Algoritmo de aproximación MAX 3-SAT

Montoya Montes Pedro

Definiciones:

- Sea **U**=$\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ un conjunto de literales.
- Una cláusula bajo **U** es un conjunto de literales en su forma disyuntiva.
- Una asignación de verdad de **U** es una función t:u->{**T**,**F**}

Definiciones:

<u>Definición (3-CNF Conjunctive Normal Form):</u>

- Sea **U**$=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ un conjunto de variables.
- Sea **C**$=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ una colección de cláusulas bajo **U** y $|c_i|=3$ para $i=\{1,\ldots,n\}$.

<u>Definición (3-SAT):</u>

- Se dice que una fórmula booleana **f** en 3-CNF está en 3-SAT si existe una asignación de verdad *t* tal que toda cláusula c bajo **U** es verdad.

MAX-3-SAT

El problema *3-SAT* tiene complejidad $\mathbf{O(2^n)}$.
En el peor caso hacemos $\mathbf{2^n}$ cambios de variables.

Vamos a convertir *3-SAT* de un problema de decisión a un problema de optimización al que llamaremos *MAX-3-SAT.*

Vamos a llamar al problema *MAX-3-SAT* al conjunto máximo de variables que satisfacen una función en *3-CNF.*

Algoritmo de aprox. aleatorio para MAX-3-SAT

Nuestro algoritmo será de la siguiente forma:

Cada variable **u** ϵ **U** tiene una probabilidad de ½ de ser **T** y ½ de ser **F**.

Nuestro algoritmo aleatorio es una $\frac{8}{7}$-algoritmo de aproximación.

Conocimientos previos:

Lema:

Dado un espacio muestral **S** y un evento $\mathbf{A} \in \mathbf{S}$ y sea $\mathbf{X_A} = I\{\mathbf{A}\}$.

Entonces $E[X_A] = Pr\{\mathbf{A}\}$

Radio de aproximación:

Sea ρ(n), para cualquier entrada de tamaño **n**, el costo esperado *C* de la solución producida por el algoritmo está en el factor ρ(n) de costo C*, una solución óptima.

$\max(C/C^*, C^*/C) \leq \rho(n)$

Teorema

Dado un ejemplar de *3-CNF* con **n** variables $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ y **m** cláusulas.

Sea A un algoritmo que hace cada variable **T** ó **F** con igual probabilidad.
A es un ⁸⁄₇-algoritmo de aproximación pata *MAX-3-CNF*.

NOTA

Vamos a asumir que para cada cláusula $\mathbf{C=\{u_1,u_2,u_3\}}$:

A. Para cada $\mathbf{u_i}, \mathbf{u_j} \in \mathbf{C}$, $\mathbf{u_i} \neq \mathbf{u_j}$ con $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$.

B. Para toda $\mathbf{u_i} \in \mathbf{C}$, $\neg\mathbf{u_i} \notin \mathbf{C}$.

Demostración:

Sean los conjuntos independientes de cada variable con la misma probabilidad de ser **F** o **T**.

Sea $\mathbf{Y_i}$ = I {*cláusula i se satisface*} con i={1,2,...,m}.

Para que $\mathbf{Y_i}$= **1** (o **T**) al menos una literal es **T**.

Demostración:

Sabemos que una cláusula <u>no</u> se satisface cuando **todas** sus literales son **F**.

Por A. y B. de **NOTA** cada variable es independiente en cada cláusula.

Pr{*cláusula i <u>no</u> se satisface*} = $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

Entonces Pr{*cláusula i se satisface*} = $1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Demostración:

Tenemos:

$E[\mathbf{Y_i}] = 7/8$

Con $\mathbf{Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_m}$ (número de cláusulas).

Por el Lema:

$E[\mathbf{Y}] = E[\sum^{m}_{i=1} \mathbf{Y_i}]$

$= \sum^{m}_{i=1} E[\mathbf{Y_i}]$ Por ser un operador lineal

$= \sum^{m}_{i=1} 7/8 = 7m/8$

Demostración:

Finalmente teniendo:

$$\sum_{i=1}^{m} \tfrac{7}{8} = 7m/8.$$

Vemos que **m** es un límite superior en el número de cláusulas $\mathbf{C_i=T}$ y por lo tanto el radio de aproximación es a lo más $m/(7m/8)=8/7$.

$$\max(C/C^*, C^*/C)$$

Ejemplo:

Sea $E = (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_4) \land (x_2 \lor \neg x_3 \lor x_4)$ con $\varphi = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Approx-Max3SAT(φ)[1]

    for i= 1 **to** n

        do Lanzar-una-moneda

            if Cara

                then $x_i \leftarrow 1$

                else $x_i \leftarrow 0$

return x

Ejemplo:

Sea E = $(x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_4) \land (x_2 \lor \neg x_3 \lor x_4)$ con $\varphi = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Approx-Max3SAT(φ) =>

x_1 -> 0

x_2 -> 1

x_3 -> 1

x_4 -> 0

E = $(0 \lor 1 \lor 1) \land (0 \lor 0 \lor 1) \land (1 \lor 0 \lor 0) = 1$

Una e-aproximación si y sólo si P=NP (verificador)

Sea $\mathbf{C}=\{\mathbf{C_1},\mathbf{C_2},...,\mathbf{C_n}\}$ el conjunto de cláusulas.

Elegimos de forma aleatoria una $\mathbf{C_i}$ para la verificación tenemos dos casos:

1. Si **C** se satisface $\mathbf{C_i}$ tiene probabilidad **1** de satisfacerse.
2. Si **C** no se satisface $\mathbf{C_i}$ tiene probabilidad $p \leq 1 - 1 / m$ de satisfacerse.

Tenemos que <u>no</u> existe un algoritmo de aproximación de factor menor a ½ para PCP (probabilistically checkable proofs), suponiendo que P ≠ NP.

Fuentes:

"Introduction to Algorithms" Thomas H. Cormen (35.4 Randomization and linear programming)

[1]A Randomized Approximation Algorithm for MAX3-SAT (http://web.cs.iastate.edu/~cs511/handout08/Approx_Max3SAT.pdf)

"Approximation Algorithms" Vijay V. Vazirani

FIN

Cuando acaba la presentación y debes de despertarte para decir que no tienes preguntas.