

Titre : Oscillateurs, portraits de phase et non-linéarités

Présentée par : Elise Declerck

Rapport écrit par : Mathieu Markovitch

Correcteur : Stéphan Fauve

Date : 23/02/2021

Bibliographie		
Titre	Auteurs	Éditeur
BUP n°744 portrait de phase des oscillateurs		
Vibration, propagation, diffusion	Soutif	
Vibration	Rocard	
Electronique expérimentale	Krob	
BUP n°787 modèle expérimental de l'oscillateur de Van der Pol		

Plan détaillé

(indiquer parties, sous-parties, 1 ou 2 phrases d'explications par sous-partie, et références)

Niveau choisi pour la leçon :
CPGE

Pré-requis :

- Mécanique du point
- Théorème du moment cinétique
- Electrocinétique

Introduction sur les oscillateurs, exemples du diapason et de l'amortisseur de voiture.

I – Oscillateurs linéaires

1) Définitions

Oscillateur, portrait de phase, équation linéaire.

2) Oscillateur harmonique

Equation, propriété de linéarité et portrait de phase.

3) Oscillateur amorti

Exemple du RLC série, différents régimes (pseudopériodique, critique, surcritique), analyse du portrait de phase.

II – Oscillateurs non-linéaires

1) Pendule simple

Equation non-linéaire (linéaire aux petits angles), portrait de phase : deux types de mouvement, formule de Borda : la période dépend de l'amplitude.

2) Oscillateur de Van der Pol

Système entretenu, visualisation du cycle limite sur le portrait de phase.

Conclusion : intérêt de l'oscillateur harmonique, oscillateur amorti plus réaliste, retour sur le diapason et l'amortisseur (facteurs de qualité), utilité de l'espace des phases, comportements non-linéaires (période dépendant de l'amplitude, réponse non proportionnelle à l'excitation, possibilité de créer des harmoniques)

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

(l'étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l'enseignant. Si certaines réponses manquent, l'enseignant pourra compléter le document)

- Autre application des oscillateurs ? *Mesure du temps.*
- Définir l'espace des phases. Chaque point correspond à un état possible du système. La dimension de l'espace des phases est l'ordre de l'équation différentielle *s'il n'y a qu'une variable $x(t)$. De façon générale, si l'on a mis les équations sous la forme d'un système d'équations différentielles couplées du premier ordre pour $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, l'espace des phases est (x_1, \dots, x_n) .*
- Quel est le sens de parcours du portrait de phase pour l'oscillateur harmonique ? *Sens horaire.*
- Donner le système du premier ordre pour l'oscillateur harmonique.
 $y = \dot{x}, \dot{y} + \omega_0^2 x = 0$.
- Pourquoi les trajectoires coupent les axes à angles droits ? $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}$,
généralisable à tout $\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y)$.
- Pourquoi la transformation de t en $-t$ revient à faire la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ? *Car on a alors $y \rightarrow -y$.*
- Etudier l'oscillateur mécanique amorti. *On ajoute le terme d'amortissement $\lambda \dot{x}$.*
- Donner une autre définition de la linéarité qu'à partir de l'équation linéaire. *Réponse proportionnelle à l'excitation.*
- Comment définir une oscillation de relaxation ? *Il y a deux échelles de temps différentes.*

Commentaires lors de la correction de la leçon

(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. L'enseignant relit, et rectifie si besoin)

Bon contenu.

Ne pas redémontrer l'équation de l'oscillateur harmonique (inclus dans les prérequis).

La formule de Borda de donne pas le bon facteur avec un développement limité, il faut faire un calcul perturbatif.

C'est intéressant de tracer les points singuliers dans le portrait de phase du pendule (intersection des séparatrices).

Indiquer le sens des trajectoires

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :

Le plan et le contenu conviennent mais il faudrait insister plus sur la façon de tracer les portraits de phase et leur utilisation pour décrire la dynamique de façon qualitative. Il faut aussi insister plus sur la partie relative aux non-linéarités.

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :

Il est indispensable de définir correctement l'espace des phases et de montrer comment il peut être exploité pour décrire qualitativement le comportement de solutions d'une équation différentielle sans avoir à l'intégrer explicitement. Il faut par ailleurs discuter les principaux effets non linéaires dans le cas des oscillateurs, à savoir, variation de la fréquence en fonction de l'amplitude et création d'harmoniques.

On peut discuter l'effet de la dissipation sur un portrait de phase puis indiquer qu'il faut fournir de l'énergie pour obtenir un comportement oscillant d'un système dissipatif (différentes façons de le faire : forçage additif, forçage paramétrique, instabilités à résistance négative ou autre).

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :

Mesure de la période d'un pendule en fonction de son amplitude d'oscillation.

Pendule pesant en rotation autour de son axe : tracer le portrait de phase au dessous et au dessus de la vitesse angulaire critique.

Pendule paramétrique, étude de la résonance sous-harmonique.

Bibliographie conseillée :

En plus de celle indiquée

Landau et Lifchitz, Mécanique, pour les oscillateurs en général et l'effet des non-linéarités sur l'oscillateur forcé en particulier.

