Compte rendu de leçon Guillaume Thémèze LP 04

Henri Bouvier et Alfred Kirsch

Passage le 15 février 2021

Niveau : CPGE, prérequis ? Biblio ?

Motivation (1 min) L'équation de Navier-Stokes n'admet pas de solutions évidente et universelle, on cherche donc à la simplifier : c'est la raison de l'étude des écoulements parfaits.

1 Écoulement parfait, couche limite.

1.1 Écoulement parfait (2 min)

Définition Un écoulement est dit parfait si tous les phénomènes de transport diffusif sont négligeables, notamment la viscosité.

En pratique, cela signifie qu'on néglige les forces de viscosité et que les forces de contacts se résument aux forces de pression (comme en statique). Aussi, l'écoulement est isentropique.

1.2 Notion de couche limite (8 min)

Définition On appelle couche limite la région de l'écoulement, au voisinage d'une paroi, où la viscosité de cisaillement a une influence notable sur l'écoulement. C'est dans cette région que ce concentre la vorticité générée par le cisaillement du fluide au contact de la paroi. [sic]

C'est la zone qui assure le raccordement du profil de vitesse : la vitesse proche de l'obstacle doit s'annuler, et loin de la couche limite elle est celle d'un écoulement parfait.

Pour estimer sa taille caractéristique, on écrit l'égalité du terme convectif et du terme visqueux de l'équation d'Euler. C'est l'endroit où l'écoulement cesse d'être parfait :

$$\|\mu(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\| \approx \|\eta\Delta\mathbf{v}\|$$

Soit, en ordres de grandeurs,

$$\frac{\mu v^2}{L} \approx \frac{\eta v}{\delta^2} \iff \frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{\nu}{vL}} = \frac{1}{\sqrt{R_e}}$$

Application numérique Pour une aile d'avion, on a $L = 5m$, $v = 50m.s^{-1}$ et $\nu = 1,5.10^{-5}m^2.s^{-1}$, on trouve $\delta \approx 1,2mm$: l'essentiel de l'écoulement est bien un écoulement parfait.

1.3 Conditions aux limites (2 min)

Lorsqu'on utilise le modèle de l'écoulement parfait, le raccordement entre l'écoulement parfait extérieur à la couche limite et l'écoulement visqueux dans la couche limite doit satisfaire à la condition de continuité des composantes normales des vitesses à leur interface ($S*$), la condition est :

- **Cas d'un obstacle fixe** : $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{S^*} = 0$. En tout point d'un obstacle fixe et imperméable, la composante normale du vecteur -vitesse doit s'annuler.
- **Cas d'un obstacle déformable** : $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{S^*} = \mathbf{v}_{S^*} \cdot \mathbf{n}_{S^*}$. À la surface d'un obstacle imperméable, la composante normale de la vitesse doit être confondue avec la composante normale de la vitesse du point lié à l'obstacle.
- **Cas d'une interface entre deux fluides** : $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_{S^*} = \mathbf{v}_{S^*} \cdot \mathbf{n}_{S^*} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_{S^*}$

2 Dynamique des fluides dans l'écoulement parfait.

2.1 Équation d'Euler (10 min)

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un système de masse $dm = \mu d\tau$, on trouve l'équation de Navier-Stokes, dans laquelle on peut négliger le terme visqueux :

$$\mu(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = -\nabla(P)$$

C'est une équation réversible : en changeant t en $-t$ et $\mathbf{v}$ en $-\mathbf{v}$, l'equation reste inchangée.

Le terme non-linéaire $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ est source de problèmes pour les simulations numériques. Ce terme se réécrit comme :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla(\frac{v^2}{2}) + (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$$

A priori, on a au moins 5 inconnues scalaires : 3 pour $\mathbf{v}$, 1 pour P et 1 pour μ. Or, l'équation d'Euler est équivalente à trois équations scalaires, il faut rajouter des conditions pour résoudre le système, par exemple :

- Une condition d'incompressibilité : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- Une condition de masse volumique constante : $\mu = Cste$

2.2 Effet Coanda (3 min)

Considérons un écoulement parfait, dans lequel on néglige (au moins pour l'explication de cet effet) l'accélération de pesanteur : si on suit une ligne de courant, qui est un arc paramétré, on peut décomposer dans le repère de Frenet l'équation d'Euler :

$$\mu\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\mu\frac{dv}{dt}\right)\mathbf{t} + \left(\mu\frac{v^2}{R}\right)\mathbf{n} = -\nabla(P)$$

Où R est le rayon de courbure, $\mathbf{t}$ est le vecteur tangent à la trajectoire en ce point, et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal principal ($\mathbf{n} = R\mathbf{t}'$) D'où $\nabla(P)\cdot\mathbf{n} = -\mu\frac{v^2}{R} \leq 0$: la pression augmente lorsqu'on s'éloigne du centre de courbure. Cela explique qu'un fluide parfait s'écoule en épousant la forme des obstacles, c'est l'effet *Coanda*.

Non

2.3 Écoulement potentiel (9 min)

Un écoulement irrotationnel est équivalent à un écoulement potentiel :

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \leftrightarrow \exists\Phi \text{ tel que } \mathbf{v} = \nabla(\Phi)$$

On peut développer alors une analogie entre le champ des vitesses eulérien $\mathbf{v} = \nabla(\Phi)$ et le champ électrostatique $\mathbf{E} = -\nabla(V)$

Application On considère un écoulement autour d'une sphère, en considérant l'écoulement *incompressible* ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) et *irrotationnel* ($\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$), sous ces hypothèses on trouve donc :

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi = 0$$

C'est l'équation de Laplace.

Conditions aux limites La vitesse est celle à l'infini loin de la sphère. Aussi, la composante normale de la vitesse s'annule sur la sphère. De ces deux conditions aux limites, on en déduit en résolvant le problème :

$$\Phi(r,\theta) = V_\infty r\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\cos\theta$$

3 Théorème de Bernouilli

Pas de i avant ll

3.1 Énoncé (6 min)

Cas HPPI (Homogène, Parfait, Permanent et Incompressible) Dans le cadre de ces hypothèses, on a

— $\mu = Cste$

— $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
— Les forces dérivent d'un potentiel : $f_{ext} = -\nabla(\phi_{ext})$, par exemple $\mathbf{g} = -\nabla(gz)$.

En manipulant l'équation d'Euler, on peut la mettre sous la forme (cas des seules forces de pesanteur comme force extérieure) :

$$\nabla(\frac{P}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2}) = \nabla \wedge \mathbf{v}$$

Ainsi, le long d'une ligne de courant, puisque $\mathbf{dl}//\mathbf{v}$, on trouve par intégration le long d'un chemin :

$$\frac{P}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2} = Cste$$

Pour une ligne de vorticité ($\mathbf{dl}//\nabla \wedge \mathbf{v}$), c'est le même résultat.
Si l'écoulement est irrotationnel, cela est vrai partout dans l''écoulement.

Cas général On peut aussi montrer que, dans le cas d'un écoulement non stationnaire ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ non nul), il existe une fonction du temps $C : t \to C(t)$ telle que, *dans la zone irrotationnel ou le long d'une ligne de champ*, on a

$$C(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\mu} + gz + \frac{1}{2}v^2$$

3.2 Paradoxe de d'Alembert (3 min)

De retour sur l'écoulement autour d'une sphère, on peut montrer que la résultante des forces de pression est nulle :

$$\mathbf{F} = \iint_S P\mathbf{dS} = \mathbf{0}$$

C'est le paradoxe de d'Alembert : un fluide parfait n'exerce pas de traînée sur un obstacle.
En pratique, c'est la présence de la couche limite qui explique la force de traînée sur une sphère.

Questions

Q Pourquoi en dessinant les couches limites, on fait apparaître une force de traînée ? Qu'est-ce qui va se rajouter, pourquoi il va y avoir une force dans la direction z ?
R : La couche limite est plus épaisse d'un côté que de l'autre du cylindre,
R' : Avec une couche limite, au premier ordre la pression est inchangée, mais c'est surtout l'apparition de la force visqueuse. Mais si il y a recirculation, il y a effectivement une force de pression.

Q : Comment modéliser une force de portance ? Est-ce en contradiction avec la conservation de l'énergie ?

R' : Si c'est une force de trainée, dl est colinéaire à la force, mais si c'est une force de portance, dl est perpendiculaire à la force, donc conservation de l'énergie assurée.

Q Beaucoup d'applications de Bernoulli : pouvez-vous citer quelques exemples et en traiter un

R : Effet Venturi, avec une section qui se réduit, etc. Avec la conservation du débit volumique, on trouve la différence de pression grâce au théorème de Bernoulli.

R' : Çà sert à mesurer des débits grâce à des différences de pressions. En pratique il faut faire des profils "très calmes", pour éviter le décollement des couches limites.

Q Tu as présenté le calcul classique de Bernoulli, peut-on avoir des expressions plus générales ?

R : Oui, modèle barotrope (μ dépend de P).

Q Tu peux m'expliquer un tube de Pitot ?

R : Oui ... tube de Pitot.

Qbis : En réalité il y a plusieurs trous de type B (sur le côté), à quoi ça peut servir ?

Rbis : Pour moyenner si jamais on est pas parfaitement aligné avec l'écoulement.

Q Analogie électrique : quelle serait l'analogie électrique de l'écoulement autour d'une sphère ?

R : Avec un dipôle et un champ permanent.

Q Connaissez-vous le théorème de Kelvin ? Pouvez-vous énoncer ses propriétés.
R : La circulation de la vitesse est conservée pour un fluide parfait. Un écoulement irrotationnel le reste.