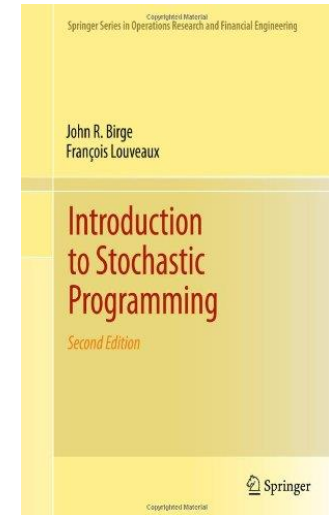


Operacijska istraživanja

8. predavanje: Stohastičko programiranje

Kontekst predavanja

- Odlučivanje u uvjetima neizvjesnosti
 - Modeli neizvjesnosti
- Višefazni problemi
 - Stabla odlučivanja
 - Stohastičko programiranje
- Predavanje bazirano na:
 - Birge, J.R., Louveaux, F.: Introduction to Stochastic Programming, Second Ed. Springer Verlag (2011) – potpoglavlje 1.1
 - [pyomo](#) + [mpi-sppy](#) knjižnicama



Odlučivanje

- Proces identificiranja i biranja alternativa temeljem vrijednosti, preferenci i uvjerenja osobe koja odlučuje
- Dosad uglavnom determinističko
- Mogućnosti
 - Determinističko
 - **Neizvjesno – nema sigurnosti oko nekih aspekata**
 - Igre
 - Protivničke
 - Kooperativne
 - Višeciljne – više funkcija cilja

Modeli neizvjesnosti i rizika

- Tipovi neizvjesnosti (količina dostupnih info)
- **Stohastička**
 - Poznata vjerojatnosna distribucija
- Robusna
 - Poznate samo domene mogućih vrijednosti
- Nepoznate nepoznatosti – neidentificirani rizici

Višefazni stohastički problemi

- Najčešće kriterij očekivane vrijednosti
 - Računalno najjednostavniji
- Modeliranje
 - Često, Markovljev proces odlučivanja (MDP)
 - Pretp. Markovost
- Rješavanje
 - Dinamičko programiranje
 - Koncept vrijednosne funkcije
 - Stabla odlučivanja
 - **Stohastičko programiranje**

Stabla odlučivanja?

- Dobra za diskretne probleme
 - Male dimenzionalnosti
 - Malog faktora grananja
- Problemi sa kontinuiranim ili vektorskim odlukama visoke dimenzionalnosti?
 - **Stohastičko programiranje**
 - Robusno programiranje
 - Kad nema vjerojatnosnih info ili kritične situacije

Problem farmera - deterministički

- Farmer uzgaja **pšenicu, kukuruz, šećernu repu** na 500ha. Na zimu odlučuje razdiobu zemlje po kulturama, a žetva je nakon 6 mjeseci. Barem 200t pšenice i 240t kukuruza je potrebno za prehranu stoke. Ove količine je moguće uzgojiti ili kupiti u veleprodaji. Svaki suvišak je moguće prodati. Prosječne prodajne cijene tijekom zadnjeg desetljeća su bile 170\$/t za pšenicu i 150\$/t za kukuruz. Kupovne cijene su 40% više radi marži i transportnih troškova. Troškovi sadnje su redom: 150\$/ha, 230\$/ha i 260\$/ha.
- Prodajna cijena šećerne repe je 36\$/t, no EU je nametnula kvote od 6000t na uzgajanje. Nakon te kvote je najveća prodajna cijena 10\$/t. Temeljem iskustva, farmer procjenjuje da je prosječni prinos svake kulture 2.5t/ha, 3t/ha, 20t/ha.

Problem farmera - deterministički

	Wheat	Corn	Sugar Beets
Yield (T/acre)	2.5	3	20
Planting cost (\$/acre)	150	230	260
Selling price (\$/T)	170	150	36 under 6000 T 10 above 6000 T
Purchase price (\$/T)	238	210	–
Minimum requirement (T)	200	240	–
Total available land: 500 acres			

- x_i – zemlja [ha] alocirana na kulturu i
- w_i – prodana količina [t] za kulturu i
- y_i – kupljena količina [t] za kulturu i

6. prosinca 2021.

- w_4 – prodana količina šećerne repe izvan kvote
- Kultura $i \in K = \{1,2,3\}$
- 1 := pšenica, 2 := kukuruz, 3 := šećerna repa

Problem farmera - deterministički

$$\begin{aligned} \min \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 \\ & + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \quad 2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200, \\ & 3x_2 + y_2 - w_2 \geq 240, \quad w_3 + w_4 \leq 20x_3, \quad w_3 \leq 6000, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Problem farmera - deterministički

Culture	Wheat	Corn	Sugar Beets
Surface (acres)	120	80	300
Yield (T)	300	240	6000
Sales (T)	100	—	6000
Purchase (T)	—	—	—
Overall profit: \$118,600			

Problem farmera - mogućnosti

- Vrijeme je neizvjesno!!
- Urod svake kulture ovisi o vremenu - pretp. varijaciju $\pm 20\%$

	Loše	Prosječno	Odlično
Pšenica	2 t/ha	2.5 t/ha	3 t/ha
Kukuruz	2.4 t/ha	3 t/ha	3.6 t/ha
Šeć.repa	16 t/ha	20 t/ha	24 t/ha

- Pronađite najbolje odluke za svaki scenarij!

Problem farmera - $\pm 20\%$ mogućnosti

Culture optimistic	Wheat	Corn	Sugar Beets
Surface (acres)	183.33	66.67	250
Yield (T)	550	240	6000
Sales (T)	350	—	6000
Purchase (T)	—	—	—
Overall profit: \$167,667			

Culture pessimistic	Wheat	Corn	Sugar Beets
Surface (acres)	100	25	375
Yield (T)	200	60	6000
Sales (T)	—	—	6000
Purchase (T)	—	180	—
Overall profit: \$59,950			

Dvofazni stohastički problem - farmer

- Vrijeme je neizvjesno!!
- Urod svake kulture ovisi o vremenu – pretp. varijaciju $\pm 20\%$

	Loše $p=1/3$	Prosječno $p=1/3$	Odlično $p=1/3$
Pšenica	2 t/ha	2.5 t/ha	3 t/ha
Kukuruz	2.4 t/ha	3 t/ha	3.6 t/ha
Šeć.repa	16 t/ha	20 t/ha	24 t/ha

- Koristite LP za plan uzgoja koji **daje najveću očekivanu zaradu** – optimalni trade-off svih scenarija

Dvofazni stohastički problem - farmer

	Loše $p=1/3$	Prosječno $p=1/3$	Odlično $p=1/3$
Pšenica	2 t/ha	2.5 t/ha	3 t/ha
Kukuruz	2.4 t/ha	3 t/ha	3.6 t/ha
Šeć.repa	16 t/ha	20 t/ha	24 t/ha

- Linearno stohastičko programiranje
 - Ograničenja linearna
 - Fja cilja linearna
 - Očekivana vrijednost – pretp. farmer neutralan na rizik!
 - Minimax
 - Može se izraziti kao linearna fja + ograničenja

Dvofazni stohastički problem - farmer

$$\begin{aligned} \min \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\ & - \frac{1}{3}(170w_{11} - 238y_{11} + 150w_{21} - 210y_{21} + 36w_{31} + 10w_{41}) \\ & - \frac{1}{3}(170w_{12} - 238y_{12} + 150w_{22} - 210y_{22} + 36w_{32} + 10w_{42}) \\ & - \frac{1}{3}(170w_{13} - 238y_{13} + 150w_{23} - 210y_{23} + 36w_{33} + 10w_{43}) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \quad 3x_1 + y_{11} - w_{11} \geq 200, \\ & 3.6x_2 + y_{21} - w_{21} \geq 240, \quad w_{31} + w_{41} \leq 24x_3, \quad w_{31} \leq 6000, \\ & 2.5x_1 + y_{12} - w_{12} \geq 200, \quad 3x_2 + y_{22} - w_{22} \geq 240, \\ & w_{32} + w_{42} \leq 20x_3, \quad w_{32} \leq 6000, \quad 2x_1 + y_{13} - w_{13} \geq 200, \\ & 2.4x_2 + y_{23} - w_{23} \geq 240, \quad w_{33} + w_{43} \leq 16x_3, \\ & w_{33} \leq 6000, \quad x, y, w \geq 0. \end{aligned}$$

- **Ekstenzivna forma** stohastičkog programa
- x – prva faza; y, w – druga faza

Dvofazni stohastički problem - farmer

		Wheat	Corn	Sugar Beets
First Stage	Area (acres)	170	80	250
$s = 1$ Above	Yield (T)	510	288	6000
	Sales (T)	310	48	6000 (favor. price)
	Purchase (T)	–	–	–
$s = 2$ Average	Yield (T)	425	240	5000
	Sales (T)	225	–	5000 (favor. price)
	Purchase (T)	–	–	–
$s = 3$ Below	Yield (T)	340	192	4000
	Sales (T)	140	–	4000 (favor. price)
	Purchase (T)	–	48	–
Overall profit: \$108,390				

Višefazni stohastički problem - farmer

1. Faza - zima

Proaktivno

- Površina pšenica=170
- Površina kukuruz=80
- Površina šeć.repa = 250

2. Faza – nakon 6mjeseci

Loše

- Prodaj 148t pšenice
- Kupi 48t kukuruza
- Prodaj 4000t šeć.repe

Prosječno

- Prodaj 225t pšenice
- Prodaj 5000t šeć.repe

Odlično

- Prodaj 310t pšenice
- Prodaj 48t kukuruza
- Prodaj 6000t šeć.repe

Problem farmera - zaključno

- vrijednost savršene informacije (EVPI)=

$$E(\text{iznos opt. scenarija}) - \text{iznos opt. stohastičnog programa} = \\ 115406\$ - 108390\$ = 7016\$$$

- vrijednost stohastičnog rješenja (VSS)=

$$\text{iznos opt. stohastičnog programa} - \text{iznos opt. očekivanog scenarija} \\ = 108390\$ - 107240\$ = 1150\$$$

Dvofazni stohastički problem – generalna formulacija

$$\min c^T x + E_{\xi} Q(x, \xi)$$

$$\text{s. t. } Ax = b ,$$

$$x \geq 0 ,$$

Odluke prve faze

- pod rizikom radi nepotpunih informacija

$$Q(x, \xi) = \min \{ \mathbf{q}^T \mathbf{y} \mid W\mathbf{y} = \mathbf{h} - \mathbf{T}x, \mathbf{y} \geq 0 \}$$

Korektivne
akcije

$$\mathcal{Q}(x) = E_{\xi} Q(x, \xi)$$

Funkcija pribjegavanja
(korekcije)

Dvofazni stohastički problem – generalna formulacija

$$\begin{aligned} Q(x, s) = \min \{ & 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \} \\ \text{s. t. } & t_1(s)x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 , \\ & t_2(s)x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 , \\ & w_3 + w_4 \leq t_3(s)x_3 , \\ & w_3 \leq 6000 , \\ & y, w \geq 0 , \end{aligned}$$