8. Linearni operatori

Sadržaj poglavlja

8.1. Svojstva linearnih operatora

8.1.1. Definicija linearnog operatora

Neka su X i Y vektorski prostori.

Definicija linearnog operatora

Preslikavanje $A : X \to Y$ naziva se **linearni operator**[1] ako za njega vrijedi
$$(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X)(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}) \quad A(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 A(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 A(\mathbf{x}_2). \quad (1)$$

Uvjet (1) naziva se uvjet **linearnosti**. On je ekvivalentan s uvjetima **aditivnosti** i **homogenosti**, tj. (1) vrijedi onda i samo onda ako je ispunjeno
$$(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X) \quad A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) \quad (2)$$
$$(\forall \mathbf{x} \in X)(\forall \alpha \in \mathbf{R}) \quad A(\alpha \mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x}) \quad (3)$$
Stavimo li u (3) $\alpha = 0$, vidimo da mora biti $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Primjer 1. Preslikavanje $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definirano formulom
$$A(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - 3y + z)$$
je linearan operator. Provjerite svojstvo linearnosti!

Primjer 2. Neka je $\mathscr{P}$ prostor svih polinoma. Operatori $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ i $J : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definirani formulama
$$D(p(x)) := p'(x), \qquad J(p(x)) := \int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t$$
su linearni operatori.

Operator pridružen matrici

Svaka matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ definira linearni operator $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ formulom
$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x}.$$
Za operator $T_{\mathbf{A}}$ kažemo da je **pridružen matrici** $\mathbf{A}$.

Ovako definiran operator zaista je linearan, zbog linearnosti matričnoga množenja:
$$\begin{aligned} T_{\mathbf{A}}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) &= \mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) \\ &= \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \\ &= \alpha_1 T_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 T_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Primjer 3. Ako je $T_{\mathbf{A}}$ operator pridružen matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, odredi $T_{\mathbf{A}}(x, y)$.

► Vrijedi
$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2x+y \end{bmatrix}$$
pa je $T_{\mathbf{A}}(x, y) = (y, 2x + y)$. ◄

8.1.2. Jezgra, slika, defekt i rang linearnog operatora

Linearni operator $A : X \to Y$ je preslikavanje (funkcija) među tim prostorima. Promatrat ćemo dva istaknuta skupa pridružena tom preslikavanju. Prvoga sačinjavaju sve njegove nultočke, a drugi je slika ovog preslikavanja.

Jezgra i slika linearnog operatora

Neka je $A : X \to Y$ linearni operator.

Jezgra[2] (ili **nul-potprostor**) operatora A je skup svih vektora prostora X koji se preslikavaju u nul vektor:
$$\operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in X : \ A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$
Slika operatora A je skup svih njegovih vrijednosti:
$$\operatorname{Im}(A) = \{\mathbf{y} \in Y : \mathbf{y} = A(\mathbf{x}) \text{ za neki } \mathbf{x} \in X\}.$$

Teorem 1. Jezgra $\operatorname{Ker}(A)$ je vektorski potprostor od X. Slika $\operatorname{Im}(A)$ je vektorski potprostor od Y.

Dokaz. Neka su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}(A)$. Onda je $A(\mathbf{x}_1) = A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, pa imamo za bilo koje α_1 i α_2:
$$A(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 A(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}.$$
Zaključujemo da je $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}(A)$, pa je $\operatorname{Ker}(A)$ potprostor.

Uzmimo sad $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Im}(A)$. Onda postoje $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ takvi da vrijedi
$$\mathbf{y}_1 = A(\mathbf{x}_1), \qquad \mathbf{y}_2 = A(\mathbf{x}_2).$$
Budući da je X vektorski prostor, onda je $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \in X$. Za taj element, zbog linearnosti preslikavanja A, vrijedi
$$A(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 A(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 A(\mathbf{x}_2) = \alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2.$$
Zaključujemo da je $\alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Im}(A)$, pa je $\operatorname{Im}(A)$ potprostor. ◄

Rang i defekt operatora

Rang operatora $r = r(A)$ definiramo kao dimenziju slike $\operatorname{Im}(A)$.
Defekt operatora $d = d(A)$ definiramo kao dimenziju jezgre $\operatorname{Ker}(A)$.

Odnos ranga i defekta operatora te dimenzije prostora X dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 2. Ako je n dimenzija prostora X, d defekt i r rang operatora $A : X \to Y$, tada vrijedi $n = r + d$.

Dokaz. Jezgra operatora je linearni potprostor od X, a slika operators je linearni potprostor od Y. Neka je $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ baza u jezgri $\operatorname{Ker} A$. Ako je $d = n$, tad je to i baza za X. To znači da se svaki vektor iz X preslikava u nul-vektor te je dimenzija slike operatora A jednaka nuli. Formula u tom slučaju vrijedi.

Neka je sad $d < n$. Bazu potprostora $\operatorname{Ker} A$ možemo nadopuniti do baze u čitavom prostoru X. Neka je dakle $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ baza u X. Želimo pokazati da slike vektora $\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ čine bazu u $\operatorname{Im} A$. Time ćemo dokazati da je $r = n - d$.

Pokažimo da vektori $A(\mathbf{e}_{d+1}), \dots, A(\mathbf{e}_n)$ razapinju $\operatorname{Im} A$. Uzmimo bilo koji $\mathbf{y} \in \operatorname{Im} A$. Tad je $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$ za neki $\mathbf{x} \in X$. Prikažimo vektor $\mathbf{x}$ preko vektora baze:
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_d \mathbf{e}_d + \alpha_{d+1} \mathbf{e}_{d+1} + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$
Sad vrijedi
$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &= \alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \ldots + \alpha_d A(\mathbf{e}_d) + \alpha_{d+1} A(\mathbf{e}_{d+1}) + \ldots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n) \\ &= \alpha_{d+1} A(\mathbf{e}_{d+1}) + \ldots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n) \end{aligned}$$
te je zaista
$$\operatorname{Im} A = L(A(\mathbf{e}_{d+1}), \dots, A(\mathbf{e}_n)).$$

Preostaje još pokazati da su ovi vektori linearno nezavisni. Pretpostavimo da vrijedi
$$\lambda_{d+1} A(\mathbf{e}_{d+1}) + \ldots + \lambda_n A(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}.$$
Operator A je linearan pa vrijedi
$$A(\lambda_{d+1} \mathbf{e}_{d+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}.$$
Po definiciji jezgre, argument operatora A mora ležati u jezgri. Njezinu bazu čine vektori $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$. Zato se taj vektor može prikazati u obliku
$$\lambda_{d+1} \mathbf{e}_{d+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \mu_d \mathbf{e}_d.$$
Odavde slijedi
$$\mu_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \mu_d \mathbf{e}_d - \lambda_{d+1} \mathbf{e}_{d+1} - \ldots - \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$
No, ovi vektori $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ čine bazu u X pa su linearno nezavisni. Zato svi koeficijenti u ovoj linearnoj kombinaciji moraju biti jednaki nuli. Specijalno, koeficijenti $\lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n$ jednaki su nuli, što pokazuje nezavisnost vektora u slici $\operatorname{Im} A$.

Time je teorem dokazan. ◄

8.1.3. Postojanje rješenja linearnog sustava

Promatramo linearni sustav
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (4)$$
Neka je A operator pridružen matrici $\mathbf{A}$. Da bi jednadžba (4) imala rješenje, nužno je i dovoljno da vektor $\mathbf{b}$ leži u slici operatora A. (Tad će postojati $\mathbf{x} \in X$ za koga je $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.) Neka je $\mathbf{x}_p$ partikularno rješenje jednadžbe te $\mathbf{x}_h$ neki vektor iz jezgre. Očito je i $\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$ rješenje, jer je $A(\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p) = A(\mathbf{x}_h) + A(\mathbf{x}_p) = \mathbf{b}$. Neka je $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_d$ baza u jezgri $\operatorname{Ker} A$. Opći oblik rješenja jednadžbe (4) ima oblik
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_d \mathbf{e}_d.$$

Teorem 3. Sljedeća svojstva linearnog operatora su ekvivalentna
(1) $\operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$ to jest $d = 0$.
(2) Operator A je **injekcija**, to jest za svaki $\mathbf{b} \in \operatorname{Im}(A)$ jednadžba $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ima točno jedno rješenje.

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Zaista, ako je jezgra trivijalna, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, tad iz $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{y})$ slijedi (zbog linearnosti) $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ i zato (zbog trivijalnosti jezgre) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ te je A injektivan.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo suprotno, da jezgra nije trivijalna. Onda postoji $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Međutim, tad se i $\mathbf{x}$ i $\mathbf{0}$ preslikavaju u isti vektor $\mathbf{0}$ u prostoru Y te A ne bi bio injektivan, što je kontradikcija s polaznom pretpostavkom. ◄

Surjektivni operator

Operator A je **surjektivan** ako je $Y = \operatorname{Im} A$.
Nužan i dovoljan uvjet za to je da se dimenzije ovih prostora podudaraju.

Pokazali smo u Teoremu 1 da je slika $\operatorname{Im}(A)$ potprostor od Y. Ako su dimenzije ovih prostora jednake, onda se ti prostori podudaraju.

Regularni operatori

Operator koji je injektivan i surjektivan nazivamo **regularnim** operatorom. Operator $A : X \to Y$ je regularan onda i samo onda ako vrijedi
$$d = 0, \qquad \dim X = \dim Y = n.$$

Naime $d = 0$ znači da je A injektivan. Onda je $r = n$ pa ako je $\dim Y = n$, to znači da je $Y = \operatorname{Im}(A)$ i A je surjektivan.

Regularan operator je bijekcija, pa stoga postoji inverzno ptreslikavanje. Označavamo ga s A^{-1}. To je preslikavanje sa Y u X definirano na način
$$\mathbf{y} = A(\mathbf{x}) \iff \mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{y}).$$

Teorem 4. Inverzno preslikavanje A^{-1} regularnog linearnog operatora A je linearni operator.

Dokaz. Uzmimo bilo koja dva vektora $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in Y$. Tad postoje (jednoznačno određeni!) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ za koje je $A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$, $A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$. Sad imamo $\mathbf{x}_1 = A^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 = A^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Zbog linearnosti operatora A je
$$A(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 A(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 A(\mathbf{x}_2) = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2$$
a odavde, djelovanjem inverznog preslikavanja:
$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 = A^{-1}(\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2).$$
Dobili smo
$$\lambda_1 A^{-1}(\mathbf{y}_1) + \lambda_2 A^{-1}(\mathbf{y}_2) = A^{-1}(\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2).$$
Time je dokazana linearnost. ◄

8.2. Matrica pridružena operatoru

U ovom se poglavlju opisuje veza između matrica i linearnih operatora. Zadavanje operatora pomoću neke matrice najvažniji je primjer linearnoga operatora.

Pokazat ćemo da vrijedi i obratna tvrdnja: svakom linearnom operatoru odgovara jedna matrica. Čitatelj bi mogao pomisliti da je stoga pojam linearnoga operatora nepotreban, ukoliko se on može potpuno opisati matricama. Međutim, situacija je nešto složenija. Preciznija veza između operatora i matrice mogla bi se ovako opisati: ako su zadane baze vektorskih prostora, tad svakome operatoru *u tom paru baza* odgovara jedna matrica. Međutim, promijenimo li baze, istome operatoru odgovarati će neka druga matrica.

Linearni operator može se zadati na način koji je neovisan o bazi prostora (vidi geometrijske primjere u nastavku). Stoga tek izbor baze određuje koja će mu matrica odgovarati.

Najinteresantnija analiza matričnoga računa upravo se sastoji u tome da se dadu odgovori na sljedeća dva pitanja:

(1) kako odabrati bazu prostora pa da prikaz linearnoga operatora bude po mogućnosti što jednostavnija matrica (što bliža dijagonalnoj);

(2) da li (i kada) dvije različite matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ pripadaju istome linearnom operatoru (u različitim bazama)?

8.2.1. Matrica operatora u paru baza

Neka je $\mathbf{e}_1 \ldots, \mathbf{e}_n$ baza u prostoru X, a $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ baza u prostoru Y. Neka je $A : X \to Y$ linearni operator. Vektor $\mathbf{a}_1 = A(\mathbf{e}_1)$ pripada prostoru Y i može se razviti po bazi $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$. Dakle, postoje skalari a_{11}, a_{21},$\ldots$ a_{m1} takvi da vrijedi
$$A(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{f}_m.$$
Slično vrijedi i za ostale vektore:
$$\begin{aligned} A(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{f}_m, \\ &\;\vdots \\ A(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{f}_m. \end{aligned}$$
Pomoću ovih koeficijenata definiramo matricu $\mathbf{A}$:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$
Vidimo da j-ti stupac matrice $\mathbf{A}$ čine komponente vektora $A(\mathbf{e}_j)$ po bazi $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$.

Matrica pridružena operatoru

Neka su X i Y vektorski prostori, $A : X \to Y$ linearni operator, $(e) = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ baza u X i $(f) = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ baza u Y. Operatoru A odgovara u tom paru baza matrica $\mathbf{A}$ čiji su stupci komponente vektora $A(\mathbf{e}_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ u bazi $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$.

Neka je $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ prikaz tog vektora u bazi (e). Onda je vektoru $\mathbf{x}$ pridružen jednoznačno vektor stupac
$$x \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$
Pomnožimo matricu $\mathbf{A}$ tim vektorom:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$
Rezultatu ovog množenja pridružimo vektor prostora Y preko baze (f):
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \to y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + \ldots + y_m\mathbf{f}_m =: \mathbf{y}.$$
Tvrdimo da je $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$:
$$A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big)\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^m y_i\mathbf{f}_i = \mathbf{y}.$$
Dakle, djelovanje operatora na vektoru $\mathbf{x} \in X$ može se opisati matričnim množenjem.

Primjer 4. Jedinični operator $I : X \to X$, definiran je formulom $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ za svaki $\mathbf{x} \in X$. Za svaki vektor baze vrijedi $I(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j$, pa ovome operatoru odgovara (u bilo kojoj bazi) jedinična matrica $\mathbf{I}$.

Ako je n dimenzija prostora X, onda je rang $r(I) = n$ a defekt $d(I) = 0$.

Primjer 5. Nul operator $O : X \to Y$, definiran je formulom $O(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, za svaki $\mathbf{x} \in X$. Njemu odgovara nul-matrica tipa (m, n).

Rang nul operatora je 0, a defekt n.

Primjer 6. Neka je $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \neq 0$ zadani vektor u trodimenzionalnom prostoru. Definirajmo operator $A : V^3 \to V^3$ na način:
$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$
Pokažimo da je on linearan i odredimo odgovarajuću matricu. Koliki je rang i defekt ovog operatora? Što je njegova slika a što jezgra?

► Operator je linearan jer vektorsko množenje ima svojstva distributivnosti i homogenosti:
$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x}). \end{aligned}$$
Odredimo njegovu matricu u kanonskoj bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. U tu svrhu, moramo odrediti vektore $A(\mathbf{i})$, $A(\mathbf{j})$, $A(\mathbf{k})$:
$$A(\mathbf{i}) = \mathbf{a} \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + a_z\mathbf{j} - a_y\mathbf{k}.$$
Slično, dobivamo
$$\begin{aligned} A(\mathbf{j}) &= -a_z\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + a_x\mathbf{k}, \\ A(\mathbf{k}) &= a_y\mathbf{i} - a_x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}. \end{aligned}$$
Tako dobivamo sljedeću matricu operatora:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}.$$
Primijetimo da je to antisimetrična matrica.

Ako je $a_z \neq 0$, onda su prva dva retka matrice linearno nezavisna. Ako je $a_z = 0$, linearno nezavisni su prvi i treći (za $a_y \neq 0$), ili drugi i treći redak (za $a_x \neq 0$). Zato je rang matrice barem dva. On nije jednak tri, jer je njezina determinanta jednaka nuli.

Rang operatora jednak je rangu njemu pridružene matrice (u bilo kojem paru baza). Dakle, $r(A) = 2$.

Svi vektori iz slike $\operatorname{Im}(A)$ čine potprostor okomit na vektor $\mathbf{a}$, pa je i stoga njegov rang jednak 2. To nam daje $d(A) = 1$. Jezgra se sastoji od vektora kolinearnih s vektorom $\mathbf{a}$. ◄

Primjer 7. Translacija (pomak) za vektor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Translacija je preslikavanje koje vektoru $\mathbf{a}$ pridružuje vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, za neki fiksni vektor $\mathbf{b}$. Ovo preslikavanje, iako jednostavno, ne definira linearni operator, budući da vrijedi $A(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$, a za svaki linearni operator mora biti $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

8.2.2. Kompozicija operatora

Linearni operatori su preslikavanja među vektorskim prostorima. Zato je moguće definirati njihovu kompoziciju u sljedećoj situaciji: Ako je $A : X \to Y$ i $B : Y \to Z$, tad je definirana kompozicija $B \circ A$ (samo u tom poretku!) koju ćemo zbog kratkoće označavati kratko s BA.

Teorem 5. Kompozicija linearnih operatora linearni je operator.

Dokaz. Dovoljno je napisati sljedeće
$$\begin{aligned} (BA)(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= B(A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})) \\ &= B(\alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y})) \\ &= \alpha B(A(\mathbf{x})) + \beta B(A(\mathbf{y})) \\ &= \alpha(BA)(\mathbf{x}) + \beta(BA)(\mathbf{y}). \end{aligned}$$ ◄

Teorem 6. Kompoziciji linearnih operatora odgovara matrica koja je jednaka umnošku matrica pojedinih linearnih operatora.

Dokaz. Neka je $\dim X = n$, $\dim Y = m$, $\dim Z = p$. Neka su $(e) = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ baza za X, $(f) = \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m$ baza za Y i $(g) = \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_p$ baza za Z. Označimo kompoziciju s $C = BA$ i njegovu matricu u paru baza (e), (g) s $\mathbf{C} = (c_{ij})$. Vrijedi $C : X \to Z$, pa je pripadna matrica tipa $p \times n$. Dakle, vrijedi
$$C(\mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^p c_{ik}\mathbf{g}_i, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$
Neka operatoru A u navedenim bazama odgovara matrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tipa $m \times n$, a operatoru B matrica $\mathbf{B} = (b_{ij})$ tipa $p \times m$. Sad ćemo odrediti matricu operatora $C = BA$ na drugi način.
$$\begin{aligned} (BA)C = B(A(\mathbf{e}_k)) &= B\Big(\sum_{j=1}^m a_{jk}\mathbf{f}_j\Big) = \sum_{j=1}^m a_{jk}B(\mathbf{f}_j) \\ &= \sum_{j=1}^m a_{jk}\Big(\sum_{i=1}^p b_{ij}\mathbf{g}_i\Big) = \sum_{i=1}^p \Big(\sum_{j=1}^m b_{ij}a_{jk}\Big)\mathbf{g}_i \end{aligned}$$
Usporedbom dobivenih dvaju izraza vidimo da vrijedi
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m b_{ij}a_{jk}, \quad (5)$$
to jest, $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$, što dokazuje tvrdnju. ◄

Teorem 7. Inverznom operatoru odgovara inverzna matrica.
Operator je regularan ako i samo ako je pripadna matrica regularna.

Dokaz. Neka je $\tilde{\mathbf{A}}$ matrica operatora A^{-1}. Kompozicija $A^{-1} \circ A$ je identično preslikavanje I, pa mora vrijediti $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Slično, vrijedi i $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ jer je i kompozicija $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1}$ identično preslikavanje (na prostoru Y). Stoga je $\tilde{\mathbf{A}}$ upravo *inverzna matrica* matrice $\mathbf{A}$.

Primjer 8. **1)** Odredimo matricu za operator deriviranja $A = \dfrac{d}{dt} : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ u bazi $\mathbf{e}_0(t) = 1$, $\mathbf{e}_1(t) = t, \ldots$, $\mathbf{e}_n(t) = t^n$. Koliki je rang a koliki defekt ovog operatora?

2) Izračunaj $\mathbf{A}^2$.

3) Kojem operatoru odgovara ta matrica?

4) Napiši matricu $\mathbf{A}$ za slučaj $n = 4$ i provjeri da vrijedi $\mathbf{A}^5 = \mathbf{0}$.

5) Na isti se način uvjeri da vrijedi $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{0}$. Što to govori o operatoru A?

► Vrijednosti operatora na vektorima baze je:
$$\begin{aligned} A(\mathbf{e}_0)(t) &= 0 = \mathbf{0}(t), \\ A(\mathbf{e}_1)(t) &= 1 = \mathbf{e}_0(t), \\ A(\mathbf{e}_2)(t) &= 2t = 2\mathbf{e}_1(t), \\ &\;\vdots \\ A(\mathbf{e}_n)(t) &= nt^{n-1} = n\mathbf{e}_{n-1}. \end{aligned}$$
Njegova matrica u tom paru baza glasi
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$
Rang operatora jednak je rangu njegove matrice u bilo kojoj bazi, pa on iznosi n. Prostor $\mathscr{P}_n$ je dimenzije $n + 1$ pa je defekt jednak 1.

Odgovor na preostala pitanja ostavljamo čitatelju za vježbu. ◄

8.2.3. Zadavanje operatora

Djelovanje operatora u potpunosti je određeno vrijednostima tog operatora na vektorima baze: Znamo li $A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)$ tad je jednoznačno određen i vektor $A(\mathbf{x}) = x_1A(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_nA(\mathbf{e}_n)$. Zato, ako za dva operatora A i B vrijedi $A(\mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, n$, tad je $A(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})$ za svaki $\mathbf{x} \in X$, tj. vrijedi $A = B$.

Teorem 8. Neka je $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ baza u X i $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ bilo koji vektori u Y. Postoji točno jedan operator $A : X \to Y$ za kojega vrijedi $A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{b}_1, \ldots, A(\mathbf{e}_n) = \mathbf{b}_n$.

Dokaz. Jedinstvenost slijedi iz gornjega, jer je s vrijednostima na bazi operator određen jednoznačno. Egzistenciju ćemo pokazati tako da ukažemo koju će vrijednost operator imati na po volji odabranom vektoru prostora. Uzmimo bilo koji vektor $\mathbf{x} \in X$. Prikažimo ga po vektorima baze:
$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$
Definirajmo operator A na način
$$A(\mathbf{x}) := x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n.$$
Ovaj je operator linearan (uvjerite se u to!). Definiran je na čitavom X i za njega vrijedi $A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{b}_1, \ldots, A(\mathbf{e}_n) = \mathbf{b}_n$.

Time je tvrdnja dokazana. ◄

8.3. Određivanje slike i jezgre operatora

Korištenjem matričnih prikaza operatora $A : X \to Y$, možemo iskoristiti znanje o rješavanju linearnih sustava da bismo odredili dva važna potprostora: sliku i jezgru linearnog operatora.

Određivanje jezgre operatora odgovara problemu rješavanja homogenih linearnih sustava. Zaista, ako je $\mathbf{A}$ matrica pridružena operatoru, tad je jednadžba $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ekvivalentna s $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pokazali smo da je skup svih rješenja ove jednadžbe potprostor razapet s $n - r$ vektora, pri čemu je n dimenzija prostora X (= broj nepoznanica), a r rang matrice $\mathbf{A}$. Taj potprostor jednak je jezgri operatora A. Zato broj $n - r$ odgovara defektu operatora, tj. dimenziji d jezgre operatora A.

Rang r operatora odgovara rangu pridružene matrice $\mathbf{A}$, to je broj linearno nezavisnih redaka, odnosno linearno nezavisnih stupaca te matrice.

Osnovni Teorem 1 o rangu i defektu operatora možemo dokazati pozivajući se na rješenja linearnih sustava.

Pokažimo kako se određuje slika operatora A. Jednostavnosti zapisivanja radi, gledat ćemo operator pridružen matrici, međutim sve tvrdnje u nastavku vrijede i za bilo koji drugi linearni operator.

Neka su
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$
stupci matrice $\mathbf{A}$. Onda se vektor $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ može napisati u obliku
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$$
Dakle, vrijedi
$$\operatorname{Im}(A) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n).$$
Znamo da je broj linearno nezavisnih stupaca matrice $\mathbf{A}$ jednak njezinom rangu. Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 9. Dimenzija prostora $\operatorname{Im}(A)$ jednaka je rangu r matrice $\mathbf{A}$.

Jednadžba $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima rješenje onda i samo onda ako vektor $\mathbf{b}$ leži u prostoru $\operatorname{Im}(A)$. Pokazali smo da to rješenje ima oblik
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$
pri čemu je $\mathbf{x}_p$ neko partikularno rješenje, a $\mathbf{x}_h$ je opće rješenje homogenog sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Samo zbog jednostavnosti zapisivanja, pretpostavimo da su varijable $x_1, \dots, x_r$ vezane, a $x_{r+1}, \dots, x_n$ slobodne. Pokazali smo u §4 da se opće rješenje homogene jednadžbe može napisati u obliku
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{n-r} \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_{n-r}\mathbf{w}_{n-r}.$$
Vidimo da su vektori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}$ linearno nezavisni pa oni čine bazu u prostoru $\operatorname{Ker}(A)$.

Teorem 10. Dimenzija prostora $\operatorname{Ker}(A)$ je $d = n - r$.

Primjer 9. Riješi linearni sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i odredi baze u prostorima $\operatorname{Im}(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ za operator A pridružen matrici $\mathbf{A}$, ako je
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

► Elementarne transformacije nad proširenom matricom su:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Iz reduciranog oblika dobivamo sljedeće informacije. Rang matrice je $r = 2$. Prvi i drugi stupac su linearno nezavisni, pa su onda ostali stupci linearno zavisni o njima. Označimo stupce matrice $\mathbf{A}$:
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
Uvjeri se da se vektori $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ mogu prikazati u obliku linearne kombinacije vektora $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Znamo da za sliku $\operatorname{Im}(A)$ vrijedi
$$\operatorname{Im}(A) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$$
odnosno
$$\operatorname{Im}(A) = \{x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4, \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\}$$
pri čemu su x_1, x_2, x_3, x_4 bilo koji realni brojevi. Međutim, zbog zavisnosti vektora $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ o vektorima $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ vrijedi
$$\operatorname{Im}(A) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\}.$$
Uvjeri se (određivanjem koeficijenata α_1 i α_2) da vektor $\mathbf{b}$ pripada ovom skupu.

Skup $\operatorname{Im}(A)$ sadrži *sve vektore* $\mathbf{b}$ za koje sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima rješenje.

Odredimo sad nulprostor operatora A. Njega čitamo iz reducirane forme, odnosno oblika homogenog rješenja. Opće je rješenje
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_p + \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2.$$
Tu smo označili
$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Znamo da je $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2$ opće rješenje homogenog sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pa su $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ baza za $\operatorname{Ker}(A)$. Dobili smo
$$\operatorname{Ker}(A) = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \left\{\alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\right\}.$$
Uvjeri se direktnim računom da je ispunjeno $\mathbf{A}\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ i $\mathbf{A}\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$.

8.4. Promjena baze. Slične matrice

Promotrimo linearni operator A koji djeluje na prostoru X, dakle $A : X \to X$. Istaknimo u tom prostoru bazu $(e) = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Neka je $\mathbf{A}$ matrica koja odgovara ovome operatoru u toj bazi (stupci te matrice su komponente vektora $A(\mathbf{e}_j)$ u toj istoj bazi).

Izaberimo sad u prostoru drugu bazu (e'), koju čine vektori $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$. Neka je $\mathbf{A}'$ matrica koja odgovara operatoru u ovoj bazi. Prirodno se nameće sljedeće pitanje:

• Koja je veza između dviju matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ koje su prikaz istoga operatora u različitim bazama?

Primjer 10.

Linearan operator $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ u bazi $\{\mathbf{a}_1 = (1,2), \mathbf{a}_2 = (1,1)\}$ ima matrični zapis $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odredimo matricu $\mathbf{A}'$ tog operatora u bazi $\{\mathbf{b}_1 = (2,3), \mathbf{b}_2 = (0,1)\}$.

► Prikažimo prvo vektore nove baye $\mathbf{b}_1$ i $\mathbf{b}_2$ pomoću vektora prve baze $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$. Imamo $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Odavde je $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$ i $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$. Sad tražimo djelovanje operatora na vektorima iz druge baze:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}_1) &= f(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_1) + f(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) \\ &= \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + \frac{3}{2}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \\ f(\mathbf{b}_2) &= f(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_1) - f(\mathbf{a}_2) \\ &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

Matrica operatora u drugoj bazi je $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. ◄

Opišimo sad ovaj postupak u općenitom slučaju n-dimenzionalnih prostora.

Potrebno je najprije utvrditi *vezu između dviju baza*. U tu svrhu ćemo vektore nove baze izraziti pomoću vektora stare baze:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 &= t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n2}\mathbf{e}_n, \\ &\;\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{1n}\mathbf{e}_1 + t_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Veza između ovih dviju baza opisana je matricom

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

čiji su stupci komponente vektora nove baze prikazanih pomoću vektora stare.

Djelovanje operatora A na vektoru $\mathbf{x}$ može se opisati množenjem s matricom $\mathbf{A}$ korištenjem opisane veze operatora i pridruženih matrica. Neka je

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{6}$$

Slično, u drugom paru baza, isto se djelovanje opisuje formulom

$$\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{y}'. \tag{7}$$

Prisjetimo se da je veza između starih koordinata vektora $\mathbf{x}$ i koordinata u novoj bazi dana relacijom:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$$

i istovjetno za vektor $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{y}'.$$

Uvrštavanjem ovih relacija u jednadžbu (6) dobivamo

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}'$$

odakle slijedi, koristeći (7):

$$\mathbf{y}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}' = \mathbf{A}'\mathbf{x}'. \tag{8}$$

Budući da formula vrijedi za svaki $\mathbf{x}'$, ova relacija daje odgovor na traženo pitanje: operatoru A u novoj bazi odgovara matrica

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Time smo dokazali

Teorem 11.

Neka je $\mathbf{A}$ prikaz operatora $A : X \to X$ u bazi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ prostora X, $\mathbf{T}$ matrica prijelaza iz stare baze u novu bazu $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$. U novoj bazi operatoru A odgovara matrica

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}. \tag{9}$$

Riješimo sad prethodni primjer pomoću ovih formula. S obzirom da vrijedi $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, matrica prijelaza iz stare baze $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ u novu $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ je $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, dok je matrica prijelaza iz nove baze u staru $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Vrijedi:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

◆

Matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$, koje odgovaraju istome operatoru, imaju neka zajednička svojstva.

Slične matrice

Za dvije matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kažemo da su **slične**, ako postoji regularna matrica $\mathbf{T}$ takva da vrijedi

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}. \tag{10}$$

Pišemo $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Dakle, matrice koje odgovaraju operatoru A u različitim bazama su slične.

Teorem 12.

Slične matrice imaju istu determinantu i isti rang.

Dokaz. Po Binet-Cauchyjevom teoremu vrijedi

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{T}^{-1})\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{A})$$

budući da je $\det(\mathbf{T}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{T})$.

Matrica $\mathbf{T}$ je regularna a množenjem s regularnom matricom rang matrice $\mathbf{A}$ se ne mijenja. Zato se rangovi matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ podudaraju. ◄

Vidjet ćemo u §9 da slične matrice imaju još neka identična svojstva.

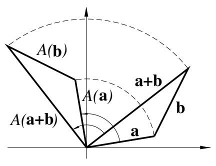
8.5. Primjeri operatora u ravnini i prostoru

8.5.1. Rotacija u ravnini

Primjer 11.

Operator rotacije. Neka je A operator koji radij vektoru $\mathbf{r}$ pridružuje radij vektor zarotiran za kut φ. Pokažimo da je on linearan i odredimo odgovarajuću matricu.

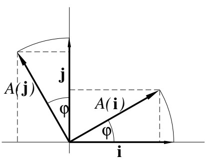
► Zbog geometrijskih razloga, vrijedi $A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = A(\mathbf{a}) + A(\mathbf{b})$ (slika 8.1). Očito vrijedi $A(\alpha\mathbf{a}) = \alpha A(\mathbf{a})$. Stoga je $\mathbf{A}$ linearan.



Sl. 8.1. Provjera svojstva aditivnosti

Odredimo njegovo djelovanje na jediničnim vektorima:

$$A(\mathbf{i}) = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$$
$$A(\mathbf{j}) = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$$



Sl. 8.2. Djelovanje operatora rotacije za kut α

Stoga ovome operatoru odgovara matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

koju nazivamo matricom rotacije. ◄

Primjer 12.

Neka je A_φ operator rotacije za kut φ, A_ψ rotacija za kut ψ. Tad je očevidno

$$A_\varphi \circ A_\psi = A_{\varphi+\psi},$$

jer se kompozicijom ovih operatora (u bilo kojem poretku!) dobiva rotacija za kut $\varphi+\psi$.

Za pripadne matrice će vrijediti, po Teoremu 6

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{bmatrix}.$$

Množenjem matrica slijeva i uspoređivanjem možemo izvesti adicijske teoreme za trigonometrijske funkcije:

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,$$
$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi.$$

Operator rotacije je regularan. Njegov inverzni operator jest također rotacija, za kut $-\varphi$. Zato je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\top.$$

Determinanta matrice rotacije jednaka je 1.

Rotacija za kut π predstavlja **zrcalnu simetriju** s obzirom na ishodište. Pripadna matrica je

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

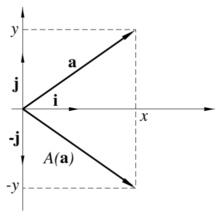
8.5.2. Simetrija s obzirom na pravac

Primjer 13.

Operator simetrije. Neka je A operator koji vektoru $\mathbf{a}$ pridružuje vektor simetričan ovome s obzirom na os apscisa. Pokažimo da je on linearan i odredimo odgovarajuću matricu.

► Ako je $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, tad je $A(\mathbf{a}) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Operator je linearan:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2) &= A((x_1+x_2)\mathbf{i} + (y_1+y_2)\mathbf{j}) \\ &= (x_1+x_2)\mathbf{i} - (y_1+y_2)\mathbf{j} = A(\mathbf{a}_1) + A(\mathbf{a}_2), \\ A(\alpha\mathbf{a}) &= A(\alpha x\mathbf{i} + \alpha y\mathbf{j}) = \alpha x\mathbf{i} - \alpha y\mathbf{j} = \alpha A(\mathbf{a}). \end{aligned}$$



Sl. 8.3. Operator simetrije s obzirom na os apscisa

Da bismo odredili njegovu matricu u paru kanonskih baza, moramo odrediti djelovanje na jediničnim vektorima:

$$A(\mathbf{i}) = \mathbf{i}, \qquad A(\mathbf{j}) = -\mathbf{j}.$$

Ovi vektori određuju stupce matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$ ◄

◆

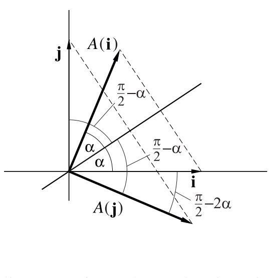
Uzmimo sad p pravac koji prolazi ishodištem, a s realnom osi zatvara kut α. Opišimo matricu koja odgovara operatoru simetrije s obzirom na pravac p.

Djelovanje operatora na vektorima kanonske baze glasi

$$A(\mathbf{i}) = \cos 2\alpha\,\mathbf{i} + \sin 2\alpha\,\mathbf{j},$$
$$A(\mathbf{j}) = \cos(2\alpha - \frac{\pi}{2})\,\mathbf{i} + \sin(2\alpha - \frac{\pi}{2})\,\mathbf{j} = \sin(2\alpha\rangle\,,\mathbf{i} - \cos(2\alpha)\,\mathbf{j}.$$

Zato je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$



Sl. 8.4. Operator simetrije s obzirom na pravac p

Izvedimo ovu formulu na drugi način. Krenimo od baze koja je prirodnija za promatrani operator. Jedan njezin vektor čini (jedinični) vektor smjera pravca p, a drugi vektor, vektor okomit na njega. Označimo te vektore s $\mathbf{e}$ i $\mathbf{f}$. Neka je $\mathbf{A}'$ matrica operatora u toj bazi. Budući da vrijedi

$$A(\mathbf{e}) = \mathbf{e},$$
$$A(\mathbf{f}) = -\mathbf{f},$$

dobivamo

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Novi sustav dobiven je iz starog rotacijom za kut α. Zato je veza između stare i nove baze opisana jednadžbama

$$\mathbf{e} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{f} = -\sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}.$$

Matrica prijelaza iz kanonske baze u novu i njezina inverzna glase:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Formulu (9) sad koristimo u obrnutom smjeru:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \implies \mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}'\mathbf{T}^{-1}.$$

Stoga operatoru u kanonskoj bazi odgovara matrica

$$\mathbf{T}\mathbf{A}'\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

◆

Primijetimo da je u ovome primjeru matrica $\mathbf{T}^{-1}$ jednaka transponiranoj matrici $\mathbf{T}^{\top}$. Vidjet ćemo u nastavku da to nije slučajno, već će ta jednakost vrijediti *kad god su vektori obiju baza okomiti i jedinične duljine*. Determinanta takve matrice jednaka je $+1$ ili -1.

Nadalje, primijetimo da djelovanje operatora A u ovome primjeru možemo shvatiti kao kompoziciju triju preslikavanja: prvoga koji će kanonsku bazu prevesti u novu: to je rotacija za kut α, drugoga koji će zrcaliti s obzirom na os apscisa u novoj bazi, i trećega koji će vratiti novu bazu u staru (rotacija za kut $-\alpha$).

8.5.3. Homotetija

Promotrimo djelovanje operatora koji svaki vektor u smjeru Ox-osi rasteže (steže) za faktor λ, dok vektore u smjeru osi Oy ostavlja nepromijenjenim. Njegovo djelovanje na bilo kojem vektoru $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ definirano je formulom

$$A(\mathbf{a}) = A(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \lambda x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

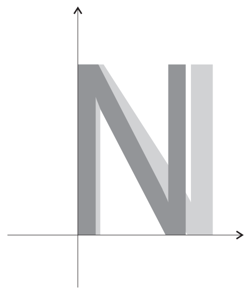
Odavde izvodimo posebice djelovanje na vektorima baze

$$A(\mathbf{i}) = \lambda\mathbf{i}, \qquad A(\mathbf{j}) = \mathbf{j},$$

te je matrica operatora u kanonskoj bazi

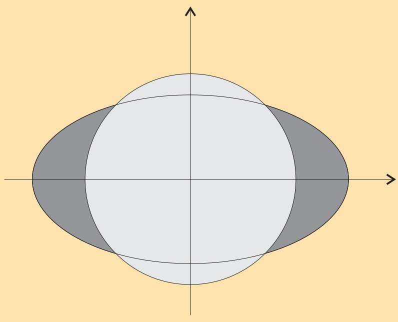
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Korisno je pogledati što takav operator radi na nekom podskupu ravnine. Izbor konstante $\lambda = 0.8$ pretvara font *Helvetica* u *Helvetica Narrow*:



Sl. 8.5. Operator homotetije duž Ox-osi

Primjer 14. Operator definiran matricom $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ imat će slično djelovanje duž obiju osi. Na slici vidimo djelovanje operatora za izbor $\lambda = 1.25$, $\mu = 0.8$.



Sl. 8.6. Operator homotetije preslikava kružnicu u elipsu

◆

Izdvojimo dva međusobno okomita jedinična vektora $\mathbf{e}$ i $\mathbf{f}$. Operator koji duž smjerova određenih tim vektorima djeluje na način

$$A(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}, \qquad A(\mathbf{f}) = \mu\mathbf{f}$$

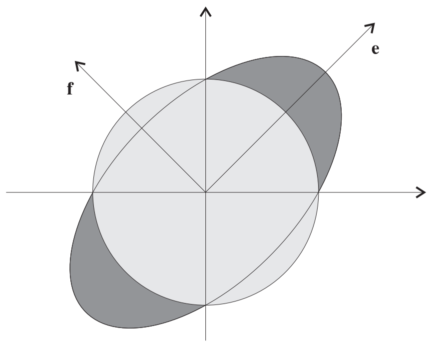
bit će očito operator homotetije *u naznačenim smjerovima*. Njegova matrica u bazi $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ glasi

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Ako je α kut rotacije između stare i nove baze, tad se matrica operatora u originalnoj bazi dobiva formulom (8.8):

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}'\mathbf{T}^{\top} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Djelovanje operatora vidimo na slici 8.7.

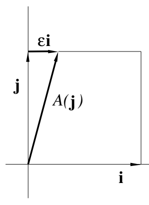


Sl. 8.7. Operator homotetije duž dviju istaknutih osi.

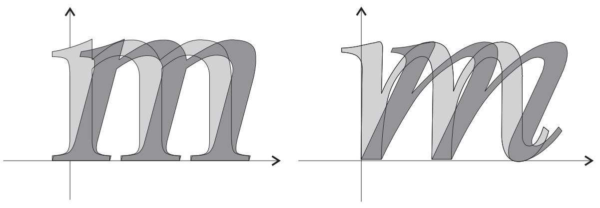
8.5.4. Zakošenje

Operator zakošenja $A : V^2 \to V^2$ definiramo matricom $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On preslikava jedinične vektore na način

$$A(\mathbf{i}) = \mathbf{i}, \qquad A(\mathbf{j}) = \varepsilon\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$



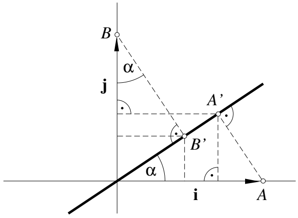
Sl. 8.8. Operator zakošenja. Vektor $\mathbf{j}$ preslikava se u zakošeni vektor. Iznos zakošenja ovisi o parametru ε. Za pozitivne vrijednosti, zakošenje će biti udesno, za negativne ulijevo.



Sl. 8.9. U računarskoj grafici uobičajeni su izbori parametara $\varepsilon = 0.16666$ kod slanted fontova, te $\varepsilon = 0.25$ kod italic fontova.

8.5.5. Projekcija na pravac i ravninu

Neka je p pravac koji prolazi ishodištem, a s realnom osi zatvara kut α. Točki M u ravnini pridružena je njezina projekcija na pravac p. Time je definirano preslikavanje A među pripadnim radij-vektorima koje definira linearni operator (v. sl. 8.10).



Sl. 8.10. Projekcija na pravac. Pripadna matrica nije regularna, jer dvodimenzionalni prostor preslikava u jednodimenzionalan.

Linearnost slijedi iz svojstava vektorske projekcije.

Odredimo matricu toga operatora u kanonskoj bazi $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$. Vektor $A(\mathbf{i})$ predočen je usmjerenom dužinom $\overrightarrow{OA'}$ i ima komponente

$$A(\mathbf{i}) = \cos^2\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\sin\alpha\,\mathbf{j}.$$

Slično, vrijedi

$$A(\mathbf{j}) = \cos\alpha\sin\alpha\,\mathbf{i} + \sin^2\alpha\,\mathbf{j}.$$

Stoga operatoru odgovara u kanonskoj bazi matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}.$$

Primijeti da je determinanta ove matrice jednaka nuli, pa matrica nije regularna.

Izaberimo sad bazu koja je prikladnija za opis ovoga operatora. Nju čine dva jedinična vektora: vektor smjera i vektor normale pravca p. Označimo te vektore s $\mathbf{c}$ i $\mathbf{n}$. Matricu operatora u toj bazi možemo lako napisati, no radije ćemo je izvesti koristeći formulu (9).

Vektor smjera i normale imaju prikaze u staroj bazi:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{n} &= -\sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Time je određena matrica prijelaza iz jedne baze u drugu i njezina inverzna:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Zato je matrica operatora u novoj bazi

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oblik ove matrice sugerira da je nova baza pogodnija za opis operatora.

8.5.6. Rotacija u prostoru

Primjer 15.

Rotacija oko osi z Promotrimo operator $A : V^3 \to V^3$ rotacije oko osi Oz, za kut α. Njegovo djelovanje i njegovu matricu možemo lako izvesti poznavajući djelovanje operatora rotacije u ravnini xOy. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{i}) &= \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}, \\ A(\mathbf{j}) &= -\sin\alpha\mathbf{i} + \cos\alpha\mathbf{j}, \\ A(\mathbf{k}) &= \mathbf{k}, \end{aligned}$$

te matrica ovoga operatora glasi

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 16.

Matrice rotacije oko osi Ox i oko osi Oy glase

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$