Matematička analiza 1 – Poglavlje 3

Skripta

Ilko Brnetić, Mario Bukal, Tomislav Burić,
Lana Horvat Dmitrović, Josipa Pina Milišić, Mervan Pašić,
Ana Žgaljić Keko, Darko Žubrinić

Verzija od 12. veljače 2021.

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

3. Uvod u kombinatoriku

Srž matematike čine konkretni primjeri i konkretni problemi.
— Paul R. HALMOS (1916.-2006.), mađarsko-američki matematičar

Ključni pojmovi: Pravilo komplementa 7, Pravilo zbrajanja 6, Pravilo bijekcije 7, Produktno pravilo 9, partitivni skup 12, varijacije bez ponavljanja 17, permutacije (premjestbe) 17, kombinacije bez ponavljanja 20, binomni koeficijent 20, Binomni teorem 25, permutacije s ponavljanjem, 29, multiskupovi 33, Multinomni teorem 30, multinomni koeficijenti 30, kombinacije s ponavljanjem 33, Eulerova funkcija 46.

Kombinatorika je grana matematike koja se među inim bavi i s problemima prebrojavanja, tj. nalaženja kardinalnog broja konačnih skupova, zadanih na vrlo različite načine. Jedna od prvih velikih povjesnih primjena nalaženja kardinalnog broja konačnih skupova nastala je u 17. st. prepiskom između dva francuska matematičara Blaise Pascala i Pierre de Fermata, o problemima kockanja izraženim u terminima vjerojatnosti $P(A) := |A|/|\Omega|$, gdje je A neki skup povoljnih događaja sadržan u zadanom skupu Ω svih događaja pri jednom kockanju, a $|A|$ i $|\Omega|$ su njihovi kardinalni brojevi. Pojedinosti su objavljene u knjizi *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (Esej o analizi igara na sreću), Paris, 1708., čiji autor je Pierre Remond Montmort. Veliki zamah kombinatorici i teoriji grafova (kao i mnogim drugim područjima matematike) dao je Leonhard Euler (18. st.), jedan od najistaknutijih matematičara u povijesti.

S pojavom računala, u posljednjih nekoliko desetljeća je važnost kombinatorike jako narasla. Primjene kombinatornih rješenja u računalstvu su mnogobrojne, i pojavljuju se u raznim računalnim zadaćama: od algoritama koji se koriste u komercijalnim programima do tehnika za analizu složenosti algoritama.

Pogledajmo nekoliko najjednostavnijih primjera prebrojavanja.

■ **Primjer 3.1** Neka su m i n cijeli brojevi i $m \leq n$. Cijelih brojeva između m i n uključivo (tj. svih brojeva i takvih da je $m \leq i \leq n$), ima ukupno

$$n-(m-1)=n-m+1.$$

Rješenje. Ako je $m=1$ onda tvrdnja vrijedi: svih brojeva i takvih da je $1 \leq i \leq n$ ima n, u skladu s tvrdnjom.

Ako u nejednakosti $m \le i \le n$ oduzimemo $m-1$, dobivamo $1 \le j \le n-m+1$, gdje je $j := i-(m-1)$. Broj i-ova u prvom slučaju jednak je broju j-ova u drugom, tj. $n-m+1$. ■

Na primjer, cijelih brojeva između 100 i 200 (uključujući i te brojeve) ima $200-99=101$. Između -1 i 1 ima ih $1-(-2)=3$ (koji su to?), a između -6 i 9 ima ih $9-(-7)=16$.

U sljedećem primjeru nam treba pojam dolnjeg cijelog dijela $\lfloor x \rfloor$ realnog broja x, koji je uveden u (**??**) na str. **??**.

■ **Primjer 3.2** Neka su k i n zadani prirodni brojevi. Onda svih cjelobrojnih višekratnika broja k, sadržanih između 1 i n uključivo, ima ukupno $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$.

Rješenje. Ako je $1 \le kq \le n$ za neki prirodni broj q, onda je $\frac{1}{k} \le q \le \frac{n}{k}$. Broj takvih q-ova jednak je najvećem cijelom broju koji je $\le \frac{n}{k}$, dakle $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. ■

■ **Primjer 3.3** Neka su m i n cijeli brojevi, $m \le n$, i k zadani prirodni broj. Onda svih cjelobrojnih višekratnika od k koji su između m i n uključivo, ima ukupno

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-1}{k} \right\rfloor .$$

Rješenje. U zatvorenom intervalu $[m,n]$ postoji isti broj višekratnika broja k kao i u intervalu translatiranom za kq, tj. u $[m+kq, n+kq]$, gdje je q bilo koji cijeli broj. Stoga možemo bez gubitka općenitosti pretpostaviti da su $m \ge 1$ i $n \ge 1$. Primijetite da se izraz $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - \lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor$ ne mijenja ako zamijenimo m sa $m+kq$ i n sa $n+kq$.

Prema Primjeru 3.2, u intervalu $[1,n]$ postoji ukupno $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ višekratnika od k, dok ih u intervalu $[1,m-1]$ ima $\lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor$. Prema tome u intervalu $[m,n]$ ima ih ukupno $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - \lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor$, jer u otvorenom intervalu $(m-1,m)$ ne postoji niti jedan cjelobrojni višekratnik od k. ■

Koliko ima parnih brojeva između 12 i 50 uključivo? Ima ih $\lfloor \frac{50}{2} \rfloor - \lfloor \frac{11}{2} \rfloor = 25-5=20$.

Vježba 3.1 Znameniti grčki matematičar i astronom Eratosten (poznat po Eratostenovu situ za prosijavanje prostih brojeva – vidi str. **??**, kao i po tome što je prvi u povijesti izračunao opseg Zemaljske kugle) rođen je 276. g. prije Krista, a umro 194. g. prije Krista. Koliko je godina on živio? (Smatramo da vremenski razmak između dvije uzastopne godine iznosi jednu godinu).

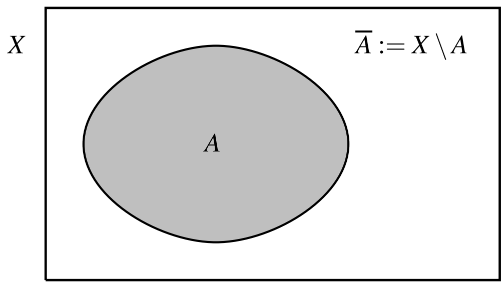
Prisjetimo se, *kardinalni broj* nekog konačnog skupa A označujemo sa $|A|$. (Vidi str. **??**; u uporabi je i oznaka $\sharp A$, s pomoću glazbenog znaka povisilice.) U ovom poglavlju nam važnu ulogu imaju pojmovi bijekcije, injekcije i surjekcije, koji su uvedeni u prethodnom poglavlju.

Najjednostavniji kombinatorički princip jest **Pravilo zbrajanja**: ako je zadani konačan skup X jednak uniji međusobno *disjunktnih* podskupova $A_1, \dots, A_n$ (tj. niti koja dva od tih podskupova se ne sijeku), onda vrijedi

$$|X| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Ovo očevidno svojstvo će kasnije biti poopćeno na slučaj unije (konačno mnogo) skupova koji nisu nužno disjunktni (vidi Odjeljak 3.4 na str. 37). U mnogim kombinatoričkim zadatcima je elemente zadanog skupa X moguće prebrojiti tako da se X na prikladan način rastavi na disjunktnu uniju svojih podskupova, te da se zatim prebroji svaki od tih podskupova.[1] Vidi recimo Primjer 3.6 na str. 10.

[1]Za međusobno disjunktne i neprazne skupove $A_1, \dots, A_n$, čija unija je jednaka zadanom skupu X, kažemo da čine *particiju* skupa X. Pojam particije je usko povezan s pojmom relacije ekvivalencije na skupu X. Vidi Odjeljak **??** na str. **??**.



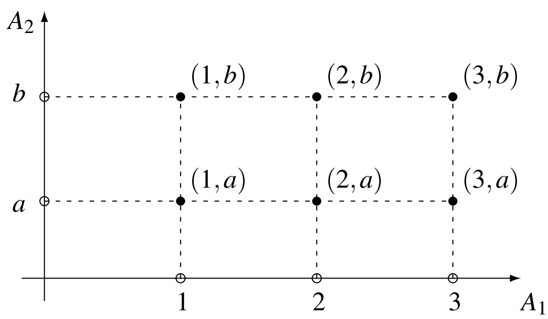
Slika 3.1: *Pravilo komplementa* za konačne skupove A i X kaže da je $|\overline{A}| = |X| - |A|$.

Spomenimo još i **Pravilo komplementa**: ako je X konačan skup s n elemenata i A njegov podskup s k elemenata, onda komplement $\overline{A} := X \setminus A$ ima $n-k$ elemenata. Vidi Sliku 3.1. Pravilo komplementa se rabi u slučaju kad je elemente skupa A teško prebrojati, a elemente njegova komplementa $\overline{A}$ lakše. Vidi recimo Primjer 3.17 na str. 14.

Pravilo bijekcije smo već vidjeli: ako su A i B konačni skupovi među kojima postoji bijekcija $f : A \to B$, onda A i B imaju isti broj elemenata. (Mogli bismo ga zvati i *Pravilom poistovjećivanja*.) To je metoda koja se u kombinatorici vrlo često koristi. Vidi recimo Primjer 3.10 na str. 12.

3.1 Produktno pravilo

Jedan od temeljnih kombinatoričkih rezultata jest da je broj elemenata u Kartezijevu produktu $A_1 \times A_2$ dvaju skupova jednak umnošku broja elemenata u svakom od njih.[2]



Slika 3.2: Kartezijev umnožak $A_1 \times A_2$ skupova $A_1 := \{1,2,3\}$ i $A_2 := \{a,b\}$ sastoji se od ukupno $3 \cdot 2 = 6$ elemenata: $(1,a)$, $(1,b)$, $(2,a)$, $(2,b)$, $(3,a)$ i $(3,b)$. Općenitija tvrdnja može se vidjeti u Propoziciji 1 i Teoremu 3.1.1.

Vježba 3.2 Uvjerite se da je Kartezijev umnožak skupova $A_1 := \{1,2,3\}$ i $A_2 := \{a,b\}$ jednak ovom šesteročlanom skupu:

$$A_1 \times A_2 = \{\,(1,a),\ (1,b),\ (2,a),\ (2,b),\ (3,a)\ (3,b)\,\}.$$

Vidi Sliku 3.2. Kako izgleda skup $A_2 \times A_1$? Imaju li ta dva skupa isti broj elemenata? Vrijedi li i općenito, da je kardinalni broj skupova $A_1 \times A_2$ i $A_2 \times A_1$ isti za bilo koja dva konačna neprazna skupa A_1 i A_2?

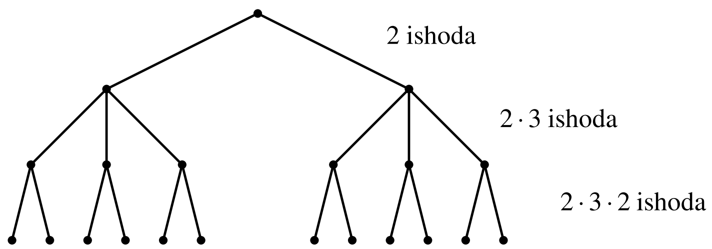
[2]Produktno pravilo je izloženo na posve elementaran način s jako mnogo detalja, tako da svi oni koji nisu bili u srednjoj školi upoznati s osnovnim elementima kombinatorike mogu jednostavno pratiti izlaganja u ovom poglavlju.

Vježba 3.3 Troje djece dobiva na dar po jedan paketić. U svakom od triju paketića nalaze se dvije čokolade. Koliki je ukupan broj darovanih čokolada? Pokušajte ovaj problem formulirati u terminima Kartezijeva umnoška. (Vidi sliku 3.2.)

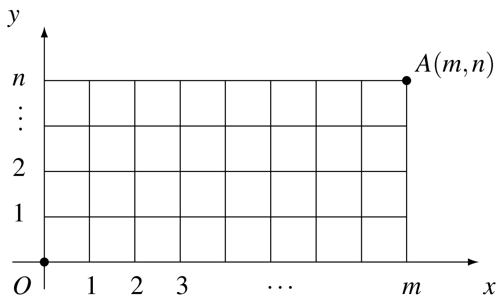
Iz ovih vrlo jednostavnih primjera vidimo da će vrijediti tzv. Produktno pravilo, koje predstavlja jedno od najvažnijih pravila u kombinatorici.

Propozicija 1 Neka su A_1 i A_2 konačni neprazni skupovi. Onda vrijedi $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$. Riječima, broj poredanih dvojaca (a_1, a_2) u kojima element a_1 možemo birati na m_1 načina, a zatim element a_2 na m_2 načina (pri čemu je broj m_2 konstantan, tj. ne ovisi o izboru a_1), iznosi $m_1 \cdot m_2$.

Ova se tvrdnja može razumjeti i ovako: ako se neki postupak može obaviti na m načina, a svaki od postupaka ima n mogućih ishoda, onda je ukupan broj mogućih ishoda jednak $m \cdot n$. (Pogledajte Sliku 3.3.) Ili ovako: ako stado ima $m = 30$ ovaca, a svaka ovca $n = 4$ noge, onda stado ima $m \cdot n = 30 \cdot 4 = 120$ nogu.



Slika 3.3: Ilustracija Produktnog pravila u Propoziciji 1, primijenjenog dvaput. Ako neki postupak ima 2 moguća ishoda, a svaki od njih ima 3 moguća ishoda, onda dobivamo $2 \cdot 3$ mogućih ishoda. Ako zatim svaki od tih $2 \cdot 3$ ishoda ima po 2 daljnja moguća ishoda, onda je ukupan broj ishoda jednak $2 \cdot 3 \cdot 2$. Na primjer, ako dvije žene imaju svaka po troje djece, a svako dijete dobije na dar po dvije jabuke, onda je darovano ukupno $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ jabuka.



Slika 3.4: Pravokutnik određen vrhovima O i $A(m,n)$, gdje su m i n prirodni brojevi, sadrži ukupno mn jediničnih kvadratića čije nutrine su međusobno disjunktne. Drugim riječima, njegova je površina jednaka mn. Vidi Primjer 3.4

Produktno pravilo poznajemo već iz osnovno škole, na primjeru računanja površine pravokutnika. Vidi sliku 3.4.

■ **Primjer 3.4** Neka su m i n prirodni brojevi, te neka je zadan pravokutnik s vrhovima u točkama $O(0,0)$ i $A(m,n)$, čije stranice su paralelne s koordinatnim osima (spojnica $\overline{OA}$ je dijagonala tog pravokutnika); vidi Sliku 3.4. Koliko se jediničnih kvadrata (tj. kvadrata površine 1) može smjestiti u taj pravokutnik, tako da su nutrine tih kvadrata međusobno disjunktne (tj. kvadrati se smiju dodirivati najviše u svojim rubnim točkama)?

Rješenje. 'Popločavanje' zadanog pravokutnika s jediničnim kvadratima možemo obaviti tako da gledamo okomite pravce $x = 1$, $x = 2$,$\dots$, $x = m-1$ i vodoravne pravce $y = 1$,$\dots$, $y = n-1$. Svaki takav jedinični kvadrat je jednoznačno određen svojom ortogonalnom projekcijom na x-os i na y-os (a to su dva jedinična intervala). Prema Pravilu bijekcije (vidi str. 3), dovoljno je prebrojiti koliko ima svih parova takvih intervala.

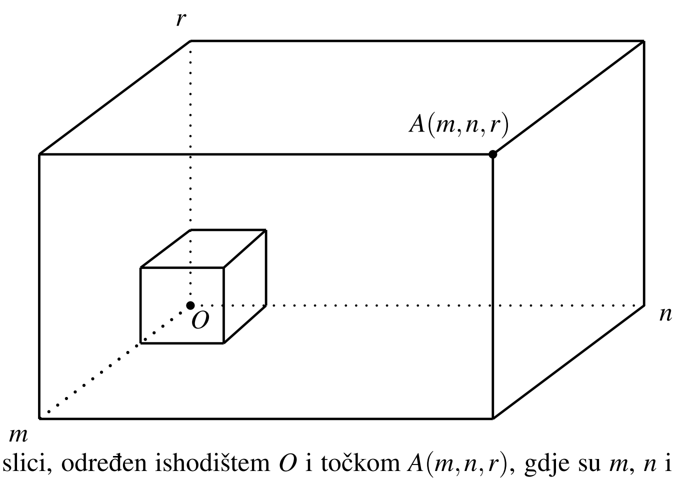
Imamo m mogućih izbora jediničnih intervala na x-osi, a n mogućnosti za izbor jediničnih intervala na y-osi. Prema Produktnom pravilu (vidi Propoziciju 1), ukupan broj jediničnih kvadrata unutar pravokutnika iznosi mn. (Kažemo da je površina pravokutnika jednaka mn.) ■

Poopćenje Propozicije 1 predstavlja sljedeći važan stavak koji govori o kardinalnom broju Kartezijeva produkta skupova. On se lako dokazuje indukcijom po n.

Teorem 3.1.1 — Produktno pravilo. Neka su $A_1,\dots,A_n$ neprazni skupovi s konačno mnogo elemenata. Onda je

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdots |A_n|.$$

Riječima, broj poredanih n-teraca $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, u kojima element a_1 možemo birati na m_1 načina, zatim element a_2 na m_2 načina (pri čemu je broj m_2 konstantan, tj. neovisan o izboru prethodnog elementa a_1), $\dots$, a element a_n na m_n načina (pri čemu je broj m_n konstantan, tj. neovisan o izboru prethodnih elemenata $a_1,\dots,a_{n-1}$), iznosi $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$.

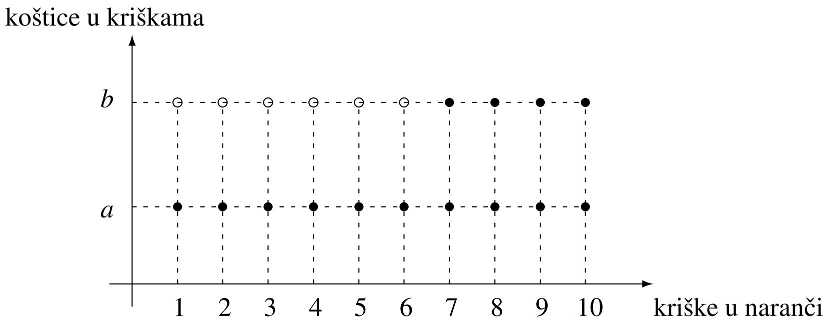


Slika 3.5: U kvadar na slici, određen ishodištem O i točkom $A(m,n,r)$, gdje su m, n i r prirodni brojevi, može se upisati mnr jediničnih kockica; vidi Primjer 3.5. Jedna od tih jediničnih kockica je ucrtana kod ishodišta. Slika odgovara slučaju kada je $m = 3$, $n = 7$ i $r = 4$, pa se u pripadajući kvadar mogu upisati $3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$ jedinične kockice, a to je i volumen kvadra.

■ **Primjer 3.5** Neka su m, n i r zadani prirodni brojevi. U trodimenzionalnom prostoru je zadan kvadar s vrhovima u točkama $O(0,0,0)$ i $A(m,n,r)$, čije strane su paralelne s koordinatnim ravninama (spojnica $\overline{OA}$ je dijagonala kvadra). Uvjerite se da broj jediničnih kockica, koje se mogu smjestiti u taj kvadar, a čije su nutrine međusobno disjunktne (tj. svake dvije kockice se dodiruju najviše u rubnim točkama), iznosi mnr. Vidi Sliku 3.5.

Rješenje. Svaka je jedinična kockica (tj. sa stranicama duljine 1) unutar kvadra jednoznačno određena sa svojim ortogonalnim projekcijama na koordinatne osi x, y i z, a to su jedinični intervali. Prema Pravilu bijekcije, broj kockica jednak je broju poredanih trojaca jediničnih intervala na tim koordinatnim osima. Na x-osi možemo jedinične intervale birati na m načina, na y-osi na n načina, a na z-osi na r načina, pa iz Produktnog pravila (vidi Teorem 3.1.1) dobivamo da je broj poredanih trojaca jediničnih intervala jednak mnr. Prema spomenutom Pravilu bijekcije, to je ujedno i broj kockica u kvadru. (Kažemo da je volumen kvadra jednak mnr.)

Malo drukčije rješenje može se dobiti ovako. Svaka jedinična kockica u kvadru jednoznačno je određena svojom ortogonalnom projekcijom na (x,y)-ravninu (koja je jedinični kvadratić) i na z-os (koja je jedinični interval). Budući da tako dobivenih jediničnih kvadratića ima mn (vidi Primjer 3.4), a jediničnih intervala na z-osi ima r, prema Pravilu bijekcije i prema Produktnom pravilu (Propozicija 1), svih kockica u kvadru ima ukupno $(mn)r = mnr$. ■



Slika 3.6: Skup od deset krišaka jedne naranče s pripadajućim skupovima od jedne ili dviju koštica u Primjeru 3.6. Zatvoren kružić nam na slici označava da je koštica uključena u krišku, a otvoren da nije.

■ **Primjer 3.6** Neka naranča ima 10 krišaka. U 6 krišaka ima jednu košticu, a u 4 kriške se nalaze dvije koštice. Koliko se koštica nalazi u naranči?

Rješenje. Neopreznim računom bi se moglo pomisliti da je rezultat $10 \cdot 2 = 20$ koštica. To je međutim krivo.

Pogledajmo najprije šest krišaka s jednom košticom (Slika 3.6). U njima imamo ukupno $6 \cdot 1 = 6$ koštica. U preostale četiri kriške imamo prema Produktnom pravilu $4 \cdot 2 = 8$ koštica (vidi Propoziciju 1). Ukupan broj koštica u naranči, prema Pravilu zbrajanja (vidi str. 6), iznosi $6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 14$.

Primijetite da smo u ovom rješenju napravili particiju krišaka naranče, na skup A_1 svih krišaka koje sadrže samo jednu košticu (njih šest), i na skup A_2 svih krišaka koje imaju dvije koštice. Skupovi A_1 i A_2 su disjunktni, a njima odgovaraju dva 'pravokutnika' na Slici 3.6: $A_1 \times \{1\}$ i $A_2 \times \{1,2\}$.

Do istog rezultata možemo doći i primjenom Pravila komplementa; vidi str. 7. Ako za trenutak pretpostavimo da svaka od deset krišaka naranče ima po dvije koštice, onda bi ukupan broj koštica bio $10 \cdot 2 = 20$. Međutim, šest krišaka ima po jednu košticu viška, pa moramo suvišne koštice oduzeti (na slici 3.6 označene kružnicama): $10 \cdot 2 - 6 = 14$. ■

Neka su A i B dva neprazna, konačna skupa. Označimo sa B^A skup *svih* funkcija $f : A \to B$, tj.

$$B^A := \{f : f \text{ je funkcija iz } A \text{ u } B\}. \tag{3.1}$$

■ **Primjer 3.7** Za $A = \{1,2\}$ i $B = \{a,b,c\}$ možemo definirati na pr. funkcije $f,g,h : A \to B$ sa $f(1) = a$, $f(2) = a$, $g(1) = a$, $g(2) = b$, $h(1) = a$, $h(2) = c$. Funkcije f, g, h su elementi iz B^A, ali ima ih još. Točnije, ima ukupno devet funkcija $f : A \to B$. Doista, $f(1)$ poprima tri moguće vrijednosti, $f(2)$ također, pa prema Produktnom pravilu funkciju f možemo zadati na $3 \cdot 3 = 9$ načina. ■

Postavlja se pitanje koliko elemenata ima općenito skup B^A? Sljedeći stavak daje odgovor na to pitanje, a ujedno daje i objašnjenje za neobičnu oznaku B^A za skup svih funkcija iz A u B.

Teorem 3.1.2 — Broj funkcija među konačnim skupovima. Neka su A i B konačni neprazni skupovi, tako da prvi ima n elemenata, a drugi m. Onda svih funkcija $f : A \to B$ ima ukupno m^n, tj. vrijedi $|B^A| = m^n$. Drugim riječima, vrijedi $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Ekvivalentno tome, n predmeta (međusobno različitih) se u m kutija može smjestiti na m^n načina.

Dokaz. Neka je $A := \{a_1, \dots, a_n\}$. Svaku funkciju $f : A \to B$ možemo bijektivno poistovjetiti s poredanim n-tercem $\big(f(a_1), \dots, f(a_n)\big)$ svih njenih vrijednosti. Prema tome, broj svih funkcija f iz A u B jednak je broju poredanih n-teraca $\big(f(a_1), \dots, f(a_n)\big)$. (Ovdje koristimo Pravilo bijekcije navedeno na str. 7.)

Bilo koja funkcija $f : A \to B$ može vrijednost $f(a_1)$ poprimiti na $|B| = m$ načina, $f(a_2)$ također, itd. do $f(a_n)$. Prema Produktnom pravilu onda funkciju f, tj. odgovarajući n-terac

$$\big(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\big),$$

možemo zadati na $m \cdot m \cdots m = m^n$ načina, tj. $|B^A| = m^n$.

Drugi, ekvivalentan dokaz, sastoji se u tome da elemente skupa A interpretiramo kao različite predmete, a elemente skupa B kao različite kutije. Svakoj funkciji $f : A \to B$ odgovara jednoznačno određeno smještvanje n predmeta u m kutija, i obratno. Prema Pravilu bijekcije, broj svih funkcija $f : A \to B$ jednak je broju smještavanja predmeta u kutije. Prvi predmet možemo u m kutija smjestiti na m načina, drugi također, ..., n-ti predmet također na m načina. Prema Produktnom pravilu, svih n predmeta možemo smjestiti u m kutija na $m \cdot m \cdots m = m^n$ načina. ■

Prema Teoremu 3.1.2, svih funkcija iz dvočlanog skupa u tročlani ima ukupno $3^2 = 9$. To je ujedno i broj načina na koji dvije osobe možemo smjestiti u tri sobe. Primijetite da svakom smještavanju odgovara funkcija (smještavanja) iz skupa osoba u skup soba. I obratno, svakoj funkciji odgovara smještavanje.

■ **Primjer 3.8** Sedam različitih predmeta treba rasporediti u četiri različite kutije. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Rješenje. Za prvi predmet može se odabrati neka od 4 kutije, pa imamo 4 mogućnosti. Neovisno o tome gdje smo stavili prvi predmet, drugi se predmet također može smjestiti u neku od 4 kutije. Tako i za sve preostale predmete. Prema Produktnom pravilu je broj rasporeda jednak 4^7.

Drugo rješenje. Iskoristiti ćemo Pravilo bijekcije i ustanoviti bijektivnu korespondenciju ovog problema s prebrojavanjem svih funkcija iz sedmeročlanog u četveročlani skup. Zaista, svaki raspored predmeta po kutijama odgovara jednoj takvoj funkciji. Zato je broj svih rasporeda isti kao broj funkcija iz sedmeročlanog skupa u četveročlani, dakle 4^7. ■

Vježba 3.4 (a) Koliko ima funkcija iz dvočlanog skupa u peteročlani? (b) Na koliko načina se dvije osobe mogu smjestiti u pet soba? (c) A pet osoba u dvije sobe?

Korolar 3.1.3 Broj poredanih n-teraca sastavljenih od 0 i 1 (ili od neka druga dva različita elementa) jednak je 2^n.

Dokaz. Tvrdnja slijedi neposredno iz prethodnog teorema, uz $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ i $B = \{0,1\}$.

Ili izravno: na prvo mjesto n-terca možemo staviti 2 broja (nula ili jedan), na drugo mjesto također, na n-to mjesto također, pa svih poredanih n-teraca sastavljenih od nula ili jedan, prema Produktnom pravilu ima ukupno $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$. ∎

▪ **Primjer 3.9** Za $n = 4$ dobivamo da postoji $2^4 = 16$ poredanih četveraca nula i jedinica, a za $n = 10$ dobivamo već $2^{10} = 1024$ poredanih deseteraca nula i jedinica. Za $n = 270$ imamo 2^{270} poredanih 270-teraca nula i jedinica. To je više od 10^{80}, koliko iznosi procijenjeni broj atoma u cijelom vidljivom svemiru! Vidimo da problem prebrojavanja n-teraca nula i jedinica, opisan funkcijom 2^n (eksponencijalna funkcija u varijabli n), ima **kombinatornu eksploziju**. ▪

Dodatak

Za neki postupak prebrojavanja, ovisan o prirodnom broju n, kažemo da ima *kombinatornu eksploziju*, ako broj kombinacija $f(n)$ raste barem eksponencijalnom brzinom u ovisnosti o n. Drugim riječima, postoji pozitivna realna konstanta $a > 1$ takva da je $f(n) \geq a^n$ za sve prirodne brojeve n. To znači da će već za razmjerno male n prebrojavanje s pomoću računala biti neizvedivo.

U sljedećem primjeru trebat ćemo pojam multiskupa. *Multiskupom* zovemo 'skup' u kojem se elementi mogu ponavljati, tj. kratnost elementa nam je bitna, ali poredak elemenata nije. Možemo govoriti i o praznom multiskupu $[\emptyset]$.

Na primjer za $n = 3$, neki od mogućih multiskupova koji sadrže samo elemente 0 i 1 su $[0,0,1]$, $[1,0,1]$ (koje poistovjećujemo s odgovarajućim multiskupovima $[0,1,0]$ i $[0,1,1]$, jer nam je kratnost elemenata bitna, ali ne i njihov poredak), itd.

▪ **Primjer 3.10** Koliko ima n-članih *multiskupova* sastavljenih samo od elemenata nula ili jedan?

Rješenje. Taj n-člani multiskup ima ili ništa nula (tj. imamo n jedinica), ili jednu nulu (preostalih $n-1$ brojeva su jedinice), ili dvije nule, ..., ili n nula.

Prema Pravilu bijekcije (vidi str. 7), dovoljno je prebrojiti koliko ima ovakvih multiskupova:

$$[\emptyset],\ [0],\ [0,0],\ \dots\ ,[0,0,\dots,0].$$

Ukupno takvih multiskupova ima $n+1$. ▪

▪ **Primjer 3.11** Automobilske tablice sadrže ime grada, zatim četiri znamenke i još dva slova abecede. Koliko je takvih tablica moguće napraviti za Vukovar i Dubrovnik zajedno?

Rješenje. Svaka od četiriju znamenaka može imati neku od 10 vrijednosti $0,1,2,\dots,9$. Svako od dva preostala slova može imati jedno od 22 vrijednosti: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z. Prema Produktnom pravilu je broj mogućih tablica samo za jedan grad jednak $10^4 \cdot 22^2 = 4\,840\,000$. Za dva grada će vrijednost biti dvostruka, tj. $9\,680\,000$ (dakle blizu deset milijuna). ▪

Podsjetimo se definicije *partitivnog skupa*, koji smo uveli na str. **??** u odjeljku posvećenom relacijama. Za zadani skup X definiramo *skup* 2^X *svih podskupova* od X (dakle uključujući i prazan skup $\emptyset$ i cijeli skup X). Zovemo ga **partitivnim skupom od** X.

▪ **Primjer 3.12** Ako je $X = \{a,b,c\}$ onda se njegov partitivni skup 2^X sastoji od sljedećih 8 elemenata:

– praznog skupa $\emptyset$,
– svih jednočlanih podskupova $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$,
– svih dvočlanih podskupova $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$,

– te od cijelog skupa $\{a,b,c\}$.
Drugim riječima,

$$2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Primijetimo da svakom podskupu skupa X možemo bijektivno pridružiti poredani trojac sastavljen od nula i jedinica, tako da 0 na i-tom mjestu znači da i-ti element nije u podskupu, dok 1 na i-tom mjestu znači da i-ti element jest u podskupu. Na primjer, podskupu $\emptyset$ (tj. praznom skupu) skupa $X = \{a,b,c\}$ pridružujemo $(0,0,0)$, podskupu $\{a\}$ pridružujemo $(1,0,0)$, podskupu $\{b\}$ pridružujemo $(0,1,0)$ itd., do podskupa $\{a,b,c\}$ kojem pridružujemo $(1,1,1)$. Možemo reći da smo ovim bijektivnim pridruživanjem jednoznačno *kodirali* sve podskupove. Na taj se način, prema Pravilu bijekcije (vidi str. 7)), prebrojavanje svih podskupova skupa X svodi na prebrojavanje svih poredanih trojaca nula i jedinica. ■

Oznaka 2^X za partitivni skup od X je posljedak sljedeće važne tvrdnje.

Teorem 3.1.4 — Kardinalni broj partitivnog skupa. Neka je X konačan skup od n elemenata. Onda on ima ukupno 2^n podskupova, tj. vrijedi $|2^X| = 2^{|X|}$.

Dokaz. Broj svih podskupova zadanog n-članog skupa jednak je (prema Pravilu bijekcije, vidi str. 7) broju svih poredanih n-teraca nula i jedinica. Budući da na svakom mjestu u n-tercu dolaze po dvije moguće vrijednosti (0 ili 1), ukupan broj n-teraca iznosi prema Produktnom pravilu 2^n. ■

Dobro je poznato da za sve prirodne brojeve n vrijedi nejednakost $2^n > n$ (a to se lako dokazuje indukcijom). Drugim riječima, za bilo koji konačni skup X vrijedi $|2^X| > |X|$. Ova tvrdnja je zapravo očevidna, jer partitivni skup 2^X sadrži među inim i sve jednočlane podskupove od X, kojih ima upravo $|X|$.

■ **Primjer 3.13** Koliko djelitelja ima broj 360? Koliko ima neparnih djelitelja od 360, a koliko parnih?

Rješenje. Najprije rastavimo broj 360 na proste faktore:

$$360 = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1.$$

Budući da su prema Osnovnom teoremu aritmetike (Teorem **??** na str. **??**) svi djelitelji broja 360 oblika $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, gdje su potencije α, β i γ nenegativni cijeli brojevi takvi da je

$$0 \le \alpha \le 3, \quad 0 \le \beta \le 2, \quad 0 \le \gamma \le 1,$$

vidimo da je (prema Pravilu bijekcije opisanom na str. 7) njegovih djelitelja isto koliko i poredanih trojaca (α,β,γ). Tih poredanih trojaca prema Produktnom pravilu (vidi Teorem 3.1.1) ima ukupno $(3+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.[3]

Neparni djelitelji od $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ su oblika $3^\beta \cdot 5^\gamma$ (zbog neparnosti djelitelja, mora potencija od 2 biti 0), pri čemu su $\beta \in \{0,1,2\}$ i $\gamma \in \{0,1\}$. Prema Produktnom pravilu, broj 360 onda ima $3 \cdot 2 = 6$ neparnih djelitelja. Prema Pravilu komplementa (vidi str. 7), broj parnih djelitelja jednak je $24 - 6 = 18$. Ili manje izravno – parni djelitelji su oblika $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, gdje je $\alpha \in \{1,2,3\}$ (zbog parnosti djelitelja, mora potencija od 2 biti barem 1), $\beta \in \{0,1,2\}$ i $\gamma \in \{0,1\}$, pa prema Produktnom pravilu, broj 360 ima $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ parnih djelitelja. ■

Iz prethodnog primjera vidimo da će općenito vrijediti ovo.

[3] Prema tome, broj 360 ima razmjerno velik broj djelitelja (ispišite sva ta 24 djelitelja), radi čega su taj broj još stari Babilonci rabili u podjeli punog kuta na 360 stupnjeva. Taj pristup rabimo i danas.

Propozicija 2 Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ prirodan broj rastavljen na proste faktore, onda je broj svih pozitivnih djelitelja od n jednak

$$(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Dokaz. Prema Osnovnom teoremu aritmetike (vidi Teorem **??** na str. **??**), svaki djelitelj d broja n ima oblik $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, gdje je svaki eksponent $\beta_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\}$, tj. β_i poprima ukupno $a_i + 1$ mogućih vrijednosti, za sve $i = 1, \ldots, k$. Broj različitih djelitelja od n jednak je (prema Pravilu bijekcije, vidi str. 7) broju k-teraca $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ koji se pojavljuju kao mogući eksponenti u djeliteljima od n. Prema Produktnom pravilu (vidi Teorem 3.1.1), broj tih k-teraca jednak je $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$, čime je tvrdnja dokazana. ■

■ **Primjer 3.14** Koliko dijagonala ima pravilni n-terokut u ravnini?

Rješenje. Točku T_i dijagonale $\overline{T_i T_j}$ možemo odabrati na n načina. Zatim drugu točku T_j možemo odabrati na $n - 3$ načina, jer to ne može biti točka T_i niti dvije susjedne točke od T_i. Zbog $\overline{T_i T_j} = \overline{T_j T_i}$ umnožak $n(n-3)$ (dobiven prema Produktnom pravilu) treba podijeliti s 2. Zaključujemo da pravilni n-terokut ima $\frac{n(n-3)}{2}$ dijagonala. ■

U sljedećem primjeru će nam biti zgodno prirodne brojeve $< 10^n$ shvatiti kao nizove od n nula ili jedinica. Na primjer, za $n = 3$, brojevi manji od $10^3 = 1\,000$ su redom 1, 2, 3,…, 999, a njih bijektivno poistovjećujemo s 001, 002, 003,…, 999.

■ **Primjer 3.15** Koliko ima n-znamenkastih prirodnih brojeva (u decimalnom prikazu), gdje je n prirodan broj?

Rješenje. Na prvo mjesto n-znamenkastog broja može doći bilo koja od devet znamenaka od 1 do 9 (naime, ne smije doći nula), a na preostalih $n - 1$ mjesta može doći bilo koja od deset znamenaka 0, 1, …, 9. Prema Produktnom pravilu onda postoji $9 \cdot 10^{n-1}$ prirodnih brojeva koji su n-znamenkasti. ■

■ **Primjer 3.16** Koliko ima n-znamenkastih brojeva koji u svojem decimalnom prikazu sadrže barem jednu znamenku 2?

Rješenje. Svih n-znamenkastih brojeva, kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru (Primjer 3.15), ima ukupno $9 \cdot 10^{n-1}$.

Među tim brojevima treba pronaći broj onih koji u svojem decimalnom prikazu sadrže *barem jednu* znamenku 2. Iz analognih razloga kao u Primjeru 3.17 (pogledajte objašnjenje u početne tri rečenice njegova rješenja), zadatak rješavamo uporabom Pravila komplementa.

Svih n-znamenkastih brojeva koji *ne sadrže* znamenku 2 ima $8 \cdot 9^{n-1}$, jer prva znamenka smije biti iz skupa $\{1,3,4,5,6,7,8,9\}$ (koji ima osam elemenata), a sve ostale znamenke iz skupa $\{0,1,3,4,5,6,7,8,9\}$ (koji ima devet elemenata). Stoga, n-znamenkastih brojeva koji sadrže znamenku 2 ima prema Pravilu komplementa (vidi str. 7) ukupno $9 \cdot 10^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-1}$. ■

■ **Primjer 3.17** Koliko ima prirodnih brojeva od 1 do 10^n koji u svojem decimalnom prikazu sadrže barem jednu znamenku 2?

Rješenje. U zadatku treba prebrojati sve brojeve koji u svom prikazu sadrže znamenku 2 i misli se pritom *barem jednu* znamenku 2. To znači da broj može imati ili jednu znamenku 2, ili dvije znamenke 2, ili tri znamenke 2, ili …. Iako je unija takvih skupova brojeva disjunktna (tj. presjek svaka dva skupa je prazan), takvih skupova će biti jako puno. Stoga je jednostavnije primijeniti Pravilo komplementa i prebrojati skup brojeva od 1 do 10^n koji *ne sadrže* znamenku 2.

Ima $(9^n - 1) + 1 = 9^n$ brojeva koji ne sadrže znamenku 2, jer za svaku od n znamenaka brojeva $< 10^n$ imamo 9 mogućnosti (tu rabimo Produktno pravilo), i izuzimamo slučaj kada su sve znamenke nula, a uključen je i broj 10^n.

Dakle, onih koji sadrže barem jednu znamenku 2, po Pravilu komplementa (vidi str. 7), ima ukupno $10^n - 9^n$. ■

■ **Primjer 3.18** Koliko ima prirodnih brojeva manjih od milijun koji imaju sve znamenke različite?

Rješenje. Pogledajmo najprije sve takve šesteroznamenkaste prirodne brojeve. Na prvo mjesto može doći bilo koji od brojeva $1,\dots,9$, a na drugo bilo koji od preostalih devet među deset brojeva $0,1,\dots,9$. Prema tome, takvih šesteroznamenkastih brojeva ima po Produktnom pravilu $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$. Slično dobivamo i za peteroznamenkaste brojeve (njih $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$), itd. do jednoznamenkastih (njih 9), pa je ukupan broj traženih brojeva prema Pravilu zbrajanja jednak

$$9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 + 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 + 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7 + 9\cdot 9\cdot 8 + 9\cdot 9 + 9 = 168\,570.$$

■

■ **Primjer 3.19** Koliko ima relacija na zadanom n-članom skupu?

Rješenje. Podsjetimo se da je relacija na skupu A bilo koji neprazan podskup na $A\times A$, gdje možemo bez gubitka općenitosti pretpostaviti da je $A = \{1,2,\dots,n\}$. Skup $A\times A$ prema Produktnom pravilu im n^2 elemenata, pa on ima 2^{n^2} podskupova (vidi Teorem 3.1.4). Broj nepraznih podskupova je jednak $2^{n^2} - 1$.

Za $n = 10$ je $2^{100} = 2^{10^{10}} > (10^3)^{10} = 10^{30} > 10^{23}$, pa na 10-članom skupu postoji daleko više relacija nego atoma u litri vode! ■

■ **Primjer 3.20** Koliko ima simetričnih relacija na n-članom skupu?

Rješenje. Ako je $A = \{1,2,\dots,n\}$ taj n-člani skup, onda treba vidjeti koliko ima nepraznih podskupova od $A\times A$ koji su simetrični. Radi toga je dovoljno prebrojiti sve podskupove od $A\times A$ koji se nalaze u 'trokutu' $x\le y$. Broj elemenata u tom trokutu je $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$, pa je broj njegovih nepraznih podskupova jednak $2^{\frac{1}{2}n(n+1)} - 1$ (oduzimamo 1, koji odgovara praznom skupu). ■

Dodatak

Za potrebe sljedećeg primjera, podsjetimo se pojma **Booleove funkcije** n varijabla; vidi str. **??**. To je funkcija koja bilo kojem poredanom n-tercu nula i jedinica pridružuje nulu ili jedinicu, tj. funkcija $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. (Booleove funkcije pojavljuju se na prirodan način u računu sudova, pri čemu 0 i 1 treba interpretirati kao laž F i istinu T.)

■ **Primjer 3.21** Neka je zadan prirodan broj n. Pokažite da svih Booleovih funkcija n varijabla, $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, ima ukupno 2^{2^n}, što računamo kao $2^{(2^n)}$.

Rješenje. Označimo $B = \{0,1\}$. Onda je $F \in B^A$, gdje je $A = B^n := B\times\cdots\times B$ skup svih poredanih n-teraca nula i jedinica. Tražimo dakle $|B^A|$. Zbog Produktnog pravila (vidi Teorem 3.1.1) je $|A| = 2^n$. Iz Teorema 3.1.4 dobivamo da je $|B^A| = |B|^{|A|} = 2^{2^n}$. ■

■ **Primjer 3.22** Booleovih funkcija s dvije varijable ima ukupno $2^{2^2} = 2^4 = 16$, s tri varijable $2^{2^3} = 2^8 = 256$, a s četiri varijable ima $2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$. Booleovih funkcija s osam varijablâ ima više od 10^{77}, a s devet varijablâ više od 10^{154}. Već smo spomenuli procjenu da ukupni broj atoma u vidljivom svemiru iznosi oko 10^{80}. Kao što vidimo, imamo *kombinatornu eksploziju*. ■

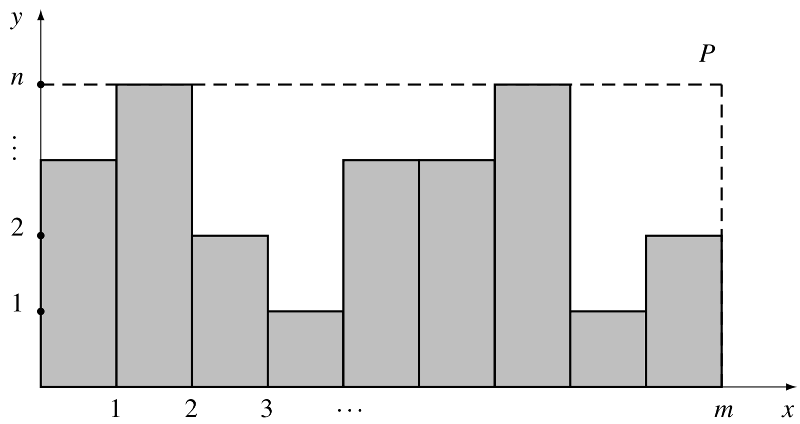
Funkcija $n \mapsto 2^{2^n}$ iz Primjera 3.21, gdje je n prirodan broj, je primjer tzv. *dvostruko eksponencijalne funkcije*. Ona raste mnogo brže od eksponencijalne funkcije 2^n, pa čak i od faktorijelne funkcije $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$. Točnije, kvocijent $n!/2^{2^n}$ teži u nulu kada prirodan broj n teži u beskonačno.

Zadatci iz kombinatorike za samostalan rad

Zadatak 3.1 Zadan je skup od deset točaka na pravcu. (a) Koliko ima zatvorenih intervala s krajevima u tim točkama? (b) Koliko se može nacrtati strjelica s krajevima u tim točkama?

Zadatak 3.2 Koliko djelitelja ima najmanji zajednički višekratnik brojeva 600 i 800? Koliko među svim tim djeliteljima ima parnih, a koliko neparnih?

Zadatak 3.3 Deset prvašića se upisuje u prvi razred osnovne škole, u kojoj već postoje tri odjeljenja za prvi razred. Na koliko načina ih možemo smjestiti u ta tri odjeljenja?



Slika 3.7: Prebrojavanje razmještaja pravokutnika jedinične širine unutar zadanog pravokutnika $P := [0,m] \times [0,n]$. Ovdje je $m = 9$ i $n = 4$. Vidi Zadatak 3.4.

Zadatak 3.4 Neka su m i n zadani prirodni brojevi. Unutar pravokutnika $P = [0,m] \times [0,n]$ u (x,y)-ravnini smještavamo s lijeva na desno m uspravnih pravokutnika jedinične širine, pozitivne površine, tako da je osnovica svakog od njih na x-osi, a svi vrhovi imaju cjelobrojne koordinate. Koliko ima takvih razmještaja pravokutnika unutar P? (Vidi Sliku 3.7.)

Zadatak 3.5 Unutar pravokutnika $P = [0,m] \times [0,n]$ u (x,y)-ravnini smještavamo s lijeva na desno m uspravnih pravokutnika jedinične širine, pozitivne površine (osnovica ne mora biti na x-osi, kao u prethodnom zadatku), kojima su koordinate vrhova cjelobrojne. Koliko ima takvih razmještaja pravokutnika unutar P?

Zadatak 3.6 Zadan je skup od dvadeset osoba. Koliko je broj podskupova tog skupa, koji sadrže barem dvije osobe?

Zadatak 3.7 Koliko ima nesimetričnih relacija na n-članom skupu?

Zadatak 3.8 Koliko ima relacija na n-članom skupu koje su refleksivne i simetrične?

3.2 Varijacije i kombinacije bez ponavljanja

Opisat ćemo najprije neke osnovne metode prebrojavanja za dvije vrste objekata:

(a) **Varijacije** (koje uključuju i *permutacije* kao specijalan slučaj), tj. *poredane k*–terce elemenata zadanog n-članog skupa, u kojima je dakle poredak elemenata bitan. Na primjer, permutacije dvočlanog skupa $\{1,2\}$ su $(1,2)$ i $(2,1)$, tj. imamo ukupno dvije permutacije. Budući da je poredak bitan, onda je $(1,2) \neq (2,1)$. Vidjet ćemo da tročlani skup ima šest permutacija.

(b) **Kombinacije** (tu je poredak nebitan), gdje se prebrojavaju

• *podskupovi* (tj. kombinacije bez ponavljanja), te tzv.

• *multiskupovi* (tj. kombinacije s ponavljanjem),

kod kojih poredak elemenata nije bitan.

Na primjer,

• za tročlani skup $\{1,2,3\}$ su kombinacije (bez ponavljanja) reda dva svi njegovi dvočlani podskupovi: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ i $\{2,3\}$;

• Kod multiskupova dopuštamo ponavljanje elemenata: $[1,1]$, $[1,2]$, $[2,2]$, $[1,3,3]$ itd. Budući da je poredak nebitan, onda je na primjer $[1,3,3] = [3,1,3]$.

Promatrat ćemo dakle ova četiri slučaja: najprije varijacije i kombinacije *bez ponavljanja*, te zatim u sljedećem odjeljku (vidi Odjeljak 3.3 na str. 28) varijacije i kombinacije *s ponavljanjem*.

Navedene klase objekata možemo prebrojavati već gore navedenim metodama, temeljenim u bitnome na Produktnom pravilu. Međutim, korisno je uvesti ove specijalne kombinatoričke objekte kao pretince unutar područja kombinatorike, za koje ćemo vidjeti općenite postupke njihova prebrojavanja. To nam omogućuje lakše razvrstavanje odgovarajućih problema u pripadajuće pretince.

3.2.1 Varijacije bez ponavljanja

Varijacijom bez ponavljanja reda k od zadanog n-članog skupa $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, gdje je $k \le n$, zovemo bilo koji poredani k-terac različitih elemenata iz A_n.

U slučaju kada imamo $k = n$, tj. kada gledamo poredane n-terce n-članog skupa, onda takve varijacije zovemo **permutacijama** (ili premjestbama) n-članog skupa. Svaku permutaciju skupa A_n možemo poistovjetiti s nekom bijekcijom $f : A_n \to A_n$ (vidi Primjer 3.25 na str. 18 niže).

■ **Primjer 3.23** Ako je na primjer $A_3 = \{1,2,3\}$, onda za $k = 2$ imamo šest poredanih dvojaca:

$$(1,2), \quad (1,3), \quad (2,1), \quad (2,3), \quad (3,1), \quad (3,2).$$

(Pišemo ih u leksikografskom poretku, tj. u "rastućem" slijedu.). Za $k = 3$ imamo ovih šest poredanih trojaca, tj. permutacija:

$$(1,2,3), \quad (1,3,2), \quad (2,1,3), \quad (2,3,1), \quad (3,1,2), \quad (3,2,1).$$

Na primjer permutaciji $(3,2,1)$ odgovara bijekcija $f : A_3 \to A_3$ definirana sa $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$. Opširnije o permutacijama bit će riječi kasnije. ■

Za zadani prirodan broj n, broj $n!$ (čitaj *n-faktorijela*) definira se kao umnožak točno n uzastopnih prirodnih brojeva od 1 do n, tj. kao

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n. \tag{3.2}$$

Definiramo još i $0! := 1$. Primijetite da je $n! = n \cdot (n-1)!$ za sve prirodne brojeve n. Na primjer, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, itd. Faktorijelna funkcija $n \mapsto n!$ raste brže od bilo koje eksponencijalne funkcije u varijabli n (na primjer, $n \mapsto 10^n$), kad n postaje velik. Na primjer, $60!$ je veće od 10^{80} (podsjetimo da broj atoma u cijelom vidljivom svemiru iznosi oko 10^{80}), a 70! je veće od 10^{100}, što su nezamislivo veliki brojevi.

Brzinu rasta faktorijelne funkcije $n \mapsto n!$ dobro ilustrira ovaj primjer. Broj 10! iznosi oko tri i pol milijuna, a jednak je *točno* broju sekunda u šest tjedana (tj. u nešto više od mjesec dana; ako ne vjerujete, provjerite!). Prema tome, broj 11! veći je od broja sekunda u jednoj godini (provjerite), a broj 13! je onda veći od broja sekunda u jednom i pol stoljeću! Doista, $13! = 13 \cdot 12 \cdot (11!) > 150 \cdot (11!)$.

Teorem 3.2.1 — Broj varijacija bez ponavljanja. Neka je zadan neprazan n-člani skup i prirodan broj k takav da je $k \leq n$. Broj poredanih k-teraca različitih elemenata iz n-članog skupa, jednak je padajućem umnošku k uzastopnih prirodnih brojeva, počevši od n:

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ukupan broj permutacija (ili premjestba) n-članog skupa jednak je $n!$.

Dokaz. Ako smo u nekom k-tercu na prvo mjesto stavili neki od n elemenata, onda na drugo mjesto možemo staviti bilo koji od preostalih $n-1$ elemenata, na treće bilo koji od preostalih $n-2$, itd., na zadnje k-to bilo koji od preostalih $n-k+1$. Prema Produktnom pravilu onda imamo ukupno $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ varijacija bez ponavljanja reda k. Odavde za $k = n$ dobivamo odmah i $n!$ kao broj permutacija n članog skupa. ■

Kao što vidimo, primjena Produktnog pravila (tj. Teorema 3.1.1) je u slučaju Teorema 3.2.1 toliko prirodna, da gotovo da je lakše odgovarajući zadatak riješiti izravno primjenom Produktnog pravila, nego prepoznavanjem pripadajuće vrste kombinatoričkog objekta.

■ **Primjer 3.24** Na koliko se načina 30 učenika može rasporediti u učionici s 30 mjesta?

Rješenje. Riječ je o permutacijama 30 elemenata, dakle na $30! \approx 2.65 \cdot 10^{32}$ načina. (To je nezamislivo veliki broj; na primjer u litri vode nalazi se oko 10^{23} atoma.) ■

■ **Primjer 3.25** Neka je zadan n-člani skup A. Uvjerite se da broj svih bijekcija $f : A \to A$ iznosi $n!$.

Rješenje. Prema Pravilu bijekcije, bez gubitka općenitosti možemo promatrati n-člani skup $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Svaku bijekciju $f : A \to A$ možemo zapisati u obliku

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

pri čemu je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ neka permutacija (premjestba) skupa $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Time smo uspostavili bijekciju iz skupa svih bijektivnih funkcija $f : A \to A$ u skup svih permutacija skupa A. Budući da prema Teoremu 3.2.1 svih permutacija skupa A ima $n!$, onda je (po Pravilu bijekcije) to ujedno i broj svih bijekcija iz skupa A samog sebe.

■

Vrlo često se bijekcije iz nekog konačnog skupa A u isti taj skup također zovu *permutacijama* tog skupa. Razlog za to je jasan iz Primjera 3.25.

■ **Primjer 3.26** Zadan je tročlani skup $A = \{1,2,3\}$. Ispišimo svih $3! = 6$ bijekcija iz skupa A u samoga sebe. To su, prema oznaci u (3.3), ove bijekcije:

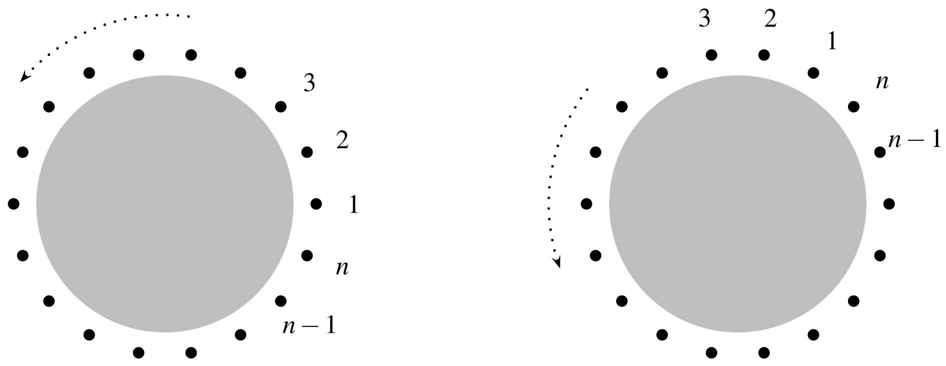
$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Možemo ih poistovjetiti s permutacijama (premjestbama) zadanog tročlanog skupa $A = \{1,2,3\}$:

$$(1,2,3), \quad (1,3,2), \quad (2,1,3), \quad (2,3,1), \quad (3,1,2), \quad (3,2,1).$$

■

Sljedeći primjer nam ilustrira pojam 'ciklične permutacije' (i).



Slika 3.8: *Ciklične permutacije* (tj. kružne premjestbe): ove dvije kružne permutacije smatramo istim, jer jedna iz druge nastaje rotacijom. Vidi Primjer 3.27.

■ **Primjer 3.27** Na koliko načina n ljudi može sjesti za okrugli stol? Pretpostavka je da zarotirane rasporede smatramo istima. Vidi Sliku 3.8.

Rješenje. Za bilo koji raspored imamo n istih zarotiranih (vidi Sliku 3.8). Zato ukupan broj rasporeda (koji uključuje i zarotirane) treba podijeliti s n. Rezultat je $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Drugi način. Uzmimo jednog čovjeka, i rasporedimo ga na bilo koje od n mjesta za okruglim stolom (na primjer čovjeka pod brojem 1 na Slici 3.8 s lijeva). Nadalje raspoređujemo u niz preostalih $n-1$ ljudi koji redom sjede njemu s desna (koji su pod brojevima $2,\dots,n$). A to se može učiniti na $(n-1)!$ načina. ■

Sljedeći rezultat je ekvivalentan tvrdnji Teorema 3.2.1, dotično, broj varijacija bez ponavljanja jednak je odgovarajućem broju injektivnih funkcija.

Teorem 3.2.2 — Broj injektivnih funkcija među konačnim skupovima. Neka su skupovi $A = \{a_1,\dots,a_k\}$ i $B = \{b_1,\dots,b_n\}$ konačni neprazni, takvi da je $k \le n$. Onda je broj svih **injektivnih funkcija** $f : A \to B$ jednak padajućem umnošku k uzastopnih prirodnih brojeva počevši od n:

$$n(n-1)\cdots(n-k+1), \tag{3.4}$$

tj. $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ako je $k = n$, onda je svaka injektivna funkcija iz A_n u B_n ujedno i bijekcija. Prema tome, dobivamo da je broj svih **bijektivnih funkcija** iz n-članog skupa A_n u n-člani skup B_n jednak $n!$.

Dokaz. Za bilo koju injektivnu funkciju $f : A \to B$ možemo vrijednost $f(a_1) \in B$ birati na n načina, zatim $f(a_2)$ na $n-1$ načina,..., $f(a_k)$ na $n-k+1$ načina, pa tvrdnja slijedi iz Produktnog pravila (vidi Teorem 3.1.1 na str. 9). ■

Napomena 3.1 Padajući umnožak $n(n-1)\dots(n-k+1)$, koji se pojavljuje u Teoremu 3.2.2, se u literaturi često označuje sa $(n)_k$. Zovemo ga *padajućim faktorijelom*. Druga oznaka u čestoj uporabi je $n^{\underline{k}}$ (rabi ju na primjer Donalnd Knuth).

■ **Primjer 3.28** Ako je $k > n$ onda nema niti jedne injektivne funkcije iz k-članog skupa A u n-člani skup B.

Rješenje. Doista, kada bi postojala takva injektivna funkcija $f : A \to B$, onda bi radi injektivnosti skup $f(A)$ također morao imati k elemenata kao i A. Međutim, $f(A)$ je podskup skupa B, pa bi skup B morao imati barem k elemenata (tj. moralo bi biti $k \le n$), što je nemoguće, jer je $k > n$. ■

■ **Primjer 3.29** Na koliko se načina 6 putnika može rasporediti u autobus s 15 sjedala?

Rješenje. Putnike razlikujemo: prvog možemo smjestiti na 15 načina, drugog na 14 načina (jer ne može sjesti na mjesto gdje već sjedi prvi putnik), trećeg na 13 načina,..., šestog na 10 načina. Riječ je o varijacijama bez ponavljanja 15 elemenata, reda 6. Prema Produktnom pravilu, putnike možemo smjestiti na $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 3\,603\,600$ načina.

Drugo rješenje. Traži se zapravo broj injektivnih funkcija iz skupa od 6 putnika u skup od 15 sjedala. (Trebamo promatrati injektivne funkcije, jer niti koja dva različita putnika ne mogu sjediti na istom sjedalu.) Treba samo primijeniti Teorem 3.2.2 sa $k = 6$ i $n = 15$. ■

■ **Primjer 3.30** Zadan je n-člani skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, gdje je $n \ge 2$. Koliko ima bijekcija $f : A \to A$ takvih da je $f(a_1) = a_2$?

Rješenje. Budući da znamo da je $f(a_1) = a_2$, onda svaku bijekciju $f : A \to A$ možemo poistovjetiti s bijekcijom $g : (A \setminus \{a_1\}) \to (A \setminus \{a_2\})$, tj. s bijekcijom između $(n-1)$-članih skupova. Takvih bijekcija ima $(n-1)!$. Kao što vidimo, i ovdje smo rabili Pravilo poistovjećivanja, tj. Pravilo bijekcije. ■

3.2.2 Kombinacije bez ponavljanja

Kombinacija bez ponavljanja reda k od n-članog skupa $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ je bilo koji njegov k-člani podskup. Prema tome, kombinacija bez ponavljanja je samo drugi naziv za *podskup* skupa. Poredak elemenata nam, dakle, nije bitan.

Teorem 3.2.3 — Broj kombinacija bez ponavljanja. Neka je $k \le n$, gdje je k nenegativan cijeli broj i n prirodan broj. Broj k-članih podskupova n-članog skupa jednak je

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{3.5}$$

Broj $\binom{n}{k}$ definiran sa (3.5) zove se **binomni koeficijent**, a oznaku $\binom{n}{k}$ čitamo 'n povrh k'. Na primjer, $\binom{n}{0} = 1$ (jer imamo samo jedan nulčlani podskup – prazan podskup $\emptyset$), $\binom{n}{1} = n$ (jer n-člani skup ima n jednočlanih podskupova), $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$ (broj dvočlanih podskupova n-članog skupa), itd. Primijetite da je razlomak na desnoj strani jednakosti (3.5) uvijek skrativ do kraja, tj. prirodan broj, jer $\binom{n}{k}$ predstavlja *broj* k-članih podskupova n-članog skupa.

Dokaz Teorema 3.2.3. Neka je $p(k,n)$ broj k-članih podskupova n-članog skupa, koji želimo izračunati. Onda je $p(k,n)\cdot k!$ jednak broju svih *poredanih* k-teraca s elementima iz n-članog skupa, tj. $p(k,n)\cdot k! = n(n-1)\dots(n-k+1)$, gdje smo upotrijebili Theorem 3.2.1. Dakle, $p(k,n) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$. ■

Ponekad se u literaturi skup svih k-članih podskupova n-članog skupa A označava s $\binom{A}{k}$. Onda tvrdnju gornjeg Teorema 3.2.3 možemo vrlo sažeto iskazati ovako:

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}.$$

Budući da je $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, iz (3.5) dolazimo do sljedeće korisne formule:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3.6}$$

Iz nje odmah slijedi *svojstvo simetrije* binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{3.7}$$

To se međutim može vrlo lako dokazati i kombinatorički. Doista, svakom od $\binom{n}{k}$ k-članih podskupova skupa $\{a_1,\dots,a_n\}$ možemo bijektivno pridružiti $(n-k)$-člani komplement, a njih ima $\binom{n}{n-k}$. Zbog bijektivnosti komplementiranja (iz skupa k-članih podskupova u skup $(n-k)$-članih podskupova n-članog skupa; pogledajte Primjer 3.31 malo niže), njihov je broj isti. Tu smo upotrijebili Pravilo bijekcije; vidi str. 7.

Dodatak

■ **Primjer 3.31** Neka je $A := \{a_1,\dots,a_n\}$ zadani skup od n elemenata, i k nenegativan cijeli broj koji je $\le n$, tj. $k \in \{0,1,\dots,n\}$. Provjerite izravno (kombinatorički) da skup svih k-članih podskupova skupa A ima isti broj elemenata kao i skup njegovih $(n-k)$-članih podskupova.

Rješenje. Neka je $\binom{A}{k}$ skup svih k-članih podskupova n-članog skupa A, a $\binom{A}{n-k}$ skup svih $(n-k)$-članih podskupova od A. Dovoljno je provjeriti da je funkcija $F_k : \binom{A}{k} \to \binom{A}{n-k}$, definirana sa $F_k(B) := \overline{B} = A \setminus B$ (komplementiranje s obzirom na skupa A), bijekcija, tj. injekcija i surjekcija.

Neka su B i C iz $\binom{A}{k}$, tj. k-člani podskupovi od A. Ako je $F_k(B) = F_k(C)$, tj. $\overline{B} = \overline{C}$, onda je $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$, tj. $B = C$. Time je injektivnost funkcije F_k dokazana.

Neka je D bilo koji element iz $\binom{A}{n-k}$, tj. $(n-k)$-člani podskup od A. Onda je $\overline{D}$ k-člani podskup od A, tj. $\overline{D} \in \binom{A}{k}$ i $F_k(\overline{D}) = \overline{\overline{D}} = D$. Time je dokazana i surjektivnost preslikavanja F_k. ■

■ **Primjer 3.32** Koliko ima osmeročlanih podskupova deseteročlanog skupa?

Rješenje. Prema Teoremu 3.2.3, traženi broj iznosi $\binom{10}{8}$. Ovaj broj je puno lakše izračunati rabeći svojstvo simetrije binomnih koeficijenata: $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$. ■

■ **Primjer 3.33** Petero ljudi se rukuju svaki sa svakim (samo jednom za svaki par osoba). Koliko ima takvih rukovanja?

Rješenje. Svakom rukovanju jednoznačno odgovara odabir nekog dvočlanog podskupa peteročlanog skupa svih ljudi (koji su se rukovali). Prema Pravilu bijekcije, broj rukovanja jednak je broju dvočlanih podskupova peteročlanog skupa, tj. $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$. (Vidi Teorem 3.2.3 na str. 20, za $n = 5$ i $k = 2$.) ■

■ **Primjer 3.34** Na koliko se načina u razredu od 30 učenika mogu odabrati trojica predstavnika?

Rješenje. Predstavnici su ravnopravni, dakle biramo tročlani podskup iz 30-članog skupa. To se može obaviti na $\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!} = 4060$ načina. ■

■ **Primjer 3.35** U ravnini je zadano n različitih točaka od kojih niti koje 3 nisu na istom pravcu. Koliko ima

(a) dužina,

(b) trokuta,

s vrhovima u zadanim točkama?

Rješenje.

(a) Dužinu određuju bilo koje dvije točke, bez obzira na poredak. Prema Pravilu bijekcije (vidi str. 7) broj dužina jednak je broju dvočlanih podskupova skupa svih n točaka. Budući tih dvočlanih podskupova ima $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, taj broj predstavlja i ukupan broj dužina.

(b) Na sličan način, svaki je trokut s vrhovima u zadanim točkama jednoznačno određen sa svoja tri vrha. Po Pravilu bijekcije, tih trokuta ima koliko i tročlanih podskupova tog skupa od n točaka, tj. $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. ■

■ **Primjer 3.36** Koliko kombinacija ima u

(a) LOTU 6 od 45;

(b) LOTU 7 od 39?

Rješenje. Poredak izvučenih kuglica u LOTU nije bitan, pa je riječ o kombinacijama bez ponavljanja:

(a) broj kombinacija (šesteročlanih podskupova skupa od 45 brojeva) iznosi

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6!} = 8\,145\,060;$$

(b) Broj kombinacija (sedmeročlanih podskupova skupa od 39 brojeva) iznosi

$$\binom{39}{7} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{7!} = 15\,380\,937.$$

■

■ **Primjer 3.37** Na prvoj godini studija formirane su tri disjunktne (tj. nepresječajuće) grupe studenata. Prva grupa ima 34 studenta, druga 37 studenata, a treća 32 studenta.

(a) Na koliko načina možemo odabrati dva predstavnika prve godine studija?

(b) Na koliko načina možemo odabrati dva predstavnika ako oni moraju biti iz različitih grupa?

Rješenje. (a) Po dva predstavnika od $34+37+32=103$ studenata može se odabrati na $\binom{103}{2}=5\,253$ načina, tj. koliko ima dvočlanih podskupova skupa svih studenata.

(b) Po dva predstavnika se mogu odabrati tako da budu dva iz prve i druge druge grupe, ili dva iz prve i treće grupe, ili po dva iz druge i treće grupe. Rabeći Produktno pravilo, te zatim Pravilo zbrajanja, dobivamo da je broj po dva tražena predstavnika jednak

$$34\cdot 37+34\cdot 32+37\cdot 32=3\,530.$$

■

■ **Primjer 3.38** U ravnini je dano 8 zelenih, 10 žutih i 12 crvenih točaka. Koliko ima dužina s vrhovima u tim točkama, uz uvjet da su vrhovi raznobojni?

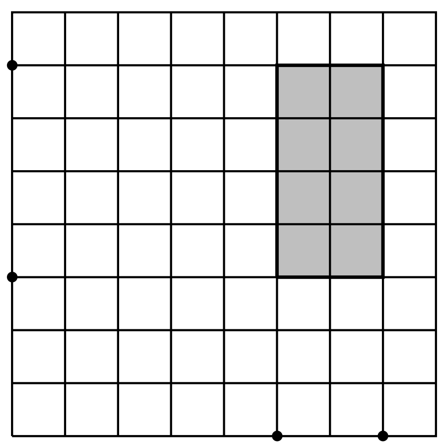
Rješenje. Gledamo dužina kojima su vrhovi spojeni zeleno-žuto, zeleno-crveno ili žuto-crveno. Rabeći Produktno pravilo, a zatim Pravilo zbrajanja, dobivamo da je ukupan broj traženih dužina jednak

$$8\cdot 10+8\cdot 12+10\cdot 12=296.$$

Do istog se rezultata može doći i uporabom Pravila komplementa. Ukupan broj svih dužina koje možemo povući između navadenih $8+10+12=30$ točaka jednak je broju dvočlanih podskupova skupa od svih 30 točaka, a on iznosi $\binom{30}{2}$ (vidi Teorem 3.2.3 za $n=30$ i $k=2$). Od tog broja, prema Pravilu komplementa, treba oduzeti broj dužina obojenih istom bojom (koji računamo po Pravilu zbrajanja):

$$\binom{30}{2}-\left[\binom{8}{2}+\binom{10}{2}+\binom{12}{2}\right]=296.$$

■



Slika 3.9: Svaki pravokutnik šahovske ploče jednoznačno je određen odabirom dviju točaka (od njih devet, označenih malim krugovima) na dolnjoj strani, te još dviju točaka (od njih devet) na lijevoj okomitoj strani. Vidi Primjer 3.39.

■ **Primjer 3.39** Koliko na šahovskoj ploči ima pravokutnika? (Vrhovi pravokutnika su u vrhovima $8\times 8=64$ kvadratića šahovske ploče, a stranice su paralelene s odgovarajućim rubovima ploče. Vidi Sliku 3.9).

Rješenje. Možemo bez gubitka općenitosti pretpostaviti da je šahovska ploča određena s koordinatnim sustavom u ravnini: s devet vertikalnih pravaca $x=0$, $x=1$, $\dots$, $x=8$, i s devet vodoravnih pravaca $y=0$, $y=1$, $\dots$, $y=8$. Pravokutnik je jednoznačno određen izborom dviju od devet mogućih točaka na x-osi, te dviju od devet mogućih točaka na y-osi (vidi Sliku 3.9). Prema Produktnom pravilu, takvih izbora točaka ima ukupno $\binom{9}{2}\cdot\binom{9}{2}=1\,296$ (vidi Teorem 3.2.3 za $n=9$ i $k=2$), a to je prema Pravilu bijekcije ujedno i ukupan broj traženih pravokutnika na šahovskoj ploči. ∎

Binomni koeficijenti imaju sljedeće važno svojstvo, za koje je moguće dati jednostavan kombinatorički dokaz. (Naravno, ta se jednakost može lako dokazati i izravnim algebarskim računom.)

Propozicija 3 Za sve prirodne brojeve n i k, gdje je $k<n$, vrijedi

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}. \tag{3.8}$$

Dokaz. Učvrstimo jedan od n elemenata (recimo prvi) u n-članom skupu $\{1,2,\dots,n\}$. Sada izbor k od ukupno n elemenata možemo provesti na jedan od sljedeća dva načina:

(a) odabiremo k elemenata *različitih* od prvog, a to je isto što i odabrati k elemenata među preostalih $n-1$ elemenata; to možemo učiniti na $\binom{n-1}{k}$ načina;

(b) ili odabiremo k elemenata tako da je među njima i prvi. Tome očevidno odgovara zapravo odabir $k-1$ elemenata među preostalih $n-1$ elemenata, što se može učiniti na $\binom{n-1}{k-1}$ načina.

Tvrdnja slijedi iz Pravila zbrajanja. Preporučamo čitatelju da za vježbu analizira slučaj $n=5$ i $k=3$. ■

S pomoću jednakosti (3.8) između binomnih koeficijenata, koja kaže da je zbroj dvaju uzastopnih binomnih koeficijenata opet binomni koeficijent, gradi se znameniti **Pascalov trokut** brojeva $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\vdots & \iddots & & & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}$$

Izračunate vrijednosti gornjih binomnih koeficijenata slažu se s formulom (3.8), tj. zbroj dvaju (po volji odabranih) uzastopnih binomnih koeficijenata u bilo kojem redku jednak je odgovarajućem binomnom koeficijentu u sljedećem redku:

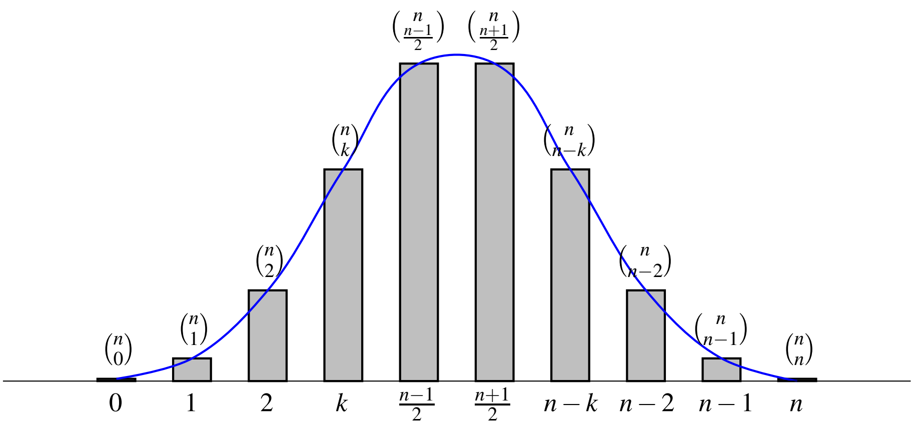
$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & \iddots & & & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}$$

Primijetite da dobiveni redci u Pascalovu trokutu odgovaraju koeficijentima koji se javljaju potenciranjem binoma $1+x$:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(1+x)^0 = & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(1+x)^1 = & & & & & & 1 & + & x & & & & & \\
(1+x)^2 = & & & & & 1 & + & 2x & + & x^2 & & & & \\
(1+x)^3 = & & & & 1 & + & 3x & + & 3x^2 & + & x^3 & & & \\
(1+x)^4 = & & & 1 & + & 4x & + & 6x^2 & + & 4x^3 & + & x^4 & & \\
(1+x)^5 = & & 1 & + & 5x & + & 10x^2 & + & 10x^3 & + & 5x^4 & + & x^5 & \\
\vdots & \iddots & & & & & & \vdots & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

U Teoremu 3.2.4 (vidi također (3.12)) ćemo vidjeti da to vrijedi i općenito.

Nije teško vidjeti da graf funkcije $f : \{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{N}$ zadane sa $f(k) := \binom{n}{k}$, ima oblik zvonolike krivulje (Gaussova zvona), a svoj maksimum dostiže na sredini zvona, tj. za $k = \lfloor n/2 \rfloor$ (najveći cijeli broj koji je $\le n/2$). Vidi Sliku 3.10.



Slika 3.10: Ako je prirodan broj n učvršćen i *neparan*, možemo promatrati tablicu svih $n+1$ vrijednosti binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$, gdje je $k = 0,1,2,\dots,n$, koji odgovaraju visinama sivih pravokutnika, kao na ovoj slici. Dobivamo zvonoliku krivulju koja se zove *Gaussovo zvono*, s najvećom vrijednošću za $k = \frac{n-1}{2}$ i $k = \frac{n+1}{2}$. Tablica odgovara slučaju kada je $n = 9$. Visine $\binom{n}{k}$ (koje odgovaraju visinama pravokutnika) su u vertikalnom smjeru smanjene 30 puta. Za $n = 9$, najniži pravokutnik ima visinu $\binom{9}{0} = 1$, a najviši $\binom{9}{4} = 126$.

Binomni koeficijenti su povezani s izračunom produkta od n binoma $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$, za bilo koje $x,y \in \mathbb{R}$ (štoviše, i za bilo koje $x,y \in \mathbb{C}$).

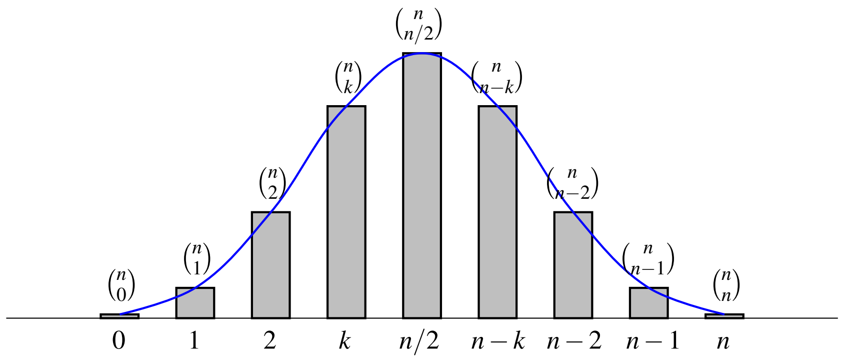
Teorem 3.2.4 — Binomni teorem. Za sve kompleksne brojeve x,y i sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n, \tag{3.9}$$

ili u sažetijem zapisu:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{3.10}$$

Ako u jednakosti (3.9) stavimo $x = 1$, a zatim y preimenujemo u x, dobivamo



Slika 3.11: Ako je prirodan broj n učvršćen i *paran*, možemo promatrati tablicu svih $n+1$ vrijednosti binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$, gdje je $k = 0,1,2,\dots,n$, koji odgovaraju visinama sivih pravokutnika, kao na ovoj slici. Dobivamo *Gaussovo zvono*, s najvećom vrijednošću za $k = n/2$. Tablica odgovara slučaju kada je $n = 8$. Visine $\binom{n}{k}$ (koje odgovaraju visinama pravokutnika) su u vertikalnom smjeru smanjene 20 puta. Za $n = 8$, najniži pravokutnik ima visinu $\binom{8}{0} = 1$, a najviši $\binom{8}{4} = 70$.

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n, \tag{3.11}$$

ili u sažetijem zapisu:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{3.12}$$

Kombinatorički dokaz Teorema 3.2.4. U izrazu

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$$

će nakon množenja opći član u dobivenom zbroju imati oblik $c_k x^{n-k} y^k$, gdje je c_k konstanta koju želimo odrediti, za sve $k = 0,1,\dots,n$. Produkt $x^{n-k}y^k$ može se dobiti tako da uzmemo k elemenata y iz ukupno n binoma $x+y$ u umnošku $(x+y)^n$. Tih k elemenata možemo odabrati na bilo koji način među n binoma, dakle na $\binom{n}{k}$ načina (vidi Teorem 3.2.3 na str. 20). Element x se nakon toga uzimlje iz preostalih $n-k$ binoma. Prema tome je $c_k = \binom{n}{k}$. Time je binomni teorem dokazan. ■

Dokaz binomnog teorema (tj. binomne formule (3.9)) moguće je provesti i matematičkom indukcijom, međutim kombinatorički dokaz je puno elegantniji.

■ **Primjer 3.40** Uvjerite se da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \tag{3.13}$$

Možete li dati kombinatoričko objašnjenje ove jednakosti?

Rješenje. Jednakost (3.13) se dobiva odmah iz (3.11) uvrštavanjem $x = 1$.

Jednakost (3.13) ima jednostavnu kombinatoričku interpretaciju. Na lijevoj strani imamo zapravo zbroj broja svih k-članih podskupova n-članog skupa za $k = 0$ (čemu odgovara prazan skup),

$k = 1$ (svi jednočlani podskupovi) itd. do $k = n$. Vidimo da su tu zapravo uključeni *svi* podskupovi n članog skupa. Dakle gornja relacija pokazuje da partitivni skup n-članog skupa ima 2^n elemenata. To znamo već od prije; vidi Teorem 3.1.4. ■

■ **Primjer 3.41** Provjerite da za bilo koji prirodan broj n vrijedi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots,$$

pri čemu na lijevoj strani zbrajamo binomne koeficijente $\binom{n}{k}$ s parnim cijelim brojevima k sadržanim u intervalu $[0,n]$, a na desnoj strani zbrajamo $\binom{n}{k}$ s neparnim cijelim brojevima k sadržanim u $[0,n]$. Drugim riječima, *broj podskupova n-članog skupa s parnim brojem elemenata jednak je broju podskupova s neparnim brojem elemenata.*[4] To znači da je broj podskupova n-članog skupa koji imaju paran broj elemenata jednak 2^{n-1}, kao i broj podskupova s neparnim brojem elemenata.

Rješenje. Iz (3.11) za $x = -1$ dobivamo

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

tj. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} \pm \cdots = 0$. Odatle tvrdnja odmah slijedi. ■

Dodatak

■ **Primjer 3.42** Zadan je skup od n elemenata. Za koje nenegativne cijele brojeve k je broj njegovih k-članih podskupova najveći?

Rješenje. Broj k-članih podskupova n-članog skupa je $a_k := \binom{n}{k}$. Pogledajmo najprije pitanje monotonosti konačnog niza $(a_k)_{k=0}^n := (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ od $n+1$ binomnih koeficijenata.

Nejednakost $a_k < a_{k+1}$, za neki $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, je ekvivalentna s $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, tj. sa

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{n(n-1)\ldots(n-(k+1)+1)}{(k+1)!}}{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}} = \frac{n-k}{k+1} < 1.$$

Prema tome je $n - k < k + 1$, tj. $k < \frac{n-1}{2}$. Zaključujemo da brojevi a_k strogo rastu za $k = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. (Pritom se za zadani realan broj x, broj $\lfloor x \rfloor$ definira kao najveći cijeli broj koji je $\leq x$.)

Na sličan način, vidimo da je nejednakost $a_k > a_{k+1}$ ekvivalentna s $k > \frac{n-1}{2}$, pa zaključujemo da brojevi a_k strogo padaju za $k = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-1, n$. (Pritom se za zadani realan broj x, broj $\lceil x \rceil$ definira kao namanji cijeli broj koji je $\geq x$.)

Prema tome, za zadani prirodan broj n je vrijednost binomnog koeficijenta $a_k := \binom{n}{k}$ najveća kada je k blizu $n/2$. Točnije, najveća je za $k_0 := \frac{n-1}{2}$ ako je n *neparan* (i pritom je $a_{k_0} = a_{k_0+1}$ radi svojstva simetrije binomnih koeficijenata, jer je $n - k_0 = k_0 + 1$), a za $k_0 = \frac{n}{2}$ ako je broj n *paran*. Vidi Slike 3.10 i 3.11 na str. 25 i 26. ■

[4] Ta je tvrdnja očevidna ako je n neparan broj, zbog svojstva simetričnosti binomnih koeficijenata, tj. radi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ za sve $k = 0, 1, \ldots, n$. Doista, ako je k paran broj, onda je $n - k$ neparan broj.

Zadatci iz kombinatorike za samostalan rad

Zadatak 3.9 Na pravcu je zadano 15 točaka, od toga 9 plavih i 6 crvenih.

(a) Koliko ima zatvorenih segmenata strogo pozitivne duljine određenih točkama iste boje?

(b) Koliko ima zatvorenih segmenata strogo pozitivne duljine određenih točkama raznih boja? Koliko ima usmjerenih dužina strogo pozitivne duljine određenih točkama iste boje? (*Usmjerena dužina* je bilo koji poredani dvojac točaka.)

(c) Koliko ima usmjerenih dužina strogo pozitivne duljine određenih točkama različitih boja?

Zadatak 3.10 U grupi od 30 studenata stvaraju se timovi za suradnju na projektima. Tim može imati najmanje četiri, a najviše šest članova. Koliko timova je moguće složiti u toj grupi?

Zadatak 3.11 U prostoru je zadano 10 točaka. Koliki je najveći broj mogućih ravnina od kojih svaka sadrži barem tri od tih deset točaka?

Zadatak 3.12 Za okrugli stol sjeda pet žena i pet muškaraca, tako da dvije žene ne sjede jedna pored druge, kao niti dva muškarca. Koliko je mogući broj rasporeda? (Dva kružna rasporeda smatramo istim, ako se jedan iz drugog može dobiti rotacijom svih osoba za isti broj mjesta)

Zadatak 3.13 Koliko ima injektivnih funkcija iz jednog n-članog skupa u drugi n-člani skup? (Pogledajte najprije slučajeve $n = 2$ i $n = 3$.) Koliko ima surjektivnih funkcija iz jednog n-članog skupa u drugi n-člani skup?

Zadatak 3.14 Koliko ima strogo rastućih funkcija

$$f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ ?}$$

(Za funkciju f kažemo da je *strogo monotono rastuća*, ili kraće – *strogo rastuća*, ako za sve i i j iz domene, takve da je $i < j$, vrijedi $f(i) < f(j)$.) Koliko ima funkcija f koje nisu strogo monotono rastuće?

Zadatak 3.15 Zadana je kocka $[0,10]^3 := [0,10] \times [0,10] \times [0,10]$ (Kartezijev produkt triju zatvorenih intervala), čije sve stranice su duljine 10. Koliko kvadara sadrži ta kocka, tako da su stranice svakog kvadra paralelne sa stranicama kocke, a vrhovi imaju cjelobrojne koordinate? (*Kvadar* ima oblik $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, gdje su $a < b$, $c < d$ i $e < f$, a vrijednosti $a,b,c,d,e,f \in [0,10]$ su cjelobrojne.)

Zadatak 3.16 (a) Izračunajte koeficijent uz x^{12} u razvoju binoma $(1+x)^{15}$. Koje je kombinatoričko značenje tog koeficijenta?

(b) Za koje k je vrijednost koeficijenta uz x^k najveća i kolika je vrijednost tog koeficijenta?

(c) Izračunajte $\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \cdots + \binom{15}{15}$ i opišite kombinatoričko značenje dobivene jednakosti.

(d) Izračunajte zbroj $\binom{15}{1} + \binom{15}{3} + \cdots + \binom{15}{15}$ i opšite njegovo kombinatoričko značenje.

3.3 Varijacije i kombinacije s ponavljanjem

Permutacije bez ponavljanja su specijalan slučaj varijacija bez ponavljanja, te su uvedene na str. 17. Međutim, permutacije s ponavljanjem nisu specijalan slučaj varijacija s ponavljanjem, pa ćemo njih najprije razmotriti.

3.3.1 Permutacije s ponavljanjem

Zadan je skup od k međusobno različitih elemenata $\{a_1, \ldots, a_k\}$.[5] Promatramo sve *poredane* n-terce elemenata tog skupa u kojima se element a_1 pojavljuje n_1 puta, a_2 se pojavljuje n_2-puta itd.,

[5]Primijetite da smo u odjeljku o permutacijama bez ponavljanja na str. 17 promatrali skupove od n elemenata umjesto njih k.

pri čemu je dakako $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. Broj n_j označava kratnost elementa a_j, pri čemu je on nenegativan cijeli broj (tj. kratnost elementa a_j može biti i nula, što znači da se u tom slučaju element a_j ne pojavljuje u multipskupu). Takve n-terce zovemo **permutacijama n-tog reda s ponavljanjem**. Permutirati znači premjestiti, permutacija je premjestba.

■ **Primjer 3.43** Neka je zadan dvočlani skup $\{0,1\}$ (tj. $k=2$, $a_1=0$, $a_2=1$) i neka je $n=3$, $n_1=1$, $n_2=2$. Skup svih permutacija trećeg reda s ponavljanjem (u kojima je 0 kratnosti jedan, a 1 je kratnosti dva) ima tri elementa:

$$(0,1,1), \quad (1,0,1), \quad (1,1,0).$$

Vidimo da se ovdje radi zapravo o broju dvočlanih podskupova tročlanog skupa[6], kojih ima $\binom{3}{2}=3$.

Na sličan način, za skup $\{0,1\}$ je odgovarajući broj permutacija n-toga reda, uz $n_1=k$ i $n_2=n-k$, jednak broju $(n-k)$-članih podskupova n-članog skupa, tj. $\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{n_1!n_2!}$. ■

Teorem 3.3.1 — Permutacije s ponavljanjem. Broj permutacija n-tog reda k-članog skupa $\{a_1,\ldots,a_k\}$, u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta, $i=1,\ldots,k$, gdje je $n=n_1+\cdots+n_k$, jednak je

$$\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}.$$

Prvi dokaz. Označimo traženi broj permutacija s ponavljanjem s p. Kada bi svih n elemenata bilo međusobno različito, imali bismo ukupno $n!$ permutacija (bez ponavljanja). Ako zamislimo da je u teoremu neka od traženih p permutacija takva da se odgovarajuća grupa od n_1 elemenata u permutaciji sastoji od n_1 međusobno različitih elemenata (a ne istih), i to različitih također i od svih ostalih elemenata, prema Produktnom pravil bismo imali $n_1!\cdot p$ odgovarajućih permutacija. Ako bismo zatim uzeli da je neka od dobivenih permutacija takva da su i u odgovarajućoj grupi od n_2 svi elementi međusobno različiti (a ne isti) te različiti također i od svih ostalih elemenata, dobili bismo $n_1!n_2!\cdot p$ odgovarajućih permutacija. Nastavljajući tako dalje, dobivamo

$$n_1!n_2!\cdots n_k!\cdot p=n!$$

permutacija. (Taj je broj doista jednak $n!$, jer ovim postupkom na koncu dobivamo $n=n_1+\cdots+n_k$ međusobno različitih elemenata u svakoj permutaciji.) Odatle slijedi da je $p=\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$, čime je tvrdnja dokazana.

Drugi dokaz. Zamislimo da je zadano n mjesta koja u slijedu popunjavamo na željeni način s elementima skupa $\{a_1,\ldots,a_k\}$. Prvih n_1 kopija elementa a_1 možemo na n mjesta razmjestiti na $\binom{n}{n_1}$ načina. Uz bilo koji takav razmještaj pogledajmo preostalih $n-n_1$ mjesta za n_2 kopija elementa a_2. Njih možemo razmjestiti na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina. Zatim uz bilo koji zadani razmještaj n_1 elemenata a_1 i n_2 elemenata a_2 preostaje $n-n_1-n_2$ mjesta. Razmještaj n_3 kopija elementa a_3 na ta mjesta možemo obaviti na $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ načina, itd. Prema Produktnom pravilu, ukupni broj željenih razmještaja (permutacija s ponavljanjem) iznosi

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}=$$
$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_k)!}.$$

Nakon skraćivanja svih parova zagrada (i jer je u zadnjem razlomku $(n-n_1-\cdots-n_k)!=0!=1$) dobivamo rezultat u teoremu. ■

[6] Na primjer, za zadani tročlani skup $\{x,y,z\}$, trojac $(0,1,1)$ možemo smatrati kodom (oznakom) za dvočlani podskup $\{y,z\}$, $(1,0,1)$ za $\{x,z\}$, a $(1,1,0)$ za $\{x,y\}$.

Kao što smo vidjeli iz dokaza binomnog teorema, u potenciji $(x+y)^n$, tj. u $(x+y)(x+y)\dots(x+y)$, broj načina na koji možemo odabrati k x-ova (i time $n-k$ y-a) jednak je upravo koeficijentu uz $x^k y^{n-k}$ u binomnom razvoju, tj. binomnom koeficijentu $\binom{n}{k}$. Slično vrijedi i za trinome $x+y+z$ i općenito, za **multinome** $x_1+x_2+\cdots+x_k$:

Teorem 3.3.2 — Multinomni teorem. Za sve $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ te $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{C}$, vrijedi multinomna formula

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}.$$

Zbrajamo po svim poredanim k-tercima $(n_1,n_2,\dots,n_k)$ nenegativnih cijelih brojeva takvih da je $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi neposredno iz Teorema 3.3.1. Naime, broj načina na koji u potenciji

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = (x_1+x_2+\cdots+x_k)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_k).$$

možemo odabrati n_1 puta varijablu x_1, n_2 puta varijablu x_2,...,n_k puta varijablu x_k, i to po jednu iz svakog od n faktora, gdje je $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, jednak je

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

To je upravo multinomni koeficijent uz $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ u razvoju $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$. ■

■ **Primjer 3.44** Za $k=2$, iz Multinomnog teorema dobivamo upravo Binomni teorem:

$$\begin{aligned}
(x_1+x_2)^n &= \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} x_1^{n_1}x_2^{n_2} = [\text{eliminiramo } n_2 = n-n_1] \\
&= \sum_{n_1=0}^{n} \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} x_1^{n_1}x_2^{n-n_1} = [\text{preimenujmo varijablu } n_1 \text{ u } k] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^k x_2^{n-k}.
\end{aligned}$$

■

Multinomna formula može se zapisati vrlo sažeto i pregledno s pomoću tzv. multiindeksa. Uvedimo oznaku $x := (x_1,x_2,\dots,x_k)$, zatim **multiindeks** $\alpha := (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k) \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^k$, *duljinu multiindeksa* $|\alpha| := \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$, te $x^\alpha := x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_k^{\alpha_k}$ i **multinomni koeficijent**

$$\binom{n}{\alpha} := \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_k!}. \tag{3.14}$$

Onda multinomni teorem (Teorem 3.3.2) možemo kraće formulirati ovako:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} x^\alpha. \tag{3.15}$$

gdje se zbrajanje provodi po svim multiindeksima $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ duljine n.

■ **Primjer 3.45** (a) Kvadrat trinoma jednak je:

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3)^2 &= \binom{2}{2,0,0}x_1^2+\binom{2}{0,2,0}x_2^2+\binom{2}{0,0,2}x_3^2 \\
&\quad+\binom{2}{1,1,0}x_1x_2+\binom{2}{1,0,1}x_1x_3+\binom{2}{0,1,1}x_2x_3 \\
&= \frac{2!}{2!0!0!}x_1^2+\frac{2!}{0!2!0!}x_2^2+\frac{2!}{0!0!2!}x_3^2+\frac{2!}{1!1!0!}x_1x_2+\frac{2!}{1!0!1!}x_1x_3+\frac{2!}{0!1!1!}x_2x_3 \\
&= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.
\end{aligned}
$$

Naravno, do istog rezultata možemo lakše doći izravno, pišući

$$(x_1+x_2+x_3)^2=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)$$

i množeći ‘svaki sa svakim’.

(b) Zadan je polinom $(a+b+c)^3$ trećeg stupnja u varijablama a,b,c. Koeficijent uz a^2c u njegovu razvoju jednak je $\binom{3}{2,0,1}=\frac{3!}{2!0!1!}=3$. ■

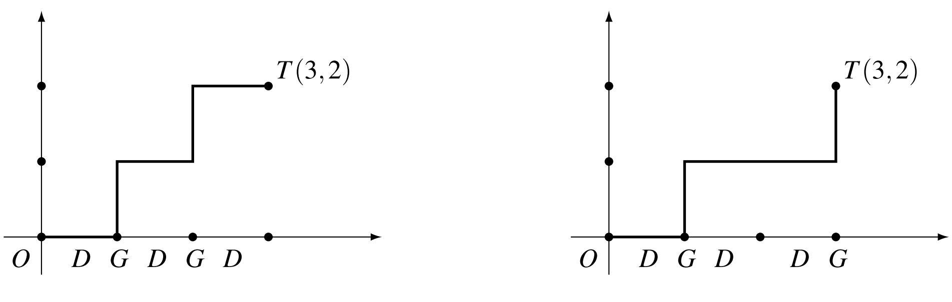
■ **Primjer 3.46** Koliko se različitih riječi (ne nužno smislenih) može napraviti od slova riječi MATEMATIKA, zadržavajući kratnost svakog slova?

Rješenje. Ovdje je riječ je o permutacijama s ponavljanjem. Imamo 3 slova A, po 2 slova M i T, po jedno E, I, K; ukupno 10 slova. Broj različitih riječi je $\frac{10!}{3!2!2!}=151\,200$. ■

■ **Primjer 3.47** U koliko permutacija riječi MATEMATIKA samoglasnici dolaze abecednim redom?

Prvo rješenje. Na raspolaganju imamo 10 mjesta za upis slova riječi MATEMATIKA. Odaberimo bilo kojih 5 mjesta na koje ćemo upisati samoglasnike abecednim redom AAAEI i zatim na preostala mjesta ispermutirajmo slova MMTTK. To se prema Produktnom pravilu može napraviti na ukupno $\binom{10}{5}\cdot\frac{5!}{2!2!}=7\,560$ načina.

Drugo rješenje. Broj svih permutacija riječi MATEMATIKA podijelimo s brojem svih permutacija samoglasnika AAAEI. Rezultat je opet $\left(\frac{10!}{3!2!2!}\right):\frac{5!}{3!}=7\,560$. ■



Slika 3.12: Stubaste uzlazne staze od ishodišta O do točke $T(m,n)$. Ovdje je $m=3$ i $n=2$. Vidi Primjer 3.48.

■ **Primjer 3.48** U ravnini je zadana cjelobrojna koordinatna mreža i točka $T(m,n)$, gdje je $m,n\in\mathbb{N}$. Koliko ima različitih stubastih uzlaznih staza od točke $O(0,0)$ do T duž koordinatne mreže? Svakom stazom pomičemo se za jedno mjesto u desno (D) ili za jedno mjesto gore (G). Vidi Sliku 3.12.

Rješenje. Svaka takva staza od točke O do T može se jednoznačno opisati slijedom poput $DGDDG\dots$, u kojem se nalazi točno m koraka D i točno n koraka G, da bi se došlo do točke T. To pridruživanje je bijektivno.

Na primjer, za točku $T(3,2)$ se od O do T može doći stazama $DDDGG$, $DGDGD$, $GGDDD$, $GDDDG$ itd. (vidi Sliku 3.12).

Prema Pravilu bijekcije (vidi str. 3) je ukupan broj staza jednak broju poredanih $(m+n)$-teraca sastavljenih od m D-ova i n G-ova. Taj broj je prema Teoremu 3.3.1 na str. 29 jednak

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Na primjer za $m=3$ i $n=2$ je traženi broj stubastih staza jednak $\frac{5!}{3!2!}=10$. ∎

Zadatci iz kombinatorike za samostalan rad

Zadatak 3.17 Odredite koeficijent uz x^3 u razvoju $(1+x+x^2)^5$.

Zadatak 3.18 U ravnini su zadane točke $A(5,3)$ i $B(0,12)$. Koliko ima stubastih staza od točke $O(0,0)$ do B duž cjelobrojne koordinatne mreže, koje su uzlazne od O do A, a silazne od A do B? Svakom silaznom stazom se pomičemo za jedno mjesto u desno, ili za jedno mjesto dolje.

3.3.2 Varijacije s ponavljanjem

Varijacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$ je svaki *poredani* k-terac elemenata iz A_n. Odabrani elementi ne moraju biti međusobno različiti, tj. bilo koji element u k-tercu može se i ponavljati.

■ **Primjer 3.49** Za $A_2=\{0,1\}$ i $k=3$ imamo ovih osam varijacija s ponavljanjem trećeg reda:

$$(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1).$$

Zapisali smo ih u leksikografskom ('rastućem') poretku. ∎

Sljedeći teorem, koji govori o broju varijacija s ponavljanjem, je vrlo jednostavna posljedica Produktnog pravila.

Teorem 3.3.3 — Varijacije s ponavljanjem. Poredanih k-teraca n-članog skupa ima ukupno n^k.

Dokaz. Skup svih varijacija s ponavljanjem jednak je $A_n\times\cdots\times A_n$ (Kartezijev umnožak k skupova). Prema Produktom pravilu (vidi Teorem 3.1.1 na str. 9) vrijedi $|A_n\times\cdots\times A_n|=|A_n|^k=n^k$. ∎

■ **Primjer 3.50** Koliko je mogućih ishoda bacanja 8 različitih kocaka? (Pretpostavimo da su različitih veličina ili različitih boja.)

Rješenje. Za svaku kocku imamo 6 mogućih ishoda bacanja, a za 8 kocaka $6^8=1\,679\,616$, odnosno riječ je o varijacijama s ponavljanjem 6 elemenata, 8-og reda. ∎

■ **Primjer 3.51** Na koliko se načina može 5 voćaka: 1 jabuka, 1 kruška, 1 breskva, 1 naranča, 1 marelica, podijeliti između 30 ljudi ako:

a) svaki čovjek može dobiti najviše jednu voćku,

b) svaki čovjek može dobiti bilo koji broj voćaka?

Rješenje. Imamo varijacije, i to:

a) varijacije bez ponavljanja 30 elemenata, reda 5, tj. $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 17\,100\,720$ (primijetite da je to ujedno i broj injektivnih funkcija iz skupa od 5 voćaka u skup od 30 ljudi; svakoj takvoj injektivnoj funkciji odgovara razdioba voćaka),

b) varijacije s ponavljanjem 30 elemenata, reda 5, tj. broj svih funkcija iz skupa od 5 voćaka u skup od 30 ljudi: $30^5 = 24\,300\,000$. ∎

∎ **Primjer 3.52** Na koliko načina se može 12 putnika ukrcati u

(a) 4 vagona,

(b) kao pod (a), ali uz uvjet da su u 1. vagonu točno 3 putnika,

(c) kao pod (a), ali uz uvjet da su u svakom vagonu točno 3 putnika?

Rješenje.

(a) Svaki putnik ima 4 mogućnosti za odabir vagona (ili gledamo sve funkcije iz skupa od 12 putnika u skup od 4 vagona). Ukupno $4^{12} \approx 16.78 \cdot 10^6$.

(b) Odaberimo 3 od 12 putnika koji idu u 1. vagon. Od preostalih 9 putnika svaki ima 3 mogućnosti za odabir vagona. To je ukupno $\binom{12}{3} 3^9 = 4\,330\,260$ načina.

(c) Odaberimo 3 od 12 putnika koji idu u 1. vagon, pa 3 od preostalih 9 putnika koji idu u 2. vagon, i 3 od preostalih 6 koji idu u 3. vagon. Preostala 3 idu u 4. vagon. Ukupno $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = 369\,600$. ∎

∎ **Primjer 3.53** Na koliko se načina može 8 topova iste boje razmjestiti na šahovsku ploču tako da se nikoja dva ne napadaju? (Topovi se međusobno napadaju ako se nalaze u istome redu ili istome stupcu.)

Rješenje. Na 8^2 načina možemo izabrati mjesto za prvog topa. Drugi ne smije biti u retku niti u stupcu gdje se nalazi prvi top, pa za njega preostaje 7^2 mjesta (izbor jednog od preostalih 7 redaka i jednog od preostalih 7 stupaca). Slično, za trećeg preostaje 6^2 mjesta, za četvrtog 5^2, za petog 4^2, za šestog 3^2, za sedmog 2^2 i za osmog 1 mjesto. Topove međusobno ne razlikujemo pa rezultat treba podijeliti sa $8!$. Ukupno se mogu razmjestiti na $\frac{8^2 \cdot 7^2 \cdots 2^2 \cdot 1}{8!} = \frac{8! \cdot 8!}{8!} = 8!$ načina.

Drugo rješenje. Primijetimo da u svaki redak mora doći po jedan top i da dva topa ne smiju biti u istom stupcu. Za prvi stupac imamo 8 mogućih položaja topa. Za drugi stupac onda imamo sedam mogućih položaja topa, za treći stupac šest položaja, itd. do zadnjeg, osmog stupca, gdje nam za položaj osmog topa preostaje samo jedan položaj. To nam prema Produktnom pravilu (vidi Teorem 3.1.1 na str. 9) daje $8!$ načina rasporeda topova.

Kao što vidimo, drugo rješenje je jednostavnije od prvog. ∎

3.3.3 Kombinacije s ponavljanjem

U ovom odjeljku ćemo gledati kombinacije s ponavljanjem ili tzv. *multiskupove*, tj. 'skupove' kod kojih se elementi mogu ponavljati.

Neka je zadan skup $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$. **Kombinacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog** skupa A_n je bilo koji *neporedani* k-terac elemenata iz A_n. Članovi k-terca mogu se *ponavljati*.

Broj kombinacija s ponavljanjem jednak je broju načina biranja k predmeta od ukupno n, s koliko god ponavljanja istog predmeta u kombinaciji.

∎ **Primjer 3.54** Neka je $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ i $k = 6$. "Neporedan" šesterac možemo interpretirati kao blok (tzv. multiskup), na primjer $a_1a_1a_2a_4a_4a_4$. "Neporedanost" znači da taj šesterac poistovjećujemo (identificiramo) s $a_4a_1a_4a_4a_2a_1$, tj. važan nam je samo broj pojavljivanja elemenata, ali ne i njihov poredak.

Primijetimo da multiskup $a_1a_1a_2a_4a_4a_4$, u kojem su moguća višestruka pojavljivanja nekog elementa, nije isto što i pripadni skup $\{a_1,a_2,a_4\}$.

Zgodno je kombinacije s ponavljanjem zapisivati i ovako. Skupimo iste elemente u kombinaciji u grupe, jedan za drugim, i odijelimo grupe vertikalnom crtom. U gornjem primjeru je pripadni šesterac moguće zapisati u sljedeća četiri pretinca kao $a_1a_1\,|\,a_2\,|\,|\,a_4a_4a_4$. Element a_3 se ne pojavljuje, pa njemu odgovara prazna grupa, odijeljena uzastopnim pregradama (tj. prazan pretinac). Zapis početnog multiskupa moguće je još više sažeti, pišući samo

$$**|*||***, \tag{3.16}$$

gdje nam zvjezdice označuju odgovarajuće elemente u pretincu: u prvi pretinac dolazi element a_1 dvaput, u drugi pretinac element a_2 jednom, u treći pretinac element a_3 niti jednom, a u četvrti pretinac dolazi element a_4 triput. Na taj način smo multiskup $a_1a_1a_2a_4a_4a_4$ kodirali kao (3.16), rabeći samo dva simbola: $*$ i $|$, tj. imamo pridruživanje

$$a_1a_1a_2a_4a_4a_4 \qquad \mapsto \qquad **|*||***,$$

koje je (nakon proširenja na sve multiskupove reda $k=6$, s elementima iz skupa od $n=4$ elementa) bijektivno.

Primijetite da je u ovom slučaju ukupan broj mjesta koje u (3.16) zauzimlju zvjezdice i pregrade jednak $6+3=9$, a općenito $k+(n-1)$, tj. imamo k zvjezdica i $n-1$ pregrada. Ta će nam jednostavna činjenica biti vrlo korisna u dokazu Teorema 3.3.4. ■

Teorem 3.3.4 — Kombinacije s ponavljanjem. Neka su k i n bilo koji prirodni brojevi. Broj k-članih multiskupova s elementima iz zadanog n-članog skupa iznosi

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Svaki element skupa A_n u kombinaciji s ponavljanjem označit ćemo zvjezdicom. Da bismo znali točno o kojem elementu je riječ, koristit ćemo i pregrade, kao što je opisano u Primjeru 3.54 (za $k=6$ i $n=4$); vidi (3.16).

Odaberimo dakle k zvjezdica i $n-1$ pregradu (ukupno $k+n-1$ mjesta). Tim pregradama smo definirali n pretinaca, u koje ćemo stavljati zvjezdice.

Broj ponavljanja zvjezdica u svakom pretincu odgovara kratnosti pripadnog elementa. Time smo uspostavili bijekciju sa skupa kombinacija s ponavljanjem na skup razmještaja k zvjezdica na $k+(n-1)$ mjesta (ostala mjesta su za pregrade, koje će definirati n pretinaca). Vidi (3.16) i kratko objašnjenje nakon toga.

Razmještaj k zvjezdica na bilo koje od $k+(n-1)$ mjesta (preostala mjesta su za pregrade) može se obaviti na $\binom{k+n-1}{k}$ načina, jer toliko ima k-članih podskupova $(k+n-1)$-članog skupa. Tvrdnja slijedi iz Pravila bijekcije (vidi str. 7). ■

Dodatak

Drugi dokaz Teorema 3.3.4. Pretpostavimo bez gubitka općenitosti da su elementi n-članog skupa prirodni brojevi od 1 do n. Sada svakom *multiskupu* od k elemenata, sastavljenom od brojeva od 1 do n, koji se mogu ponavljati i posloženi su po veličini, oblika $[b_1,b_2,b_3,\dots,b_k]$, pridružimo *podskup* od k elemenata oblika $\{b_1,b_2+1,b_3+2,\dots,a_k+k-1\}$. Lako se provjeri da smo dobili podskupove od k elemenata koji se ne ponavljaju, skupa od $n+k-1$ elemenata. Nadalje, to je pridruživanje bijektivno (iz skupa k-članih multiskupova s elementima u $\{1,2,\dots,n\}$ u skup k-članih podskupova $(n+k-1)$-članog skupa $\{1,2,\dots,n+k-1\}$).

Da bismo dokazali bijektivnost, označimo s M_k sve poredane k-člane multiskupove $[b_1\le b_2\le \dots \le b_k]$ (ne zaboravimo da nam je kod multiskupova poredak nebitan) s elementima b_j (gdje je

$j = 1, \dots, k$) iz n-članog skupa $\{1, \dots, n\}$, a sa $\binom{\{1,\dots,n+k-1\}}{k}$ skup svih k-članih podskupova skupa $\{1, \dots, n+k-1\}$. Onda je funkcija $f : M_k \to \binom{\{1,\dots,n+k-1\}}{k}$, zadana sa

$$f([b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_k]) := \{b_1 < b_2 + 1 < \cdots < b_k + k - 1\}$$

dobro definirana. Naime, vrijedi $b_k \le n$, pa je $b_k + k - 1 \le n + k - 1$. Njena inverzna funkcija $f^{-1} : \binom{\{1,\dots,n+k-1\}}{k} \to M_k$ je očevidno

$$f^{-1}(\{c_1 < c_2 < \cdots < c_k\}) = [c_1 \le c_2 - 1 \le \cdots \le c_k - (k-1)].$$

Doista,

$$(f^{-1} \circ f)([b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_k]) = f^{-1}(\{b_1 < b_2 + 1 < \cdots < b_k + k - 1\}) = [b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_k],$$
$$(f \circ f^{-1})(\{c_1 < c_2 < \cdots < c_k\}) = f([c_1 \le c_2 - 1 < \cdots < c_k - (k-1)]) = \{c_1 < c_2 < \cdots < c_k\}.$$

Prema Teoremu 3.2.3 na str. 20, svih k-članih podskupova $(n+k-1)$-članog skupa ima ukupno $\binom{n+k-1}{k}$. Tvrdnja slijedi iz Pravila bijekcije (vidi str. 7).
Kao primjer, možemo pogledati slučaj kada je $n = 2$ i $k = 3$. Tada kombinacije s ponavljanjem imaju oblik $\{1,1,1\}$, $\{1,1,2\}$, $\{1,2,2\}$, $\{2,2,2\}$ i njima odgovaraju kombinacije bez ponavljanja $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ skupa od 4 elementa.

U gornjem Primjeru 3.54 imamo ukupno $\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 84$ kombinacija šestog reda skupa od četiri elementa (tj. šesteročlanih multiskupova sastavljenih od elemenata zadanog četveročlanog skupa).

Sasvim drugačiji dokaz Teorema 3.3.4 moguće je dobiti s pomoću metode funkcija izvodnica, koje će biti obrađeno u kolegiju Diskretna matematika na FER-u. Ta se metoda temelji na poznavanju razvoja nekih funkcija u tzv. Mac Laurinov red, koji ćemo uskoro upoznati u Diferencijalnom računu (u Matematici 2).

Svakoj kombinaciji s ponavljanjem k-tog reda odgovara poredani n-terac nenegativnih cijelih brojeva $(x_1, \dots, x_n)$, za koji je x_i jednak broju pojavljivanja (tj. kratnosti) elementa a_i u kombinaciji, $i = 1, \dots, n$, i vrijedi

$$x_1 + \cdots + x_n = k. \tag{3.17}$$

(U Primjeru 3.54, za $k = 6$ i $n = 4$, je $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$.) Obratno, svakom poredanom n-tercu $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ za koji je ispunjen uvjet (3.17), bijektivno odgovara neporedani k-terac u kojem se a_i pojavljuje x_i puta. Prema tome je, zbog Pravila bijekcije (vidi str. (3)), *broj* $\binom{n+k-1}{k}$ *svih kombinacija s ponavljanjem reda k skupa od n elemenata* jednak broju cjelobrojnih, nenegativnih (tj. ≥ 0) cjelobrojnih rješenja jednadžbe (3.17), dotično broju poredanih n-teraca $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ za koje vrijedi (3.17). Na taj način dobivamo sljedeći rezultat, čija tvrdnja je ekvivalentna tvrdnji Teorema 3.3.4.

Teorem 3.3.5 — Broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + \cdots + x_n = k$. Neka su k i n bilo koji prirodni brojevi. Broj poredanih n-teraca $(x_1, \dots, x_n)$ svih nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + \cdots + x_n = k$ iznosi $\binom{n+k-1}{k}$.

■ **Primjer 3.55** (a) Na koliko načina možemo iznos od pet kovanica od po jedne kune podijeliti između troje djece?

Rješenje. Ako su x_1, x_2, x_3 iznosi za prvo, drugo i treće dijete, onda se traži zapravo broj cjelobrojnih, nenegativnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ (dakle $n = 3$, $k = 5$). Traženi broj je prema Pravilu bijekcije (vidi str. 7) i Teoremu 3.3.5 jednak $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$.

(b) Isto pitanje kao gore, ali uz uvjet da svako dijete dobije barem jednu kunu.

Rješenje. Znači od pet kuna moramo svakom djetetu dati odmah po jednu, pa ostaju dvije kune za podjelu. Traženi broj je prema principu bijekcije jednak broju nenegativnih cjelobrojnih rješenja od $x_1+x_2+x_3=2$, tj. $\binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=6$.

(c) Isto kao pod (a), ali uz uvjet da prvo dijete mora dobiti bar jednu kunu, a drugo bar dvije.

Rješenje. Dakle moramo dati odmah tri kune, pa ostaju dvije kune za raspodjelu na djecu. Rješenje je broj nenegativnih rješenja od $x_1+x_2+x_3=2$, tj. $\binom{3+2-1}{2}=6$. ■

■ **Primjer 3.56** Na koliko načina između petero djece možemo podijeliti 12 jabuka, 10 krušaka i 8 naranča?

Rješenje. Dvanaest jabuka možemo podijeliti koliko ima nenegativnih (tj. ≥ 0) rješenja od $x_1+\cdots+x_5=12$, tj. na $\binom{12+5-1}{12}$ načina. To su kombinacije s ponavljanjem s $n=5$ i $r=12$, jer možemo zamisliti da 12 puta izvlačimo iz bubnja s 5 kuglica na kojima su imena djece, s vraćanjem kuglice u bubanj nakon svakog izvlačenja. Svakom izvučenom djetetu dodijelimo jabuku. Slično, 10 krušaka možemo podijeliti na $\binom{10+5-1}{10}$ načina i 8 naranča na $\binom{8+5-1}{8}$ načina. Ukupno na $\binom{16}{4}\binom{14}{4}\binom{12}{4}=901\,800\,900$. ■

■ **Primjer 3.57** Na koliko se načina 10 jabuka i 15 krušaka može raspodijeliti između šestero djece tako da svako dijete dobije barem jednu krušku.

Rješenje. Razdiobi deset jabuka među šestero djece odgovara poredani šesterac $(x_1,\ldots,x_6)$ nenegativnih cijelih brojeva, gdje i-to dijete dobiva x_i jabuka, za $i=1,\ldots,6$. Tu imamo skup od $n=6$ djece i $k=10$ jabuka, pa prema Teoremu 3.3.4 (tj. Teoremu 3.3.5) imamo $\binom{6+10-1}{10}$ mogućih razdioba jabuka među šestero djece, tj. rješenja jednadžbe $x_1+\cdots+x_6=10$. Podijelimo svakom djetetu po jednu krušku. Preostalih 10 jabuka i 9 krušaka možemo prema Produktnom pravilu podijeliti na

$$\binom{6+10-1}{10}\binom{6+9-1}{9}=\binom{15}{10}\binom{14}{9}=\binom{15}{5}\binom{14}{5}=3003\cdot 2002=6\,012\,006$$

načina. ■

■ **Primjer 3.58** Koliko nenegativnih cjelobrojnih rješenja ima nejednakost

$$x_1+x_2+x_3<5, \quad x_i\in\mathbb{N}\cup\{0\} \ \ ? \tag{3.18}$$

Rješenje.

1. način Taj broj je po Pravilu zbrajanja (vidi str. 6) jednak broju nenegativnih cjelobrojnih rješenja (x_1,x_2,x_3) sljedećih pet jednačaba:

$$x_1+x_2+x_3=k, \quad k=0,1,2,3,4.$$

Svaka jednadžba ima toliko rješenja na koliko se načina može podijeliti k istih jedinica na 3 varijable. A to je kao da k jabuka raspodjeljujemo između troje djece. Dakle imamo kombinacije s ponavljanjem $\binom{3+k-1}{k}$. Ukupno

$$1+\binom{3+1-1}{1}+\binom{3+2-1}{2}+\binom{3+3-1}{3}+\binom{3+4-1}{4}=35.$$

2. način Vrijedi

$$x_1+x_2+x_3<5,\ x_i\in\mathbb{N}\cup\{0\} \quad\Longleftrightarrow\quad x_1+x_2+x_3\leq 4,\ x_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

No broj rješenja posljednje nejednadžbe jednak je broju rješenja jednadžbe

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4, \quad x_i \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

jer ako je $x_1+x_2+x_3=k$, gdje je $k=0,1,2,3,4$, tada je $x_4=4-k\geq 0$. Broj rješenja je

$$\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}=\binom{7}{3}=35.$$

Drugi postupak je očevidno bolji, jer omogućuje da se, za razliku od prvog načina, vrlo lako riješi problem u kojem je na desnoj strani nejednakosti (3.18) velik broj, recimo 500 umjesto 5. ■

■ **Primjer 3.59** Koliko nenegativnih cjelobrojnih rješenja (x_1,x_2,x_3) ima nejednakost $2\leq x_1+x_2+x_3\leq 5$?

Rješenje. U sljedećem pretpostavljamo da su svi x_i nenegativni cijeli brojevi, gdje je $k=1,2,3,4$. Očevidno je

$$\begin{aligned}\{(x_1,x_2,x_3):2\leq x_1+x_2+x_3\leq 5\}&=\{(x_1,x_2,x_3):x_1+x_2+x_3\leq 5\}\setminus\{(x_1,x_2,x_3):x_1+x_2+x_3\leq 1\}\\ &=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+x_2+x_3+x_4=5\}\setminus\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+x_2+x_3+x_4=1\}.\end{aligned}$$

Traženi broj prema Pravilu komplementa (vidi str. 7) i Teoremu 3.3.5 iznosi $\binom{4+5-1}{5}-\binom{4+1-1}{1}=\binom{8}{5}-\binom{4}{1}=\binom{8}{3}-4=52$. ■

Zadatci iz kombinatorike za samostalan rad

Zadatak 3.19 Koliko nenegativnih cjelobrojnih rješenja (x_1,x_2,x_3) ima nejednakost

$$x_1+x_2+x_3<500.$$

Zadatak 3.20 Koliko ima monotono rastućih funkcija (ne nužno strogo) iz skupa $\{1,2,3,4,5\}$ u samog sebe? (Za funkciju f kažemo da je *monotono rastuća*, ili kraće – *rastuća*, ako za sve i i j iz domene, takve da je $i<j$, vrijedi $f(i)\leq f(j)$.)

Zadatak 3.21 Koliko ima monotono rastućih funkcija (ne nužno strogo) iz skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ u samog sebe, takvih da je $f(4)=4$?

Zadatak 3.22 Koliko pribrojnika imamo u razvoju polinoma $(x+y+z)^{10}$ u tri varijable? Koliki je zbroj svih koeficijenata u pribrojnicima?

3.4 Formula uključivanja i isključivanja

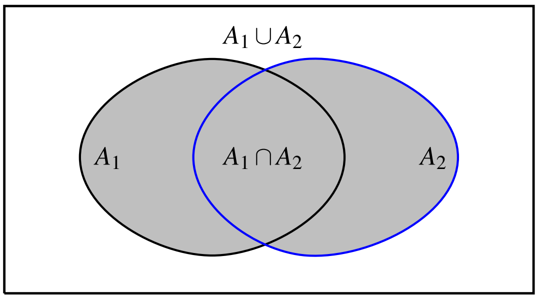
Kardinalni broj konačnog skupa A označujemo kao i obično sa $|A|$. Ako su A_1 i A_2 konačni skupovi, onda je očevidno (vidi Sliku 3.13):

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|. \tag{3.19}$$

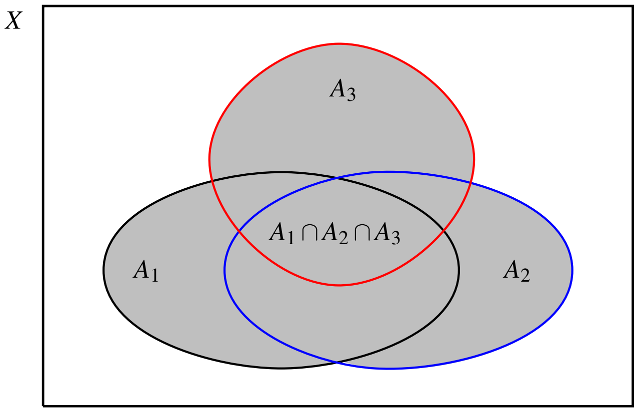
Doista, na desnoj strani se u izrazu $|A_1|+|A_2|$ elementi iz presjeka $A_1\cap A_2$ broje dvaput, pa treba oduzeti $|A_1\cap A_2|$.

Lako se vidi da analogna formula vrijedi i za uniju triju skupova:

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|=&|A_1|+|A_2|+|A_3|\\ &-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|\\ &+|A_1\cap A_2\cap A_3|.\end{aligned}$$



Slika 3.13: Za bilo koja dva konačna skupa A_1 i A_2 (ne nužno disjunktna) vrijedi $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Ovo predstavlja poopćenje Pravila zbrajanja navedenog na str. 6. Još općenitija je Sylvesterova formula, navedena u Teoremu 3.4.1.



Slika 3.14: Kardinalni broj unije triju konačnih skupova A_1, A_2 i A_3 jednak je $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

Naime elementi iz $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ se u zbroju na desnoj strani jednakosti broje triput u prvom retku, zatim oduzimlju triput u drugom retku, pa zato treba dodati $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. Vidi Sliku 3.14. Elementi iz $(A_1 \cap A_2) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ se računaju dvaput u zbroju $|A_1| + |A_2|$, te se pojavljuju jednom u $|A_1 \cap A_2|$. Slično u preostala dva slučaja.

Moguć je i izravan dokaz, koji se temelji na trostrukoj primjeni formule (3.19):

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| \\
&= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \\
&= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\
&\quad - (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|).
\end{aligned}$$

Pritom smo u zadnjoj jednakosti također rabili (3.19): $|(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|$, a zadnji član na desnoj strani jednak je $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, budući da je operacija presijeka skupova komutativna.

■ **Primjer 3.60** Koliko ima prirodnih brojeva koji su ≤ 100 i djeljivi sa 3 ili 5 ili 7?

Rješenje. Neka je $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Označimo sa A_1, A_2 i A_3 skupove brojeva iz X djeljivih sa 3, 5 i 7 respektivno. U ovom primjeru traži se $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

Vrijedi (vidi Primjer 3.2 na str. 6):

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33, \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20, \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 14,$$
$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6, \quad |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor = 4, \quad |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor = 2,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{105} \right\rfloor = 0,$$

pa prema Teoremu 3.4.1(a) imamo:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|) \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 67 - 12 + 0 = 55. \end{aligned}$$

■

3.4.1 Sylvesterova formula

Vrijedi i znatno općenitiji rezultat, u kojem se kardinalni broj unije konačno mnogo skupova dobiva s pomoću kardinalnih brojeva *svih* međusobnih presjeka.

Teorem 3.4.1 — Općenita formula uključivanja i isključivanja ili Sylvesterova formula. Neka su $A_1, \ldots, A_n$ podskupovi konačnog skupa X. Onda vrijedi:

(a)

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} |\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| &= |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ &- \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Pritom $\sum_{1 \le i < j \le n}$ znači da se zbraja po svim parovima (i, j) takvim da je $i < j$: $(1,2)$, $(1,3), \ldots$, $(1,n)$, $(2,3), \ldots$, $(n-1,n)$. Slično i za preostale sume. Na primjer za $n = 3$ je $\sum_{i<j} c_{ij} = c_{12} + c_{13} + c_{23}$.

Dokaz. (a) Rabit ćemo matematičku indukciju po n. Za $n = 2$ tvrdnja je jasna (vidi (3.19) i Sliku 3.13). Pretpostavimo da tvrdnja u teoremu vrijedi za neki (ali bilo koji) prirodan broj $n \ge 3$. Dokažimo da vrijedi i za $n + 1$. Najprije je

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\ &= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\ &= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|. \end{aligned}$$

jer tvrdnja vrijedi za uniju dva skupa (tj. za $n = 2$). Sada možemo iskoristiti induktivnu pretpostavku na dva izraza u zadnjem retku, jer se pojavljuju unije od n skupova:

$$\begin{aligned}
|A_1\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \\
&\quad \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_n| + |A_{n+1}| \\
&\quad - \Big[\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_{n+1}\cap A_j| + \ldots \\
&\quad + (-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1}|\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1}|A_i\cap A_j| + \ldots \\
&\quad + (-1)^{n}|A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}|.
\end{aligned}$$

(b) Druga tvrdnja slijedi primjenom DeMorganove formule $\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n} = \overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_n$ i već dokazane tvrdnje pod (a), zajedno s primjenom Pravila komplementa (vidi str. 7):

$$|\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_n| = |\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n}| = |X| - |A_1\cup\cdots\cup A_n|.$$

■

Bitno je naglasiti da se u prvoj formuli Teorema 3.4.1 računa broj elemenata u uniji. Zbog toga je ta formula pogodna kada se računa broj elemenata skupa koji zadovoljavaju *barem jedan* od zadanih uvjeta (koji definiraju odgovarajuće skupove A_i). U drugoj formuli Teorema 3.4.1 se računa broj elemenata u presjeku pa se ta formula koristi za broj elemenata skupa koji zadovoljavaju *sve* zadane uvjete. U praktičnim primjenama potrebno je te uvjete prepoznati, jer skupovi A_i najčešće nisu unaprijed zadani.

■ **Primjer 3.61** Koliko ima brojeva između 1 i 100 koji nisu djeljivi ni s 2, ni s 3, ni s 5?

Rješenje. Koristimo formulu (b) iz Teorema 3.4.1. Označimo

$$A_1 = \{1\le n\le 100 : 2\mid n\},\quad A_2 = \{1\le n\le 100 : 3\mid n\},$$
$$A_3 = \{1\le n\le 100 : 5\mid n\}.$$

Tražimo $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|$. Vrijedi

$$|A_1| = \left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor = 50,\quad |A_2| = \left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor = 33,\quad |A_3| = \left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor = 20,$$
$$|A_1\cap A_2| = \left\lfloor\frac{100}{6}\right\rfloor = 16,\quad |A_1\cap A_3| = \left\lfloor\frac{100}{10}\right\rfloor = 10,\quad |A_2\cap A_3| = \left\lfloor\frac{100}{15}\right\rfloor = 6,$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = \left\lfloor\frac{100}{30}\right\rfloor = 3.$$

Prema Teoremu 3.4.1(b) je

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = 100 - (50+33+20) + (16+10+6) - 3 = 26.$$

■

■ **Primjer 3.62** U vrtiću je 38 djece, 19 od njih voli bijele bombone, 25 žute, a 24 crvene. Ako 7 djece voli sve bombone, koliko djece voli točno 2 vrste (boje) bombona?

Rješenje. Označimo skup djece koja vole bijele bombone s B, skup djece koja vole žute sa Z i skup djece koja vole crvene bombone s C. Po formuli uključivanja i isključivanja vrijedi

$$38 = 19 + 25 + 24 - |B \cap Z| - |B \cap C| - |Z \cap C| + |B \cap Z \cap C|.$$

odnosno

$$|B \cap Z| + |B \cap C| + |Z \cap C| - |B \cap Z \cap C| = 30.$$

Da bismo dobili broj djece koja vole točno dvije vrste bombona, moramo od $|B \cap Z| + |B \cap C| + |Z \cap C|$ oduzeti $|B \cap Z \cap C|$ tri puta. Dakle, traženi broj je

$$|B \cap Z| + |B \cap C| + |Z \cap C| - 3|B \cap Z \cap C| = 30 - 2 \cdot 7 = 16.$$

■

■ **Primjer 3.63** U studentskom zboru ima 15 predstavnika prve godine studija, 20 predstavnika druge godine i 10 predstavnika treće godine. Na koliko se načina može odabrati šesteročlana delegacija iz tog studentskog zbora u kojoj mora biti barem jedan predstavnik svake godine?

Rješenje. Tražimo broj elemenata u presjeku. Definiramo skupove

$$A_i = \{\text{delegacija bez studenata } i\text{-te godine}\},$$

gdje je $i = 1,2,3$. Traženi broj elemenata u skupu $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$ izračunat ćemo s pomoću Formule uključivanja i isključivanja. Najprije je $|A_1| = \binom{20+10}{6} = \binom{30}{6}$, $|A_2| = \binom{15+10}{6} = \binom{25}{6}$ i $|A_3| = \binom{15+20}{6} = \binom{35}{6}$, $|A_1 \cap A_2| = \binom{10}{6}$, $|A_1 \cap A_3| = \binom{20}{6}$ i $|A_2 \cap A_3| = \binom{15}{6}$. Prema Teoremu 3.4.1(b) je

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = \binom{45}{6} - \binom{30}{6} - \binom{25}{6} - \binom{35}{6} + \binom{10}{6} + \binom{20}{6} + \binom{15}{6}.$$

■

Teorem 3.4.2 — Broj surjektivnih funkcija među konačnim skupovima. Zadani su skupovi $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ takvi da je $m \geq n$. Onda je broj surjektivnih funkcija iz A u B jednak

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m. \tag{3.20}$$

Dokaz. Označimo skup svih *surjektivnih funkcija* iz m-članog skupa A u n-člani skup B sa $\mathrm{Sur}(m,n)$. On nije prazan, jer je $m \geq n$. Tražimo broj $|\mathrm{Sur}(m,n)|$.

Za $f \in \mathrm{Sur}(m,n)$ mora biti $b_1 \in f(A)$, $b_2 \in f(A)$, itd. do $b_n \in f(A)$, pa koristimo formulu (b) iz Teorema 3.4.1. Neka je $X = B^A$ skup svih funkcija iz A u B. Broj njegovih elemenata jednak je $|X| = n^m$; vidi Teorem 3.1.2. Označimo s A_i, $i = 1,2,\dots,n$, skup svih funkcija $f \in B^A$ koje *ne sadrže* element b_i u svojoj slici, tj.

$$A_i = \{f \in X : b_i \notin f(A)\}.$$

Onda je skup svih surjektivnih funkcija jednak $\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$.

Odaberimo bilo koji k-člani podskup $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Onda je $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ jednak broju funkcija $f \in B^A$ za koje svaki $f(a_j)$, $j = 1, \dots, m$ poprima vrijednosti koje su različite od

$b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$, tj. ukupno $n-k$ mogućih vrijednosti. Takvih funkcija ima $(n-k)^m$; vidi Teorem 3.1.2. Svakom od $\binom{n}{k}$ k-članih podskupova $\{i_1, \dots, i_k\}$ od $\{1, \dots, n\}$ odgovara $(n-k)^m$ takvih funkcija. Prema Teoremu 3.4.1(b) je:

$$|\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_n| = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \dots$$

tj.

$$|\mathrm{Sur}\,(m,n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

■

Primijetite da je u formuli (3.20) za računanje broja surjektivnih funkcija $|\mathrm{Sur}\,(m,n)|$ dovoljno računati sumu do $k = n-1$ (a ne do $k = n$; naime n-ti član sume jednak je nula). Dakle, $|\mathrm{Sur}\,(m,n)| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$.

Gore navedeni broj $|\mathrm{Sur}\,(m,n)|$, gdje je $m \geq n$, može se shvatiti i kao broj načina na koje možemo m *različitih* predmeta smjestiti u n *različitih* kutija tako, da svaka kutija sadrži barem jedan predmet. Doista, ako su $x_1, \dots, x_m$ predmeti iz A koje stavljamo u kutije $y_1, \dots, y_n$ iz B, onda svakom takvom razmještaju predmeta u kutije odgovara *surjektivna* funkcija iz A u B koja predmetima pridružuje odgovarajuće kutije.

Vježba 3.5 Ako je $m < n$, onda nema niti jedne surjektivne funkcije iz m-članog skupa A u n-člani skup B.

Doista, pretpostavimo da postoji surjektivna funkcija $f : A \to B$. Onda skup $f(A)$ može imati najviše m elemenata. Budući da je f surjekcija (tj. $f(A) = B$), onda je $n \leq m$, što je nemoguće, jer je po pretpostavci $n > m$.

Dodatak

Ako skupovi A i B imaju isti broj elemenata, tj. ako je $m = n$, onda je svaka surjektivna funkcija injektivna, tj. bijekcija. Prema tome je $|\mathrm{Sur}\,(n,n)| = n!$, tj. dobivamo da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!.$$

Provjerite ovaj interesantan identitet za $n = 3$.

■ **Primjer 3.64** Ananas, jabuku, bananu, krušku, naranču, kivi, breskvu, marelicu i šljivu trebaju podijeliti Ante, Marica, Ivica i Janica, tako da svatko dobije barem jednu voćku. Na koliko načina je to moguće učiniti?

Rješenje. Riječ je o surjekcijama iz 9-članog skupa u 4-člani skup:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Sur}\,(9,4)| &= \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{4}{r} (4-r)^9 \\
&= \binom{4}{0} 4^9 - \binom{4}{1}(4-1)^9 + \binom{4}{2}(4-2)^9 - \binom{4}{3}(4-3)^9 \\
&= 4^9 - 4 \cdot 3^9 + 6 \cdot 2^9 - 4 \cdot 1^9 = 186\,480.
\end{aligned}$$

■

■ **Primjer 3.65** (Jedan pogrešno riješen zadatak.) Na koliko načina se može 7 različitih predmeta rasporediti u 3 različite kutije, tako da niti jedna kutija ne bude prazna?

Predlažemo ovo rješenje. Naš prvi izbor je stavljanje jednog predmeta u 1. kutiju, zatim biramo predmet za 2. kutiju, te zatim predmet za 3. kutiju. To možemo učiniti na $7 \cdot 6 \cdot 5$ načina. Moramo još raspodijeliti 4 predmeta, a za svaki imamo 3 mogućnosti, odnosno 3 kutije za izabrati. To možemo učiniti na 3^4 načina. Sugeriramo dakle rješenje: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3^4$.

No, ovo rješenje je pogrešno. Nađimo što je pogrešno. Ili neku mogućnost nismo prebrojali, ili smo nešto prebrojali višekratno. Pogledajte ovakav izbor: $1\,3\,7|2\,4|5\,6$. Njega smo jednom prebrojali kad smo u prvom naletu, da osiguramo da druga kutija ne bude prazna u drugu kutiju stavili 2, a kasnije predmet 4, a zatim smo tu istu mogućnost prebrojali i kad smo u prvom naletu za drugu kutiju izabrali predmet 4, a kasnije ubacili još i predmet 2. Međutim, nisu sve mogućnosti prebrojane višekratno jednak broj puta, pa primjećujemo da ovom tehnikom uopće ne možemo riješiti ovakav zadatak.

Za to trebat će nam formula koju smo upoznali u Teoremu 3.4.2 na str. 41, koja nam daje broj surjektivnih funkcija iz skupa od m predmeta u skup od n kutija. Ovdje je $m = 7$ i $n = 3$, pa je rješenje broj $|\mathrm{Sur}\,(7,3)|$. Izračunajte taj broj. ■

Zadatak 3.23 Na koliko se načina pet učenika može smjestiti u tri sobe, tako da u svakoj bude barem jedan učenik?

Rješenje. Svakom smještaju učenika odgovara surjektivna funkcija iz skupa učenika u skup soba. Prema tome, traži se broj surjektivnih funkcija iz skupa A od $m = 5$ učenika u skup B od $n = 3$ sobe. Taj broj iznosi (vidi Teorem 3.4.2)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} (3-k)^5 = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 = 150.$$

Deranžmani

Promatrajmo permutacije bez ponavljanja n-članog skupa $A = \{1,2,\dots,n\}$ (tj. bijekcije $f : A \to A$), takve da je $f(k) \neq k$ za sve $k = 1,2,\dots,n$. Takve permutacije, u kojima niti jedan element ne stoji na svome mjestu, zovemo *neredima* ili **deranžmanima**.

■ **Primjer 3.66** Za $n = 3$, permutacija $(3,1,2)$ skupa $\{1,2,3\}$ je nered, a permutacija $(3,2,1)$ nije, jer je $f(2) = 2$. ■

Cilj nam je prebrojiti sve takve permutacije zadanog skupa općenito.

Propozicija 4 (Montmort, Euler, 18. st.) Broj deranžmana n-članog skupa iznosi

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Dokaz. Označimo sa S_n skup svih permutacija skupa $\{1,2,\dots,n\}$. Za bilo koji učvršćeni i, gdje je $1 \leq i \leq n$, bit će zgodno uvesti skup A_i koji sadrži sve permutacije f kod kojih je i-ta komponenta fiksna (nepromijenjena), tj. $f(i) = i$. Drugim riječima, definiramo

$$A_i = \{f \in X : f(i) = i\}.$$

Traženi broj deranžmana iznosi $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n|$.

Vrijedi $|S_n| = n!$ (ukupan broj permutacija n-članog skupa). Odaberimo bilo koji k-člani podskup $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$. Broj $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ predstavlja broj permutacija kod kojih je $f(i_j) = i_j$ za sve $j = 1,2,\dots,k$. Budući su za svaki $f \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ komponente $i_1,\dots,i_k$ fiksne, preostaje nam $n-k$ slobodnih komponenata za permutiranje. Pripadnih permutacija ima $(n-k)!$. Budući da imamo $\binom{n}{k}$ načina odabira k položaja $i_1,\dots,i_k$ od n mogućih, onda je broj svih permutacija s (barem) k fiksnih komponenata jednak

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Prema Teoremu 3.4.1(b) dobivamo da je broj deranžmana d_n jednak:

$$\begin{aligned} d_n &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

■

■ **Primjer 3.67** Broj deranžmana četveročlanog skupa iznosi

$$d_4 = 4!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9.$$

Ti dearanžmani se lako mogu popisati: $(2,1,4,3)$, $(2,3,4,1)$, $(2,4,1,3)$, $(3,1,4,2)$, $(3,4,1,2)$, $(3,4,2,1)$, $(4,1,2,3)$, $(4,3,1,2)$ i $(4,3,2,1)$. ■

Za broj deranžmana vrijedi $d_n = n(n-1)!\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$, odakle dobivamo da niz $(d_n)_{n\geq 1}$ možemo opisati s pomoću sljedeće jednostavne rekurzivne relacije:

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n, \quad n \geq 2, \quad d_1 = 0.$$

Pogledajmo sada jedan klasični problem iz teorije vjerojatnosti.

■ **Primjer 3.68** (**Problem šešira**) Šestero ljudi je na koncert došlo sa šeširima. U garderobi su se šeširi izmiješali, pa je svaki vlasnik šešira nakon koncerta uzimao po jedan, ne brinući kome pripada. Kolika je vjerojatnost da niti jedan nije uzeo svoj šešir?

Rješenje. Šest šešira može se odabrati na $6!$ načina, a postoji d_6 načina tako da nitko nije uzeo svoj šešir. Tražena vjerojatnost iznosi:

$$\frac{d_6}{6!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 0.36788\dots\ .$$

Ovaj primjer pokazuje da kvocijent $\frac{d_n}{n!}$ jako brzo konvergira prema graničnoj vrijednosti $e^{-1} \approx 0.368\dots$. ■

■ **Primjer 3.69** Pustinjom hoda karavana od 9 deva. Na koliko se načina nakon odmora u oazi one mogu presložiti, tako da niti jedna deva ne hoda iza one deve iza koje je hodala prije oaze?

Rješenje. Označimo deve redom kako su hodale prije odmora u oazi. Neka je A_1 = skup svih rasporeda 9 deva u kojima druga deva hoda iza prve deve, A_2 = skup svih rasporeda 9 deva u kojima treća hoda iza druge deve, ..., A_8 = skup svih rasporeda 9 deva u kojima deveta hoda iza osme deve. Tada vrijedi $|A_1| = |A_1| = \cdots = |A_8| = 8!$. Nadalje $\left|A_i \cap A_j\right| = 7!$, bez obzira jesu li i i j susjedni brojevi (na primjer $j = i+1$ pa zamišljamo da permutiramo 'trostruku devu'

$(i,i+1,i+2)$ i preostalih 6 deva) ili pak nisu (pa zamišljamo da permutiramo dvije 'dvostruke deve' $(i,i+1)$ i $(j,j+1)$ i preostalih 5 deva). Slično vrijedi, bez obzira jesu li i, j, k susjedni ili ne, $|A_i\cap A_j\cap A_k| = 6!$ i nadalje $|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| = 5!$, $\dots$, $|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_8| = 1!$. Zato je $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_8}| = 9! - \binom{8}{1}8! + \binom{8}{2}7! - \binom{8}{3}6! + \binom{8}{4}5! - \binom{8}{5}4! + \binom{8}{6}3! - \binom{8}{7}2! + \binom{8}{8}1! = 148\,329.$

■

■ **Primjer 3.70** Na koliko načina se iz skupa $S = \{1,2,3,\dots,10\}$ može izabrati četveročlani podskup koji ne sadrži dva uzastopna broja? (Teži zadatak.)

Dajemo dva rješenja. Prvo koristi formulu uključivanja i isključivanja i malo je duže. Drugo je zasnovano na dosjetci koja je slična drugom dokazu Teorema 3.3.4 na str. 34 (broj kombinacija s ponavljanjem).

Prvo rješenje. Definirajmo četveročlane skupove u S koji će zadovoljavati uvjet da sadrže po dva zadana uzastopna broja:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{svi četveročlani podskupovi od } S \text{ koji sadrže 1 i 2}\},\\
A_2 &= \{\text{svi četveročlani podskupovi od } S \text{ koji sadrže 2 i 3}\},\\
&\ \vdots\\
A_9 &= \{\text{svi četveročlani podskupovi od } S \text{ koji sadrže 9 i 10}\}.
\end{aligned}$$

Traženi broj jednak je $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\dots\cap\overline{A}_9|$. Prema formuli uključivanja i isključivanja (Teorem 3.4.1(b)) vrijedi

$$|\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_9| = N - \sum_i |A_i| + \sum_{i,j}|A_i\cap A_j| - \sum_{i,j,k}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \dots$$

Ukupan broj četveročlanih podskuova brojeva koje možemo odabrati iznosi $N = \binom{10}{4}$. Kako u A_1 svaki četverac već sadrži 1 i 2, onda je $|A_1|$ jednak broju mogućih izbora dva broja među preostalih osam, dakle $\binom{8}{2}$ (vidi Teorem 3.2.3). Odatle je $\sum_i |A_i| = 9\cdot\binom{8}{2}$.

Imamo dva tipa presjeka po dva skupa: uzastopne i neuzastopne. Ako gledamo uzastopni presjek $A_1\cap A_2$, onda tu već imamo brojeve 1, 2 i 3, pa za izbor četvrtog imamo 7 mogućnosti. Isto tako i za $A_2\cap A_3$, do $A_8\cap A_9$, što daje ukupno $8\cdot 7$ mogućnosti kod uzastopnih presjeka. Ako gledamo neuzastopni presjek $A_1\cap A_3$, tu već imamo potpuno definiran jedan jedini četveročlani podskup kojeg čine 1, 2, 3, 4, tj. skup $A_1\cap A_3$ je jednočlan. Takvih jednočlanih skupova koji uključuju A_1 ima 7, i slično za ostale kombinacije s neuzastopnim presjecima:

A_1	$A_3\dots A_9$	7
A_2	$A_4\dots A_9$	690
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_6	$A_7\dots A_9$	290
A_7	$A_8\dots A_9$	190

,

tj. ukupno $7+6+\dots+2+1 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7 = 28$. Konačno, presjek od po tri skupa može biti četveročlan jedino u slučaju ako je uzastopan, kao na primjer kod $A_1\cap A_2\cap A_3 = \{1,2,3,4\}$. Takvih presjeka ima ukupno 7: od netom spomenutog pa do $A_7\cap A_8\cap A_9$. Presjek po četiri različita skupa A_i je očevidno prazan. Traženi broj je dakle:

$$|\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_9| = \binom{10}{4} - 9\cdot\binom{8}{2} + (8\cdot 7 + 28) - 7 = 35.$$

Drugo rješenje. Zadatak možemo riješiti elegantnije ako se prisjetimo drugog dokaza teorema o broju kombinacija s ponavljanjem (Teorem 3.3.4 na str. 34). Naime, kako podskupovi ne sadrže dva uzastopna broja, možemo od drugog broja oduzeti 1, od trećeg broja oduzeti 2 i od četvrtog broja oduzeti 3. Lako se vidi da sada dobivamo kombinacije bez ponavljanja reda 4 skupa od 7 elemenata kojih ima $\binom{7}{4} = 35$. ■

3.4.2 Eulerova funkcija $\varphi(n)$

Rabeći Formulu uključivanja i isključivanja (vidi Teorem 3.4.1 na str. 39), dokažimo važan teorem iz teorije brojeva koji govori o tzv. Eulerovoj funkciji. Ta funkcija ima važnu ulogu među inim u kriptografiji, tj. u teoriji šifriranja; vidi [Duj2] i [DujMar].

Definicija 3.4.1 **Eulerova funkcija** prirodnom broju $n \geq 2$ pridružuje broj $\varphi(n)$ svih prirodnih brojeva koji su $< n$ i relativno prosti s n. (Podsjetimo da za prirodne brojeve n i a kažemo da su relativno prosti, ako je razlomak n/a neskrativ, tj. jedini zajednički djelitelji brojeva n i a je broj 1, ili što je isto, najveći zajednički djelitelj brojeva jednak je 1.) Definiramo također $\varphi(1) = 1$. ■

■ **Primjer 3.71** Za $n = 20$ su brojevi 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17 i 19 manji od 20 i relativno prosti s njim, pa je $\varphi(20) = 8$. ■

Evo nekoliko prvih vrijednosti Eulerove funkcije (provjerite):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	...

■ **Primjer 3.72** Za prirodan broj $n = p$ koji je prost broj, vrijedi $\varphi(p) = p-1$. Doista, za bilo koji prost broj p, brojevi $1, 2, \ldots, p-1$ su očevidno relativno prosti s p. Na primjer, $\varphi(5) = 5-1 = 4$. ■

■ **Primjer 3.73** Provjerite da za prirodan broj $n = p^\alpha$, gdje je p prost broj, a eksponent α prirodan broj, vrijedi $\varphi(p) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. Na primjer, $\varphi(4) = \varphi(2^2) = 2^2 - 2 = 2$.

Rješenje. Doista, jedini brojevi koji su strogo manji od p^α, a nisu relativno prosti s njime, su oni prirodni brojevi $\leq p^\alpha - 1$ koji su višekratnici prostog broja p. Takvih po Primjeru 3.2 na str. 6 ima ukupno $\lfloor \frac{p^\alpha - 1}{p} \rfloor = \lfloor p^{\alpha-1} - \frac{1}{p} \rfloor = p^{\alpha-1} - 1$. Prema tome, $\varphi(p^\alpha) = (p^\alpha - 1) - (p^{\alpha-1} - 1) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. ■

Glavni rezultat ovog odjeljka je zamenita Eulerova formula.

Teorem 3.4.3 — Eulerova formula za računanje $\varphi(n)$. Neka prirodan broj $n \geq 2$ ima rastav na proste faktore $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}$, pri čemu je $p_1 < \cdots < p_l$. Onda za broj $\varphi(n)$ svih prirodnih brojeva manjih od n koji su relativno prosti s n, vrijedi *Eulerova formula*:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right). \tag{3.21}$$

Dokaz. Označimo $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je A_i skup svih brojeva u X djeljivih sa p_i, $i = 1, \ldots, l$:

$$A_i = \{m \in X : p_i \,|\, m\}.$$

Brojevi iz X koji su relativno prosti sa n su oni koji nemaju niti jedan p_i kao svoj djelitelj, tj. iz skupa $\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_l$. Prema tome je $\varphi(n) = |\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_l|$. Rabeći Teorem 3.4.1(b) vidimo da je:

$$\varphi(n) = n - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^l |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_l|.$$

Jedini brojevi u X koji su djeljivi sa p_i su $p_i, 2p_i, \ldots, \frac{n}{p_i}p_i$, dakle $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. Skup $A_i \cap A_j$ predstavljaju svi brojevi iz X koji su djeljivi sa p_i i p_j, dakle sa p_ip_j, a to su $p_ip_j, 2p_ip_j, \ldots, \frac{n}{p_ip_j}p_ip_j$. Prema tome je $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_ip_j}$, itd. Odavde slijedi

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_ip_j} - \cdots + (-1)^l \frac{n}{p_1p_2\cdots p_l} \\ &= n\left(1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{1}{p_ip_j} - \cdots + \frac{(-1)^l}{p_1p_2\cdots p_l}\right).\end{aligned}$$

Odmah se vidi da je gornji izraz u okrugloj zagradi jednak umnošku

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

■

Korolar 3.4.4 Eulerova funkcija φ je *multiplikativna*, tj. ako su prirodni brojevi m i n relativno prosti, onda je

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n). \tag{3.22}$$

Dokaz. Neka su $m = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ i $n = q_1^{\beta_1}\cdots q_l^{\beta_l}$ rastavi brojeva m i n na proste faktore. Budući da su brojevi m i n relativno prosti, to znači da su skupovi prostih faktora $\{p_1, \ldots, p_k\}$ i $\{q_1, \ldots, q_l\}$ međusobno disjunktni (naime, u suprotnom brojevi m i n ne bi bili relativno prosti). Prema tome mn ima sljedeći rastav na proste faktore:

$$mn = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}\cdot q_1^{\beta_1}\cdots q_l^{\beta_l}.$$

(Pri tome $k+l$ prostih brojeva $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l$ nije nužno poredano po veličini.) Prema Eulerovoj formuli (vidi Teorem 3.4.3) je onda

$$\begin{aligned}\varphi(mn) &= mn\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{q_l}\right) \\ &= m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\cdot n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{q_l}\right) \\ &= \varphi(m)\,\varphi(n).\end{aligned}$$

■

■ **Primjer 3.74** Radi Korolara 3.4.4 i Primjera 3.73, vrijedi $\varphi(20) = \varphi(2^2\cdot 5) = \varphi(2^2)\varphi(5) = (2^2-2)(5-1) = 8$, što je u skladu s Primjerom 3.71. ■

Dodatak

Jedan od najvažnijih rezultata o Eulerovoj funkciji je *Eulerova kongruencija*: ako su a i n relativno prosti prirodni brojevi, onda je

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}. \tag{3.23}$$

O njoj će više riječi biti u kolegiju Diskretna matematika. Posebno, ako je p prost broj, te a prirodan broj koji nije djeljiv s p, onda je

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ova se kongruencija zove *mali Fermatov teorem*. Na primjer za $a = 32$ i $p = 17$ dobivamo da je $32^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. Drugim riječima, broj 32^{16} pri dijeljenju sa 17 daje ostatak jednak 1.

3.4.3 Zadatci iz kombinatorike za samostalan rad

Zadatak 3.24 Koliko ima funkcija $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5\}$, takvih da je $f(1) \in \{1,2,3\}$ ili $f(3) \in \{3,4\}$?

Zadatak 3.25 Koliko ima monotono rastućih funkcija iz skupa $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 4\}$ u samog sebe, takvih da je $f(-1) = -1$ ili $f(0) = 0$. (Ovdje imamo inkluzivni 'ili'.)

Zadatak 3.26 Koliko ima monotono rastućih funkcija iz skupa $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 4\}$ u samog sebe, takvih da je $f(-1) \neq -1$ i $f(0) \neq 0$.

Zadatak 3.27 Koliko ima funkcija iz zadanog peteročlanog skupa u zadani tročlani skup koje nisu surjektivne?

Zadatak 3.28 Koliko ima bijektivnih funkcija f sa skupa $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$ u samog sebe, takvih da je $f(x) \neq x$ za sve x.

Zadatak 3.29 Koliko ima razlomaka oblika $\frac{20}{n}$ koji nisu skrativi, gdje je n prirodan broj, $1 \leq n \leq 19$? Koliko ima skrativih razlomaka tog oblika?

3.5 Riješeni zadatci iz kombinatorike iz cijelog gradiva

Zadatak 3.30 Koliko ima troznamenkastih višekratnika broja 7?

Rješenje. Troznamenkasti prirodni brojevi su svi brojevi između 100 i 999 uključivo. Među njima, djeljivih sa sedam ima prema Primjeru 3.3 ukupno $\lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{100-1}{7} \rfloor = 142 - 14 = 128$.

Zadatak 3.31 Na jednoj proslavi n osoba (gdje je $n \geq 2$) diže svoje čaše i kuca se svaki sa svakim (samo jednom). Koliko je kucanja bilo?

Rješenje. Svaka od n osoba se kucala s $(n-1)$ preostalih osoba, pa po Produktnom pravilu takvih kucanja ima $n(n-1)$. Broj $n(n-1)$ treba međutim podijeliti s 2, jer je svako kucanje računato dvaput (na primjer, prva osoba se kucala s drugom, ali se i druga kucala s prvom, a to je isto kucanje). Ukupan broj iznosi $\frac{n(n-1)}{2}$.

Drugi način. Svakom kucanju možemo bijektivno pridružiti dvodvočlani podskup osoba koje su se kucale. Zbog Pravila bijekcije (vidi str. 7) je broj kucanja jednak broju dvočlanih podskupova n-članog skupa, tj. $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (vidi Teorem 3.2.3 na str. 20).

Na primjer, za dvije osobe imamo $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$ kucanje, za tri osobe imamo $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$ kucanja, za četiri osobe bit će $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ kucanja, a za pet osoba imamo $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ kucanja.

Zadatak 3.32 Na koliko se načina prirodan broj n može napisati kao zbroj dvaju nenegativnih cijelih brojeva? (Pritom i poredak pribrojnika uzimamo u obzir; na primjer za $n = 5$ zbrojeve $2+3=5$ i $3+2=5$ smatramo različitim.)

Rješenje. Broj n možemo napisati kao $n = k + (n-k)$ za $k = 0,1,2,\ldots,n$, a time su dobiveni svi traženi zbrojevi. Tih zbrojeva ima koliko i mogućih izbora k-ova, pa po Pravilu bijekcije dobivamo da postoji $n+1$ prikaza broja n kao zbroja dvaju nenegativnih cijelih brojeva.

Zadatak 3.33 U prostoru je dano n točaka, gdje je $n \geq 4$, tako da niti koje četiri od njih nisu u istoj ravnini. Koliki je broj tetraedara s vrhovima u tim točkama? (*Tetraedar* je bilo koja piramida s četiri vrha. Zove se još i *četverostran*, jer ima četiri strane koje su trokuti, kao na primjer kod tetrapaka.)

Rješenje. Tetraedar je jednoznačno određen s bilo koje četiri odabrane točke kao vrhovima, pa je radi Pravila bijekcije (vidi str. 7) ukupan broj tetraedara jednak broju četveročlanih podskupova n-članog skupa, tj. $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Zadatak 3.34 Zadan je broj 5200. Koliko on ima djelitelja? Koliko ima parnih, a koliko nepanih djelitelja?

Rješenje. Rastavimo 5200 na proste djelitelje. Vrijedi $5200 = 52 \cdot 100 = 26 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 2 = \cdots = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 13$. Svi djelitelji od n su oblika $2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 13^\gamma$, gdje su $\alpha \in \{0,1,2,3,4\}$, $\beta \in \{0,1,2\}$, $\gamma \in \{0,1\}$. Svakom djelitelju bijektivno pridružimo odgovarajući trojac (α,β,γ). Prema Produktnom pravilu svih djelitelja od n ima ukupno $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Parni djelitelji su oblika $2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 13^\gamma$, gdje su $\alpha \in \{1,2,3,4\}$ (zbog parnosti od n mora potencija od 2 biti barem 1), $\beta \in \{0,1,2\}$, $\gamma \in \{0,1\}$. Zato parnih djelitelja ima $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Neparni djelitelji su oblika $2^0 \cdot 5^\beta \cdot 13^\gamma$, gdje su $\beta \in \{0,1,2\}$, $\gamma \in \{0,1\}$ pa ih ima $3 \cdot 2 = 6$. Ili kraće, prema Pravilu komplementa (vidi str. 7), neparnih djelitelja ima $30 - 24 = 6$.

Zadatak 3.35 Koliko ima n-znamenkastih brojeva

(a) s barem jednom parnom znamenkom?
(b) s točno jednom parnom znamenkom?
(c) s najviše jednom parnom znamenkom?
(d) s točno jednom neparnom znamenkom?

Rješenje.

(a) Od svih n-znamenkastih brojeva oduzmimo one koji na svih n mjesta imaju samo neparne znamenke $1,3,5,7,9$:

$$9 \cdot 10^{n-1} - 5^n.$$

(b) Za odabir parne znamenke ima pet mogućnosti: $0,2,4,6,8$ i možemo je smjestiti na n mjesta. Na ostalih $n-1$ mjesta dolaze neparne $1,3,5,7,9$. Od svih ovako izgeneriranih brojeva još moramo izbaciti samo one koji na prvom mjestu imaju znamenku 0 (jer takvi nisu n-znamenkasti):

$$5n \cdot 5^{n-1} - 5^{n-1} = (5n-1)\,5^{n-1}.$$

Drugi način rješavanja zadatka (b). Jedna jedina parna znamenka je ili 0 ili je iz četveročlanog skupa 2, 4, 6, 8. Ako je 0, ne smije biti na vodećoj poziciji, a ako nije, može biti na bilo kojem od preostalih $n-1$ mjesta:

$$(n-1) \cdot 5^{n-1} + n \cdot 4 \cdot 5^{n-1} = 5^{n-1}[(n-1)+4n] = (5n-1) \cdot 5^{n-1}.$$

Vidimo da dobivamo isti rezultat, ali smo u situaciji kad nismo mogli direktno primijeniti Produktno pravilo, pa smo zato skup koji prebrajamo podijelili na dva disjunktna podskupa, tako da na svakom od njih ipak možemo primijeniti Produktno pravilo.

(c) Ovdje moramo prebrojiti sve n-znamenkaste brojeve bez parnih znamenaka i s točno jednom parnom znamenkom:

$$5^n + (5n-1)\,5^{n-1} = (5n+4)\,5^{n-1}.$$

(d) Za odabir neparne znamenke ima pet mogućnosti: $1,3,5,7,9$ i možemo ih smjestiti na n mjesta. Na ostalih $n-1$ mjesta dolaze parne $0,2,4,6,8$. Od svih ovako izgeneriranih brojeva moramo izbaciti one koji na prvom mjestu imaju znamenku 0, a kod takvih za odabir mjesta neparne znamenke ostaje $n-1$ mjesto:

$$5n \cdot 5^{n-1} - (n-1)\,5^{n-1} = (4n+1)\,5^{n-1}.$$

Zadatak 3.36 Na koliko se načina n ljudi može premjestiti tako da prvog i zadnjeg ne mičemo?

Rješenje. Permutiramo (premještamo) zapravo samo preostale $n-2$ osobe, a takvih permutacija ima $(n-2)!$.

Zadatak 3.37 Koliko ima injektivnih funkcija iz 4-članog skupa u 7-člani? (Ili ekvivalentno tome, na koliko je načina moguće četvero novorođenčadi smjestiti u 7 krevetića?)

Rješenje. Injektivnih funkcija ima ukupno $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Zadatak 3.38 (1) Koliko ima 20-slovnih riječi sastavljenih od 30 slova hrvatske abecede u kojima se slova ne ponavljaju?
(2) Koliko ima 20-znamenkastih brojeva u kojima se svaka znamenka od 0, 1, ..., 9 ponavlja točno dvaput?

Rješenje. (1) $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 11$.

(2) Od svih permutacija s ponavljananjem oduzimamo one koje počinju nulom:

$$\binom{20}{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2} - \binom{19}{1,2,2,2,2,2,2,2,2,2} = \frac{20!}{2^{10}} - \frac{19!}{2^9} = \frac{19!}{2^9}\left(\frac{20}{2} - 1\right) = \frac{9 \cdot 19!}{2^9}.$$

Mogli smo postaviti na prvo mjesto bilo koju znamenku različitu od 0 na 9 načina, rasporediti prestalih 19 znamenaka (0 jednom, a prostalih 9 jednoznamenkastih brojeva dvaput svaki): $9 \cdot \binom{19}{1,2,2,2,2,2,2,2,2,2} = 9 \cdot \frac{19!}{2^9}$.

Zadatak 3.39 Od 7 žena i 4 muškarca treba izabrati delegaciju. Na koliko se načina to može učiniti ako se ta delegacija sastoji od:

(a) petero ljudi i to 3 žene i 2 muškarca;
(b) bilo kojeg broja ljudi, ali jednako žena i muškaraca;
(c) petero ljudi, od kojih su barem dvije žene;
(d) petero ljudi s tim da jedan od njih bude već unaprijed određena žena;
(e) šestoro ljudi, po troje oba spola, s tim da u delegaciju ne mogu ući zajedno po jedan unaprijed određeni muškarac i žena.

Rješenje.

(a) Žene u delegaciji možemo izabrati na $\binom{7}{3}$ načina, a muškarce na $\binom{4}{2}$. Ukupno delegaciju možemo odabrati na $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = 210$ načina.

(b) Prebrojimo posebno sve delegacije od 1 žene + 1 muškarca, zatim 2 žene + 2 muškarca, 3 žene + 3 muškarca, 4 žene + 4 muškarca. Ukupno to je

$$\binom{7}{1}\binom{4}{1} + \binom{7}{2}\binom{4}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{3} + \binom{7}{4}\binom{4}{4} = 329.$$

(c) Prebrojimo posebno sve delegacije s točno 2, 3, 4 ili 5 žena (i zatim rabimo Pravilo zbrajanja):

$$\binom{7}{2}\binom{4}{3} + \binom{7}{3}\binom{4}{2} + \binom{7}{4}\binom{4}{1} + \binom{7}{5} = 455.$$

(d) Ako je u delegaciji jedna već unaprijed određena žena, preostaje odabrati još četvoro ljudi bez obzira na spol. To se može na $\binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = 210$ načina.

(e) Od svih delegacija s 3 žene i 3 muškarca (kojih ima $\binom{7}{3}\binom{4}{3}$) oduzmimo one u kojima je zabranjeni par (kojih ima $\binom{6}{2}\binom{3}{2}$). Prema Pravilu komplementa, rezultat je

$$\binom{7}{3}\binom{4}{3} - \binom{6}{2}\binom{3}{2} = 95.$$

Zadatak 3.40 Izračunajte koeficijent uz $a^3b^2c^{23}$ u razvoju polinoma $(a+b+c)^{28}$.

Rješenje. Traženi koeficijent je prema Multinomnom teoremu (vidi Teorem 3.3.2 na str. 30) jednak $\binom{28}{3,2,23} = \frac{28!}{3!2!23!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{6 \cdot 2} = 982\,800$.

Zadatak 3.41 Koliko ima pribrojnika koji se pojavljuju u razvoju dvadeset i osme potencije trinoma $(a+b+c)$?

Rješenje. Budući da je prema Multinomnom teoremu (vidi Teorem 3.3.2 na str. 30),

$$(a+b+c)^{28} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=28} \frac{28!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} c^{\alpha_3},$$

svaki je pribrojnik jednoznačno određen odgovarajućim multiindeksom $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Budući da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 28$, a α_k su nenegativni cijeli brojevi za $k = 1,2,3$, onda je broj tih multiindeksa jednak $\binom{3+28-1}{28} = \binom{30}{28} = \binom{30}{2} = 435$. (Vidi (3.17) na str. 35.)

Drugi način rješavanja zadatka bio bi izračunati $(a+b+c)^{28}$ i zatim prebrojiti sve pribrojnike. Takav postupak međutim ne bismo preporučili, jer taj pristup zahtijeva previše vremena.

Zadatak 3.42 Izračunajte zbroj svih multinomnih koeficijenata oblika $\binom{10}{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$, gdje su α_1, α_2 i α_3 nenegativni cijeli čiji zbroj je jednak 10. Dobivenoj jednakosti dajte kombinatoričko objašnjenje.

Rješenje. Rabeći Multinomni teorem (vidi Teorem 3.3.2 na str. 30), uz $n = 10$ i $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, dobivamo da je

$$\sum_{|\alpha|=10} \binom{10}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = 3^{10},$$

gdje zbrajamo po svim multiindeksima $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ duljine $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 10$. Zbroj na lijevoj strani je broj svih permutacija s ponavljanjem reda 10 skupa od tri elementa (tj. broj premjestba na ukupno 10 mjesta, s elementima iz tročlanog skupa, koji se smiju po volji ponavljati). S druge strane, jasno je da na svako od deset mjesta može doći bilo koji od triju elemenata, pa ukupni broj permutacija iznosi 3^{10}.

Zadatak 3.43 Koliko se različitih riječi može složiti od svih slova riječi MATEMATIKA tako da samoglasnici ne budu jedan kraj drugog?

Rješenje. Označimo mjesto br. 10 sa 0. Imamo pet samoglasnika (to su A, A, A, E, I), pa su moguća mjesta za samoglasnike 13579, 13570, 13580, 13680, 14680 i 24680. Za svaki taj slučaj, samoglasnike možemo birati na $\binom{5}{3,1,1}$ načina, a suglasnike (M, M, T, K) možemo za preostalih pet mjesta birati na $\binom{5}{2,2,1}$ načina. Za svaki raspored možemo prema Produktnom pravilu naći $\binom{5}{3,1,1}\binom{5}{2,2,1}$ riječi. Prema tome, ukupni broj riječi iznosi $6 \cdot 20 \cdot 30 = 3\,600$.

Zadatak 3.44 Koliko ima putova u cjelobrojnoj koordinatnoj mreži od točke $(0,0)$ do točke $(8,10)$ koji prolaze točkom $(3,3)$, a ne prolaze točkom $(5,5)$? Put se sastoji od koraka u desno $(m,n) \to (m+1,n)$ ili gore $(m,n) \to (m,n+1)$.

Rješenje. Primijetimo da točka $(5,5)$ dolazi poslije točke $(3,3)$ pa gledamo puteve od $(0,0)$ do $(3,3)$, a nakon toga puteve od $(3,3)$ do $(8,10)$ koji ne prolaze točkom $(5,5)$:

$$\binom{6}{3}\left(\binom{12}{5} - \binom{4}{2}\binom{8}{3}\right) = 20 \cdot (792 - 6 \cdot 56) = 9\,120.$$

Zadatak 3.45 Koliko se peteroznamenkastih brojeva može napisati od znamenaka broja 62 774 277?

Rješenje. Brojevi mogu sadržavati jednu, dvije, tri ili četiri znamenke 7.

Ako brojevi sadrže točno jednu znamenku 7, tada sadrže sve ostale znamenke (tj. 6, 2, 4, 2), pa kako se znamenka 2 ponavlja, takvih brojeva ima $\frac{5!}{2!} = 60$.

Ako brojevi sadrže dvije znamenke 7, tada mogu sadržavati znamenku 6 i dvije znamenke 2, znamenku 4 i dvije znamenke 2 te znamenke 2, 4, 6 pa dobivamo da takvih brojeva ima $\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{2!}=30+30+60=120$.

Slično, ako brojevi sadrže tri znamenke 7, tada preostale znamenke mogu biti 22, 24, 26 ili 46, pa takvih brojeva ima $\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!}=10+20+20+20=70$.

Konačno, ako brojevi sadrže četiri znamenke 7, tada sadrže još jednu znamenku pa takvih brojeva ima $3\frac{5!}{4!}=15$.
Zbroj dobivenih brojeva je 265.

Zadatak 3.46 Na koliko se načina može 5 jabuka (uz pretpostavku da su iste, tj. da ih ne razlikujemo) podijeliti između 30 ljudi ako:

(a) svaki čovjek može dobiti najviše jednu jabuku,

(b) svaki čovjek može dobiti bilo koji broj jabuka?

Rješenje. (a) Ovaj broj je jednak broju načina na koji se može izabrati peteročlani podskup 30-članog skupa, a to je $\binom{30}{5}=142\,506$.

(b) Riječ je o kombinacijama s ponavljanjem, tj. traženi broj iznosi $\binom{30+5-1}{5}=\binom{34}{5}=278\,256$.

Zadatak 3.47 Na koliko se načina broj 10 može napisati kao zbroj triju prirodnih brojeva? (Uzimamo u obzir i poredak tih triju brojeva; na primjer prikaze $1+2+7=10$ i $2+1+7=10$ smatramo različitim.)

Rješenje. Tražimo koliko ima poredanih trojaca (x_1,x_2,x_3) triju prirodnih brojeva, tako da je $x_1+x_2+x_3=10$. Uvođenjem novih varijabla, $y_1:=x_1-1$, $y_2:=x_2-1$ i $y_3:=x_3-1$, traženi problem se bijektivno prenosi na problem nalaženja broja nenegativnih cijelobrojnih trojaca (y_1,y_2,y_3), takvih da je $y_1+y_2+y_3=10-3=7$. (Naime, pridruživanje $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(y_1,y_2,y_3)$ je očevidno bijekcija.) Ovdje je $n=3$ i $k=7$, pa je prema Pravilu bijekcije (vidi str. 3) broj rješenja početne jednadžbe jednak $\binom{n+k-1}{k}=\binom{3+7-1}{7}=\binom{9}{7}=\binom{9}{2}=36$. Vidi Teorem 3.3.5 na str. 35.

Drugi način. Pogledajmo ekvivalentnu jednadžbu $x_1+x_2=10-x_3$, za vrijednosti $x_3=1,2,\ldots,8$. (Za $x_3=9$ ili 10 bi barem jedan od x_1 ili x_2 morao biti jednak nula, što nije prirodan broj.) Za $x_3=8$, jednadžba $x_1+x_2=10-8=2$ ima samo *jedno* rješenje, $(x_1,x_2)=(1,1)$. Za $x_3=7$ dobivamo jednadžbu $x_1+x_2=3$, koja ima dva rješenja, dobivena za $x_1=1$ i 2. Itd. do $x_3=1$, čemu odgovara jednadžba $x_1+x_2=9$ s *osam* rješenja, dobivena za $x_1=1,2,\ldots,8$. Prema Pravilu zbrajanja (vidi str. 6), ukupan broj rješenja u zadatku iznosi $1+2+\cdots+8=\frac{8(8+1)}{2}=36$. Pritom smo koristili formulu $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (vidi Primjer **??** na str. **??**).

Prvo rješenje je sveobuhvatnije, jer nam omogućava da umjesto zbrojeva triju brojeva gledamo zbrojeve n brojeva za bilo koji prirodan broj n.

Zadatak 3.48 Koliko ima poredanih četveraca (x_1,x_2,x_3,x_4) prirodih brojeva, takvih da je $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=9000$? (Teži zadatak.)

Rješenje. Faktorizirajmo izraz na desnoj strani: $9000=9\cdot1000=9\cdot10^3=2^33^25^3$. Prirodni brojevi x_1,x_2,x_3,x_4 mogu prema Osnovnom teoremu aritmetike (vidi Teorem **??** na str. **??**) imati samo ovakve faktorizacije:

$$\begin{aligned}x_1&=2^{y_1}3^{z_1}5^{p_1}\\x_2&=2^{y_2}3^{z_2}5^{p_2}\\x_3&=2^{y_3}3^{z_3}5^{p_3}\\x_4&=2^{y_4}3^{z_4}5^{p_4},\end{aligned}\tag{3.24}$$

pri čemu su potencije na desnim stranama nenegativni cijeli brojevi. Iz jednakosti $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=2^33^25^3$, tj. iz

$$2^{y_1+y_2+y_3+y_4}3^{z_1+z_2+z_3+z_4}5^{p_1+p_2+p_3+p_4}=2^33^25^3,$$

slijedi ponovno prema Osnovnom teoremu aritmetike da mora biti

$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3+y_4=3, &\quad y_i \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ z_1+z_2+z_3+z_4=2, &\quad z_i \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ p_1+p_2+p_3+p_4=3, &\quad p_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Svakom četvercu (x_1,x_2,x_3,x_4) bijektivno pridružujemo četverac sastavljen od nenegativnih cijelih brojeva:

$$\big((y_1,z_1,p_1),\,(y_2,z_2,p_2),\,(y_3,z_3,p_3),\,(y_4,z_4,p_4)\big)$$

a zatim permutiranjem članova njemu pridružimo (opet bijektivno) tri četverca nenegativnih cijelih brojeva (koji se pojavljuju u rastavu na proste faktore pojavljuju u potencijama; vidi (3.24)):

$$\big((y_1,y_2,y_3,y_4),\,(z_1,z_2,z_3,z_4),\,(p_1,p_2,p_3,p_4)\big).$$

Nakon toga rješavamo problem broja cjelobrojnih rješenja jednakosti za svaki prost broj i na kraju sve to pomnožimo (tj. rabimo Produktno pravilo).

Broj rješenja prve jednadžbe u (3.25), iznosi $\binom{4+3-1}{3}=20$ (vidi Teorem 3.3.5 na str. 35). Slično dobivamo da broj rješenja jednadžbe $z_1+z_2+z_3+z_4=2$ iznosi $\binom{4+2-1}{2}=10$, a broj rješenja jednadžbe $p_1+p_2+p_3+p_4=3$ iznosi ponovno 20. Umnožak tih brojeva je $20\cdot 10\cdot 20=4\,000$.

Zadatak 3.49 Na koliko načina može kralj iz donjeg lijevog polja šahovske ploče, doći u gornje desno polje, ako smije ići:

(a) samo desno i gore,

(b) desno, gore i dijagonalno (gore+desno)? (Ovo je teži zadatak.)

Rješenje.

(a) Svaki put iz donjeg lijevog u gornje desno polje šahovske ploče može se prikazati nizom od 7 slova G i 7 slova D, a takvih nizova ima $\frac{14!}{7!7!}=3432$. (Ovaj je zadatak zapravo specijalan slučaj Primjera 3.48 na str. 31.)

(b) Prebrojimo sve puteve koji sadrže točno k dijagonalnih pomaka. Osim tih k dijagonalnih pomaka, kralj se mora još $(7-k)$ puta pomaknuti desno i $(7-k)$ puta gore. Ukupno to je $k+(7-k)+(7-k)=14-k$ poteza od kojih je k, $7-k$, $7-k$ istih, odnosno $\frac{(14-k)!}{k!(7-k)!(7-k)!}$. Budući da k može biti najmanje 0, a najviše 7, rješenje je

$$\sum_{k=0}^{7}\frac{(14-k)!}{k!\,(7-k)!\,(7-k)!}=48\,639.$$

Zadatak 3.50 Zadana je standardna kvadratna šahovska ploča sa 64 polja. Na koliko različitih načina može figura doći iz lijevog doljnjeg u desno gornje polje, tako da

(1) ne prođe poljem na presjeku trećeg stupca i petog retka, niti poljem na presjeku petog stupca i sedmog retka,

(2) ne prođe poljem na presjeku trećeg stupca i petog retka, niti poljem na presjeku petog stupca i četvrtog retka,

ako se figura u jednom potezu može pomicati samo za jedno polje u desno ili jedno polje gore? Stupci su označeni brojevima od 1 do 8 s lijeva na desno, a redci odozdol prema gore.

Rješenje. Primijetimo da dva posebna uvjeta moraju biti ispunjena, pa ćemo rabiti Formulu uključivanja i isključivanja za traženje kardinalnog broja skpa oblika $\overline{A}\cap\overline{B}$. Zato imamo:

(1) $\binom{14}{7}-\frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{8!}{5!3!}-\frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{4!}{3!1!}+\frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{4!}{3!1!}=2112.$

(2) $\binom{14}{7}-\frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{8!}{5!3!}-\frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{7!}{1!3!}=1367.$

Zadatak 3.51 U lift je ušlo 8 ljudi. Na koliko načina mogu izaći na 5 katova tako da na svakom katu izađe bar jedan čovjek?

Rješenje Svakom izlasku 8 ljudi na 5 katova odgovara funkcija iz skupa od osam ljudi u skup od pet katova. Prema tome, traži se broj surjektivnih funkcija između ta dva skupa, a on iznosi (vidi Teorem 3.4.2, uz $m = 8$ i $n = 5$)

$$\begin{aligned}|\operatorname{Sur}(8,5)| &= 5^8 - \binom{5}{1}\cdot 4^8 + \binom{5}{2}\cdot 3^8 - \binom{5}{3}\cdot 2^8 + \binom{5}{4}\cdot 1^8 \\ &= 390625 - 327680 + 65610 - 2560 + 5 = 126000.\end{aligned}$$

Zadatak 3.52 Na "Okrugli stol o uvjetima studiranja" došlo je 6 studenata i 6 profesora. Student X ne želi sjediti kraj profesora A, B i C, jer kod njih nije dobio prolaznu ocjenu. Na koliko se načina svi sudionici mogu rasporediti oko okruglog stola tako da student X ne sjedi niti kraj jednog od te trojice profesora?

Rješenje. Označimo sa A skup rasporeda u kojima student X sjedi pokraj profesora A, sa B skup rasporeda u kojima student X sjedi pokraj profesora B i sa C skup rasporeda u kojima student X sjedi pokraj profesora C. Označimo sa U sve moguće rasporede. Onda tražimo

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|.$$

Sada računamo $|U| = 11!$, $|A| = |B| = |C| = 2\cdot 10!$, $|A\cap B| = |A\cap C| = |B\cap C| = 2\cdot 9!$ i $|A\cap B\cap C| = 0$ pa dobivamo

$$11! - 3\cdot 2\cdot 10! + 3\cdot 2\cdot 9! = 9!(110 - 60 + 6) = 56\cdot 9!.$$

Zadatak 3.53 Na koliko se načina pet učenika može grupirati u tri skupine, tako da u svakoj bude barem jedan učenik? (Teži zadatak.)

Rješenje. Svakom smještavanju učenika odgovara surjektivna funkcija iz skupa od pet učenika $\{u_1,\dots,u_5\}$ u skup triju skupina $\{S_1,S_2,S_3\}$ (te tri skupine su disjunktni podskupovi skupa učenika čija unija daje skup svih učenika, i pritom jednakost $f(u_j) = S_j$, za $j = 1,2,3$, znači da je $u_j \in S_j$). Ako te tri skupine shvatimo kao sobe, i permutiramo ih, onda svakoj takvoj surjekciji odgovara $3! = 6$ surjektivnih funkcija iz skupa od pet učenika $\{u_1,\dots,u_5\}$ u skup $\{s_1,s_2,s_3\}$ koji se sastoji od tri *numerirane* sobe. Pritom sobe s_1, s_2 i s_3 mogu odgovarati bilo kojoj od šest permutacija skupina S_1, S_2 i S_3. Prema prethodnom zadatku, svih surjektivnih funkcija iz peteročlanog skupa u tročlani ima $|\operatorname{Sur}(5,3)| = 150$. Prema tome je traženi broj grupiranja petero učenika u tri neprazne skupine jednak

$$\frac{1}{3!}|\operatorname{Sur}(5,3)| = \frac{1}{3!}\cdot 150 = 25.$$

U zadatku se zapravo tražio broj *particija* (vidi Odjeljak **??** na str. **??**) skupa od m elemenata (u ovom zadatku je $m = 5$), takvih da se svaka particija sastoji od n elemenata, gdje je $m \geq n$ (u ovom zadatku je $n = 3$). Kao što vidimo, općenito broj takvih particija iznosi

$$\frac{1}{n!}|\operatorname{Sur}(m,n)| = \frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m, \tag{3.26}$$

gdje je $|\operatorname{Sur}(m,n)|$ broj surjektivnih funkcija iz m-članog skupa u n-člani skup; vidi (3.20) na str. 41. Broj dobiven na desnoj strani u (3.26) zove se *Stirlingov broj druge vrste*, a označava se sa $S(m,n)$.

Zadatak 3.54 Koliki ima mogućih particija zadanog m-članog skupa? Ekvivalentom tom pitanju, koliko ima relacija ekvivalencije na zadanom m-članom skupu?

Rješenje. Kao što smo vidjeli u rješenju Zadatka 3.53, broj n-članih particija m-članog skupa, gdje je $n \in \{1,\dots,m\}$, jednak je $\frac{1}{n!}|\operatorname{Sur}(m,n)|$. Prema tome, broj svih mogućih particija n-članog skupa jednak je

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}|\operatorname{Sur}(m,n)|,$$

gdje je $\operatorname{Sur}(m,n)|$ broj surjektivnih funkcija iz m-članog skupa u n člani skup, za $n \le m$; vidi (3.20) na str. 41.

Zadatak 3.55 Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 360, koji su relativno prosti s tim brojem? Koliko ima onih koji su manji od 360, a s njime nisu relativno prosti?

Rješenje. Traži se zapravo broj $\varphi(360)$, gdje je φ Eulerova funkcija; vidi str. 46. Najprije rastavimo taj broj na proste faktore: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$; vidi Primjer 3.13 na str. 13. Prema Eulerovoj formuli (3.21) vrijedi

$$\varphi(360) = 360\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 360\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = 360\cdot\frac{4}{15} = 96.$$

Svih brojeva koji su strogo manji od 360, a nisu relativno prosti s njime, prema Pravilu komplementa (vidi str. 7) ima ukupno $359-96=263$.

Zadatak 3.56 U školi ima 502 učenika, koji treniraju nogomet ili košarku. Od toga ih 213 ne trenira niti jedan sport, nogomet trenira njih 267, a nogomet i košarku 99. Koliko ima učenika koji treniraju samo košarku? Na koliko se načina mogu sastaviti dvije momčadi od 5 košarkaša ako u svakoj smije biti najviše jedan košarkaš koji trenira i nogomet?

Rješenje. Neki sport trenira $502-213=289$ učenika pa $289-267=22$ trenira samo košarku.

Najprije biramo obje momčadi bez nogometaša. To možemo učiniti na $\frac{1}{2}\binom{22}{5}\binom{17}{5}$ načina. Nakon toga biramo jednu momčad bez nogometaša, a nakon toga još jednu, ali sa četiri igrača, jer u nju stavljamo jednog nogometaša. To možemo učiniti na $\binom{22}{5}\binom{17}{4}\binom{99}{1}$ načina. Konačno biramo dvije momčadi od četiri igrača i u njih dodajemo po jednog nogometaša. To možemo učiniti na $\frac{1}{2}\binom{22}{4}\binom{99}{1}\binom{18}{4}\binom{98}{1}$ načina. Traženi broj timova iznosi

$$\frac{1}{2}\binom{22}{5}\binom{17}{5}+\binom{22}{5}\binom{17}{4}\binom{99}{1}+\frac{1}{2}\binom{22}{4}\binom{99}{1}\binom{18}{4}\binom{98}{1}.$$

Dodatne primjere iz kombinatorike, s naglaskom na simboličkom računu, možete vidjeti u Interaktivnom uvodu u Matematičku analizu, pripremljenom u programu Jupyter.

Od literature na hrvatskom jeziku čitatelju preporučamo da za daljnji studij kombinatoričkih problema konzultirate opsežno djelo [Ve], te odličnu (i izvanredno duhovitu) zbirku zadataka [Cvi].

3.6 Ponavljanje i problemi iz kombinatorike za samostalni rad and problems in Combinatorics for self-study

3.6.1 Kratki pregled rezultata iz kombinatorike

Kroz pitanja koja slijede pokušajte sami složiti nekoliko svojih vlastitih kombinatoričkih primjera.

Koliko ima cjelobrojnih višekratnika prirodnog broja k koji se nalaze između zadanih cijelih brojeva m i n uključivo, gdje je $m < n$?

Što kažu kombinatorička Pravila zbrajanja, komplementa i bijekcije? Što kaže Produktno pravilo?

Što kaže Osnovni teorem aritmetike? Koliko djelitelja ima bilo koji zadani prirodan broj n? Kolika je najmanja moguća vrijednost tog broja i za koje n se ta vrijednost postiže?

Što je to funkcija? Koliko ima svih mogućih funkcija među zadanim konačnim skupovima? Kad je taj broj najmanji?

Kada za funkciju kažemo da je injekcija? Koliko ima injektivnih funkcija među zadanim konačnim skupovima? Može li broj injektivnih funkcija biti i nula? Što to znači da neka funkcija nije injekcija? Koliko ima neinjektivnih funkcija među konačnim skupovima?

Što je to permutacija nekog n-članog skupa? Koliko ima permutacija (premjestba) n-članog skupa? Općenitije, koliko ima bijektivnih funkcija između dva zadana n-člana skupa?

Što je to partitivni skup nekog skupa? Koliko podskupova ima n-člani skup, gdje je n prirodan broj ili nula? (Koji je to skup koji ima nula elemenata? Navedite sve njegove podskupove.)

Koliko ima k-članih podskupova n-članog skupa, gdje je n zadani prirodan broj, a k nenegativan cijeli broj? Kako izgleda graf funkcije $f : \{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{N}$ zadane sa $f(k) := \binom{n}{k}$, gdje je prirodan broj n učvršćen? Za koje k je ta funkcija rastuća, a za koje padajuća. Za koje k je vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ najveća?

Što je to Pascalov trokut binomnih koeficijenata? Što je to binom? Što kaže binomni teorem? Koliki je zbroj svih binomnih koeficijenata koji se pojavljuju u n-toj potenciji općeg binoma?

Što je to permutacija s ponavljanjem? Koliko ima permutacija s ponavljanjem duljine n, sastavljenih od k različitih elemenata, u kojima je kratnost n_k svakog elementa zadana? (Naravno, pritom zbroj svih kratnosti mora biti jednak n, tj. $n_1 + \cdots + n_k = n$.)

Što je to multinom? Što kaže multinomna formula? Kakva je kombinatorička interpretacija multinomnih koeficijenata?

Koliko ima poredanih k-teraca sastavljenih od elemenata zadanog n-članog skupa, koji se smiju ponavljati?

Koliko ima neporedanih k-teraca sastavljenih od elemenata zadanog n-članog skupa (kombinacije s ponavljanjem), gdje su k i n bilo koji prirodni brojevi? Koliko rješenja $(x_1,\dots,x_k)$ ima jednadžba $x_1 + \cdots + x_n = k$, gdje su x_j nenegativni cijeli brojevi za sve $j = 1,\dots,n$? (Broj x_j interpretiramo kao kratnost odgovarajućeg elementa n-članog skupa, za bilo koji $j = 1,\dots,n$.) Koliko ima monotono rastućih funkcija iz skupa $\{1,\dots,k\}$ u $\{1,\dots,n\}$?

Što kaže Sylvesterova formula (tj. formula uključivanja i isključivanja). Kako ona glasi za $n = 2$ i $n = 3$?

Što je to surjekcija? Koliko ima surjektivnih funkcija među dvama konačnim skupovima? Kada je broj surjektivnih funkcija među konačnim skupovima jednak nula?

Kada za bijekciju f iz n-članog skupa u samog sebe kažemo da je deranžman? Koliko ima deranžmana n-članog skupa? Koliki je kvocijent broja svih deranžmana n-članog skupa i broja svih permutacija (premjestba) tog skupa?

Definirajte Eulerovu funkciju. Navedite njena osnovna svojstva, kao i Eulerovu formulu za računanje vrijednosti $\varphi(n)$. Za koje prirodne brojeve n je $\varphi(n) = n - 1$?

3.6.2 Zadatci iz cijelog gradiva kombinatorike za samostalan rad

Zadatak 3.57 Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva koji su cjelobrojni višekratnici od 3 ili 7 (tj. djeljivi su s 3 ili 7)? (Ovdje 'ili' ima inkluzivno značenje.) Koliko ima troznamenkastih brojeva koji nisu cjelobrojni višekratnici niti od 3 niti od 7.

Zadatak 3.58 Šahovska ploča ima 64 polja, na koja stavljamo zrna pšenice na sljedeći način. Na prvo polje stavljamo jedno zrno, na drugo dva, na treće četiri, a na svako daljnje polje dvostruko više zrna nego u prijašnjem koraku. Koliko je ukupan broj zrna pšenice stavljen na šahovsku ploču? Ako se na ploču stavljaju po dva zrna u sekundi, nakon koliko godina će biti stavljeno posljednje zrno pšenice? (Radi jednostavnosti, uzmimo da svaka godina ima 365 dana.)

Zadatak 3.59 Koliko ima bijekcija

$$f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\},$$

takvih da je $f(1) \neq 1$, $f(3) \neq 3$, $f(5) \neq 5$, $f(7) \neq 7$ i $f(\{1,3,5,7\}) = \{1,3,5,7\}$?

Zadatak 3.60 Na koliko se načina može broj 1260 napisati kao umnožak dvaju relativno prostih prirodnih brojeva a i b većih od jedan? (Umnoške ab i ba smatramo istim.)

Zadatak 3.61 Koliko ima refleksivnih relacija na 10-članom skupu?

Zadatak 3.62 Osam djevojaka i devet mladića polazi u plesnu školu. Koliko različitih plesnih parova je moguće složiti?

Zadatak 3.63 Izračunajte zbroj svih binomnih koeficijenata oblika $\binom{n}{k}$, gdje je n bilo koji prirodan broj koji je ≤ 10, a k je bilo koji nenegativan cijeli broj takav da je $k \leq n$.

Zadatak 3.64 Koliko ima surjektivnih funkcija

$$f : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \to \{1,2,3,4\} \quad ?$$

Koliko ima funkcija koje nisu surjektivne? A koliko ima injektivnih?

Zadatak 3.65 Na koliko načina može 10 djevojaka i 10 momaka sjesti na dvadeset sjedala, tako da niti koja dva momka ne sjede zajedno (dakle niti djevojke)?

Zadatak 3.66 Promatramo sve razlomke oblika $\frac{300}{n}$, gdje je n prirodan broj manji od 300. Koliko ima takvih razlomaka koji su skrativi?

Zadatak 3.67 Koliko ima refleksivnih relacija na 8-članom skupu koje nisu simetrične?

Zadatak 3.68 U ravnini su zadana dva paralelna pravca, koji se ne podudaraju. Na jednom je zadano deset točaka, a na drugom petnaest. Koliko ima trokuta s vrhovima u tim točkama?

Zadatak 3.69 Koliko ima injektivnih funkcija

$$f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \quad ?$$

Koliko ima onih koje nisu injektivne? Koliko ima surjektivnih?

Zadatak 3.70 U ravnini je zadan skup $P = [-2, 6] \times [1, 7]$. Koliko ima pravokutnika oblika $[a,b] \times [c,d]$ sadržanih u P, takvih da su a, b, c i d cijeli brojevi i $a < b$, $c < d$?

Zadatak 3.71 Promatramo sve razlomke oblika $\frac{n}{270}$, gdje je n prirodan broj takav da je $8 \leq n \leq 272$. Koliko ima takvih razlomaka koji su neskrativi?

Zadatak 3.72 Od dvadeset osoba se formiraju dva kola koja plešu kolo u krug. Na koliko se načina mogu složiti ta dva plesna kola?

Zadatak 3.73 Koliko ima funkcija $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5\}$, takvih da je $f(1) \in \{1,2,3\}$ ili $f(3) \in \{3,4\}$ ili $f(5) \in \{1,2,4,5\}$?

Zadatak 3.74 Koliko ima surjektivnih funkcija

$$f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \quad ?$$

Koliko ima funkcija koje nisu surjektivne? A koliko ima injektivnih? Koliko ima onih koje nisu injektivne? Koliko ima bijektivnih? Koliko ima injektivnih funkcija koje nisu surjektivne?

Zadatak 3.75 Koliko kilometara ima jedna svjetlosna godina? (Svjetlosna godina je put koji zraka svjetlosti u vakuumu prijeđe za godinu dana. Pretpostavljamo da je brzina svjetlosti 300 000 km/s, te da godina ima 365 dana.)

Zadatak 3.76 Biciklist planira izlet iz Vinkovaca do Vukovara preko Nuštra. Od Vinkovaca do Nuštra je na zemljovidu pronašao četiri biciklističke staze, a od Nuštra do Vukovara njih šest. Na koliko načina može biciklist doputovati od Vinkovaca do Vukovara preko Nuštra?

Zadatak 3.77 Koliko ima parnih funkcija $f : \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 5\} \to \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$. (Za funkciju f kažemo da je *parna*, ako za sve x iz domene vrijedi vrijedi da je i $-x$ u domeni, te vrijedi $f(-x) = f(x)$.) Koliko ima neparnih funkcija? (Na sličan način, za funkciju f kažemo da je *neparna*, ako za sve x iz domene vrijedi $f(-x) = -f(x)$.)

Zadatak 3.78 Koliko ima simetričnih relacija na 12-članom skupu koje nisu refleksivne?

Zadatak 3.79 Na policama jednog ormara nalazi se osam naslova knjiga na hrvatskom jeziku, pet na engleskom i tri na njemačkom. Na koliko načina se s polica mogu izvući dvije knjige, pod uvjetom da budu na raznim jezicima?

Zadatak 3.80 Koliko ima monotono rastućih funkcija (ne nužno strogo) iz skupa $\{1,2,3,4,5\}$ u skup $\{1,2,3\}$.

Zadatak 3.81 Mladi pijanist sjeda za klavir i hvata razne akorde s tri prsta lijeve ruke i tri prsta desne. Pritom koristi samo dvanaest odabranih uzastopnih tonova na klavijaturi. Koliko akorda može na taj način uhvatiti? Ako hvata akorde s po četiri prsta lijeve ruke i četiri desne, je li broj mogućih akorda veći, ili manji, ili isti u odnosu na prethodni broj akorda?

Zadatak 3.82 Na koliko način može deset momaka i šest djevojaka biti smješteno u krug, tako da niti koje dvije djevojke ne budu zajedno?

Zadatak 3.83 Koliko ima monotono padajućih funkcija (ne nužno strogo)

$$f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$$

takvih da je $f(5) = 4$?

3.7 Rješenja zadataka

3.7.1 Rješenja zadataka koji počinju na str. 16

3.1 (a) Broj intervala radi Produktnog pravilo iznosi $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ (naime, broj poredanih dvojaca odabranih različitih točaka koje određuju intervale iznosi $10 \cdot 9$, a moramo dijeliti s dva, poredani dvojac točaka (T_1, T_2) određuje isti interval $\overline{T_1T_2}$ kao i poredani dvojac (T_2, T_1)). (Ili, broj dvočlanih podskupova skupa od 19 točaka jednak je $\binom{10}{2}$; vidi Teorem 3.2.3 na str. 20.) (b) Broj strjelica je radi produktnog pravila jednak $10 \cdot 9 = 90$.

3.2 Riječ je o broju $2400 = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 3^1 5^2$. Broj djelitelja iznosi $(5+1)(1+1)(2+1) = 36$. Naparnih djelitelja ima $(1+1)(2+1) = 6$, a parnih $36 - 6 = 30$.

3.3 Tražimo broj funkcija iz deseteročlanog skupa u tročlani: 3^{10}. (Ili, prvog učenika smjestimo u bilo koji od tri razreda, zatim drugog, itd. Tvrdnja slijedi iz Produktnog pravila.)

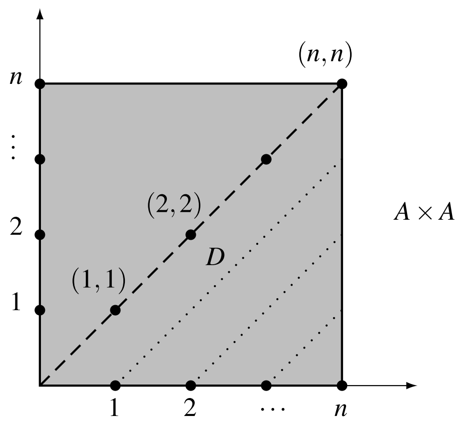
3.4 *Prvo rješenje.* U bilo kojem od m stupaca u P, svaki je pravokutnik jednoznačno određen svojom visinom, a za taj izbor imamo n mogućnosti: $1, 2, \ldots, n$. Prema Produktnom pravilu je broj razmještaja jednak $n \cdot n \cdots n = n^m$.

Drugo rješenje. Svaki je pravokutnika jedinične širine jednoznačno određen svojim gornjim desnim vrhom (vidi Sliku 3.7 na str. 16). Prema tome je broj razmještaja takvih pravokutnika unutar P jednak broju funkcija $f : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ (naime, za svaki prirodan broj j između 1 i m, vrijednost $f(j)$ između 1 i n jednoznačno određuje pravokutnik jedinične širine kojemu je točka $(j, f(j))$ desni gornji vrh). Broj tih funkcija iznosi n^m, a to je prema Pravilu bijekcije ujedno i broj mogućih razmještaja pravokutnika jedinične širine unutar P.

3.5 Svaki pravokutnik sadržan u zadanom stupcu jedinične širine unutar P jednoznačno je određen izborom dvaju brojeva iz skupa $\{0,1,2,\dots,n\}$ na y-osi. Takvih pravokutnika znači ima $\binom{n+1}{2}$. Budući da imamo m stupaca, onda je zbog Produktnog pravila broj traženih razmještaja jednak $\binom{n+1}{2}^m$.

3.6 Prema Pravilu komplementa, rezultat je $2^{20} - 1 - 20 = 2^{20} - 21$. (Od partitivnog skupa, koji ima 2^{20} podskupova, oduzimljemo jedan prazan podskup i 20 jednočlanih.)

3.7 Simetričnih relacija na n-članom skupu ima $2^{\frac{1}{2}n(n+1)} - 1$ (vidi rješenje Zadatka 3.20). Treba vidjeti koliko ima svih relacija, tj. nepraznih podskupova u $A \times A$ gdje je $A = \{1,2,\dots,n\}$. Ima ih $2^{n^2} - 1$. Prema tome, traženi broj je $(2^{n^2} - 1) - (2^{\frac{1}{2}n(n+1)} - 1) = 2^{n^2} - 2^{\frac{1}{2}n(n+1)}$.



Slika 3.15: Refleksivna relacija na n-članom skupu $A := \{1,2,\dots,n\}$ je podskup Kartezijeva produkta $A \times A$ koji sadrži dijagonalu $y = x$, tj. skup D označen crtkanom linijom, sastavljen od n elemenata $(1,1)$, $(2,2)$,..., (n,n). Skupovna razlika $(A \times A) \setminus D$ ima $n^2 - n$ elemenata, a sastoji se od dva 'diskretna trokuta' (vidljiva na slici) s istim brojem elemenata, njih $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. Vidi rješenje Zadatka 3.8.

3.8 Možemo bez gubitka općenitosti kao n-člani skup uzeti $A := \{1,2,\dots,n\}$, pri čemu koristimo Pravilo bijekcije. Relacija koja je refleksivna i simetrična na A je po definiciji bilo koji podskup od $A \times A$ koji sadrži dijagonalu D i zrcalno je simetričan skup s obzirom na dijagonalu. Taj skup je jednoznačno određen svojim dijelom koji se nalazi ispod dijagonale $D := \{(1,1),(2,2),\dots,(n,n)\}$; vidi Sliku 3.15. Prema tome, ponovno zbog Pravila bijekcije, svih relacija koje su refleksivne i simetrične ima koliko i svih podskupova od $A \times A$ koji su ispod dijagonale, tj. u skupu $\{(x,y) \in A \times A : y < x\}$. Tih elemenata ispod dijagonale ima $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$, pri čemu zbrajamo elemente na točkastim linijama na Slici 3.15, počevši od desnog dolnjeg vrha kvadrata prema glavnoj dijagonali (ili još kraće, od n^2 elemenata sadržanih u skupu $A \times A$ treba oduzeti n dijagonalnih, pa dobiveni broj podijeliti s 2, jer ih ima isti broj u 'diskretnim trokutima' ispod i iznad dijagonale). Budući da odgovarajućih podskupova ima $2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$, to je ujedno i ukupan broj refleksivnih i simetričnih relacija na n-članom skupu.

3.7.2 Rješenja zadataka koji počinju na str. 28

3.9 (a) Svaki segement je određen s dvije točke, tj. dvočlanim podskupom skupa točaka. Točke iste boje se mogu spojiti na $\binom{9}{2}+\binom{6}{2}$ načina. (b) Točke raznih boja određuju $9\cdot 6$ segmenata. Usmjerenih dužina određenih točkama iste boje ima $9\cdot 8+6\cdot 5$. (c) Usmjerenih dužina koje spajaju točke različitih boja ima $2\cdot(9\cdot 6)$.

3.10 Broj timova prema Pravilu zbrajanja iznosi $\binom{30}{4}+\binom{30}{5}+\binom{30}{6}$.

3.11 $\binom{10}{3}$.

3.12 Od deset mjesta za okruglim stolom, popunjavamo najprije svako drugo mjesto sa ženama. To možemo napraviti cikličkim na $(5-1)! = 4!$ načina. Na preostalih pet mjesta stavljamo muškarce, i njihova mjesta možemo (za svaki odabrani ciklički raspored žena) popuniti na $5!$ načina. Prema Produktnom pravilu, ukupan broj smještavanja je $(4!)\cdot(5!)$. (Za bolje razumijevanje, možda je dobro početi s primjerom dviju žena a i b i dvaju muškaraca 1 i 2: $a1b2$ i $a2b1$).

3.13 Pojmovi injekcije i surjekcije se podudaraju u slučaju kada polazni i dolazni skup imaju isti broj elemenata (tj. riječ je o bijekcijama), pa je njihov broj $n!$.

3.14 Slika strogo monotono rastuće funkcije je četveročlan podskup deveteročlanog skupa. Radi stroge monotonosti, svaki takav podskup određuje funkciju jednoznačno. Prema tome je broj traženih funkcija jednak $\binom{9}{4}=126$. Onih koje nisu monotono rastuće ima $9^4-\binom{9}{4}$.

3.15 Svaki kvadar unutar kocke je jednoznačno određen izborom po dviju točaka na svakoj od triju koordinatnih osi, a za svaku pojedinu os to se može obaviti na $\binom{11}{2}$ načina. Prema Produktnom pravilu, traženi broj kvadara iznosi $\binom{11}{2}\cdot\binom{11}{2}\cdot\binom{11}{2}=55^3$.

3.16 (a) $\binom{15}{12}=\binom{15}{3}$. To je broj 12-članih podskupova 15-članog skupa.
(b) Vrijednost $\binom{15}{k}$ je najveća za $k=7$ i $k=8$, i iznosi $\binom{15}{7}$.
(c) Zbroj svih binomnih koeficijenata iznosi 2^{15}. Taj broj predstavlja broj svih podskupova 15-članog skupa, dok je $\binom{15}{k}$ broj svih k-članih podskupova 15-članog skupa.
(d) $\frac{1}{2}\cdot 2^{15}=2^{14}$, jer je zbroj binomnih koeficijenata $\binom{15}{k}$ s neparanim k-ovima jednak odgovarajućem zbroju s parnim k-ima.

3.7.3 Rješenja zadataka koji počinju na str. 32

3.17 Potencija x^3 se u razvoju $(1+x+x^2)^5$ realizira preko multiindeksa $(2,3,0)$ i $(3,1,1)$, pa je traženi koeficijent jednak $\binom{5}{2,3,0}+\binom{5}{3,1,1}=\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{3!}$.

3.18 Uzlaznih stubastih staza od točke O do A ima $\frac{(5+3)!}{5!3!}=\frac{8!}{5!3!}$, a silaznih od A do B ima $\frac{(7+3)!}{7!3!}=\frac{10!}{7!3!}$. Naime, očevidno je broj silaznih staza od A do B prema Pravilu bijekcije jednak broju uzlaznih staza od O do $(7,3)$, jer se abscise od A i B razlikuju za 7 (ili ekvivalentno tome, silazne staze od A do B možemo bijektivno poistovjetiti s uzlaznim stazama od B do A). Prema Produktnom pravilu je ukupan broj traženih stubastih staza jednak $\frac{8!}{5!3!}\cdot\frac{10!}{7!3!}$.

3.7.4 Rješenja zadataka koji počinju na str. 37

3.19 Ova je nejednakost ekvivalentna s nejednakošću $x_1+x_2+x_3\le 499$, tj. s jednakošću $x_1+x_2+x_3+x_4=499$, u kojoj imamo četiri nenegativne cjelobrojne nepoznanice. Prema tome, $n=4$ i $k=499$, pa iz Teorema 3.3.5 slijedi da je traženi broj $\binom{n+k-1}{k}=\binom{4+499-1}{499}=\binom{502}{3}$.

3.20 Svakoj funkciji možemo bijektivno pridružiti njen graf, a svakom grafu rastući multiskup od pet elemenata određen slikom funkcije, na primjer $[2,2,2,4,4]$ (što znači da je $f(1)=f(2)=$

$f(3)=2$, $f(4)=f(5)=4$). Traženi broj multiskupova (kombinacija s ponavljanjem) iznosi $\binom{5+5-1}{5}=\binom{9}{5}=\binom{9}{4}=126$.

3.21 Najprije prebrojimo koliko ima rastućih funkcija g iz skupa $\{1,2,3\}$ u samog sebe, a zatim koliko ima rastućih funkcija h iz $\{5,6,7,8\}$ u samog sebe. Funkcija g ima ukupno $\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=\binom{5}{2}$, a funkcija h ima $\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}=\binom{7}{3}$. Prema tome, tražni broj je $\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}$.

3.22 Ovdje je $k=3$ i $n=10$, pa je broj pribrojnika jednak $\binom{k+n-1}{n}=\binom{12}{10}=\binom{12}{2}=66$. Zbroj svih multinomnih koeficijenata iznosi 3^{10}.

3.7.5 Rješenja zadataka koji počinju na str. 48

3.24 Označimo s A skup svih funkcija koje ispunjavaju prvi uvjet (tj. uvjet na $f(1)$), a s B skup svih funkcija koje ispunjavaju drugi uvjet. Traži se broj $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. Broj $|A|$ je prema Produktnom pravilu jednak $3\cdot 5^6$ (gledamo koliko vrijednosti mogu poprimiti $f(1),\ldots,f(7)$). Broj $|B|$ jednak je $5^2\cdot 2\cdot 5^4=2\cdot 5^6$. Broj $|A\cap B|$ jednak je $3\cdot 5\cdot 2\cdot 5^4=6\cdot 5^5$. Traženi broj jednak je $3\cdot 5^6+2\cdot 5^6-6\cdot 5^5$.

3.25 Označimo s A skup svih funkcija koje ispunjavaju prvi uvjet, a s B skup svih onih koje ispunjavaju drugi. Onda je $|A|=\binom{3+3-1}{3}\cdot\binom{5+5-1}{5}=\binom{7}{3}\cdot\binom{9}{5}=\binom{7}{3}\cdot\binom{9}{4}$, jer mozemo f gledati tako da promatramo parove funkcija (f,h), gdje je f monotono rastuća iz skupa $\{-4,-3,-2\}$ u samog sebe, a h monotono rastuća iz skupa $\{0,1,2,3,4\}$ u samog sebe. Na sličan način je $|B|=\binom{4+4-1}{4}\cdot\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}^2=\binom{7}{3}^2$, te $|A\cap B|=\binom{3+3-1}{3}\cdot\binom{4+4-1}{4}=\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{4}=\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}$. Broj traženih funkcija iznosi $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cap B|=\binom{7}{3}\cdot\binom{9}{4}+\binom{7}{3}^2-\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}$.

3.26 Označimo s $\overline{A}$ skup svih funkcija koje ispunjavaju prvi uvjet, a s $\overline{B}$ skup svih onih koje ispunjavaju drugi. Treba naći $|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=7^7-|A\cup B|$. Broj $|A\cup B|$ je izračunat u prethodnom zadatku.

3.27 Prema Pravilu komplementa, takvih funkcija ima $3^5-|\mathrm{Sur}(5,3)|$, gdje je $|\mathrm{Sur}(5,3)$ broj surjektivnih funkcija.

3.28 Radi se o broju deranžmana skupa od sedam elemenata, tj. $d_7=7!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!})$.

3.29 Neskrativih razlomaka ima $\varphi(20)$, a skrativih (prema principu komplementa) $19-\varphi(20)$.

3.7.6 Rješenja zadataka koji počinju na str. 56.

3.57 Svi troznamenkasti brojevi su $100,101,\ldots,999$. Označimo s A sve od njih koji su djeljivi 3, a s B one koji su djeljivi sa 7. Troznamenkastih prirodnih brojeva koji su djeljivi s 3 ili 7 ima $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. Vrijedi $|A|=\lfloor\frac{999}{3}\rfloor-\lfloor\frac{99}{3}\rfloor$, $|B|=\lfloor\frac{999}{7}\rfloor-\lfloor\frac{99}{7}\rfloor$ i $|A\cap B|=\lfloor\frac{999}{21}\rfloor-\lfloor\frac{99}{21}\rfloor$. Budući da je broj troznamenkastih brojeva $999-100+1=900$, broj troznamenkastih brojeva koji nisu cjelobrojni višekratnici niti od 3 niti od 7 iznosi $900-|A\cup B|$.

3.58 Ukupan broj zrna iznosi $1+2+2^2+\cdots+2^{63}=\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1$, tj. 18 446 744 073 709 551 615 (dakle više od 10^{19}). To je nezamislivo velika brojka. (Podsjećamo da se u jednoj litri vode nalazi 10^{23} atoma.) Stavljanjem dvaju zrna u sekundi, zadnje zrno bit će na ploču stavljeno nakon $9.2\cdot 10^{18}$ s. Nakon dijeljenja s $365\cdot 24\cdot 60\cdot 60$, ovome odgovara više od 292 471 208 677 g., tj. blizu tristo milijarda godina. Ovo je nezamislivo veliki vremenski interval. (Međutim i on je patuljast prema vječnosti.) Prema jednoj vrlo staroj legendi, jedan je siromašni Indijac pobijedio svojeg cara u šahovskoj partiji, nakon čega mu je car rekao da će mu za nagradu rado ispuniti neku želju. Siromašak je kazao da bi volio dobiti žita kao što je gore opisano, a na što je uz smijeh car odvratio da to njemu nije nikakav problem. Naravno, car nije nikada uspio ispuniti svoje obećanje.

3.59 Svaku takvu funkciju možemo poistovjetiti s parom funkcija (g,h), gdje je g deranžman $g:\{1,3,5,7\}\to\{1,3,5,7\}$, a $h:\{2,4,6,8\}\to\{2,4,6,8\}$ bilo koja bijekcija. Deranžmana na četveročlanom skupu ima $d_4=9$. Broj traženih bijekcija prema Produktnom pravilu iznosi $d_4\cdot 4!=9(4!)$.

3.60 Rastavom na proste faktore dobivamo $1260=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Ako gledamo skup $S:=\{2^2,3,5,7\}$, onda treba vidjeti na koliko se načina on može dobiti kao disjunktna unija dvaju nepraznih podskupova:

$$S:=\{2^2\}\cup\{3,5,7\}=\{3\}\cup\{2^2,5,7\}=\{5\}\cup\{2^2,7\}=\{7\}\cup\{2^2,3,5\}$$
$$\{2^2,3\}\cup\{5,7\}=\{2^2,5\}\cup\{3,7\}=\{2^2,7\}\cup\{3,5\}.$$

Na primjer, rastavu $S=\{2^2\}\cup\{3,5,7\}$ odgovara umnožak relativno prostih brojeva ab gdje su $a=2^2$ i $b=3\cdot 5\cdot 7$, itd. Time su iscrpljeni svi željeni produkti, a njih ima $4+3=7$.

3.62 $8\cdot 9=72$.

3.63 Iz Pascalova trokuta, gledanom po redcima, vidimo da je zbroj jednak $2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=2^{11}-2$.

3.64 Ima $\mathrm{Sur}(9,4)$ surjektivnih funkcija. Nesurjektivnih funkcija prema Pravilu komplementa ima $3^9-\mathrm{Sur}(9,4)$. Injektivne nema niti jedne.

3.65 Rješenje. Zamislimo da su sjedala numerirana brojkama od 1 do 20. Ako na parna mjesta stavljamo djevojke, onda to možemo učiniti na 10! načina, a momke možemo na neparna mjesta staviti također na 10! načina. Prema Produktnom pravilu imamo $(10!)\cdot(10!)=(10!)^2$ načina smještavanja djevojaka na parna mjesta, a momaka na neparna. Mijenjajući parnost za popunjavanje mjesta za djevojke i momke, dobivamo još $(10!)^2$ mogućnosti, pa je ukupan broj smještavanja $2\cdot(10!)^2$.

3.66 Svih razlomaka ima ukupno 299. Među njima je $\varphi(300)$ neskrativih, pa je broj skrativih jednak $299-\varphi(30)$.

3.67 Rješenje za n-člani skup. Od broja refleksivnih relacija 2^{n^2-n} (vidi Zadatak 3.61) treba oduzeti broj simetričnih koje su refleksivne. Simetričnih relacija koje su refleksivne ima koliko ima podskupova od $A\times A$ koji su strogo ispod dijagonale, tj. u $y<x$. (Naime, svaki takav podskup, ako mu dijagonalu, te zatim i zrcalnu sliku s obzirom na dijagonalu, definira na jednoznačan način odgovarajuću refleksivnu i simetričnu relaciju.) Tih elemenata ima $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$, pa odgovarajućih podskupova ima $2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$. (Ili, od n^2 poredanih dvojaca oduzmemo n elemenata na dijagonali, te podijelimo s dva.) Prema Pravilu komplementa, traženi broj je $2^{n^2-n}-2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$.

3.68 Uzmemo bilo koje dvije točke na prvom pravcu, te jednu na drugom, ili obratno. Dobivamo $\binom{10}{2}\cdot 15+\binom{15}{2}\cdot 10$ trokuta.

3.69 Injektivnih funkcija ima $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$. Neinjektivnih ima $9^4-9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$. Nema niti jedne surjektivne funkcije.

3.70 Traži se broj pravukutnika s cjelobrojnim koordinatama, sadržanim u pravokutniku P. Na osnovici pravokutnika P biramo dvije točke na $\binom{6-(-2)+1}{2}=\binom{9}{2}$ načina, a na vertikalnoj stranici na $\binom{7}{2}$ načina. Ukupan broj pravokutnika sadržanih u P iznosi $\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}$.

3.71 Svih neskrativih razlomaka oblika $\frac{n}{270}$, gdje je n prirodan broj takav da je $1\le n\le 269$ ima $\varphi(270)$. Traženi broj iznosi $\varphi(270)-2+1=\varphi(270)$. Naime, imamo dva neskrativa razlomka oblika $\frac{n}{27}$ za $1\le n\le 7$ (za koje n?) i jedan neskrativ razlomak za $270\le n\le 272$ (za koji n?).

3.72 Za prvo kolo odaberemo deset osoba na $\binom{20}{10}$ načina. Prvo kolo možemo od deset osoba složiti na $(10-1)! = 9!$ načina. Drugo kolo možemo od preostalih deset osoba također složiti na $9!$ načina. Traženi broj je $\binom{20}{10}(9!)^2$.

3.73 Označimo s A skup svih funkcija koje ispunjavaju prvi uvjet (tj. uvjet na $f(1)$), s B skup svih funkcija koje ispunjavaju drugi uvjet, te s C skup svih funkcija koje ispunjavaju treći uvjet. Traži se broj $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$ (vidi Formulu uključivanja i isključivanja). Broj $|A|$ je prema Produktnom pravilu jednak $3\cdot 5^6$ (gledamo koliko vrijednosti mogu poprimiti $f(1),\dots,f(7)$). Broj $|B|$ jednak je $5^2\cdot 2\cdot 5^4 = 2\cdot 5^6$. Broj $|C|$ je jednak $5^6\cdot 4$. Broj $|A\cap B|$ jednak je $3\cdot 5\cdot 2\cdot 5^4 = 6\cdot 5^5$, $|A\cap C| = 3\cdot 4\cdot 5^5$, $|B\cap C| = 2\cdot 4\cdot 5^5$, a $|A\cap B\cap C| = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5^4$. Traženi broj jednak je $3\cdot 5^6+2\cdot 5^6-3^2\cdot 5^5+5^6\cdot 4-6\cdot 5^5-3\cdot 4\cdot 5^5-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5^4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5^4$.

3.74 Ovdje je svaka injektivna funkcija bijektivna, a i svaka surjektivna je bijektivna. Ima dakle $8!$ surjektivnih funkcija, kao i injektivnih i bijektivnih. Neinjektivnih ima $8^8-8!$. Injektivne funkcije koja nije surjektivna nema niti jedne.

3.75 Najprije trebamo vidjeti koliko vremensko razdoblje od godine dana ima sekundi: $t = 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60$ s. Tražena udaljnost s se u kilometrima dobije tako da brzinu svjetlosti $c = 360\,000$ km/s pomnožimo s t: $s = c\cdot t = 2.27\cdot 10^{14}$ km. Ovdje smo u nekoliko navrata koristili Produktno pravilo.

3.76 $4\cdot 6 = 24$.

3.77 Parna funkcija je jednoznačno određena na cijeloj domeni svojim vrijednostima u točkama $x = 0,1,\dots,5$. Vrijednosti u tim točkama mogu biti bilo koji od sedam cijelih brojeva od -3 do 3. Prema Produktnom pravilu, te vrijednosti možemo zadati na 7^6 načina (to je ujedno i broj svih funkcija $f:\{0,1,\dots,5\}\to\{-3,\dots,3\}$). Da bi odredili broj neparnih funkcija, primijetimo da je nužno $f(0)=0$ (zašto?), pa je svaka neparna funkcija f jednoznačno određena svojom restrikcijom $f:\{1,2,\dots,5\}\to\{-3,\dots,3\}$. Tih restrikcija ima 7^5.

3.78 Rješenje za n-člani skup. Od broja simetričnih relacija $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}-1$ (vidi Zadatak 3.20) treba oduzeti broj refleksivnih koje su simetrične, a njih po rješenju u Zadatku 3.67 ima $2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$. Prema Pravilu komplementa, traženi broj je $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}-1-2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$.

3.79 Prema Produktnom pravilu, parova knjiga na hrvatskom i engleskom se može izvući na $8\cdot 5 = 40$ načina, na hrvatskom i njemačkom na $8\cdot 3 = 24$ načina, a na engleskom i njemačkom na $5\cdot 3 = 15$ načina. Prema Pravilu zbrajanja, traženi je broj $40+24+15 = 79$.

3.80 Svakoj funkciji možemo bijektivno pridružiti njen graf, a svakom grafu rastući multiskup duljine pet, na primjer $[2,2,2,3,3]$ (što znači da je $f(1)=f(2)=f(3)=2$, $f(4)=f(5)=3$). Traženi broj multiskupova jednak je broju kombinacija s ponavljanjem, a iznosi $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$.

3.81 Rješenje: $\binom{12}{6} = 924$. Za osam prstiju je broj akorda $\binom{12}{8}$ manji, jer je funkcija $k\mapsto\binom{12}{k}$ za $k = 6,7,\dots,12$ strogo padajuća. Točnije, $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = 495$.

3.82 Momke možemo u krug smjestiti na ukupno $9!$ načina, koristeći cikličke permutacije. Među momcima je deset slobodnih mjesta koja popunjavamo djevojkama. (Na taj način niti koje dvije od njih neće biti zajedno.) Tih deset mjesta možemo sa šest djevojaka popuniti na $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$ načina. Prema Produktnom pravilu, ukupan način traženih smještavnja u krug iznosi $9!(10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5)$.

3.83 Treba prebrojiti koliko ima poredanih parova monotono padajućih funkcija $g:\{1,2,3,4\}\to\{5,6,7,8\}$ i $h:\{6,7,8\}\to\{1,2\}$, što se može lako vidjeti izravno. Monotono padajućih funkcija g ima koliko i monotono rastućih funkcija $g_1:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$, tj. $\binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3}$, a monotono padajućih funkcija h ima 4 (nacrtajte njihove grafove). Rješenje prema Produktnom pravilu iznosi $\binom{7}{3}\cdot 4$.

3.8 Crtice iz povijesti kombinatorike

Činjenica da je broj permutacija (premjestba) n-članog skupa jednak $n!$ bila je poznata već u 5. stoljeću prije Krista. Prvi važniji radovi koji se odnose na kombinatoriku potječu od švicarskog matematičara *Jacoba Bernoullija* (1654.-1705.), jednog od osam matematičara iz poznate obitelji Bernoulli, i od francuskog matematičara *Blaise Pascala* (1623.-1662.).

Prvu inačicu Formule uključivanja i isključivanja dao je *Abraham de Moivre* (1667.–1754.). Modernu formulaciju tog rezultata dao je američki matematičar engleskoga podrijetla *James Sylvester* (1814.–1897.). *James Stirling* (1692.–1770.) bio je škotski matematičar, suradnik Isaaca Newtona. *Colin MacLaurin* (1698.–1746.), po kojem je nazvan razvoj funkcije

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

u red potencija po x (vidi Poglavlje REF), bio je također škotski matematičar (istine radi, za taj razvoj je znao još prije njega Stirling, pa i Euler). Mala digresija: znadete li da *Mac* ili *Mc* kod Iraca i Škota znači – "sin od"?

3.8.1 Crtice o binomnim koeficijentima i faktorijelima

Formulu za kvadrat binoma znao je već *Euklid* (oko trećeg stoljeća prije Krista). Binomnu formulu prvi je formulirao *Isaac Newton* 1676. g. Najstarija uporaba binomnih koeficijenata potječe iz Indije, iz 10. st. (Indijac *Halayandha*). Iako je binomna formula (vidi formulu (3.9) na str. 25) bila poznata znatno ranije, dokazao ju je za sve prirodne brojeve n tek Jacob Bernoulli 1713. g. Zgodnu oznaku binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ uveo je tek 1826. g. malo poznati austrijski matematičar *Adreas von Ettingshausen*. Pascalov trokut detaljno je istražio Blaise Pascal 1654. g. Ono što danas zovemo 'Pascalovim trokutom' znali su još 1472. g. arapski matematičar *al-Kaši* i kineski algebraičar *Chu Shi–Lie* (oko 1303.).

Oznaku $n!$ za faktorijele uveo je francuski matematičar *Christian Kramp* 1808. g. Za faktorijele vrijedi *Stirlingova formula*,

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-n} n^{n+1/2} \quad \text{kad } n \text{ teži u beskonačno,} \tag{3.27}$$

što znači da kvocijent izraza na lijevoj i desnoj strani uz $\sim$ teži prema 1 kad n teži u beskonačno. Dobila je naziv po škotskom matematičaru *Jamesu Stirlingu* (1692.-1770.). Pokazuje se da vrijedi sljedeća procjena vrijednosti $n!$ za sve prirodne brojeve n:

$$1 \le \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-n} n^{n+1/2}} \le \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Kao što znamo, binomni teorem za računanje cjelobrojnih potencija binoma $a+b$, tj. razvoja

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

gdje je $n = 0, 1, 2, \ldots$, vodi nas do Pascalova trokuta, u čijem se n-tom retku nalaze koeficijenti $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ $\ldots$, $\binom{n}{n}$. Na sličan način, potencije trinoma $x_1 + x_2 + x_3$, tj. razvoj

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3},$$

gdje je $n = 0, 1, 2, \ldots$, vode do ('trodimenzionalne') **Pascalove piramide multinomnih koeficijenata**, u čijem se n-tom sloju nalaze multinomni koeficijenti $\binom{n}{\alpha}$ takvi da je $|\alpha| = n$, gdje je

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Slično tome, potencije k-noma $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ vode nas do k-dimenzionalne Pascalove piramide multinomnih koeficijenata.

Ako za učvršćeni prirodan broj n poredamo vrijednosti svih $n+1$ binomih koeficijenata $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$, kao na Slikama 3.10 (na str. 25) ili 3.11 (koje odgovaraju slučaju kad je n neparan ili paran), dobivamo približno zvonoliku krivulju koja se zove Gaussovo zvono ili Gaussova krivulja. Vrijednost $\binom{n}{k}$ je najveća za indeks k na samoj sredini, točnije, za $k = \lfloor n/2 \rfloor$; pogledajte također Primjer 3.42 na str. 27. (Općenito se broj $\lfloor x \rfloor$, tj. *dolnji cijeli dio* realnog broja x, definira kao najveći cijeli broj koji je $\leq x$; vidi podrobnije u (**??**) na str. **??**.) Slaganje s Gaussovim zvonom je to bolje što je n veći. Opća *Gaussova krivulja* (ili *Gaussovo zvono*) zadaje se jednadžbom

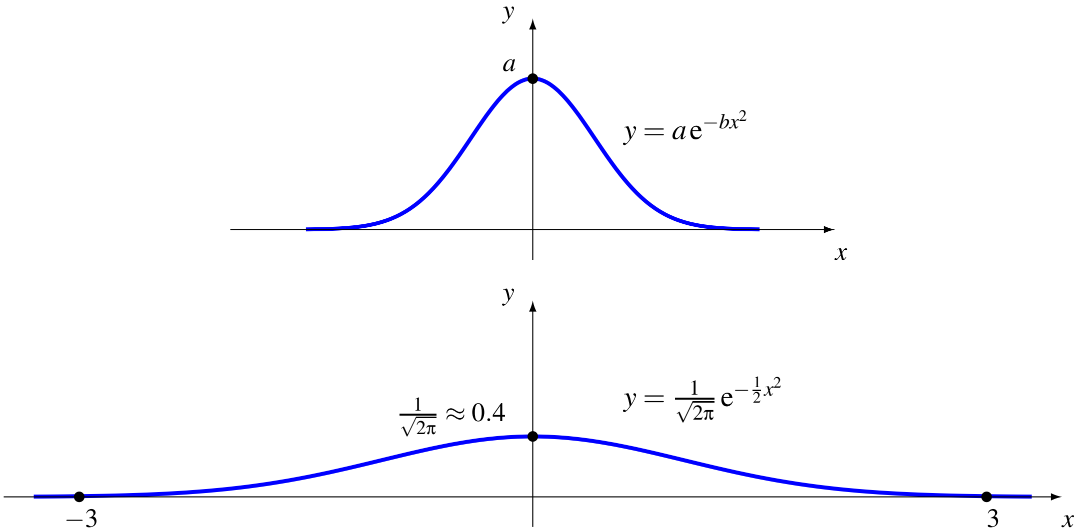
$$y = a\mathrm{e}^{-bx^2}, \tag{3.28}$$

gdje je x realan broj, a brojevi a i b su pozitivne konstante.

Standardna (ili tzv. *normalizirana*) Gaussova krivulja dobiva se uz izbor $a = 1/\sqrt{2\pi}$ i $b = 1/2$ tj. ima jednadžbu

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \tag{3.29}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$. Njen graf možete vidjeti na Slici 3.16. Ta krivulja ima veliku važnost u teoriji vjerojatnosti, u teoriji evolucijskih parcijalnih diferencijalnih jednačaba, u obradbi signala i slika itd.



Slika 3.16: *Gaussovo zvono* zadano je jednadžbom $y = a\mathrm{e}^{-bx^2}$ za bilo koji realan broj x, gdje su a i b pozitivne konstante. Na gornjoj slici je odabrano $a = 1$ i $b = 3$, a krivulja je nacrtana na intervalu $\langle -1.5, 1.5 \rangle$. Izvan tog intervala Gaussova se krivulja jedva razlikuje od x-osi. Za standardnu Gaussovu krivulju, iznimno važnu u teoriji vjerojatnosti, uzimlje se $a = 1/\sqrt{2\pi}$ (tj. $a \approx 0.4$) i $b = 1/2$. S tim izborom konstanata je površina (neomeđenog!) lika, sadržanog između Gaussove krivulje i x-osi, konačna i iznosi točno 1 (što ćemo vidjeti u Matematici 2). Intervalu $\langle -3, 3 \rangle$ odgovara više od 99.7% ukupne površine ispod Gaussove krivulje (tj. površina iznosi više od 0.997).

Kombinatorika se može smatrati dijelom *diskretne matematike*, koja se bavi raznim kombinatornim strukturama. Nalazi primjene u mnogim drugim područjima matematike, na primjer u teoriji vjerojatnosti, kao i u drugim znanstvenim područjima: u računalstvu, fizici, kemiji i biologiji. Ovaj se uvod u kombinatoriku temelji na [KoŽu]. Za daljnji studij u području diskretne matematike i teorije algoritama, možemo preporučiti [El3] i [GKnP], a u smjeru teorije grafova [NaPa]. Kombinatorika je korisna i u diskretnoj teoriji vjerojatnosti; vidi [Fe] i [El2].

Popis oznaka

Prekrasan kameni pleterni ornament u obliku znaka ∞, prikazan na gornjoj slici, nalazi se u gradiću Stonu na poluotoku Pelješcu, a dio je većeg reljefa. Označuje vječnost, kao i vječnu ljubav, a u matematici odgovarajući znak ∞ označuje beskonačnost.

Bibliografija

[AAB] Andrea Aglić Aljinović, Ilko Brnetić, Neven Elezović, Ljubo Marangunić, Mervan Pašić, Vesna Županović, Darko Žubrinić: *Matematika 1*, Element, Zagreb 2014.

[Bom] Mea Bombardelli: *Kako dokazati Pitagorin poučak na trideset načina?*, objavljeno u 'Biltenu seminara iz matematike za nastavnike mentore', 5. državani susret, Kraljevica 16.-19. svibnja 1996., Hrvatsko matematičko društvo i Ministarstvo prosvjete i športa, 1996., str. 11–25.

[Bla] Danilo Blanuša: *Viša matematika*, 1. dio, prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb 1963.

[Br] *Zadaci s pismenih ispita. Matematička analiza 1*, priredio prof.dr. Ilko Brnetić, Element, Zagreb 2005.

[Brü1] Franka Miriam Brückler: *Matematički dvoboji*, Školska knjiga, Zagreb 2011.

[Brü2] Franka Miriam Brückler: *Povijest matematike*

[CouRo] Richard Courant i Herbert Robbins: *What is Mathematics*, Oxford University Press, 1996

[Cvi] Maja Cvitković: *Kombinatorika*, zbirka zadataka, Element, Zagreb, 1994.

[Duj1] Andrej Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[Duj2] Andrej Dujella: *Diskretna matematika (Matematičke osnove kriptografije javnog ključa)*, PMF MO, Sveučilište u Zagrebu

[DujMar] Andrej Dujella i Marcel Maretić: *Kriptografija*, Element, Zagreb 2007.

[El1] Neven Elezović: *Funkcije kompleksne varijable*, Element, Zagreb 2010.

[El2] Neven Elezović: *Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb 2010.

[El3] Neven Elezović: *Diskontna matematika 1*, Element, Zagreb 2017.

[Fe] William Feller: *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Princeton, 1950.

[GKnP] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison – Wesley, 1995.

[Gus] Ivica Gusić: *Matematički rječnik*, Element, Zagreb 1995.

[Ham] Richard Hammack: *Book of Proof*, Virginia Commonwealth Univeristy, 2013.

[Iva] Ivan Ivanšić: *Zavod za primijenjenu matematiku*, FER, Sveučilište u Zagrebu, 2008.

[Jav] Petar Javor: *Matematička analiza*, Element, Zagreb 2000.

[Jupy] Jupyter

[KoŽu] Domagoj Kovačević i Darko Žubrinić: *Uvod u diskretnu matematiku*, Element, Zagreb 2017.

[Knu] Donald Knuth: *The Art of Computer Programming / Fundamental Algorithms*, Volume 1, Addison Wesley, 1973.

[La] Serge Lang: *A First Course in Calculus*, Fifth Edition, Springer, 1986.

[Mar] Željko Marković: *Uvod u višu analizu* I. dio, 4. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[MacT] *MacTutor History of Mathematics*

[NaPa] Anamari Nakić i Mario Osvin Pavčević: *Uvod u teoriju grafova*, Element, Zagreb 2013.

[Pap] Pavle Papić: *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[Paš] Mervan Pašić: *Matematika 1*, Merkur A.B.D., 2005.

[PaVe] Boris Pavković i Darko Veljan: *Elementarna matematika 1 i 2*, Školska knjiga 2004. i 2005.

[Pick] Clifford Pickover: *The Math Book*, Sterling, New York 2009. (u pripremi je hrvatski prijevod)

[Slap] Ivan Slapničar: *Matematika 1*, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split 2002.

[Ve] Darko Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[Žu1] Darko Žubrinić: *Vilim Feller istaknuti hrvatsko-američki matematičar / William Feller – Distinguished Croatian-American Mathematician*, Graphis, Zagreb 2006.

[Žu2] Darko Žubrinić: Interaktivni uvod u Matematičku analizu, pripremljen u programu Jupyter, Zagreb 2018.

Kazalo