

Titre : Gravitation

Présentée par : R Aeschlimann

Rapport écrit par : T Le Bret

Correcteur : L Le Guillou

Date : 07/04/2021

Bibliographie		
Titre	Auteurs	Éditeur
Mécanique 1	BFR	
Tout-en-un PCSI		Dunod
Mécanique	Perez	

Plan détaillé

(indiquer parties, sous-parties, 1 ou 2 phrases d'explications par sous-partie, et références)

Niveau choisi pour la leçon : L3

Pré-requis : Électrostatique; Mécanique du point; Théorèmes généraux de la mécanique

Intro. Développement historique de l'Antiquité au 20e siècle (animation NASA système solaire): modèle géocentrique de Ptolémée au 2e siècle (le mouvement des planètes est connu depuis longtemps = astre errant), puis modèle héliocentrique (Tycho Brahe, Copernic, Galilée) et Kepler donne des lois empiriques expliquées théoriquement par Newton.

3min 30

I. Interaction gravitationnelle

1) Force gravitationnelle

Action à distance, force exercée par le corps 1 sur le corps 2 $F_{12} = -Gm_1m_2/r^2 \mathbf{u}_{12}$ ou G est la constante de gravitation universelle et \mathbf{u}_{12} le vecteur unitaire orienté de 1 vers 2.

Par la suite, on considérera une masse ponctuelle

2) Champ de pesanteur

$$F = mg$$

$$g = -GM_{\text{terre}}/R_{\text{terre}}^2 \text{ par identification}$$

Analogie avec électromagnétisme:

force de gravitation de Newton \leftrightarrow force électrostatique de Coulomb

Maxwell-Gauss $\leftrightarrow \text{div } \mathbf{g} = 4\pi G \cdot \rho$ (équation de Poisson)

Par théorème de Gauss on a donc équivalence entre champ d'une masse ponctuelle et champ d'une distribution homogène sphérique (en dehors de la sphère).

Différence: pas de charge gravitationnelle négative, donc pas d'écrantage comme en électrostatique, la force de gravitation est donc à longue distance.

Ordre de grandeur pour interaction électron-proton, $F_{\text{grav}} \sim 10^{-47}\text{N}$; $F_{\text{elec}} \sim 10^{-6}\text{N}$

L'interaction gravitationnelle est de loin la plus faible des forces fondamentales (~ 40 OdG), donc intéressante seulement à grande échelle, astronomie par exemple.

3) Énergie potentielle gravitationnelle

$$E = -\text{grad}V \text{ (electrostat)} \leftrightarrow g = -\text{grad} E_p; E_p = -GM_{\text{terre}}/R_{\text{terre}}$$

15min

Manip: mesure de g par suivi cinétique de la chute libre d'une balle de Golf

Cam Nova + Appli "Camera" pour acquisition (fichier: ordi/images/pellicule/)

Analyse dans Tracker (calibration des distances, repérage de la balle dans le temps).

On ajuste par une trajectoire parabolique (3 paramètres d'ajustement: g , v_i , y_i) dans qtiplot,

$$y(t) = 0,5 * g * t^2 + v_i * t + y_i$$

$g = 12 \pm 2 \text{ m.s}^{-2}$ (bof, mais probablement des erreurs systématiques: pas vraiment une chute libre, effets dus à la viscosité de l'air ?) à comparer à la valeur tabulée de 9.81 m.s^{-2}

25 min

II. Mouvement dans un potentiel gravitationnel

1) Position du problème

$$M_t = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

On a donc référentiel barycentrique \sim référentiel héliocentrique

Conservation du moment cinétique car force centrale $\Rightarrow r \times v = \text{cte}$ (vectoriel)

$$\text{On définit } r^2 * d\theta/dt = C$$

On a la 2e loi de Kepler (conservation de la vitesse aréolaire)

2) Potentiel effectif

On définit l'énergie mécanique:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + K/r = \frac{1}{2} m (dr/dt)^2 + K/r$$

$$E_{\text{eff}} = mC^2/2r^2 + K/r$$

$$\text{On écrit } dr/dt = (C/r^2) dr/d\theta$$

Et, après changement de variable de Binet, $u = 1/r$, en injectant dans E_m et en dérivant par rapport à θ :

$$0 = d^2u/d\theta^2 + u + K/mC$$

$$\Rightarrow \text{solutions coniques } r(\theta) = p / (\text{sgn}(K) + e \cos(\theta - \theta_0))$$

$$p = mC/|K| = b^2/a ; e = A/(mC^2.K) = b/a, \text{ excentricité, } A \text{ et } \theta_0 \text{ constantes d'intégration}$$

On a donc des solutions liées ($E_c < E_{\text{eff}}$, $E_m < 0$) et libres ($E_c > E_{\text{eff}}$, $E_m > 0$).

$e > 1 \Rightarrow$ hyperbole

$e = 1 \Rightarrow$ parabole

$0 < e < 1 \Rightarrow$ ellipse

40 min

III. Application à la vitesse de libération

Pas de temps pour cette partie

Conclusion : On retrouve par la théorie de Newton les lois de Kepler

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

(l'étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l'enseignant. Si certaines réponses manquent, l'enseignant pourra compléter le document)

2 masses m_1 et m_2 , comment arrive-t-on à $F_{12} = -F_{21}$? Principe des actions réciproques (Newton)

Valeur de G ? $6.10^{-12} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ($\text{m}^3 \text{ kg s}^{-2}$)

Constante "universelle", mesurée comment? Pendule de torsion (expérience historique de Cavendish)

Champ de pesanteur $F = mg$: sur terre le champ de pesanteur c'est la même chose que l'attraction gravitationnelle? Non, car il y a une correction due au caractère non-galiléen du référentiel terrestre (force d'inertie d'entraînement) + marées (Lune, Soleil)

Analogie électrostatique et gravitationnelle : analogue de B ? Il n'y en a pas (en mécanique classique)

Pourquoi peut-on raisonner avec le théorème de Gauss pour assimiler le champ d'une planète à celui d'un objet ponctuel de même masse ? Symétrie sphérique de la distribution de densité de masse.

Fin du XIXe, modèles populaires de "Terre creuse" (Jules Verne notamment s'en inspire dans « Voyage au centre de la Terre ») : quel champ de gravitation à l'intérieur de la cavité centrale ? Champ constant nul (pas de force gravitationnelle) en utilisant le théorème de Gauss.

Rotationnel de G ? Nul

Expériences de chute d'anti-atome d'hydrogène au CERN? Pour vérifier si matière et anti-matière interagissent avec G de la même façon

Applications pratiques de la mesure précise du champ de pesanteur ? Gravimétrie? Permet de mesurer des inhomogénéités dans le champ de pesanteur terrestre (utile pour détecter des gisements de gaz)

Erreur sur g de l'ordre de 20% dans la manip ? Chute pas libre (mais on a utilisé une balle lourde pour négliger les frottements, donc probablement pas très important). En fait c'est surtout le repérage de la position de la balle qui est mauvais (image floue, peu lumineuse + mauvais contraste).

Historiquement, les expériences de Galilée se font sans chronomètre, comment fait-il? Chute sur des plans inclinés, avec des clochettes qui tintent au passage de la bille (Da manière analogue, sa découverte de la constance de la période d'oscillation d'un pendule quelle que soit l'amplitude a lieu en observant les oscillations du lustre de la cathédrale de Pise, en mesurant la période avec son propre pouls...).

Pour la seconde loi de Kepler, comment démontrer simplement la constance de la vitesse aréolaire? Aire parcourue en temps dt : $r^2 \cdot (d\theta/dt) \cdot dt$

Dans le potentiel effectif, à quoi correspond le minimum? Orbite circulaire ($r = \text{cte}$), et si on a une énergie légèrement plus grande, l'orbite devient elliptique.

Énoncez précisément les 3 lois de Kepler? Orbites elliptiques appartenant au plan de l'écliptique dont les foyers sont la planète et le Soleil ; vitesse aréolaire constante ; période² proportionnelle au $\frac{1}{2}$ grand axe³

Principe du traitement complet d'un système à deux corps massifs ? Comment détecte-t-on les exoplanètes? L'étoile orbite elle aussi autour de centre de masse du système étoile – planète, ce qui induit un mouvement le long de la ligne de visée depuis la Terre, qu'on détecte en mesurant l'effet Doppler induit (léger décalage des lignes spectrales de l'étoile, variable au cours du parcours de l'orbite).

Commentaires lors de la correction de la leçon

*(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. **L'enseignant** relit, et rectifie si besoin)*

Plan OK, classique, gestion du temps difficile (pas de temps pour le III). Trop de temps sur la manip?

Attention aux signes etc sur les forces!

Un peu confus au début (par exemple être plus clair sur les hypothèses de symétrie sphérique/masse ponctuelle et à quelle étape elles interviennent)

Attention: le "champ de pesanteur terrestre" inclut la force centrifuge (pas négligeable à quelques %) et les forces de marée (Lune+Soleil) donc pas que le champ gravitationnel.

Pas besoin de comparer gravitation et force nucléaire forte/faible: juste faire Newton et Coulomb pour le système électron-proton.

Faire une meilleure transition vers la manip.

Vidéo introductive pas claire: peut-être mieux vaut faire une diapositive avec les lois de Kepler explicitement ?

Pour la manip, c'est probablement un problème de distorsion des échelles (lentille, problème d'alignement de l'écran/camera, balle floue car temps de pose trop long/luminosité trop basse)

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :

Le plan choisi était classique et raisonnable pour cette leçon. Toutefois, la gestion du temps n'était pas satisfaisante, la fin de l'exposé était confuse (par panique) et vous n'avez pas pu aborder votre partie annoncée sur la vitesse de libération. Une présentation des lois de Kepler, en les énonçant explicitement en début d'exposé aurait été préférable.

La vidéo du système solaire de la NASA présentée en introduction n'apportait pas grand-chose, et était peu lisible. Méfiez-vous des projecteurs vidéos, dont la luminosité est limitée et qui parfois ré-échantillonnent l'image de manière non contrôlable : en particulier, à moins d'avoir testé le matériel de projection auparavant, il ne faut jamais projeter des images à traits fins clairs sur un fond sombre, car très souvent on ne voit rigoureusement rien sur l'écran de projection : c'est particulièrement traître pendant un exposé de concours...

Davantage de précision dans la présentation serait bienvenue. Vous avez tendance à zapper des étapes de raisonnement (par exemple on passe de la situation générale entre deux masses quelconques au système Soleil - Terre sans que ce soit dit à aucun moment, c'est perturbant pour l'assistance).

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :

Il est fondamental d'être précis sur l'énoncé des trois lois de Kepler, et de les formuler explicitement assez tôt dans l'exposé, puisque l'un de vos objectifs est ensuite de les redémontrer en utilisant les lois de Newton ; de même, la convention de signe habituelle sur la force gravitationnelle doit être maîtrisée, sinon le jury vous le reprochera.

Le théorème de Gauss et son application au cas de la force gravitationnelle doit être bien maîtrisé. L'exemple fictif d'une planète creuse est une question classique sur ce thème.

Attention à bien distinguer l'attraction gravitationnelle « pure » du champ de pesanteur terrestre, dans lequel on inclut aussi traditionnellement la force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même et les forces de marée.

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :

L'expérience de chute libre présentée manquait probablement un peu de préparation. L'analyse des images de la vidéo issue de la webcam donne des résultats trop peu précis : le manque de lumière et, par conséquent, les temps

de pose un peu trop longs pour les images individuelles de la caméra produisent des images très floues et étirées verticalement pour la balle utilisée, et le « tracking » automatique de la balle par le logiciel d'analyse donne par conséquent des positions en z peu précises. De plus, l'optique de la webcam est de faible qualité, le champ de vue est distordu, et il est impératif de calibrer la conversion pixels \rightarrow distances sur l'axe vertical plutôt que l'axe horizontal.

Même si c'est moins « sexy » (pas de vidéo, pas de « tracking »), une expérience plus classique, avec un ou deux capteurs de position qui se déclenchent au passage ou à l'impact d'une bille donnerait de bien meilleurs résultats. En utilisant par exemple une bille d'acier tenue par un électro-aimant dont on coupe brièvement l'alimentation, vous pourriez vous assurer que la vitesse initiale soit nulle, ce qui simplifie l'analyse et l'interprétation des mesures.

Une autre solution consiste à imiter Galilée : ses expériences sur la chute des corps sont effectuées sur des plans inclinés, et dans certaines de ces expériences il contrôle le temps de chute en disposant des clochettes régulièrement espacées le long du plan, que la bille fait tinter à son passage... L'utilisation d'un plan incliné (la pente étant mesurée avec un rapporteur) permet d'avoir une chute plus lente (vous pouvez jouer à volonté sur l'angle) et de faire l'expérience avec un chronomètre de manière satisfaisante.

Bibliographie conseillée :

J.-Ph. Pérez, *Mécanique*, Masson (1995) : chapitres 4, 5, 6, 7 et 14.

H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (2002) : chapitre 3.