5. Vektori

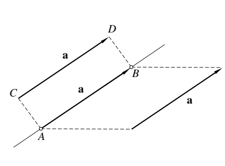
Sadržaj poglavlja

5.1. Operacije s vektorima

U fizikalnom svijetu lako ćemo prepoznati mnoge veličine čija se vrijednost izražava brojem. To su na primjer duljina, površina, volumen, temperatura, tlak, masa, kinetička energija, specifična gustoća... Njih nazivamo **skalarnim** veličinama. Međutim, neke se veličine ne mogu opisati samo brojem. Tako vjetar opisujemo njegovom jačinom, ali i *smjerom*. *Brzina* je fizikalna veličina koja uz svoj iznos mora imati definiran i smjer. Isto će vrijediti i za ubrzanje, silu, moment sile, iznos električnog ili magnetskog polja itd.

5.1.1. Definicija vektora

Usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ je dužina za koju se zna **početna** točka A i **završna** točka B. Dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su **ekvivalentne**, ako postoji translacija koja prevodi jednu u drugu, tj. ako je četverokut $ABDC$ paralelogram. Tada pišemo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Sve međusobno ekvivalentne dužine nazivamo **vektorom**. Pojedinu dužinu iz te klase nazivamo **reprezentantom** (**predstavnikom**) vektora.



Sl. 5.1. Vektor je klasa usmjerenih dužina. Dvije usmjerene dužine koje se translacijom dovode jedna na drugu definiraju isti vektor

Zapis vektora. Vektor najčešće označava slovom iznad kojeg je postavljena strjelica: $\vec{a}$. U novije doba je, pogotovo u knjigama, uobičajeno vektore pisati masnim slovima, ovako: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ i slično, pa ćemo taj zapis i mi koristiti.

Po dogovoru, pisati ćemo i $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, poistovjećujući vektor s nekim njegovim reprezentantom. Vektor ne ovisi o izboru reprezentanta, dvije ekvivalentne usmjerene dužine predstavljaju isti vektor.

Opis vektora

Vektor u ravnini ili prostoru opisan je ukoliko se znaju sljedeća tri podatka:
- **nosač**: pravac na kojemu se vektor nalazi,
- **orijentacija** na tom pravcu, te
- **duljina vektora** $|\overrightarrow{AB}|$, koja se definira kao udaljenost $d(A,B)$ točaka A i B.

Prema tome, usmjerene dužine koje leže na paralelnim (moguće istovjetnom) pravcima, imaju istu orijentaciju i jednaku duljinu definiraju isti vektor.

Ponekad je pogodnije govoriti o **smjeru** vektora. Smjer objedinjuje pojmove nosača i orijentacije. Tako kažemo da je vektor određen smjerom i iznosom.

Nul vektor. Nul vektor se definira kao vektor duljine 0. Označavamo ga s $\mathbf{0}$. Tako je $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$, za bilo koju točku A. Jedino kod nul vektora nema smisla govoriti niti o nosaču, niti o smjeru.

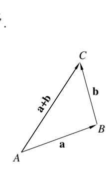
Radij-vektor. Skup svih vektora označavat ćemo slovom V. Ukoliko bude potrebno pojasniti, V^2 će predstavljati sve vektore ravnine, a V^3 vektore u prostoru.

Istaknimo jednu točku u prostoru i označimo ju slovom O. Moguće je za svaki vektor izabrati njegova reprezentanta tako da mu početna točka bude baš ta točka O. Vektor $\overrightarrow{OT}$ nazivat ćemo tad **radij vektor** točke T u prostoru.

5.1.2. Zbrajanje vektora

Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ bilo kakvi vektori, $\overrightarrow{AB}$ bilo koji predstavnik vektora $\mathbf{a}$ te $\overrightarrow{BC}$ predstavnik vektora $\mathbf{b}$ s početkom u točki B. Tad je zbroj vektora $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ određen predstavnikom $\overrightarrow{AC}$. Dakle,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

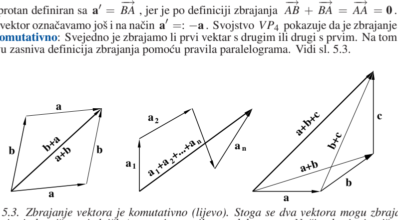


Sl. 5.2. Zbrajanje dvaju vektora. Vektore zbrajamo tako da početak drugog izaberemo u završnoj točki prvoga vektora

Ova operacija ima svojstva

VP_1	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$,
VP_2	$\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$,
VP_3	$(\forall \mathbf{a} \in V)(\exists \mathbf{a}' \in V)\ \mathbf{a}+\mathbf{a}' = \mathbf{a}'+\mathbf{a} = \mathbf{0}$,
VP_4	$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.

Svojstvo VP_1 kaže da je zbrajanje **asocijativno**: nebitno je kojim se redom zbrajaju tri vektora. Dakako da identičan zaključak (koristeći princip indukcije) vrijedi i za zbroj više od tri vektora (sl. 5.3). Svojstvo VP_2 ukazuje da je nul vektor $\mathbf{0}$ **neutralni element** za zbrajanje vektora. VP_3 kaže da za svaki vektor iz V možemo pronaći njemu **suprotan** vektor $\mathbf{a}'$, koji u zbroju s $\mathbf{a}$ daje nul vektor. Zaista, ako je $\mathbf{a}$ prikazan usmjerenom dužinom $\overrightarrow{AB}$, tad je njemu suprotan definiran sa $\mathbf{a}' = \overrightarrow{BA}$, jer je po definiciji zbrajanja $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. Suprotan vektor označavamo još i na način $\mathbf{a}' =: -\mathbf{a}$. Svojstvo VP_4 pokazuje da je zbrajanje vektora **komutativno**: Svejedno je zbrajamo li prvi vektar s drugim ili drugi s prvim. Na tom se svojstvu zasniva definicija zbrajanja pomoću pravila paralelograma. Vidi sl. 5.3.



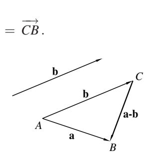
Sl. 5.3. Zbrajanje vektora je komutativno (lijevo). Stoga se dva vektora mogu zbrajati (ako im je hvatište zajedničko) pomoću pravila paralelograma. Način zbrajanja više od dvaju vektora, nadovezivanjem (u sredini). Vektore nanižemo tako da je početak narednoga u završetku prethodnoga. Zbroju odgovara vektor koji ima početak u početku prvoga a završetak u završetku posljednjega. Zbrajanje vektora je asocijativno (desno). Ovo svojstvo opravdava prethodno pravilo zbrajanja

Oduzimanje vektora. Oduzimanje vektora definira se kao operacija zbrajanja sa suprotnim vektorom:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

Grafički vektore najlakše oduzimamo tako da im izaberemo reprezentante sa zajedničkim hvatištem. Tad vrijedi

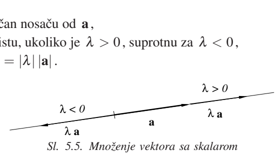
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$



Sl. 5.4. Dva se vektora oduzimaju tako da se dovedu u zajedničko hvatište. Razlici odgovara vektor kome je hvatište u završetku drugog a završetak u završetku prvog vektora

5.1.3. Množenje vektora skalarom

To je operacija $\cdot : \mathbf{R} \times V \to V$ definirana na način: za realni broj λ vektor $\lambda\mathbf{a}$ ima
- nosač identičan nosaču od $\mathbf{a}$,
- orijentaciju istu, ukoliko je $\lambda > 0$, suprotnu za $\lambda < 0$,
- duljinu $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|$.

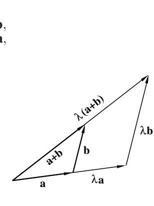


Sl. 5.5. Množenje vektora sa skalarom

U zapisu množenja vektora sa skalarom obično izostavljamo znak $\cdot$, te pišemo kratko $\lambda\mathbf{a}$, $2\overrightarrow{AB}$ i slično.

To množenje ima sljedeća svojstva

VP_5	$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$,
VP_6	$(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$,
VP_7	$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$.



Sl. 5.6. Ova slika opravdava svojstvo VP_5. Nacrtaj odgovarajuće skice za svojstva VP_6 i VP_7

Istaknimo (zbog potpunosti ovog popisa) i sljedeće očito svojstvo:

VP_8 $\qquad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Primijetimo da je $(-1)\cdot\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ (suprotan vektor). Posebno definiramo množenje s nul vektorom: $\lambda \cdot \mathbf{0} := \mathbf{0}$.

Jedinični vektor. Neka je $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ zadani vektor. S $\widehat{a}$ označavamo **jedinični vektor** vektora $\mathbf{a}$. To je vektor koji ima isti smjer kao i $\mathbf{a}$, a duljina mu je 1. Dobijemo ga tako da vektor pomnožimo s recipročnom vrijednošću njegove duljine:

$$\widehat{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$$

što ćemo pisati jednostavnije ovako:

$$\widehat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

5.1.4. V^3 je vektorski prostor

Svaki skup na kojemu se definirane dvije operacije: zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom tako da su zadovoljena svojstva $VP_1 - VP_8$ naziva se **vektorski prostor**. Ovim smo provjerili da V^3 smijemo nazivati *vektorski prostor*. Jednako tako su vektorski prostori i skupovi V^1 vektora na pravcu i V^2 vektora u ravnini.

— ◆ —

Prisjetimo se definicije linearne nezavisnosti.

Linearna nezavisnost vektora

Vektori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ su **linearno nezavisni** ako iz jednakosti

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0$$

nužno slijedi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Najvažniju informaciju o nekom vektorskom prostoru daje nam pojam **dimenzije** tog prostora.

Dimenzija i baza prostora

Najveći broj linearno nezavisnih vektora u nekom vektorskom prostoru zovemo **dimenzijom** tog prostora.

Ako je n dimenzija prostora V tad svaki skup $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ od n linearno nezavisnih vektora nazivamo **bazom** vektorskog prostora.

Ova su dva pojma isprepletena: ako znamo dimenziju, znamo *koliko* linearno nezavisnih vektora sadrži baza i obrnuto. Taj je broj jednoznačno određen, tj. ne ovisi o mogućem izboru različitih baza, što ovdje nećemo dokazivati.

Primjer 1. Prostor V^1 vektora na pravcu dobiven je tako da se za vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ promotre svi vektori oblika

$$\{\lambda\mathbf{a} : \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Vidimo da je $V^1 = L(\mathbf{a})$. Svaka dva vektora iz V^1 su linearno zavisna: jedan je višekratnik drugoga. Zato je najveći broj nezavisnih vektora u prostoru V^1 jednak 1; i to je upravo dimenzija prostora V^1. Svaki ne-nul vektor čini bazu tog prostora.

Primjer 2. S V^2 označavamo dvodimenzionalni vektorski prostor: to je prostor u kojemu su najviše dva vektora linearno nezavisna.

Neka su $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ bilo koja dva nekolinearna vektora. Tad su oni linearno nezavisni i svaki treći vektor prostora V^2 može se izraziti u obliku linearne kombinacije vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$. Zato je

$$V^2 = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \{\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Vektori $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ čine bazu.

Primijeti da bazu ovoga prostora čine i bilo koja druga dva linearno nezavisna vektora.

Ako vektor $\mathbf{a}$ napišemo preko linearne kombinacije vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$, tad kažemo da smo vektor $\mathbf{a}$ *rastavili u komponente* po vektorima $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$.

Iskažimo sad u obliku teorema jednu jednostavnu ali važnu tvrdnju koju zadovoljavaju vektori prostora V^2. Student će primijetiti da će analogne tvrdnje vrijediti i za bilo koji vektorski prostor.

Teorem 1. Neka su $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ linearno nezavisni. Prikaz vektora $\mathbf{a} \in V^2$ u obliku

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 \qquad (2)$$

je jednoznačan, tj. skalari λ_1 i λ_2 su jednoznačno određeni.

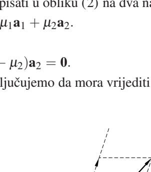
Dokaz. Pretpostavimo da se $\mathbf{a}$ može napisati u obliku (2) na dva načina:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2.$$

Odavde bi slijedilo

$$(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}.$$

Budući da su $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ linearno nezavisni, zaključujemo da mora vrijediti $\lambda_1 = \mu_1$ i $\lambda_2 = \mu_2$. ◄



Sl. 5.7. Rastavljanje vektora $\mathbf{a} \in V^2$ po komponentama $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ geometrijski se realizira projiciranjem vektora $\mathbf{a}$ na vektore $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$. Takav je rastav jedinstven. Što ako vektor $\mathbf{a} \in V^2$ želimo rastaviti po komponentama $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$? Kako se tad može realizirati taj rastav? Mora li on biti jedinstven?

Primjer 3. Prostor V^3 trodimenzionalni je prostor. Njegovu bazu čine bilo koja tri nekomplanarna vektora. Svaki drugi vektor može se prikazati u obliku njihove linearne kombinacije. Zato je

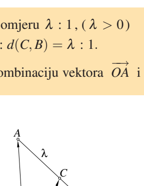
$$V^3 = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \{\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}\}$$

Kažemo još da se svaki vektor $\mathbf{a}$ može rastaviti u komponente u smjerovima vektora $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Taj je rastav jedinstven!

Primjer 4. Točka C dijeli dužinu AB u omjeru $\lambda : 1$, ($\lambda > 0$)

$$d(A,C) : d(C,B) = \lambda : 1.$$

Prikaži vektor $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.



Sl. 5.8. Radij vektor točke koja dijeli dužinu u zadanom omjeru.

► Vrijedi $|\overrightarrow{AC}| = \lambda|\overrightarrow{CB}|$ i zato $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ jer ovi vektori imaju isti nosač i orijentaciju. Zato je

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

i odavde

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OB}.$$

Označimo $t = 1/(\lambda+1)$. Vidimo da se radij vektor svake točke T koja leži na dužini $\overline{AB}$ može prikazati u obliku

$$\overrightarrow{OT} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

gdje je t skalar, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Posebice, ako je točka C polovište dužine AB, tada vrijedi

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). ◄$$

Primjer 5. Neka je T po volji odabrana točka unutar trokuta ABC. Pokaži da postoje tri skalara λ_1, λ_2, λ_3, $0 < \lambda_i < 1$, takva da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ i

$$\overrightarrow{OT} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB} + \lambda_3\overrightarrow{OC}.$$

► Neka je D presječna točka pravca kroz A i T sa stranicom $\overline{BC}$. Prema Primjeru 4, radij vektor $\overrightarrow{OT}$ točke T možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OD}\\ &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)(s\overrightarrow{OB} + (1-s)\overrightarrow{OC})\\ &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)s\overrightarrow{OB} + (1-t)(1-s)\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

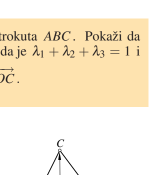
Stavimo

$$\lambda_1 = t,\quad \lambda_2 = (1-t)s,\quad \lambda_3 = (1-t)(1-s).$$

Tada vrijedi $0 < \lambda_i < 1$ i

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = t + (1-t)s + (1-t)(1-s) = 1$$

što dokazuje tvrdnju. ◄



Sl. 5.9. Radij vektor točke T unutar trokuta je konveksna kombinacija radij vektora njegovih vrhova.

Težište trokuta

Odaberemo li za koeficijenate $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, točka T će biti **težište trokuta**. Za težište vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

5.2. Koordinatni sustavi i kanonska baza

5.2.1. Koordinatni sustavi u ravnini i prostoru

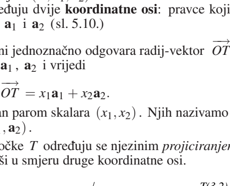
Koordinatni sustav u ravnini. Neka su $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ dva nekolinearna vektora u ravnini sa zajedničkim hvatištem u točki O. Točku O nazivat ćemo ishodištem koordinatnog sustava. Trojku $(O, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ nazivamo **koordinatni sustav** u ravnini. Vektori $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ određuju dvije **koordinatne osi**: pravce koji prolaze ishodištem i nosači su vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ (sl. 5.10.)

Svakoj točki T u toj ravnini jednoznačno odgovara radij-vektor $\overrightarrow{OT}$. Njega pak možemo rastaviti po bazi $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2.$$

Time je položaj točke T opisan parom skalara (x_1, x_2). Njih nazivamo **koordinate** točke T u sustavu $(O, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

Geometrijski, koordinate točke T određuju se njezinim *projiciranjem* na koordinatne osi. Projekcija se vrši u smjeru druge koordinatne osi.



Sl. 5.10. Koordinatni sustav ne mora nužno biti pravokutan: svaka dva nekolinearna (čitaj: linearno nezavisna!) vektora određuju svoj koordinatni sustav. Koordinate točke jednake su komponentama radij-vektora $\overrightarrow{OT}$

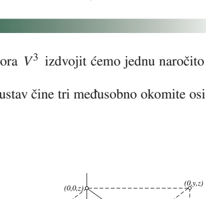
Koordinatni sustav u prostoru. Neka je O istaknuta točka u prostoru. Analogno gornjem, svaka tri nekomplanarna (= linearno nezavisna!) vektora $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ određuju koordinatni sustav $(O; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

Za zadanu točku T nije jednostavno odrediti njezine koordinate: potrebno je rastaviti vektor $\overrightarrow{OT}$ u linearan spoj vektora $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_3$.

5.2.2. Kanonska baza

Među svim mogućim bazama prostora V^3 izdvojit ćemo jednu naročito podesnu za prikazivanje vektora.

Kartezijev pravokutni koordinatni sustav čine tri međusobno okomite osi:
- Ox — os **apscisa**,
- Oy — os **ordinata**,
- Oz — os **aplikata**.



Sl. 5.11. Točkama E_1, E_2, E_3 na koordinatnim osima odgovaraju jedinični vektori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Koordinate (x,y,z) točke T jednake su komponentama vektora $\overrightarrow{OT}$ u rastavu po bazi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Taj se rastav određuje okomitim projiciranjem na koordinatne osi

Zajednička točka O ovih osi je **ishodište** koordinatnog sustava. Izdvojimo točku na jediničnoj udaljenosti od ishodišta na svakoj od ove tri osi i pridružimo joj odgovarajući radij vektor.

- Točki $E_1 = (1,0,0)$ odgovara radijvektor $\mathbf{i} = \overrightarrow{OE_1}$.
- Točki $E_2 = (0,1,0)$ odgovara radijvektor $\mathbf{j} = \overrightarrow{OE_2}$.
- Točki $E_3 = (0,0,1)$ odgovara radijvektor $\mathbf{k} = \overrightarrow{OE_3}$.

Po ovoj konstrukciji, kartezijev sustav je zapravo sustav $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ određen točkom O i trima vektorima $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Trojku vektora $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ nazivamo **kanonska baza** prostora V^3.

— ◆ —

Kako izgleda rastav nekog vektora u toj bazi? Krenimo s radijvektorom bilo koje točke $T(x,y,z)$. Za njega očevidno vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Prema tome, koordinate točke T određuju komponente vektora $\overrightarrow{OT}$ u rastavu po kanonskoj bazi.

Neka je sad $\mathbf{a}$ zadani vektor. Njega također možemo napisati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze. Pri tom obično koristimo zapis:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Kako se računaju koeficijenti a_x, a_y, a_z? Neka su $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ koordinate njegove početne i završne točke. Taj se vektor može napisati preko radij-vektora tih točaka na način

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})\\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Prema tome, vrijedi

$$a_x = x_2 - x_1, \qquad a_y = y_2 - y_1, \qquad a_z = z_2 - z_1.$$

Primjer 6. U pravokutniku $OABC$ s vrhovima $O(0,0)$, $A(3,0)$, $C(0,4)$ povučene su spojnice OM, ON vrha O sa polovištima M i N stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$. Rastavi vektor $\overrightarrow{OB}$ po komponentama u smjerovima vektora $\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{ON}$.

► Zbog komplanarnosti vektora $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON}$, postoje skalari t i s takvi da je

$$\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OM} + s\overrightarrow{ON}.$$

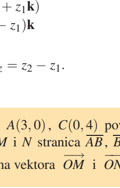
Odredimo ih. Vrijedi

$$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j},\qquad \overrightarrow{OM} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j},\qquad \overrightarrow{ON} = \frac{3}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

i mora vrijediti

$$3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = t(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + s(\frac{3}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}).$$

Dakle $3 = 3t + \frac{3}{2}s$ i $4 = 2t + 4s$. Odavde je $t = s = \frac{2}{3}$. Prema tome traženi rastav je $\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$. ◄



Sl. 5.12.

5.2.3. Orijentacija ravnine i prostora

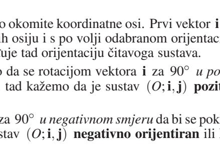
Opisana konstrukcija kartezijeva sustava nije potpuno precizna. Krenuvši od tri međusobno okomite osi, u mogućnosti smo odabrati poredak jediničnih vektora na njima na dva bitno različita načina.

Slično se događa i u jednostavnijoj situaciji u ravnini. Opišimo stoga najprije moguće orijentacije ravnine.

Neka su zadane dvije međusobno okomite koordinatne osi. Prvi vektor $\mathbf{i}$ odaberimo na bilo kojoj od koordinatnih osiju i s po volji odabranom orijentacijom. Izbor vektora $\mathbf{j}$ na drugoj osi određuje tad orijentaciju čitavoga sustava.

- Ako vektor $\mathbf{j}$ odaberemo tako da se rotacijom vektora $\mathbf{i}$ za 90° *u pozitivnom smjeru* on prevodi u vektor $\mathbf{j}$, tad kažemo da je sustav $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ **pozitivno orijentiran** ili **desni** sustav.
- Ako vektor $\mathbf{i}$ moramo rotirati za 90° *u negativnom smjeru* da bi se poklopio s vektorom $\mathbf{j}$, tad kažemo da je sustav $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ **negativno orijentiran** ili **lijevi** sustav.

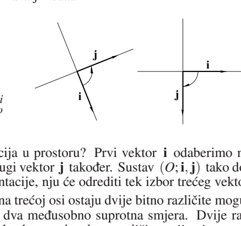
Pritom po dogovoru smatramo pozitivnom rotacijom onu kod koje je smjer okretanja *suprotan* onome kod kazaljki sata.



Sl. 5.13. Od dva sustava na slici jedan je pozitivno, drugi negativno orijentiran

Kako će izgledati orijentacija u prostoru? Prvi vektor $\mathbf{i}$ odaberimo na bilo kojoj od koordinatnih osiju, drugi vektor $\mathbf{j}$ također. Sustav $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ tako dobiven u prostoru nema nikakve orijentacije, nju će odrediti tek izbor trećeg vektora.

Za izbor trećeg vektora $\mathbf{k}$ na trećoj osi ostaju dvije bitno različite mogućnosti, možemo odabrati jedan od dva međusobno suprotna smjera. Dvije različite mogućnosti izbora vode nas do dva *međusobno različito orijentirana* sustava (sl. 5.14).



Sl. 5.14. Dvije mogućnosti za izbor pravokutnih koordinatnih sustava. Sustavi na slici suprotno su orijentirani. Sustav nacrtan desno naš je standardni koordinatni sustav kojeg nazivamo desni sustav. Sustav lijevo je njegova zrcalna slika, on predstavlja lijevi sustav.

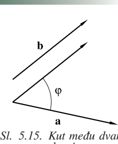
Da bismo ih razlikovali, nazivamo ih imenima **desni** i **lijevi** koordinatni sustav. Desnim nazivamo onaj kod kojeg vektor $\mathbf{i}$ gleda u smjeru srednjaka, vektor $\mathbf{j}$ u smjeru palca a vektor $\mathbf{k}$ u smjeru kažiprsta *desne* ruke. Alternativno, desni sustav je onaj kod kojeg je ravnina $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ *gledana iz vrha trećeg vektora* $\mathbf{k}$ pozitivno orijentirana.

Ta su dva sustava (matematički) potpuno ravnopravna. Međutim, uobičajeno je da se sve formule i razmatranja vrše samo u jednom sustavu. Pri tom se dogovorno odabire *desni sustav*.

5.3. Skalarni umnožak

5.3.1. Definicija skalarnog umnoška

Kut među vektorima Smatrat ćemo da je pojam kuta među vektorima jasan: to je manji (po apsolutnom iznosu) od dvaju kutova koji zatvaraju zadana dva vektora (translatirana u zajednički početak). Označavat ćemo ga sa $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Prema tome, kut može poprimiti vrijednost $0 \leqslant \varphi < \pi$.



Sl. 5.15. Kut među dvama vektorima

Skalarni umnožak

Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ zadani vektori i $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. **Skalarni umnožak (produkt)** vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ definira se na način

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\varphi. \tag{3}$$

Time je definirano preslikavanje $\cdot$ s produkta $V \times V$ u polje realnih brojeva (skalara) — skalarni umnožak vektora je realni broj. Odatle i ime ovom umnošku.

Ukoliko je jedan od vektora $\mathbf{a}$ ili $\mathbf{b}$ jednak $\mathbf{0}$, tad je njihov skalarni umnožak po definiciji jednak nuli. Ta činjenica, strogo govoreći, ne slijedi iz (3), budući da u tom slučaju kut φ među vektorima nije definiran.

Definicija (3) ima za posljedicu i formulu

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \tag{4}$$

Također, za okomite će vektore biti $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, jer je $\cos(\pi/2) = 0$. Obratno, ako je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, tad možemo zaključiti da je barem jedan od vektora $\mathbf{a}$ ili $\mathbf{b}$ jednak nuli, ili pak kut medu njima iznosi $\varphi = \pi/2$, tj. vektori su okomiti.

Projekcija vektora na vektor. Neka su zadani vektori $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Projicirajmo ortogonalno točku B na pravac OA i označimo projekciju s B'. Vektor $\overrightarrow{OB'}$ naziva se (vektorska) projekcija vektora $\mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a}$ i označava sa $\mathbf{b_a}$ (slika 5.16). Očevidno je

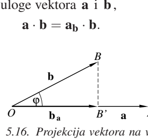
$$\mathbf{b_a} = |\mathbf{b}|\,\cos\varphi\,\widehat{\mathbf{a}}.$$

Budući da za skalarni umnožak vektora i njegovog jediničnog vektora vrijedi $\mathbf{a} \cdot \widehat{\mathbf{a}} = |\mathbf{a}|$, skalarni umnožak možemo napisati na način

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b_a} \cdot \mathbf{a}$$

i slično, ukoliko zamijenimo uloge vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a_b} \cdot \mathbf{b}.$$



Sl. 5.16. Projekcija vektora na vektor

Skalarnu veličinu $|\mathbf{b}|\cos\varphi$ nazivamo **skalarna projekcija vektora b na vektor a** i označavamo sa $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$. Prema tome, skalarni produkt možemo napisati i na način

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \pi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})\,|\mathbf{b}|.$$

Navedimo sad ponašanje nove operacije $\cdot$ prema već prije definiranim: zbrajanju vektora i množenju vektora sa skalarom.

Svojstva skalarnog umnoška

Skalarni umnožak ima sljedeća svojstva:

(S_1)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant 0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = 0$	(pozitivnost)
(S_2)	$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$	(homogenost)
(S_3)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	(komutativnost)
(S_4)	$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$	(distributivnost)

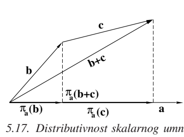
Ova svojstva omogućavaju nam da izraze sa skalarnim produktom 'sređujemo' na 'prirodan' način:

$$\begin{aligned}(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) &= (2\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{a}) + \mathbf{b} \cdot (3\mathbf{a}) - (2\mathbf{a}) \cdot (2\mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (-2\mathbf{b})\\ &= 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 3\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}\\ &= 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}.\end{aligned}$$

(Neki su koraci ubrzani!)

Svojstva (S_1)–(S_3) slijede po definiciji. Za dokaz svojstva (S_4) pogledajmo sliku 5.17 i iskoristimo svojstva vektorske projekcije:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= |\mathbf{a}|\,\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\,(\pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \pi_{\mathbf{a}}\mathbf{c})\\ &= |\mathbf{a}|\,\pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + |\mathbf{a}|\,\pi_{\mathbf{a}}\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.\end{aligned}$$



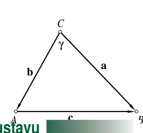
Sl. 5.17. Distributivnost skalarnog umnoška

Primjer 7.

Izvedi vektorskim računom kosinusov poučak.

► Orjentirajmo vektore stranica u trokutu kao na slici 5.18. Tada je $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ i zato

$$\begin{aligned}|\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})\\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma. \;◄\end{aligned}$$



Sl. 5.18.

5.3.2. Skalarni umnožak u koordinatnom sustavu

Neka je $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ kanonska baza prostora V^3. Nju čine međusobno okomiti vektori jedinične duljine, pa za njihove skalarne umnoške vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1,\\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0.\end{aligned}$$

Zgodno je prikazati ove umnoške u sljedećoj **tablici množenja**

$\cdot$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	1	0	0
$\mathbf{j}$	0	1	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

Svaki se vektor može na jednoznačan način prikazati preko vektora baze. Zato, ako je

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},\\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},\end{aligned}$$

tad za njihov skalarni umnožak dobivamo (koristeći svojstva skalarnoga produkta i gore napisanu tablicu)

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})\\ &= a_xb_x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}\\ &\quad + a_yb_x\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}\\ &\quad + a_xb_x\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.\end{aligned}$$

Računanje skalarnog umnoška

Skalarni umnožak dvaju vektora

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

računa se formulom

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{5}$$

Primijetimo da je ovaj izraz usklađen s umnoškom vektor-retka i vektor-stupca; ako je

$$\mathbf{a} \mapsto \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} \mapsto \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

tad je skalarni umnožak vektora jednak umnošku

$$[\, a_x \; a_y \; a_x \,] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}.$$

Ako poistovjetimo vektor prostora V^3 s njemu pridruženim vektor-stupcem u $\mathbf{R}^3$, tad skalarni produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ možemo pisati i na način $\mathbf{a}^\top\mathbf{b}$. Taj je zapis čest, pogotovo u tehničkoj literaturi.

Duljina vektora. Skalarni produkt vektora sa samim sobom daje kvadrat duljine vektora. Zato je

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Kut između vektora. Ako su vektori zadani svojim komponentama, tad smo u mogućnosti izračunati skalarni produkt direktno i pomoću njega kut između dvaju vektora:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Primjer 8.

Zadani su vektori $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Odredi $\mathbf{a_b}$, projekciju vektora $\mathbf{a}$ u smjeru vektora $\mathbf{b}$.

► Vrijedi $\mathbf{a}_b = (\mathbf{a} \cdot \widehat{\mathbf{b}})\widehat{\mathbf{b}} = \dfrac{1}{|\mathbf{b}|^2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$. $\mathbf{b}^2 = 1 + 1 + 16 = 18$ i $\mathbf{ab} = 1 - 1 + 8 = 8$ pa je $\mathbf{a_b} = \frac{8}{18}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \frac{4}{9}\mathbf{i} - \frac{4}{9}\mathbf{j} + \frac{16}{9}\mathbf{k}$. ◄

5.4. Vektorski umnožak

5.4.1. Definicija vektorskog umnoška

Vektorski umnožak

Vektorski (ili **vanjski**) umnožak (produkt) vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ je vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$: sa sljedećim svojstvima:

(E_1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\sin\varphi|$.

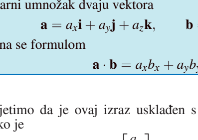
(E_2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je okomit na vektor $\mathbf{a}$ i na $\mathbf{b}$.

(E_3) Trojka ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$) čini desni sustav.

Ako je jedan od vektora nul-vektor, vektorski je umnožak po definiciji i sam jednak nul-vektoru. To je u skladu sa svojstvom (E_1).

Ukoliko su vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kolinearni, tad je, po uvjetu E_1 njihov vektorski produkt jednak $\mathbf{0}$ (nul-vektoru). (Preostala dva uvjeta više nisu bitna.)

Obratno, ako je $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, tad možemo zaključiti, ponovo po istome uvjetu, da vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ moraju biti kolinearni, ili je pak jedan od njih jednak nul-vektoru.



Sl. 5.19. Trojka $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ čini desni sustav

Geometrijska interpretacija. Apsolutna vrijednost vektorskoga produkta $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jednaka je površini paralelograma što ga zatvaraju ta dva vektora. Ta se činjenica može iskoristiti u elementarnoj geometriji.

Na osnovu same definicije moguće je dokazati sljedeća temeljna svojstva vektorskoga umnoška:

Teorem 2.

(**Svojstva vektorskog umnoška**) Vektorski umnožak ima svojstva

1)	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,	(antikomutativnost)
2)	$(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,	(homogenost)
3)	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.	(distributivnost)

Svostvo 1) posljedica je zahtjeva da trojka $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ čini desni sustav. Svojstvo 2) lagano se provjerava, promatrajući posebno pozitivne i posebno negativne vrijednosti za λ. Svojstvo 3) je netrivijalno i bazira se na geometrijskoj interpretaciji vektorskoga produkta i svojstvu distributivnosti za vektorsku projekciju. Mi se nećemo sad upuštati u detalje dokaza već ćemo ih navesti u dodatku ovome poglavlju. Ova su nam pak svojstva nužna da odredimo prikaz vektorskoga umnoška u kartezijevom pravokutnom sustavu.

Primjer 9.

Neka su $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut od 45°. Odredi površinu paralelograma s dijagonalama $\mathbf{e} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$, $\mathbf{f} = 4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$.

► Površina paralelograma iznosi

$$P = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Jer je $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{f} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$, onda vrijedi $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} - \mathbf{f})$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} + \mathbf{f})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \frac{1}{4}(\mathbf{e} - \mathbf{f}) \times (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = \frac{1}{4}(\mathbf{e} \times \mathbf{e} - \mathbf{f} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{f} - \mathbf{f} \times \mathbf{f})\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{e} \times \mathbf{f} = \frac{1}{2}(2\mathbf{m} - \mathbf{n}) \times (4\mathbf{m} - 5\mathbf{n})\\ &= \frac{1}{2}(8\mathbf{m} \times \mathbf{m} - 10\mathbf{m} \times \mathbf{n} - 4\mathbf{n} \times \mathbf{m} + 5\mathbf{n} \times \mathbf{n})\\ &= \frac{1}{2}(10\mathbf{n} \times \mathbf{m} - 4\mathbf{n} \times \mathbf{m}) = 3\mathbf{n} \times \mathbf{m}.\end{aligned}$$

Odavde $P = 3|\mathbf{n} \times \mathbf{m}| = 3\sin 45° = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. ◄

5.4.2. Vektorski umnožak u koordinatnom sustavu

Na temelju definicije, u mogućnosti smo napraviti tablicu množenja za vektorski umnožak. Vrijedi (uvjerite se u to!)

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0}, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0}, & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0},\\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j},\\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Zapišimo te vrijednosti u tablici množenja vektorskog umnoška:

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

Izračunajmo sad kako se računa vektorski umnožak dvaju vektora zadanih svojim komponentama u kanonskoj bazi, koristeći svojstva navedena u teoremu.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})\\ &= a_xb_x\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i} \times \mathbf{k}\\ &\quad + a_yb_x\mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j} \times \mathbf{k}\\ &\quad + a_xb_x\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k} \times \mathbf{k}\\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

U ovoj formuli možemo uočiti cikličko mijenjanje indeksa. No, da bismo je zapamtili primijetit ćemo da ovaj izraz nalikuje rastavu determinante trećega reda. Zaista, nastavljajući gornju formulu možemo je napisati u sljedećem obliku.

Računanje vektorskog umnoška

Vektorski umnožak dvaju vektora

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

računa se formulom

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Pri tome nas ne smije smetati što se u prvome retku ove determinante nalaze *vektori*. S njima možemo postupati i determinantu računati onako kako smo do sad naučili, jer su definirane sve operacije zbrajanja i množenja koje pri tom mogu nastupiti.

Primjer 10.

Vektorski umnožak vektora $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ i $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ iznosi

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.\end{aligned}$$

5.5. Mješoviti umnožak

Mješovitim umnoškom triju vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ nazivamo umnožak tipa $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Taj je produkt skalarna veličina.

Odredimo formulu za mješoviti umnožak vektora zadanih u kartezijevim komponentama. Neka je

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},\\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},\\ \mathbf{c} &= c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Korištenjem formule za vektorski i skalarni umnožak dobivamo

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\\ &\quad = [(a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}] \cdot [c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_k\mathbf{z}]\\ &\quad = (a_yb_z - a_zb_y)c_x + (a_zb_x - a_xb_z)c_y + (a_xb_y - a_yb_x)c_k\\ &\quad = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{7}$$

Mješoviti umnožak jednak je determinanti kojoj su retci komponente pojedinih vektora.

— ◆ —

Iskoristit ćemo ovaj prikaz i svojstva determinanti da izvedemo neobično svojstvo mješovitog umnoška. Pogledamo li dobivenu formulu unatrag, vidimo da je mješoviti umnožak *u poretku* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ dobiven tako da je determinanta razvijena po trećem retku i potom rezultat interpretiran kao skalarni umnožak. Međutim, za determinante vrijedi sljedeće:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

To znači da će za mješoviti umnožak vrijediti:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}.$$

Ove formule iskazujemo riječima:

- *Mješoviti umnožak ne mijenja vrijednost cikličkom zamjenom vektora.*

Nadalje, ako zamijenimo prva dva vektora, tad zbog antikomutativnosti vektorskoga umnoška (ili zamjene dvaju redaka u determinanti!) slijedi

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$$

i slično za preostale dvije cikličke permutacije desne strane.

Ova svojstva upućuju da je opravdano za mješoviti produkt uvesti oznaku $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ koja sugerira da je svejedno na koja ćemo mjesta staviti operacije skalarnoga i vektorskoga množenja:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Tako vrijedi

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}].$$

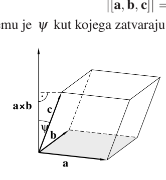
Geometrijska interpretacija. Naka su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tri zadana nekomplanarna vektora. Napišimo njihov mješoviti umnožak u obliku

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Apsolutna vrijednost tog umnoška je jednaka

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos\psi$$

pri čemu je ψ kut kojega zatvaraju vektori $\mathbf{c}$ i $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (sl. 5.20).



Sl. 5.20. Mješoviti produkt jednak je volumenu paralelepipeda razapetog vektorima $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Zato je i vrijednost determinante trećega reda jednaka volumenu paralelepipeda kojeg razapinjuu vektor-retci (ili vektor-stupci!)

Apsolutna vrijednost vektorskoga produkta $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ jednaka je površini paralelograma kojeg razapinju ta dva vektora. Umnožak $|\mathbf{c}|\cos\psi$ odgovara projekciji vektora $\mathbf{c}$ na os okomitu na taj paralelogram: to je upravo visina paralelepipeda kojega razapinju vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Zato je apsolutna vrijednost toga skalarnoga produkta jednaka volumenu paralelepipeda.

Mješoviti produkt, determinanta i orijentacija baze. Primijetimo da je mješoviti produkt pozitivan ukoliko vektor $\mathbf{c}$ zatvara šiljasti kut s vektorom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. No, to upravo znači da trojka $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ čini desni sustav. Ovaj kriterij nam može poslužiti i za strogu definiciju orijentacije baze u vektorskom prostoru V^3: baza $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je **pozitivno orijentirana** (tj. trojka $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ čini desni sustav) ako je vrijednost

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

pozitivna. Ukoliko je ta determinanta negativna, odgovarajuća baza je **negativno orijentirana** ili **lijeva**.

5.6. Rastav vektora po bazi

Neka je $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bilo koja baza u prostoru V^3. Da bismo odredili komponente vektora d u toj bazi, možemo postupiti na sljedeći način. Napišimo jednakost

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}.$$

Da bismo odredili tražene komponente α, β, γ, sve ćemo vektore prikazati u kanonskoj bazi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Nakon toga ćemo izjednačiti odgovarajuće koordinate:

$$d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} = \alpha(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) + \beta(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) + \gamma(c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k})$$

Odavde dobivamo sljedeći sustav

$$\begin{aligned}a_x\alpha + b_x\beta + c_x\gamma &= d_x\\ a_y\alpha + b_y\beta + c_y\gamma &= d_y\\ a_z\alpha + b_z\beta + c_z\gamma &= d_z\end{aligned}$$

Ovaj sustav uvijek ima jednoznačno rješenje budući da su retci matrice linearno nezavisni vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ te je ona regularna. Odavde dobivamo, Cramerovim pravilom

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} d_x & b_x & c_x \\ d_y & b_y & c_y \\ d_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} = \frac{[\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}.$$

jer se determinanta ne mijenja transponiranjem. Slično dobivamo

$$\beta = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}, \qquad \gamma = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}.$$

Na taj način možemo napisati sljedeću formulu za rastav nekog vektora $\mathbf{d}$ po vektorima baze $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$:

$$\mathbf{d} = \frac{[\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}\mathbf{a} + \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}\mathbf{b} + \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}\mathbf{c}.$$

5.6.1. Koordinate vektora u ortogonalnoj bazi

Kažemo da je baza $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ **ortogonalna** ako su svaka dva vektora u njoj međusobno okomita. Tad je vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ proporcionalan vektoru $\mathbf{a}$ i za prvu komponentu u gornjem rastavu vrijedi

$$\frac{[\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]} = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{\mathbf{d} \cdot \lambda\mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \lambda\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$$

Na taj način dobivamo sljedeću važnu formulu

Prikaz vektora u ortogonalnoj bazi

Ako vektori $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ čine ortogonalnu bazu u V^3, onda se svaki vektor $\mathbf{d}$ prostora V^3 može prikazati u obliku

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c} \tag{8}$$

Vidimo da su koeficijenti uz vektore $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jednaki skalarnoj projekciji vektora $\mathbf{d}$ na te vektore.

Postoji mnogo prirodniji način za izvođenje ove formule. Taj ćemo način moći poopćiti s trodimenzionalnoga i u višedimenzionalni prostor, gdje mješoviti produkt gubi svoj smisao.

Ako su vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ međusobno okomiti, tad iz relacije

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

skalarnim množenjem s vektorom $\mathbf{a}$ dobivamo

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \gamma\,\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}.$$

Zbog ortogonalnosti je $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$ i $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$. Zato

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \implies \alpha = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Slično se određuju preostale dvije komponente.

Koordinate vektora u ortonormiranoj bazi. Za bazu kažemo da je **ortonormirana** ako je ortogonalna i ako su svi vektori u njoj jedinične duljine. Primjer takve baze je kanonska baza $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Rastav vektora po ortonormiranoj bazi iznimno je jednostavan. Pogledajmo kako izgleda taj rastav u kanonskoj bazi, u svakoj drugoj izvod je analogan. Vektor $\mathbf{a}$ zapisujemo u bazi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ na način

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{9}$$

Pomnožimo relaciju (9) skalarno s $\mathbf{i}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_x\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_z\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}.$$

Budući da je $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$, odavde zaključujemo da vrijedi $a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$. Slično dobivamo i za druge komponente.

Prikaz vektora u ortonormiranoj bazi

Koordinate vektora $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ u ortonormiranoj bazi $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ računaju se formulama

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \qquad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \qquad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

Prikaz vektora u takvoj bazi glasi:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\,\mathbf{k} \tag{10}$$

Neka su α, β, γ kutovi koje zatvara vektor $\mathbf{a}$ s pozitivnim dijelovima koordinatnih osiju. Tako npr. vrijedi $a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{a}|\cos\alpha$ te je

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}).$$

Specijalno, za jedinični vektor $\widehat{\mathbf{a}}$ imamo

$$\widehat{\mathbf{a}} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}.$$

Kutovi α, β, γ nisu nezavisni, znajući dva možemo odrediti treći. Naime, računajući kvadrat norme gornjega vektora, dobivamo

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma. \tag{11}$$

5.7. Dvostruki umnožak

Neka su zadani vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$. Tad je definiran umnožak $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Takav se izraz javlja u mnogim primjenama i korisno je napisati ga u jednostavnijoj formi.

Primijetimo da je vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ okomit na ravninu razapetu vektorima $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Vektor $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ je okomit na $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (i na vektor $\mathbf{c}$), pa on mora ležati u ravnini razapetoj s $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$! Zato je taj vektor oblika $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. Preostaje odrediti te skalare.

Označimo traženi vektor s $\mathbf{d}$,

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

Vektor $\mathbf{d}$ možemo napisati u komponentama na način

$$\mathbf{d} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}.$$

Pri tom se komponente računaju na način $d_x = \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}$ (10). Sad računamo

$$\begin{aligned}d_x &= [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{i})\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_x & c_y & c_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\\ &= [(a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}] \cdot (c_z\mathbf{j} - c_y\mathbf{k})\\ &= (a_zb_x - a_xb_z)c_z - (a_xb_y - a_yb_x)c_y\\ &= (a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z)b_x - (b_xc_x + b_yc_y + b_zc_z)a_x\\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_x - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})a_x\end{aligned}$$

Slično dobivamo

$$\begin{aligned}d_y &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_y - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})a_y\\ d_z &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_z - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})a_z\end{aligned}$$

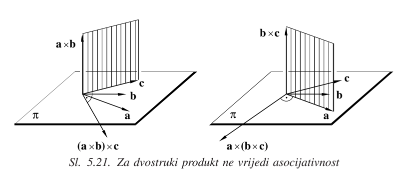
Zato je

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a}.$$

— ◆ —



Sl. 5.21. Za dvostruki produkt ne vrijedi asocijativnost

Je li dvostruki produkt asocijativan, vrijedi li $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$? Odgovor je: ne! Prvi vektor leži u ravnini razapetoj s $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, drugi pak u ravnini koju razapinju $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$. Ipak možemo iskoristiti dobivenu formulu da odredimo i ovaj dvostruki umnožak:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

Time smo dobili sljedeće dvije formule:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a} \tag{12}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}. \tag{13}$$

Stavimo li $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ u (13) dobivamo

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a}$$

ili

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a} + \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}). \tag{14}$$

Ova formula predstavlja rastav vektora $\mathbf{b}$ na vektor koji je kolinearan s unaprijed zadanim vektorom $\mathbf{a}$ (prvi pribrojnik) i vektor okomit na $\mathbf{a}$ (drugi pribrojnik).

Primjer 11.

Dokaži formule

A. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$;

B. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{a}$;

C. $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})$;

D. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2$.

► **A.**

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{a}]\\ &= \{\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\} \cdot \mathbf{a} = \{((\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}\} \cdot \mathbf{a}\\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).\end{aligned}$$

B.

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}\mathbf{b} - \{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}\mathbf{a}\\ &= [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{a}.\end{aligned}$$

C.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] &= \mathbf{a} \times \{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}\}\\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d}).\end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})]\\ &\qquad = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\big(\{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}\}\mathbf{c} - \{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}\}\mathbf{a}\big)\\ &\qquad = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\}\{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}\} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2. \;◄\end{aligned}$$