1. Conceptos previos

- **Gráfica:** Sea **G** es una gráfica con **G=(E,V)**, que consta de un conjunto no vacío **V** de vértices y un conjunto **E** de aristas que son pares no ordenados de vértices denotado como $\{u, v\} \in \mathbf{E}$.
- **Adyacencia:** Sea **G=(E,V)** se dice que $u, v \in \mathbf{V}$ son adyacentes si $\{u, v\} \in \mathbf{E}$.
- **Orde:** El orden de una gráfica **G** es la cantidad de vétices en **G** o $Ord(\mathbf{G}) = |\mathbf{V}|$.
- **Tamaño:** El tamaño de una gráfica **G** es la cantidad de aristas en **G** o $t(\mathbf{G}) = |\mathbf{E}|$.

2. Tamaño de una gráfica completa:

Decimos que una gráfica **K=(V,E)** es completa si todos sus vértices son adyacentes entre sí, es decir, que cada uno de los vértices está conectado a todos los otros vértices en la gráfica.
Sea $|V| = n$
Tenemos que $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$.

2.1. Ejemplo gráfico

Para esto, se presenta de manera gráfica:
Sea **K=(V,E)**, **V**$= \{1, 2, 3, 4\}$, **E**$= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

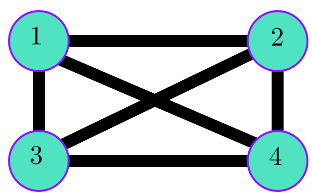

Figura 1: Gráfica **K**

El proceso para contarlas se ve de la siguiente manera:
Tomamos el vértice **1** y contamos las aristas que inciden en dicho vértice, tendríamos 3 aristas.

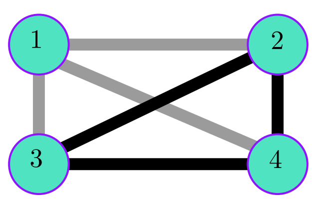

Figura 2: Aristas contadas: 3

Para el vértice **2** contamos las aristas que inciden y que no hayamos contado, es decir, tendríamos otras 2 nuevas aristas.

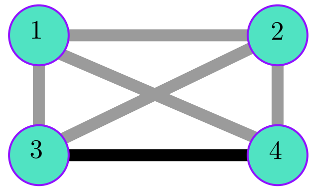

Figura 3: Aristas contadas: 5

Para el vértice **3**, queda 1 arista que no hemos contado y para el vértice **4** ya hemos contado todas.

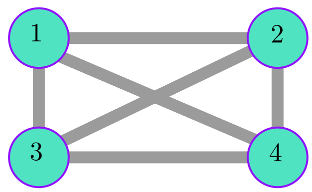

Figura 4: Aristas contadas: 6

Con lo que al final tendríamos $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$ aristas.

2.2. Demostración formal

La demostración es inducción sobre el total **n** de vértices una gráfica completa $\mathbf{G}_n$[1]

- Caso base (n=1) [2]:
  $\mathbf{G}_1 = (E, V)$
  $|E| = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1(1-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$
  Al ser una gráfica simple, con 1 sólo vértice, es claro ver que al no existir más vértices de los cuales se puede unir, no tiene aristas por lo que este caso se cumple.
- Caso base (n=2):
  $\mathbf{G}_2 = (E, V)$
  $|E| = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(1-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$
- Hipótesis de inducción (Suponemos que cumple para un n=k):
  $\mathbf{G}_k = (E, V)$
  $|E| = \frac{k(k-1)}{2}$
- Paso inductivo k+1:
  $\mathbf{G}_{k+1} = (E, V)$
  Sabemos por la hipótesis que $\mathbf{G}_k$ que cumple con tener $\frac{k(k-1)}{2}$ aristas, si agregamos un nuevo vértice a la gráfica $\mathbf{G}_k$, para ser completa se debe unir a los k vértices originales, es decir, k nuevas aristas:
  $|E| = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{2k}{2} = \frac{k(k-1)+2k}{2} = \frac{k^2-k+2k}{2} = \frac{k^2+k}{2} = \frac{(k+1)(k)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)-1)}{2}$ ■

[1] Normalmente las gráficas completas de n vértices se escribe como K_n, pero para evitar confusión se usará G_n.
[2] Sabemos, por definición, que el mínimo de vértices de una gráfica es 1.