Obliczenia Naukowe - Lista 2

Szymon Brzeziński

2 kwietnia 2022

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

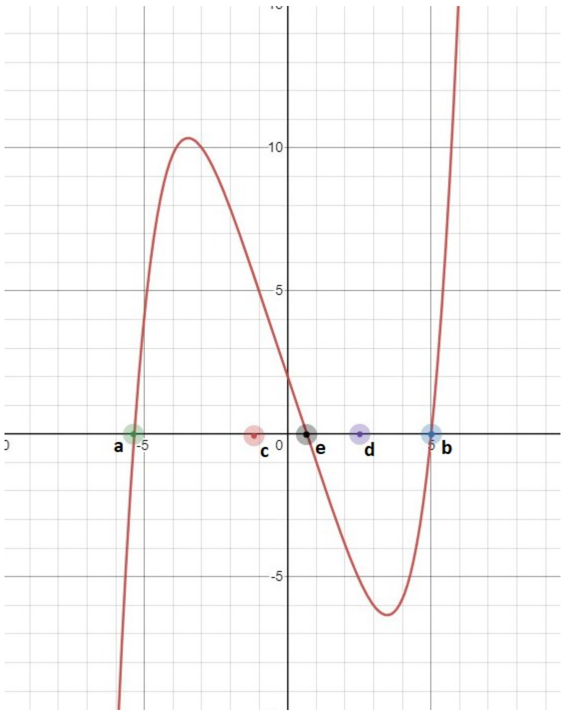
Napisanie funkcji rozwiązującą równanie $F(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2 Rozwiązanie

Algorytm znajdujuję pierwiastki funkcji jednowymiarowych,
to znaczy znajduje takiego $x \in [a, b]$, że $F(x) = 0$.

Podstawą algorytmu jest twierzenie Darboux:
Jeśli F jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz jeśli $F(a) * F(b) < 0$, to istnieje takie $c \in [a, b]$ dla którego $F(c) = 0$.

Ogólną ideą algorytmu jest zmiejszanie przedziału $[a, b]$ do momentu znalezienia rozwiązania.



Przedział $[a, b]$ jest przedziałem początkowym,
kolejnymi przedziałami są $[c, b], [c, d]$
środkiem przedziału $[c, d]$ jest punkt e, natomiast $F(e) = 0$

Danymi wejściowymi do naszej funkcji są:

- F - zadana funkcja
- a, b - końce przedziału początkowego
- δ, ϵ - dokładność obliczeń

Pierwszym krokiem jest sprawdzenie czy $F(a)$ i $F(b)$ mają różne znaki,
muszą być one różne, ponieważ warunkiem znaleznienia rozwiązania
z twierdzenia jest $F(a) * F(b) < 0$.
Jeśli znaki są różne możemy przejść do kolejnych kroków:

1. Ustalamy zmienną e równe $b - a$
2. Tworzymy pętlę z której wyjściem, będzie znalezielnie rozwiązania,
   w każdej iteracji:

- Dzielimy wartość zmiennej e na pół,
- Ustalamy zmienną $c = a + e$
- Jeśli $|e| < \delta$ zwracamy wyniki
- Jeśli $|F(c)| < \epsilon$ zwracamy wyniki
- Jeśli znaki przy $F(c)$ i $F(a)$ są różne
  za b podstawiamy c
- Jeśli znaki przy $F(c)$ i $F(a)$ są takie same:
  za a podstawiamy c

1.3 Wnioski

Prosta do implementacji metoda znajdowania pierwiastków funkcji.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

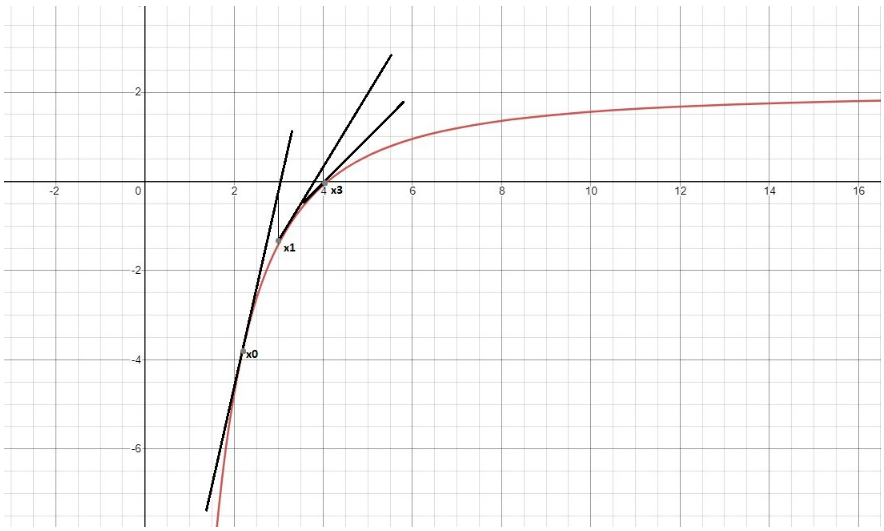
Napisanie funkcji rozwiązującą równanie $F(x) = 0$ metodą Newtona.

2.2 Rozwiązanie

Metoda Newtona(metoda stycznych), jest metodą znajdującą pierwiastek funkcji jednowymiarowych F, poprzez wyliczenie punktu przecięcia stycznych do F z osią OX, a następnie wyliczanie kolejnych puntków przeciecią stycznych do F z poprzednim wyliczonym punktem, aż do znalezienia pierwiastka.
Warunki użycia:

- $F(a)$ i $F(b)$ mają różne znaki, gdzie a, b są końcami badanego przedziału
- $F'(x)$ oraz $F''(x)$ są ciągłe i nie zmieniają znaku w przedziale $[a, b]$
- Istnieje tylko jedno $c \in [a, b]$ takie, że $F(c) = 0$

Prosta wizualizacja przykładu użycia algorytmu:



Algorytm, gdzie $x_0 \in [a, b]$ jest punktem początkowym:

1. Znalezienie stycznej do $x_0 \in [a, b]$
2. Wybranie x_1 jako punktu przecięcia się stycznej z osią OX
3. Powtórzenie algorytmu dla x_1, do momentu znalezienia $x_n \in [a, b]$ takiego, że $F(x_n) = 0$

Liczenie punktu przecięcia x_1, stycznej do funkcji F w punkcie x_0 z osią OX:

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \tag{1}$$

2.3 Wnioski

Minusem tej metody jest konieczność znania pochodnej funkcji

3 Zadanie3

3.1 Opis problemu

Napisanie funkcji rozwiązującą równanie $F(x) = 0$ metodą siecznych.

3.2 Rozwiązanie

Metoda siecznych, jest metodą znajdującą pierwiastek funkcji jednowymiarowych F, poprzez wyliczenie siecznych funkcji F z osią OX, by wykorzystując odciętą tych punktów wyznaczyć kolejne sieczne, aż do znalezienia rozwiązania.

Warunki użycia:

- $F \in C^2[a, b]$
- $F'(r) \neq 0$ (r jest pierwiastkiem jednokrotnym)

Algorytm, gdzie x_n i $x_{n-1} \in [a, b]$ to wybrane wartości początkowe

1. Aproksymujemy $F'(x_n) \approx \frac{F(x_n)-F(x_{n-1})}{x_n-x_{x-1}}$
2. Liczymy $x_{x+1} = x_n - F(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{F(x_n)-F(x_{n-1})}$
3. Powtarzamy poprzednie poprzednie kroki dla nowych x_n i x_{n-1}, do momentu: $|x_{n-1} - x_n| \leqslant \delta$ lub $|F(x_{n+1}| \leqslant \epsilon$, gdzie δ, ϵ - dokładność obliczeń

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Wyznaczenie pierwastka równiania:

$$sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0 \tag{2}$$

Przy użyciu metod: bisekcji, Newtona oraz siecznych

4.2 Wyniki

	Przybliżenie pierwiastka r	wartość f(r)	liczba wykonanych iteracji
Metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
Metoda Newtonaa	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4
Metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

4.3 Wnioski

Każdy algorytm zwrócił poprawne, i bardzo podobne do siebie przybliżenie pierwiastka r.
Ilość wykonanych iteracji dla metod Newtona i siecznych jest równa, natomiast dla metody bisekcji ich ilość jest 4-krotnie większa a obliczone pierwiastki są bliższe temu rzeczywistemu. Jednak w metodzie bisekcji piewiastek został obliczonyczony z najwiekszą dokładnością w stosunku do zadanego przybliżenia. Uzyskane wyniki zależą od współczynnika zieżności α, równego odpowiednio 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 2 dla metod bisekcji, Newtona, siecznych.

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

Znalezienie wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji: $y = 3x$ i $y = e^x$

5.2 Rozwiązanie

W celu znalezienia punktu przecięcia musimy obliczyć miejsca zerowe funkcji: $F(x) = e^x - 3x$
Według programowi WolframAlpha szukanie miejsca zerowe to:
$x_1 \approx 0.619061$ oraz $x_2 \approx 1.51213$.
Wykorzystując te wiedze można ustalić przedziały w naszych funkcja na

	a	b	Przybliżenie pierwiastka r	wartość f(r)	liczba wykonanych iteracji
Metoda bisekcji	0	1	0.619140625	-9.066320343276146e-5	9
Metoda bisekcji	1	2	1.5120849609375	-7.618578602741621e-5	13

Uzyskane wyniki są zbieżne do tych do z programu WolframAlpha więc metoda bisekcji zwróciła dobry wyniki przy poprawnie dobranych przedziałach.

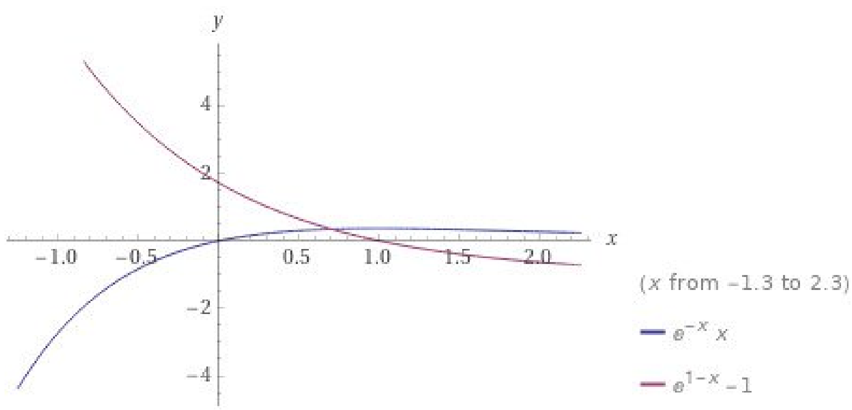
6 Zadanie 5

6.1 Opis problemu

Znalezienie miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$, za pomocą metod bisekcji, Newtona oraz siecznych.
Należy także sprawdzić co się stanie gdy w metodzie Newtona dla f_1 wybierzemy $x_0 \in (1, \infty]$, a dla f_2 $x_o > 1$, oraz odpowiedzięć na pytanie czy można wybrać $x_0 = 1$ dla f_2.

6.2 Rozwiązanie

W celu dobrania odpowiednich parametrów do funkcji, ponownie użyłem programu WolframAlpha do wizualizacji funkcji f_1 oraz f_2



6.3 Wyniki

		Metoda Bisekcji		
Funckja	Parametry	Przybliżenie pierwiastka r	Wartość f(r)	Liczba wykonanych iteracji
f_1	a = -100, b = 100	0.9999990463256836	9.536747711536009e-7	23
f_1	a = 0.5, b = 2	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16
f_1	a = -2, b = 2	1.0	0.0	2

		Metoda Bisekcji		
Funckja	Parametry	Przybliżenie pierwiastka r	Wartość f(r)	Liczba wykonanych iteracji
f_2	a = -20 b = 200	90.0	7.374611361591463e-38	1
f_2	a = -5, b = 5	0	0	1
f_2	a = -1, b = 1	0	0.0	1

Jak widać nawet dla dużej przedziału, metoda bisekcji znajduję rozwiązanie. Wartym zauważyć, że dla źle podanego przedziału, który nie zawiera poprawnego pierwiastka, metoda zwraca poprawny wynik z daną dokładnością.
Dla dobrze dobranego przedziału, w którym wynik znajduję się mniej więcej w połowe, metoda zwraca wynik w pierwszych iteracjach.
Dla funkcji f_2, metoda w przypadku większych przedziałów zwraca niepoprawnę przybliżenie w 1 iteracji i kończy działanie.

		Metoda Newtona		
Funckja	Parametry	Przybliżenie pierwiastka r	Wartość f(r)	Liczba wykonanych iteracji
f_1	x_0 = -1.0	0.9999922654776594	7.734552252003368e-6	5
f_1	x_0 = 0.9	0.999999999931772	6.822808984452422e-11	3
f_1	x_0 = 5.0	0.9999996427095682	3.572904956339329e-7	54

		Metoda Newtona		
Funckja	Parametry	Przybliżenie pierwiastka r	Wartość f(r)	Liczba wykonanych iteracji
f_2	x_0 = -1.0	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5
f_2	x_0 = 0.1	-6.707074105306854e-9	-6.7070741502916976e-9	3
f_2	x_0 = 5.0	15.194283983439147	3.827247505782993e-6	9

Dla przybliżeń początkowych bliskich faktycznemu miejscu zerowemu metoda znajduję wyniki w kilku iteracjach, natomiast gorsze przybliżenie początkowe powoduję drastyczny wzrost liczby iteracji.

		Metoda Siecznych		
Funckja	Parametry	Przybliżenie pierwiastka r	Wartość f(r)	Liczba wykonanych iteracji
f_1	x_0 = -2, x_1 = 2	1.0000000080618678	-8.061867839970205e-9	8
f_1	x_0 = -0.5, x_1 = 1.5	0.9999964138056234	3.5862008069820206e-6	5
f_1	x_0 = -0.9, x_1 = 1.1	1.0000002015040548	-2.0150403445828857e-7	4
f_1	x_0 = -5, x_1 = 5	4.975665372740593	-0.9812331895845449	3

		Metoda Siecznych		
Funckja	Parametry	Przybliżenie pierwiastka r	Wartość f(r)	Liczba wykonanych iteracji
f_2	x_0 = -2, $x_1 = 2$	14.294924723787231	8.85064549833867e-6	15
f_2	x_0 = -0.5, $x_1 = 1.5$	14.75097215511155	5.788350668027595e-6	12
f_2	x_0 = -0.1, $x_1 = 0.1$	1.1114156192137446e-8	1.1114156068612979e-8	4
f_2	x_0 = -5, $x_1 = 5$	14.70482129398244	6.04278309521908e-6	13

Metoda Siecznych dla początkowych przybliżeń odpowiednio odległych od wartości rozwiązania, zwraca niepoprawne przybliżenie pierwiastka.

		Metoda Newtona			
Funckja	Parametry	Przybliżenie pierwiastka r	Wartość f(r)	Liczba wykonanych iteracji	Kod błędu
f_1	$x_0 = 1.1$	0.99999999991094	8.906009263398573e-11	3	0
f_1	$x_0 = 2.0$	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
f_1	$x_0 = 4.0$	0.9999999995278234	4.721767421500545e-10	21	0
f_1	$x_0 = 8.0$	-	-	5	1
f_1	$x_0 = 16.0$	16.0	-0.9999996940976795	0	2

Dla metody Newtona dla funkcji f_1 wybranie $x_0 \in (1, \infty]$, powoduje wzrost liczby potrzebnych iteracji, w przypadku większych wartości zwracane są błędy.

		Metoda Newtona			
Funckja	Parametry	Przybliżenie pierwiastka r	Wartość f(r)	Liczba wykonanych iteracji	Kod błędu
f_2	$x_0 = 1.1$	14.272123938290509	9.040322779745447e-6	3	0
f_2	$x_0 = 1.0$	1.0	0.36787944117144233	0	2

Dla metody Newtona dla funkcji f_2 wybranie $x_0 > 1$, powoduje poprzez zmiejszenie dokładności przybliżenia pierwiastka, zwrócenie niepoprawnej wartości.
Natomiast wybranie $x_0 = 1$ powoduję zakończenie programu i zwrócenie błędu, dzieje się tak ponieważ pochodna funkcji ma wartość bliską 0.

6.4 Wnioski

Metoda bisekcji, jest zbieżna globalnie, zwraca poprawne wyniki nawet dla dużych i niepoprawnych przedziałów, natomiast jej zbieżność jest gorsza zbieżnośći lokalych z metod stycznych(zbieżność kwadratowa) i siecznych(zbieżność liniowa). Dobrym pomysłem mogło by połączenie metod, początkowo szukanie lepszego przedziału metodą bisekcji, następnie użycie metod Newtona lub siecznych.