Obliczenia Naukowe - Lista 4

Szymon Brzeziński

5 grudnia 2021

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

Napisanie funkcji obliczającej ilorazy różnicowe.

1.2 Rozwiązanie

Podstawą algorytmu obliczającego ilorazy różnicowe jest twierdzenie:
Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny $p \in \Pi_n$ spełniający:
$p(x_i) = y_i(0 \leqslant i \leqslant n)$

Wielomian p można przedstawić w postaci:
$q_0(x) = 1$
$q_1(x) = (x - x_0)$
:
:
$q_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$

$$\sum_{j=0}^{n} c_j q_j(x_i) = f(x_i)(0 \leqslant i \leqslant n)$$

Jest to układ z którego możemy wyznaczyć $c_0, c_1, .., c_n$
Rozwiązując układ z góry w dół, widać, że każde
c_k zależy od f z indeksami $\in [0, k]$.
Więc: $c_n = f[x_0, x_1, ..x_n]$, gdzie $f[x_0, x_1, ..x_n]$ jest współczynikiem
przy q_n, z twierdzenia z początku opisu, jest to iloraz różnicowy.
Otrzymujemy więc wzór rekurencyjny:

$$f[x_0] = f(x_0) \tag{1}$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \tag{2}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}]}{x_k - x_i} \tag{3}$$

Implementacja ów wzoru jest rozwiązaniem zadania.
Żeby algorytm wykonał się z mniejszym zużyciem pamięci, można przeprowadzić algorytm w tablicy jednowymiarowej. Początkowo tablica wypełniona jest wartościami węzłów, należy obliczać wszystkie wartości oparte na pierwszej wartości po czym nadpisać ją nową wartością, i przejść do kolejnj wartości węzła.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

Napisać funkcję obliczającą wartośc wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera.

2.2 Rozwiązanie

Postać Newtona wzoru interpolacyjnego:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \tag{4}$$

Obliczanie kolejnych wartości wielomianu zaczynając od najbardziej zagnieżdżonych elementów, jest metodologią znaną jako schemat Hornera:

$$w_n(x) = f[x_0, .., x_n] \tag{5}$$

$$w_k(x) = f[x_0, .., x_k] + (x - x_k) * w_{k+1}, k \in [0, n-1] \tag{6}$$

$$p(x) = w_0(x) \tag{7}$$

Dzięki użyciu schematu Hornera możemy przeprowadzić algorytm w jednej pętli iterującej się od $n-1$ do 0 wyznaczając kolejne wartośći wielomianu, dzięki temu złożoność obliczeniowa będzie wynosić $O(n)$ zamiast $O(n^2)$

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

Napisanie funkcji obliczającej współczynniki postacji naturalnej wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona.

3.2 Rozwiązanie

Na wejściu otrzumujemy ilorazy różnicowe c, gdzie c_n jest współczynikiem przy najwyższej potędze x_n wielomianu w postaci naturalnej. Dzięki temu możemy domyślić się, że najlepszym sposobem będzie obliczenianie kolejnych współczyników zaczynając właśnie od tego najwyższego i iterując się w dół, w każdej kolejnej iteracji wykorzystywać wcześniej obliczone wartości stojące przy danej potędze. Przy czym w każdej iteracji musimy cofać się do wcześniej obliczonych współczyników i je aktualizować, przez złożoność algorytmu wynosi $O(n^2)$

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Implementacjia funkcji interpolującej podaną funkcję a danych przedziale przy pomocy wielomianu w postaci Newtona,
Oraz narysuje wielomian oraz funkcję.

4.2 Rozwiązanie

Do rysowania funkcji użyłem pakietu Plots.
Dzięki użyciu napisanych w zadaniu 1 oraz 2 funkcji:
ilorazyRoznicowe oraz warNewton, algorytm wyznacza ilorazy różnocowe oraz wartości.

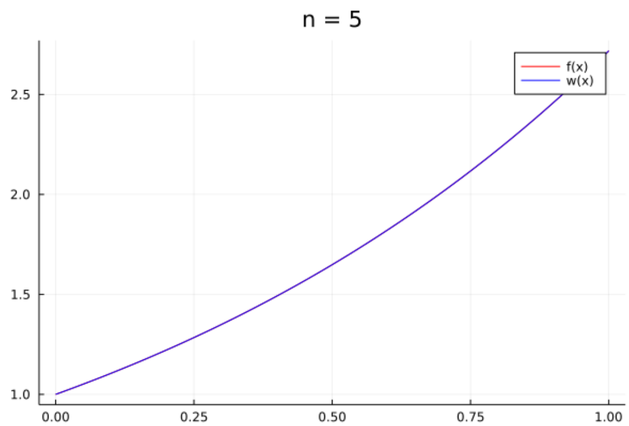
5 Zadanie 5

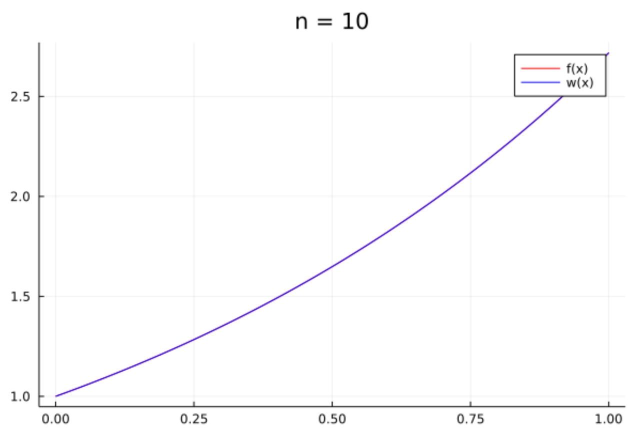
5.1 Opis problemu

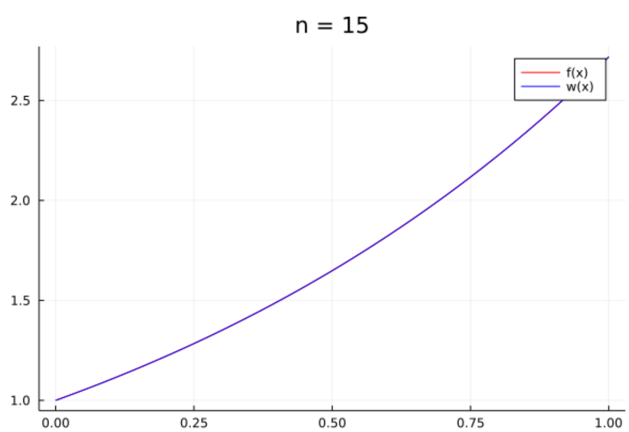
Przetestowanie funkcji z zadania 3 na funkcjach:
$e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15$
$x^2 sinx, [-1, 1], n = 5, 10, 15$

5.2 Wyniki

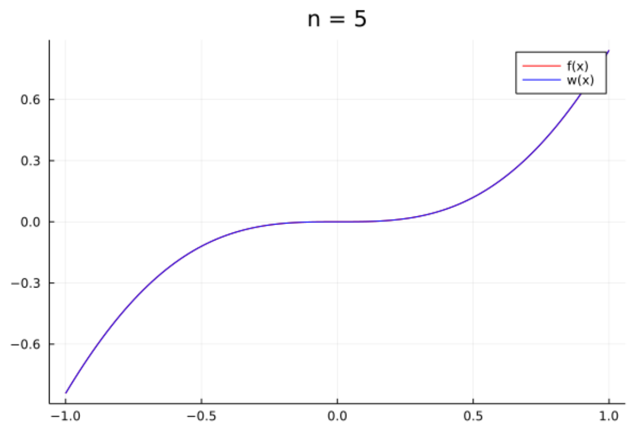
- (a)e^x

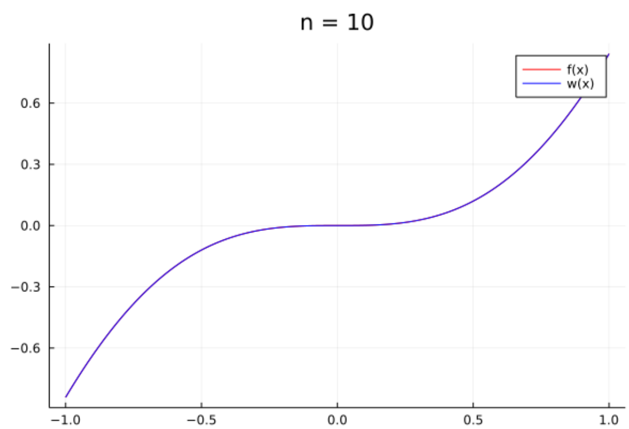


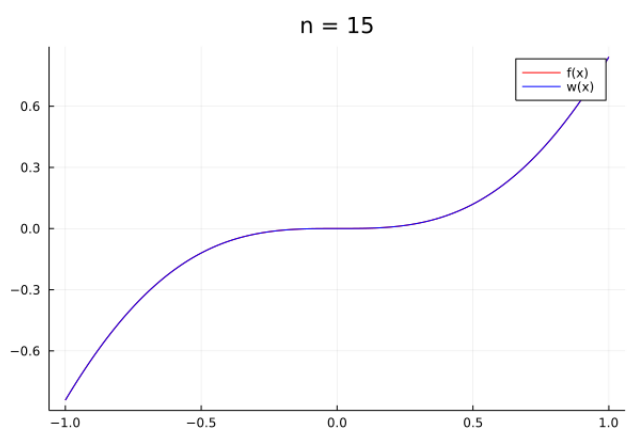




- (b)$x^2 sinx$


n = 5
f(x)
w(x)
0.6
0.3
0.0
−0.3
−0.6
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


n = 10
f(x)
w(x)
0.6
0.3
0.0
−0.3
−0.6
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


n = 15
f(x)
w(x)
0.6
0.3
0.0
−0.3
−0.6
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

5.3 Wnioski

Z wykresów możemy odczytać, praktyczną dokładność wykresów wartośći dla zadanych funkcji, z ich wielomianami interpolacyjnymi. Bardzo dobre przybliżenie wielomianów interpolacyjnych wynika z małej zmiany wartości funkcji oraz braku zmiany znaku pochodnej na danym przedziale.

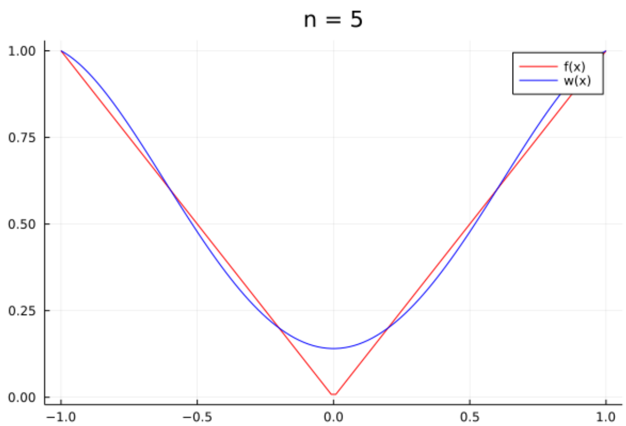
6 Zadanie 6

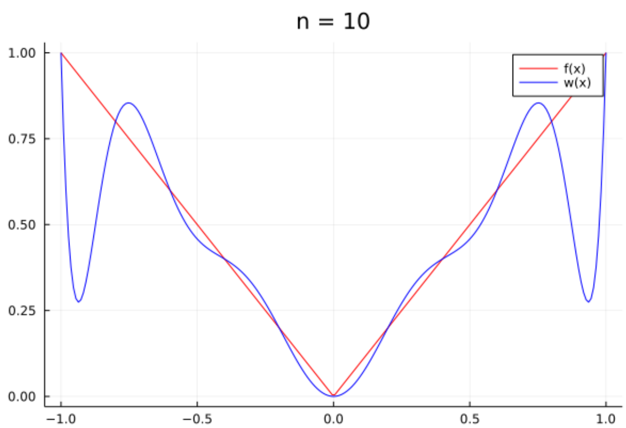
6.1 Opis problemu

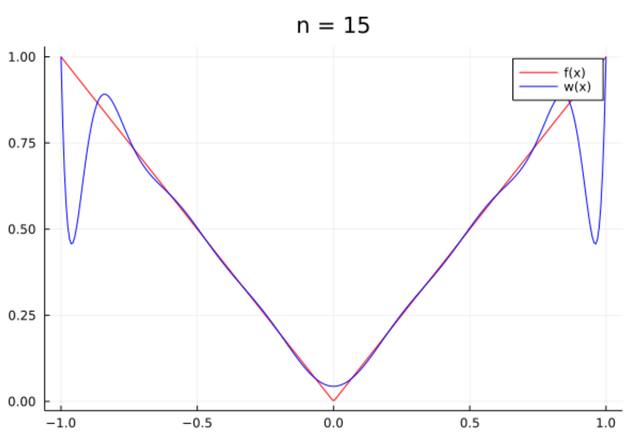
Przetestowanie funkcji z zadania 3 na funkcjach:
$|x|, [-1, 1], n = 5, 10, 15$
$\frac{1}{1+x^2}, [-5, 5], n = 5, 10, 15$

6.2 Wyniki

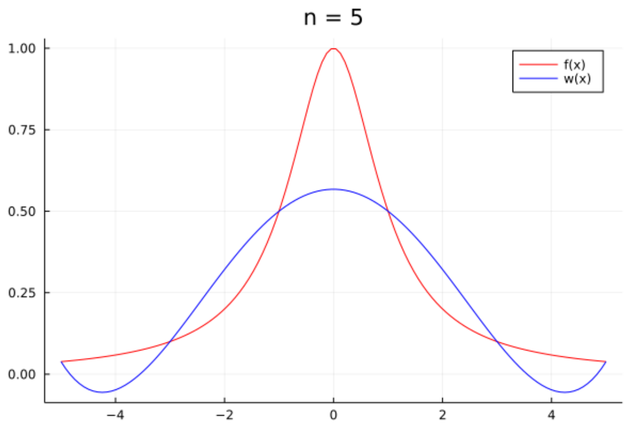
- (a)$|x|$

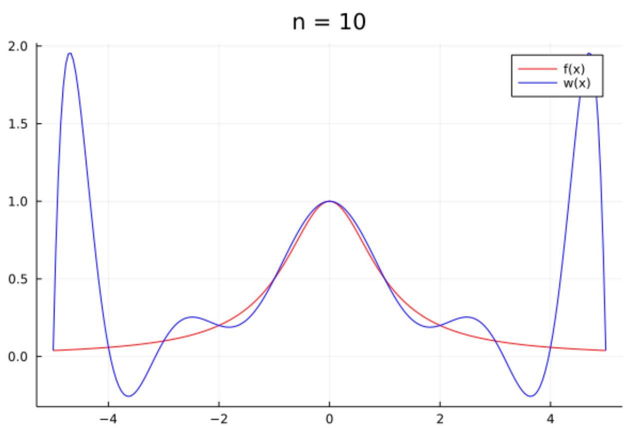

n = 5
f(x)
w(x)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

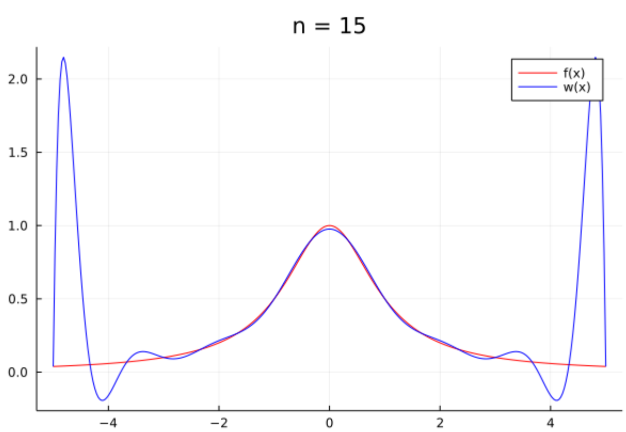

n = 10
f(x)
w(x)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


n = 15
f(x)
w(x)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

- (b) $\frac{1}{1+x^2}$


n = 5
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−4
−2
0
2
4
f(x)
w(x)


n = 10
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−4
−2
0
2
4
f(x)
w(x)


n = 15
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−4
−2
0
2
4
f(x)
w(x)

6.3 Wnioski

W odróżnieniu od poprzedniego zadania narysowane funkcje odbiegają znacznie od siebie.
Wynika to z wiekszej różnicy wartości funkcji oraz ze zmiany znaku pochodnej obu funkcji na zadanym przedziale. Co widać szczególnie na środku zadanych przedziałów gdzie powstaje zaokrąglenie interpolowanej funkcji. Możemy także zauważyć widoczny spadek precyzji przybliżenia przy krańcach przedziału gdy zachodzi wzrost stopnia wielomianu interpolacyjnego, co jest spowodowane dużymi wartościami czynników z wysokimi potęgami.Jest to tak zwany efekt Runge'go, by mu zapobiec należy zaniechać równego rozkładu wezłów i gęstrze ich ułożenie przy końcach przedziałów.