca koji možete provući kroz dvije točke (ako su početna i završna točke različite). To bi značilo da nul vektoru u nekom smislu odgovara svaki nosač. To je razlog zašto onda nema smisla govoriti o tome. Nul vektor je jedinstveno određen svojim svojstvom da mu je duljina jednaka nuli.

Radij vektor. Prvo fiksirajmo neku točku O. Sada primijetite vrlo važnu (iako možda trivijalnu) činjenicu da svakoj točki T odgovara točno jedan radij vektor $\overrightarrow{OT}$ (gdje smo uobičajeno poistovjetili vektor s njegovim reprezentantom). Obrnuto, uz fiksiranu točku O možemo definirati preslikavanje koje svakom vektoru $\mathbf{a}$ pridružuje točno jednu točku. Kako ćemo to načiniti? Uzmimo reprezentant (usmjerenu dužinu) vektora $\mathbf{a}$ takav da mu je početna točka upravo O. Ako označimo taj reprezentant sa $\overrightarrow{OT}$, vidimo da je time definirano preslikavanje vektora $\mathbf{a}$ u točku T.

Primijetite da je preko pojma radij vektora zapravo definirano bijektivno preslikavanje iz skupa svih vektora u skup svih točaka. Za to moramo samo fiksirati neku točku O. Ovo će nam biti osobito korisno kasnije prilikom uvođenja pojma koordinatnog sustava.

5.1.2 Zbrajanje vektora.

Kao što smo već prije naveli, da bismo odredili neki vektor (u ovom slučaju želimo odrediti što je zbroj dvaju vektora), potrebno mu je odrediti nosač, orijentaciju i duljinu. U samoj definiciji zbrajanja vektora koristimo geometrijski pojam trokuta koji dobro intuitivno doživljavamo od ranije (osnovna škola). Kako postupiti ako želimo zbrojiti vektore **a** i **b**? Fiksirajmo prvo neku točku i označimo je s A, zatim odaberemo reprezentant vektora **a** koji ima početak u točki A i označimo ga s $\overrightarrow{AB}$. Primijetite da prema prethodnoj diskusiji on jednoznačno određuje točku B. Sada ponovimo postupak za vektor **b** i uzmimo njegov reprezentant sa početkom upravo u točki B. Označimo ga sa $\overrightarrow{BC}$. On jednoznačno određuje točku C. Sada zbroj vektora **a** i **b** definiramo kao vektor određen reprezentantom $\overrightarrow{AC}$.

Točke A i C određuju nosač koji je upravo pravac koji prolazim tim točkama. Orijentacija je jednoznačno određena, od točke A prema točki C, a duljina vektora je određena kao udaljenost između točaka A i C. Primijetite da točke A, B i C općenito čine trokut (vidi Sl. 5.2.), koji je neovisan o odabiru početne točke A, u smislu da su svi takvi trokuti međusobno sukladni, za svaki odabir točke A. Stoga je i operacija zbrajanja vektora neovisna o početnom odabiru točke A, te je stoga dobro definirana.

Primijete da smo već vidjeli kako svojstva VP_1–VP_4 vrijede i za matrice. Da se prisjetimo: zbrajanje matrica je asocijativno VP_1 i komutativno VP_4, u zbrajanju matrica također postoji nul vektor kojemu kod matrica odgovara nul matrica VP_2 i za svaku matricu postoji njoj suprotna matrica, koju dobijemo jednostavno tako da svakom elementu početne matrice promijenimo predznak VP_3.

Kako ćemo za zadani vektor **a** odrediti njegov suprotni vektor, u oznaci $-\mathbf{a}$? Jednostavno odaberemo neki reprezentant vektora **a** i označimo ga s $\overrightarrow{AB}$. U suprotnom vektoru nosač i duljina su nepromijenjeni, samo je njegova orijentacija suprotna. Stoga suprotan vektor $-\mathbf{a}$ ima reprezentant $\overrightarrow{BA}$.

Oduzimanje vektora. Primijetite da na operaciju oduzimanja vektora možemo gledati kao na dvije operacije koje primjenjujemo za redom. Tako ako želimo izračunati $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, onda prvo odredimo suprotan vektor vektoru **b** i označimo ga sa $-\mathbf{b}$, a nakon toga zbrojimo $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

U terminima reprezentanata, ako je $\overrightarrow{AB}$ reprezentant vektora **a**, onda odaberimo za početnu točku reprezentanta vektora **b** također točku A. Tako dobijemo reprezentant $\overrightarrow{AC}$. Sada je

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB},$$

gdje smo raščlanili oduzimanje na kombinaciju zbrajanja i uzimanja suprotnog vektora, te smo iskoristili svojstvo VP_4 komutativnosti zbrajanja vektora.

5.1.3 Množenje vektora skalarom.

Primijetite kako je ovdje nova operacija koju definiramo, a to je operacija množenja vektora skalarom, upravo definirana tako da smo specificirali što je nosač, što orijentacija, a što duljina novog vektora (rezultata operacije).

Prisjetite se da smo za svojstva VP_5–VP_8 već vidjeli da također vrijede i za množenje matrice skalarom. Svojstvo VP_5 je distributivnost prema zbrajanju vektora, VP_6 je distributivnost prema zbrajanju u skupu $\mathbb{R}$, VP_7 zovemo usklađenost množenja, a VP_8 netrivijalnost množenja.

Jedinični vektor. Za jedinični vektor potrebno je "podijeliti" vektor s njegovom duljinom. Ovdje se ta nova operacija "dijeljenja vektora skalarom" jednostavno realizira tako da se vektor pomnoži sa recipročnom vrijednosti svoje duljine i sve se svede na operaciju množenja vektora skalarom koja je već prethodno definirana. Stoga nije potrebno uvoditi novu operaciju "dijeljenja vektora skalarom".

5.1.4 V^3 je vektorski prostor.

Ključna je definicija *vektorskog prostora* koja se ovdje prvi puta pojavljuje. U ovom trenutku možda nije toliko naglašeno, ali će postati jasnije u idućim poglavljima, kako je pojam vektorskog prostora općenitiji od vektorskih prostora V^2 svih vektora u ravnini, V^3 svih vektora u prostoru ili vektorskog prostora $\mathcal{M}_{mn}$ svih matrica tipa $m \times n$. Vektori mogu biti bilo kakvi apstraktni objekti. Bitno je samo da su definirane dvije operacije koje nazivamo zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom i da su zadovoljena svojstva VP_1–VP_8. Te dvije operacije moraju kao svoj rezultat također vraćati vektor.

Kasnije ćemo vidjeti primjere vektorskih prostora u kojima su vektori recimo realne funkcije, posebno neprekidne funkcije ili posebno polinomi nekog stupnja. Također, vektori mogu biti i uređene n-torke realnih brojeva tj. elementi skupa $\mathbb{R}^n$. Naučit ćemo neka apstraktna svojstva i teoreme koji će vrijediti za općenite vektorske prostore univerzalno bez obzira što su naši konkretni vektori!

Prisjetite se i vrlo važnog pojma *linearne nezavisnosti* s kojim smo se već susreli u poglavlju "3 Rang i inverz matrice". Tamo su naši vektori bili isključivo vektori-stupci tj. matrice $\mathcal{M}_{m1}$. Ključni su pojmovi i *baze* i *dimenzije* vektorskog prostora s kojima ćemo se još jako puno susretati u kasnijim poglavljima.

Teorem 1. Jedan od najvažnijih teorema u cijelom kolegiju, govori o tome da je prikaz svakog vektora u bazi pripadajućeg vektorskog prostora jedinstven. Promotrite dokaz teorema i primijetite da je korištena jedna od uobičajenih meta-tehnika dokazivanja teorema, koja se među ostalim primjenjuje kada želite dokazati jedinstvenost nekog objekta u matematici. Pretpostavili smo suprotno, da zapis nekog vektora $\mathbf{a}$ u bazi prostora nije jedinstven, te smo u nekoliko koraka jednostavnog računa došli do kontradikcije, da taj zapis zapravo ipak mora biti jedinstven. U računu smo implicitno koristili neka od svojstava vektorskog prostora poput VP_6 distributivnosti prema zbrajanju u skupu $\mathbb{R}$ i VP_3 postojanja suprotnog vektora.

Još bi trebalo u ovom potpoglavlju istaknuti važne formule za radij vektore polovišta dužine i težišta trokuta, uz fiksiranu točku O. Ako je točka C polovište dužine AB, onda vrijedi

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Neka je točka T težište trokuta ABC. Za težište vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Uz Primjere 1–5 još proučite i riješene zadatke na kraju potpoglavlja u tiskanom izdanju.

5.2 Koordinatni sustavi i kanonska baza

5.2.1 Koordinatni sustavi u ravnini i prostoru

Koordinatni sustav u ravnini. Ovdje su zajedno upotrijebljena dva ključna elementa uvedena do sada. S jedne strane imamo bijektivnu korespondenciju između točaka u ravnini T i radij vektora $\overrightarrow{OT}$, gdje smo prethodno fiksirali točku O. S druge strane koristimo Teorem 1 da bismo garantirali jednoznačni prikaz tj. rastav vektora $\overrightarrow{OT}$ kao linearne kombinacije vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$. Tako jednoznačno dobivamo koeficijente skalare x_1 i x_2 iz linearne kombinacije. Vidimo kako je veza između radij vektora $\overrightarrow{OT}$ i koeficijenata (x_1, x_2), koje zapisujemo kao uređeni par, također bijektivna. Tako je na kraju i bijektivna veza između točke T u ravnini i uređenog para skalara (x_1, x_2), kao kompozicija dvije bijekcije. Uređeni par skalara (x_1, x_2) zovemo koordinatama.

Koordinatni sustav u prostoru. Sve analogno vrijedi i za trodimenzionalni prostor, samo koristimo varijantu Teorema 1 za prikaz vektora $\mathbf{a} \in V^3$.

5.2.2 Kanonska baza

Dolazimo do Kartezijevog pravokutnog koordinatnog sustava u prostoru. Ovdje je važno primijetiti kako smo došli do njega i da je zapravo Kartezijev koordinatni sustav samo specijalni oblik općenitog koordinatnog sustava $(O; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ koji je uveden u prethodnom potpoglavlju.

Tri stvari su ključne za Kartezijev koordinatni sustav. Prvo, odabrali smo jednu točku u prostoru koju zovemo *ishodište koordinatnog sustava* i označili je s O. Drugo, sva tri vektora $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_3$ odabrali smo tako da su međusobno okomiti tj. odabrane osi koordinatnog sustava su međusobno okomite. Treće, odabrali smo vektore $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_3$ tako da svi budu jedinične duljine.

Ovako "pravilno" odabran koordinatni sustav nam daje veliku prednost za jednostavnije računanje s pojmovima koje razvijamo u ostatku ovog poglavlja. Vidjet ćete da je zbog okomitosti koordinatnih osi skalarni i vektorski umnožak vektora jednostavnije računati. Skalarni i vektorski umnožak uvodimo kasnije u poglavlju. Također, zbog jedinične duljine vektora $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_3$, izračun duljine vektora je također jednostavniji.

Primjer 6. (Malo detaljnije o rješenju ovog primjera.) U primjeru se traži da vektor $\overrightarrow{OB}$ rastavimo po komponentama u smjerovima vektora $\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{ON}$. Kako su dane koordinate svih točaka, jednostavno je prvo odrediti zapis svakog od ta tri vektora kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ koordinatnih osi. (Točke M i N su polovišta dužina pa možete iskoristiti prethodno navedenu formulu za određivanje radij vektora polovišta.) Na kraju se rješenje jednostavno dobije izjednačavanjem koeficijenata uz vektore $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ s lijeve i desne strane jednakosti $\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OM} + s\overrightarrow{ON}$. U ovakvim zadacima je ideja napisati sve vektore kao linearnu kombinaciju ista dva linearno nezavisna vektora (u ovom slučaju to su vektori $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$), te izjednačiti pripadajuće koeficijente.

5.2.3 Orijentacija ravnine i prostora

Ovdje je zanimljivo primijetiti da u ravnini, kao i u prostoru postoje dva međusobno korjenito različita odabira Kartezijevog koordinatnog sustava. To znači da postoje dva moguća i međusobno različita Kartezijeva koordinatna sustava, kako u ravnini, tako i u prostoru. U smislu da jedan koordinatni sustav od ta dva odabira nije moguće nikakvom kombinacijom korištenja *isključivo rotacija i translacija* prebaciti u drugi koordinatni sustav. Kad kažemo jedan koordinatni sustav "prebaciti" u drugi, mislimo da nije moguće preslikati koordinatni sustav tako da se ishodište prvoga preslika u ishodište drugoga, a koordinatni vektori prvoga preslikaju u koordinatne vektore drugoga. Primijetite da bi ovo bilo moguće napraviti jedino uz dozvoljeno korištenje i *zrcaljenja.*

5.3 Skalarni umnožak

5.3.1 Definicija skalarnog umnoška

Za razliku od množenja vektora skalarom, skalarni umnožak je operacija množenja definirana na dva vektora. Rezultat te operacije je skalar tj. realni broj. Rezultat nije vektor, kao kod množenja vektora skalarom. Ovo je jako važno razlikovati jer kasnije ćemo uvesti i vektorski umnožak u kojemu je rezultat operacije množenja dva vektora opet vektor.

Notacija je ovdje ključna! Preporučili bi da se obavezno vodi računa u zapisivanju, da li se radi o množenju vektora skalarom ili o skalarnom umnošku. Najjednostavnije je odmah usvojiti notaciju, da ako se radi o skalarnom umnošku dva vektora, uvijek obavezno koristite točku "$\cdot$" između dva vektora koja se množe. S druge strane za operaciju množenja vektora skalarom nikada nemojte pisati točku između vektora i skalara.

Ključna upotreba skalarnog umnoška je u karakterizaciji okomitosti dvaju vektora. U raznim računima, primjerima i zadacima, gotovo uvijek kada se spominje da su dva vektora okomita, to ćemo zapisivati izjednačavajući njihov skalarni umnožak s nulom. S druge strane, ako se traži da provjerite da li su neka dva vektora okomita, u računu ćete uglavnom računati njihov skalarni umnožak i provjeravati da li je jednak nuli. Naravno, treba provjeriti i da li su ta dva vektora različita od nul vektora.

Apsolutno je i ključna formula

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \tag{4}$$

koja nam daje vezu između duljine vektora $\mathbf{a}$ i skalarnog umnoška vektora $\mathbf{a}$ sa samim sobom.

Projekcija vektora na vektor. Ovdje treba posebno obratiti pažnju na svojstva skalarnog umnoška (S_1)–(S_4). Ona su ključna za uspješno provođenje vektorskog računa. Svojstvo (S_1) direktno slijedi iz formule (4). Svojstvo (S_2) tj. homogenost nam govori kako se skalarni umnožak dva vektora "dobro" kombinira sa umnoškom vektora sa skalarom. Svojstvo (S_3) je uobičajeno svojstvo komutativnosti. Obratite pažnju da neformalno govoreći, svojstva (S_2) i (S_3) zajedno garantiraju da ako imamo dva vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ i skalar λ da ih možemo množiti u svim međusobnim permutacijama koje imaju smisla i stavljati zagrade kako god želimo dok to ima smisla i da ćemo uvijek dobiti isti rezultat. Svojstvo (S_4) je uobičajeno svojstvo distributivnosti, ovdje se odnosi na distributivnost skalarnog množenja prema zbrajanju vektora.

Proučite još Primjer 7 i ostale riješene zadatke do kraja potpoglavlja 5.3.1 u tiskanom izdanju.

5.3.2 Skalarni umnožak u koordinatnom sustavu

Primijetimo nekoliko formula potrebnih za računanje skalarnog umnoška, duljine i kuta vektora u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru. Prvo zapišemo vektore $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ na jednoznačan način u kanonskoj bazi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ prostora V^3,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},\\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Primijetite da su vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ zapravo radij vektori točaka $A(a_x, a_y, a_z)$ i $B(b_x, b_y, b_z)$ zadanih svojim koordinatama. Skalarni umnožak vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ sada lako računamo formulom

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Primijetite da je skalarni umnožak koordinatnih vektora $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ samih sa sobom jednak 1, a u parovima različitih koordinatnih vektora jednak 0 (zbog okomitosti).

Iz ovog potpoglavlja su vrlo važne formule za *duljinu vektora* i *kut između vektora* i svakako ih je potrebno upamtiti.

Obratite i pažnju još jednom na važnu bijektivnu vezu prostora vektora V^3 sa prostorom uređenih trojki koordinata vektora prikazanih u kanonskoj bazi $\mathbb{R}^3$, sa prostorom vektora-redaka $\mathcal{M}_{13}$ i sa prostorom vektora-stupaca $\mathcal{M}_{31}$. Možemo pisati $V^3 \simeq \mathbb{R}^3 \simeq \mathcal{M}_{13} \simeq \mathcal{M}_{31}$.

5.4 Vektorski umnožak

5.4.1 Definicija vektorskog umnoška

Vektorski umnožak je jednako kao i skalarni umnožak operacija množenja definirana na dva vektora, samo se radi o drugoj operaciji. Njezin rezultat nije skalar, kao kod skalarnog množenja, nego je vektor. Opet, kao i već ranije, kada definiramo neki novi vektor (u ovom slučaju rezultat operacije vektorskog množenja), moramo navesti njegov nosač, njegovu orijentaciju i njegovu duljinu.

Promotrite sada definiciju vektorskog umnoška. Svojstvo (E_1) određuje duljinu, svojstvo (E_2) određuje nosač (okomit pravac na nosače vektora $\mathbf{a}$ i

b), a svojstvo (E_3) određuje jednu od dvije moguće orijentacije na nosaču (i to upravo onu od dvije moguće orijentacije, takvu da zadana trojka vektora čini desni, a ne lijevi sustav).

Geometrijska interpretacija. Često ćemo koristiti upravo vektorski umnožak za računanje površine paralelograma ili trokuta. Ako su **a** i **b** vektori koje određuju dvije susjedne stranice paralelograma ili trokuta, onda je površina paralelograma dana sa $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, a površina trokuta je dana sa polovicom tog iznosa tj. $\frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. To je zato što je taj paralelogram sastavljen od disjunktne unije dva takva sukladna trokuta (dva trokuta spojite po trećoj stranici da dobijete paralelogram).

Što se tiče tri svojstva vektorskog umnoška, obavezno primijetite kako je vektorski umnožak za razliku od skalarnog umnoška antikomutativan. Mijenja se samo predznak prilikom promjene redoslijeda vektora koje množimo tj. orijentacija, a nosač i duljina ostaju isti. Ovo slijedi direktno iz definicije vektorskog umnoška. Preostala dva svojstva, homogenosti i distributivnosti, su ista kao i kod skalarnog umnoška. Svojstvo pozitivnosti skalarnog umnoška naravno nema pandana u svojstvima vektorskog umnoška. Ono tamo ima smisla samo zato što je skalarni umnožak dva vektora skalarna veličina tj. realni broj. Za vektore nema smisla govoriti o tome da li su pozitivni ili negativni.

5.4.2 Vektorski umnožak u koordinatnom sustavu

Ovo potpoglavlje sadrži (poput analognog poglavlja za skalarni umnožak) nekoliko vrlo bitnih formula za efikasno računanje vektorskog umnoška u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Kao i prije pretpostavljamo da su dana dva vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ sa svojim jednoznačnim zapisima u kanonskoj bazi **i**, **j**, **k** prostora V^3,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Primijetite što su vektorski umnošci vektora kanonske baze. Vektorski umnožak vektora kanonske baze samog sa sobom jednak je nul vektoru, a umnošci u različitim parovima vektora baze su uvijek jednaki trećem preostalom vektoru baze ili njemu suprotnom vektoru. Ovdje treba obratiti pažnju na predznak umnoška, tako da bude zadovoljeno svojstvo tvorbe desnog sustava (sjetite se definicije vektorskog umnoška).

Najbitnija formula koju treba zapamtiti ovdje je zapis vektorskog umnoška vektora **a** i **b** pomoću determinante 3 puta 3, formula (6) iz knjižice.

5.5 Mješoviti umnožak

Mješoviti umnožak nije ništa posebno novo, nego je samo naziv za umnožak tri vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$, gdje prva dva vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ množimo vektorski i onda rezultat tog množenja (koji je vektor) još pomnožimo skalarno sa trećim vektorom $\mathbf{c}$. Mješoviti umnožak je je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Bitno je zapamtiti formulu (7) koja daje jednostavni zapis mješovitog umnoška u koordinatnog sustavu pomoću determinante 3 puta 3. Reci u determinanti odgovaraju koordinatama pojedinih vektora.

Sjetimo se nekih svojstava prilikom računanja determinanti. Zamjena dva retka u determinanti mijenja predznak determinante, međutim dvije sukcesivne zamjene redaka u determinanti ne mijenjaju predznak (dva puta se je promijenio predznak, pa je ostao isti na kraju). Primijetite da je determinanta koja odgovara mješovitom umnošku vektora $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i $\mathbf{a}$ (upravo u tom poretku) dobivena upravo s dvije sukcesivne zamjene redaka iz determinante koja odgovara mješovitom umnošku tih istih vektora u originalnom poretku $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$. Analogno vrijedi i za mješoviti umnožak vektora $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (u tom trećem poretku).

Geometrijska interpretacija. Glavna primjena mješovitog umnoška je za određivanje volumena paralelepipeda čija tri susjedna brida (koja se sijeku u jednom zajedničkom vrhu) određuju vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$. Pomoću mješovitog umnoška možemo odrediti i volumen prizme sa trokutastom bazom određenom vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ i pobočnim bridom određenim vektorom $\mathbf{c}$. Taj volumen je jednak jednoj polovini volumena odgovarajućeg paralelepipeda. Analogno možemo odrediti i volumen tetraedra čija tri susjedna brida su određena vektorima $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$. Volumen tetraedra jednak je jednoj šestini volumena odgovarajućeg paralelepipeda.

Primijetite također da komplanarnost tri vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ (ako leže u istoj ravnini) povlači da im je mješoviti umnožak jednak nuli, i obrnuto. Tako da mješoviti umnožak možemo koristiti i kada je potrebno odrediti da li su zadana tri vektora komplanarna.

Mješoviti produkt, determinanta i orijentacija baze. Ovdje je samo bitno zapamtiti da nam predznak mješovitog produkta vektora neke baze $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ prostora V^3 daje orijentaciju te baze,
pozitivan predznak = pozitivna orijentacija = desna baza,
negativan predznak = negativna orijentacija = lijeva baza.

5.6 Rastav vektora po bazi

5.6.1 Koordinate vektora u ortogonalnoj bazi

Ključna ideja je da je u ortogonalnoj bazi (vektori ortogonalne baze su svi međusobno okomiti) puno jednostavnije izračunati prikaz nekog zadanog vektora $\mathbf{d}$, nego što bi to bilo u općenitoj bazi čiji vektori nisu međusobno okomiti. U općenitoj bazi za određivanje koeficijenata zapisa vektora $\mathbf{d}$ potrebno je rješavati sustav od tri jednadžbe i tri nepoznanice, dok se u ortogonalnoj bazi rastav vektora $\mathbf{d}$ dobije jednostavnom formulom (8).

Koordinate vektora u ortonormiranoj bazi. Analogna je situacija i u ortonormiranoj bazi (svi vektori baze su još dodatno jedinične duljine). Ovdje formula (8) za prikaz rastava vektora postaje još jednostavnija jer su nazivnici u svim članovima zbog jedinične duljine vektora baze jednaki 1. Tako dobijemo formulu (9). Primijetite da je jedna važna ortonormirana baza (i zapravo baza koju ćemo gotovo uvijek koristiti) kanonska baza vektora $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

5.7 Dvostruki umnožak

Možda se pitate zašto definirati još jedan tip umnoška tri vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$, koji nije ništa drugo nego dva vektorska umnoška primijenjena za redom uz upotrebu zagrada, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ tj. druga mogućnost $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. U ovom trenutku u kolegiju Linearna algebra uistinu nema direktne motivacije za uvođenje pojma dvostrukog umnoška. Kasnije na kolegiju Matematička analiza 3 vidjet ćete da su identiteti (12) i (13) koje smo izveli u ovom potpoglavlju ključni za dio tog kolegija koji se zove Vektorska analiza, posebno za formalni vektorski račun.

Ovdje je za sada potrebno znati da dvostruki umnožak nikako nije asocijativan, te je potrebno znati kako se izvode formule (12) i (13).