Linearna algebra - 8. auditorne vježbe

1. Zadani su pravci p i q te ravnina π svojim jednadžbama:

$$p \ldots \frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}, \quad q \ldots \frac{x-1}{-1} = \frac{y+6}{3} = \frac{z+6}{4}, \quad \pi \ldots x + 2y + z = 10.$$

Odredite površinu trokuta ABC ako je $A = p \cap q$, $B = p \cap \pi$ i $C = q \cap \pi$.

Odredimo koordinate vrhova tog trokuta:

- točka A

$$p \ldots \frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$q \ldots \frac{x-1}{-1} = \frac{y+6}{3} = \frac{z+6}{4} \iff \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -6 + 3s \\ z = -6 + 4s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Rješavamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} -1 = 1 - s & \Rightarrow s = 2 \\ 2 - t = -6 + 3s & \Rightarrow 2 - t = 0 \Rightarrow t = 2 \\ t = -6 + 4s & \end{cases}$$

$\leftarrow$ uvrštavanjem dobivenih vrijednosti parametara t i s u ovu jednadžbu dobivamo istinitu jednakost $(2=2)$ pa zaključujemo da je $(t,s) = (2,2)$ rješenje ovog sustava

$\Rightarrow A(-1, 0, 2)$

- točka B

Uvrstimo parametarske jednadžbe pravca p u jednadžbu ravnine π:

$$-1 + 2(2-t) + t = 10$$

$$3 - t = 10$$

$$t = -7$$

$\Rightarrow B(-1, 9, -7)$

• točke C

Sada uvrštavamo parametarske jednadžbe od ℓ u jednadžbu od π:

$$1-s+2(-6+3s)+(-6+4s)=10$$

$$9s-17=10$$

$$s=3$$

$\Rightarrow C(-2,3,6)$

Zato je tražena površina jednaka

$$P=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(9\vec{j}-9\vec{k})\times(-i+3\vec{j}+4\vec{k})\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 9 & -9\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|63\vec{i}+9\vec{j}+9\vec{k}\right| = \frac{9}{2}\sqrt{51}$$

2. **(a)** Odredite jednadžbu ravnine π koja je okomita na ravninu

$$\tau \dots x + 2y - z = 1,$$

paralelna s pravcem

$$p \dots \frac{x-1}{5} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{4}$$

i prolazi točkom $A(1, 0, -1)$.

(b) Odredite jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $B(1, 2, -2)$, paralelan je s ravninom

$$\rho \dots x - 2y + 3z = 9$$

i siječe pravac

$$q \dots \frac{x+4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-1}.$$

(a) Budući da je $\pi \perp \tau$, vektori normala od π i τ moraju biti okomiti pa vektor $\vec{n}_\tau = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ mora ležati u ravnini π.

Nadalje, budući da je $\pi \parallel p$, vektor smjera od p, $\vec{s}_p = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, također mora ležati u π.

Budući da ravnina π prolazi točkom A, možemo odrediti njene parametarske jednadžbe

$$\pi \dots \begin{cases} x = 1 + t + 5s \\ y = 2t + 3s \\ z = -1 - t + 4s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Eliminacijom parametara t i s možemo odrediti i opću jednadžbu te ravnine:

$$\begin{cases} t + 5s = x - 1 \quad \big| \cdot(-2) \\ 2t + 3s = y \\ -t + 4s = z + 1 \end{cases} \Rightarrow -7s = y - 2x + 2 \Rightarrow s = -\frac{1}{7}y + \frac{2}{7}x - \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow t = x - 1 - 5s$$
$$= x - 1 + \frac{5}{7}y - \frac{10}{7}x + \frac{10}{7}$$
$$= -\frac{3}{7}x + \frac{5}{7}y + \frac{3}{7}$$

Uvrštavanjem u treću jednadžbu sustava slijedi

$$\frac{3}{7}x - \frac{5}{7}y - \frac{3}{7} - \frac{4}{7}y + \frac{8}{7}x - \frac{8}{7} = z + 1$$

$$\frac{11}{7}x - \frac{9}{7}y - z = \frac{18}{7} \qquad \big| \cdot 7$$

$$\pi \dots \quad 11x - 9y - 7z = 18$$

(b) 1. način

Presjek pravaca p i q je točka $C(2t-4, 4t-5, -t+1)$ (iz parametarskih jednadžbi pravca q). Budući da je $p \parallel \mathcal{S}$, za vektor smjera od p, $\vec{s}_p = \vec{BC} = (2t-5)\vec{i} + (4t-7)\vec{j} + (-t+3)\vec{k}$, vrijedi

$$\vec{s}_p \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}} = 0 \Rightarrow (2t-5) - 2(4t-7) + 3(-t+3) = 0$$
$$\Rightarrow -9t + 18 = 0$$
$$\Rightarrow t = 2 \Rightarrow C(0,3,-1) \Rightarrow \vec{s}_p = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Dakle,

$$p \ldots \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$$

2. način

Neka je $\vec{s}_p = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektor smjera od p. Parametarske jednadžbe od p i q su

$$p \ldots \begin{cases} x = 1 + a_x t \\ y = 2 + a_y t \\ z = -2 + a_z t \end{cases}, \qquad q \ldots \begin{cases} x = -4 + 2s \\ y = -5 + 4s \\ z = 1 - s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Sjecište tih pravaca dobivamo rješavanjem sustava

$$\begin{cases} 1 + a_x t = -4 + 2s \\ 2 + a_y t = -5 + 4s \\ -2 + a_z t = 1 - s \Rightarrow s = 3 - a_z t \end{cases}$$

$$1 + a_x t = -4 + 2(3 - a_z t) \qquad 2 + a_y t = -5 + 4(3 - a_z t)$$
$$(a_x + 2a_z)t = 1 \qquad (a_y + 4a_z)t = 5$$
$$5(a_x + 2a_z) = a_y + 4a_z$$
$$\Rightarrow 5a_x - a_y + 6a_z = 0$$

Budući da je još i $p \parallel \mathcal{S}$, imamo $\vec{s}_p \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}} = a_x - 2a_y + 3a_z = 0$. Dakle rješavamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} 5a_x - a_y + 6a_z = 0 \quad | \cdot (-2) \\ a_x - 2a_y + 3a_z = 0 \quad + \end{cases} \Rightarrow -9a_x - 9a_z = 0 \Rightarrow a_x = -a_z$$
$$\Rightarrow a_y = 5a_x + 6a_z = a_z$$

Dakle, $\vec{s}_p = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a_z(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, a budući da vektor smjera pravca određujemo do na množenje skalarom, možemo uzeti $a_z = 1$, tj. $\vec{s}_p = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Dakle,

$$p \ldots \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

3. Presjekom ravnina $\mu \dots x + y + \alpha z = 5$ i $\nu \dots 2x - y - 2z = 1$ određen je pravac p. Odredite vrijednost parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da pravac p bude paralelan s pravcem q zadanim parametarskim jednadžbama

$$q \dots \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -1 + t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

<u>1. način</u>

Jednadžbu pravca p dobivamo iz sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 5 \\ 2x - y - 2z = 1 \end{cases} \Big| \cdot 1 \; + \quad \Rightarrow 3x + (\alpha - 2)z = 6$$

$$\Rightarrow x = 2 - \frac{1}{3}(\alpha - 2)z$$

$$\Rightarrow y = 2x - 2z - 1$$

$$= 2\left(2 - \frac{1}{3}(\alpha - 2)z\right) - 2z - 1$$

$$= 3 - \frac{2}{3}\alpha z + \frac{4}{3}z - 2z$$

$$= 3 - \frac{2}{3}\alpha z - \frac{2}{3}z$$

$$= 3 - \frac{2}{3}(\alpha + 1)z$$

Stavljanjem $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, dobivamo parametarske jednadžbe od p:

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{3}(\alpha - 2)t \\ y = 3 - \frac{2}{3}(\alpha + 1)t, \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Budući da su pravci p i q paralelni, njihovi vektori smjera moraju biti kolinearni, tj. postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da

$$\vec{s}_p = \lambda \vec{s}_q$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}(\alpha - 2) = 2\lambda \\ -\frac{2}{3}(\alpha + 1) = 2\lambda \\ 1 = \lambda \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{3}(\alpha + 1) = 2 \Rightarrow \alpha + 1 = -3 \Rightarrow \alpha = -4$$

Budući da uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo točnu jednakost $(2 = 2)$, slijedi da je $\alpha = -4$.

2. način

Vektor smjera od p, $\vec{s}_p$, mora biti kolinearan s vektorskim produktom vektora normala ravnina μ i γ (jer je okomit na oba ta vektora). Dakle, možemo uzeti

$$\vec{s}_p = \vec{n}_\mu \times \vec{n}_\gamma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (\alpha-2)\vec{i} + (2+2\alpha)\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Kao i u prethodnom rješenju, mora postojati $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da

$$\vec{s}_p = \lambda \vec{s}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2 = 2\lambda \\ 2+2\alpha = 2\lambda \\ -3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow 2+2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = -4$$

Ponovno, uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo točnu jednakost $(-6=-6)$ pa vidimo da je $\alpha = -4$ rješenje.

4. Odredite zajedničku normalu pravaca

$$p \ldots \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{4}, \qquad q \ldots \frac{x-5}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-4}{4}.$$

Neka je r tražena normala. Tada za vektor smjera od r, $\vec{s}_r$, možemo uzeti vektorski produkt vektora smjera p i q (jer $r \perp p$ i $r \perp q$, tj. $\vec{s}_r \perp \vec{s}_p$ i $\vec{s}_r \perp \vec{s}_q$):

$$\vec{s}_r = \vec{s}_p \times \vec{s}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 12\vec{j} - \vec{k}.$$

Nadalje, pravac r siječe pravac p u točki $P(1-t, 2, 4+4t)$, a pravac q u točki $Q(5+2s, 7+s, 4+4s)$, za neke $t, s \in \mathbb{R}$ (ovo slijedi iz parametarskih jednadžbi od p i q). Zato vektor $\overrightarrow{PQ}$ mora biti kolinearan s vektorom smjera od r, tj. postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{s}_r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+2s+t = -4\lambda \\ 5+s = 12\lambda \\ 4(s-t) = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2s+t+4\lambda = -4 \\ s \quad\; -12\lambda = -5 \\ 4s-4t+\lambda = 0 \end{cases}$$

Riješimo dobiveni sustav Gaussovim eliminacijama:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -12 & -5 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ |\cdot(-2) \\ |\cdot(-4) \\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 28 & 6 \\ 1 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & -4 & 49 & 20 \end{array}\right] \begin{matrix} |\cdot 4 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 28 & 6 \\ 1 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & 0 & 161 & 44 \end{array}\right] |:161 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 28 & 6 \\ 1 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{44}{161} \end{array}\right] \begin{matrix} + \quad |\cdot(-28) \\ + \\ |\cdot 12 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{38}{23} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{277}{161} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{44}{161} \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow t = -\frac{38}{23} \\ \Rightarrow s = -\frac{277}{161} \\ \Rightarrow \lambda = \frac{44}{161} \end{array}$$

Dakle, traženi pravac r prolazi točkom $P\left(\frac{61}{23}, 2, -\frac{60}{23}\right)$ pa je njegova kanonska jednadžba

$$r \ldots \quad \frac{x - \frac{61}{23}}{-4} = \frac{y-2}{12} = \frac{z + \frac{60}{23}}{-1}.$$

5. Odredite ortogonalnu projekciju pravca

$$p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

na ravninu

$$\pi \ldots -2x + 3y + 4z + 1 = 0.$$

1. način

Najprije odredimo jednadžbu ravnine σ okomite na π koja sadrži pravac p.

Iz $\sigma \perp \pi$ i $p \subseteq \sigma$ slijedi da vektor normale od π, $\vec{n}_\pi$, te vektor smjera od p, $\vec{s}_p$, moraju ležati u π.

Budući da σ prolazi i točkom $(1,-2,-2)$, možemo odrediti njene parametarske jednadžbe

$$\sigma \ldots \begin{cases} x = 1 + 2t - 2s \\ y = -2 - t + 3s \\ z = -2 + t + 4s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Zbrajanjem druge i treće jednadžbe slijedi

$$y + z = -4 + 7s \implies s = \frac{1}{7}(y+z+4),$$

pa iz druge jednadžbe slijedi

$$t = 3s - y - 2 = \frac{3}{7}(y+z+4) - y - 2 = -\frac{4}{7}y + \frac{3}{7}z - \frac{2}{7}.$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$x = 1 - \frac{8}{7}y + \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} - \frac{2}{7}y - \frac{2}{7}z - \frac{8}{7}$$

$$\implies x + \frac{10}{7}y - \frac{4}{7}z = -\frac{5}{7}$$

$$\implies \sigma \ldots 7x + 10y - 4z = -5$$

Tražena ortogonalna projekcija je sada presjek ravnine π i σ:

$$\begin{cases} 7x + 10y - 4z = -5 \\ -2x + 3y + 4z = -1 \end{cases} \Big) + \implies 5x + 13y = -6 \implies x = -\frac{6}{5} - \frac{13}{5}y$$

$$\implies 4z = -1 + 2x - 3y = -1 - \frac{12}{5} - \frac{26}{5}y - 3y = -\frac{17}{5} - \frac{41}{5}y$$

$$\implies z = -\frac{17}{20} - \frac{41}{20}y$$

Dakle, tražena ortogonalna projekcija je pravac p' zadan kanonskom jednadžbom

$$p' \ldots \quad \frac{x+\frac{6}{5}}{-\frac{13}{5}} = \frac{y}{1} = \frac{z+\frac{17}{20}}{-\frac{41}{20}} .$$

2. način

Možemo odmah odrediti vektor normale od σ, $\vec{n}_\sigma$, kao vektorski produkt vektora $\vec{n}_\pi$ i $\vec{s}_p$ (jer $\vec{n}_\sigma \perp \vec{n}_\pi$ i $\vec{n}_\sigma \perp \vec{s}_p$)

$$\vec{n}_\sigma = \vec{s}_p \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k} .$$

Budući da σ prolazi točkom $(1,-2,-2)$, njena opća jednadžba glasi

$$-7(x-1) - 10(y+2) + 4(z+2) = 0$$

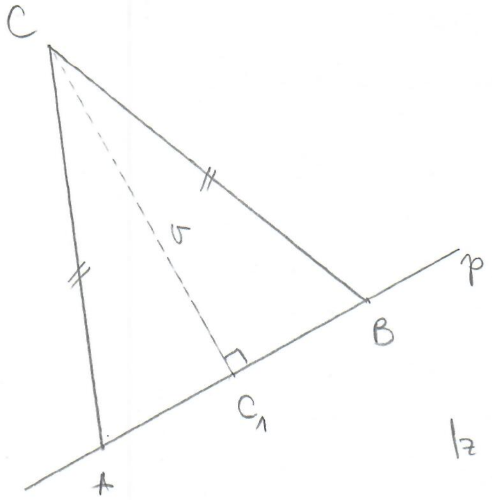
$$\sigma \ldots \quad -7x - 10y + 4z = 5 .$$

Dalje nastavljamo kao u prvom rješenju.

6. Točka $C(2,0,1)$ je vrh jednakokračnog trokuta ABC površine $4\sqrt{3}$ čija osnovica $\overline{AB}$ leži na pravcu

$$p \ldots \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}.$$

Odredite koordinate točaka A i B.



Neka je C_1 nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Tada je $C_1(-2+t, t, -3+2t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$ (iz parametarskih jednadžbi pravca p).

Iz $\overrightarrow{CC_1} \perp \vec{s}_p$ slijedi:

$$\overrightarrow{CC_1} \cdot \vec{s}_p = 0$$

$$\Rightarrow \left((-4+t)\vec{i} + t\vec{j} + (-4+2t)\vec{k}\right) \cdot \left(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -4 + t + t - 8 + 4t = 0$$

$$\Rightarrow 6t = 12$$

$$\Rightarrow t = 2 \Rightarrow C_1(0, 2, 1)$$

Zato je duljina visine iz vrha C:

$$v = |CC_1| = |-2\vec{i} + 2\vec{j}| = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{2P(ABC)}{v} = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |AC_1| = \frac{1}{2}|AB| = \sqrt{6}$$

Nadalje, također vrijedi $A = (-2+a, a, -3+2a)$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Iz posljednje jednakosti slijedi

$$\sqrt{(2-a)^2 + (2-a)^2 + (4-2a)^2} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-a)^2 (1+1+2^2)} = \sqrt{6}$$

$\Rightarrow |2-a|\sqrt{6} = \sqrt{6} \quad \Big| : \sqrt{6}$

$\Rightarrow |2-a| = 1$

$\Rightarrow a_1 = 1, \quad a_2 = 3$ (dobili smo dva rješenja koja predstavljaju upravo parametre točaka A i B)

Dakle, tražene točke su

$A(-1, 1, -1)$ i $B(1, 3, 3)$.