1. Calcular, siempre que exista, la integral doble $I(f,\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dx\,dy$ en el recinto $\mathcal{R}\subset\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}$. Graficar el recinto $\mathcal{R}$ en el que se integra y calcular su área $a\,(\mathcal{R})$. Determinar, además, el valor medio $\mu(f,\mathcal{R}) = \frac{\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dx\,dy}{\iint_{\mathcal{R}} dx\,dy}$ del campo escalar en el recinto[1].

a. $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,2], f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y) = 3x^2 + 2y$ ⓘ⊶ $I(f,\mathcal{R}) = 6,\ a\,(\mathcal{R}) = 2,\ \mu(f,\mathcal{R}) = 3$

b. $\mathcal{R} = [0,1]\times[1,2], f\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y) = 2\,(x+2y)^{-1}$ ⓘ⊶ $I(f,\mathcal{R}) = 5\ln 5 - 3\ln 12$

c. $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,3], f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y) = 0\ si\ x\in\mathbb{Q}\,, 1\ en\ todo\ otro\ caso$ ⓘ⊶ $\nexists I(f,\mathcal{R})$

d. $\mathcal{R}$ es la región acotada del plano comprendida entre las curvas de ecuación $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2,\ f\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}/\ f(x,y) = 4\frac{x^2}{y^2}$ ⓘ⊶ $I(f,\mathcal{R}) = 9, a\,(\mathcal{R}) = \frac{3}{2}-\ln 2$

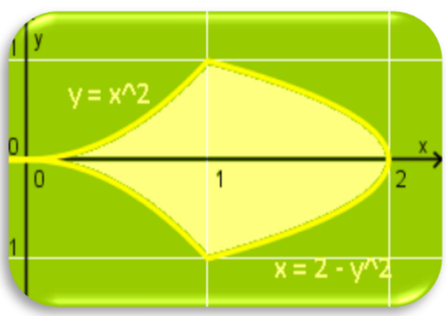
e. $\mathcal{R}$ es la región acotada del plano definida por la imagen de $\bar{\gamma}\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2\ tal\ que\ \bar{\gamma}(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$, siendo $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/\ f(x,y) = 1$ ⓘ⊶ $I(f,\mathcal{R}) = 6\pi = a\,(\mathcal{R})$

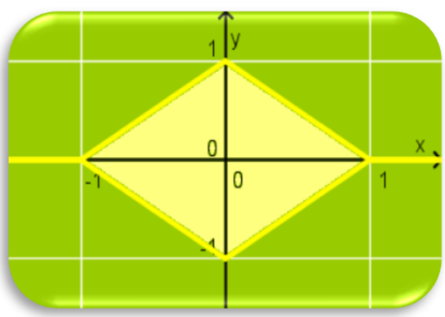
f. $\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon |x|+|y|\le 1\},\ f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ tal\ que f(x,y) = x^{24}y + y^{36}x$ ⓘ⊶ $I(f,\mathcal{R}) = 0, a\,(\mathcal{R}) = 2$

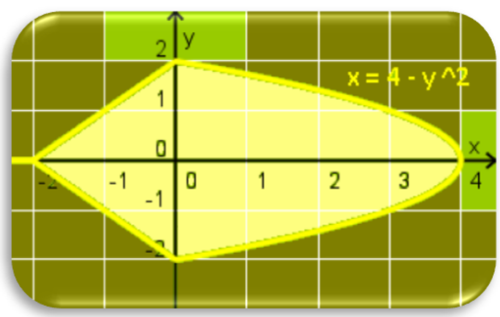
g. $\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \sqrt{|y|}\le x\le 2-y^2\right\},\ f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ tal\ que f(x,y) = k$ ⓘ⊶ $I(f,\mathcal{R}) = \frac{7}{3}k, a\,(\mathcal{R}) = \frac{7}{3}$

h. $\mathcal{R}$ es la región acotada del plano definida por las imágenes de las funciones $\bar{\gamma}\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}^2\ tal\ que\ \bar{\gamma}(t) = (2\cos(t), 2-2\cos(t))$, $\bar{h}\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2\ tal\ que\ \bar{h}(t) = (2-4\,t, 0), \bar{w}\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2\ tal\ que\ \bar{w}(t) = (-2, 4\,t)$ siendo $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y) = -3x$ ⓘ⊶ $I(f,\mathcal{R}) = 16,\ a\,(\mathcal{R}) = 8$

i. $\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon -2+|y|\le x\le 4-y^2\},\ f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ tal\ que f(x,y) = \begin{cases} y, si\ y\le 0\\ 1, si\ y>0\end{cases}$







ⓘ⊶ $I(f,\mathcal{R}) = 2, a\,(\mathcal{R}) = 44/3$. Los gráficos mostrados se corresponden con algunos recintos $\mathcal{R}$

2. Agrupar el siguiente listado de integrales de a pares, de modo tal que para cualquier función f integrable en el recinto $\mathcal{R}$, una resulte de cambiar el orden de integración en la otra. Graficar $\mathcal{R}$ y determinar, además, su área.

a. $\int_0^1\int_{x-1}^{-x^2+2} f(x,y)dydx$

[1] Si, por ejemplo, la función f representa una densidad superficial, el valor medio en la lámina $\mathcal{R}$ es la densidad media. Una lámina $\mathcal{R}$ homogénea de densidad igual a la densidad media, tiene la misma masa que la lámina original de densidad variable dada por la función f.

b. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{|y|} f(x,y)dxdy$

c. $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{-x} f(x,y)dydx + \int_{0}^{1}\int_{x}^{1} f(x,y)dydx$

d. $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{y+1} f(x,y)dxdy + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} f(x,y)dxdy + \int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dxdy$

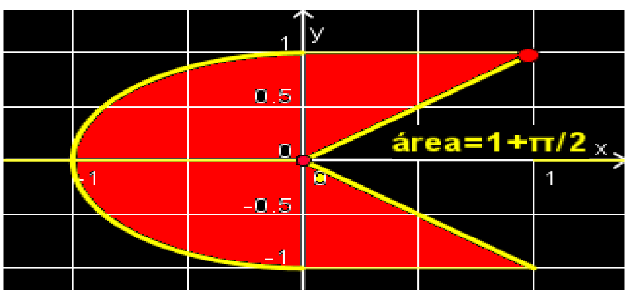
e. $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{(x+1)^2} f(x,y)dydx + \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{e^{-x}} f(x,y)dydx$

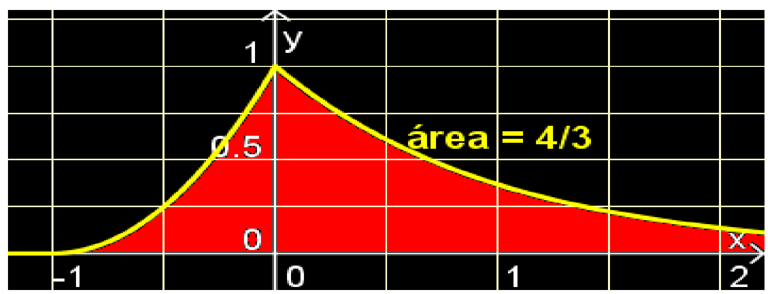
f. $\int_{0}^{1}\int_{-1+\sqrt{y}}^{-\ln y} f(x,y)dxdy$

g. $\int_{0}^{1}\int_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$

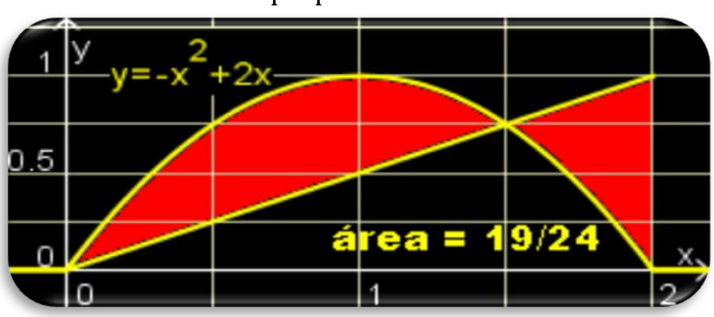
h. $\int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{-y^2-2y}}^{1} f(x,y)dxdy + \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{-y^2+2y}}^{1} f(x,y)dxdy$

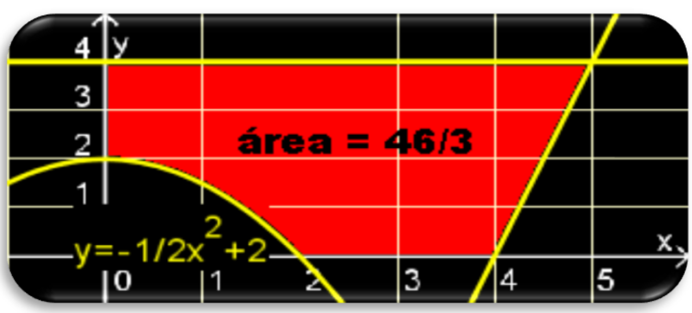
ⓘ🔑 (a, d, área($\mathcal{R}$)=13/6), (b, c, área($\mathcal{R}$)=1+π/2), (e, f, área($\mathcal{R}$)=4/3), (g, h, área($\mathcal{R}$)=2−π/2); dos gráficos:

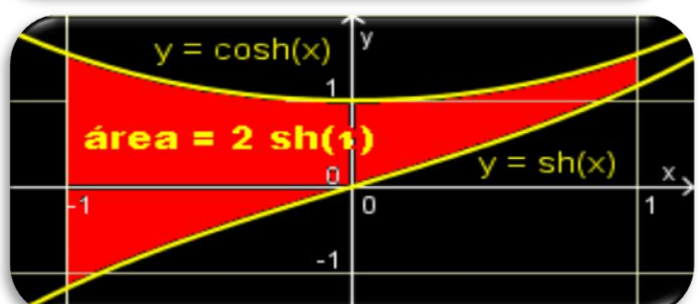


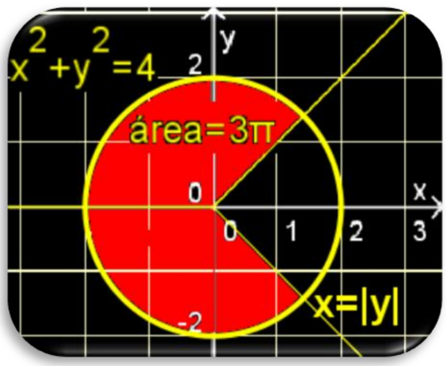


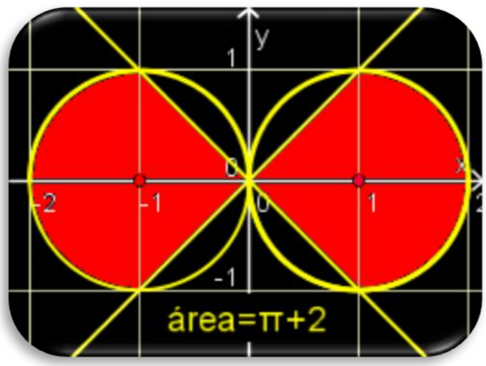
3. Para cada uno de los recintos, verificar el valor indicado de su área, planteando las integrales dobles en las coordenadas más apropiadas.

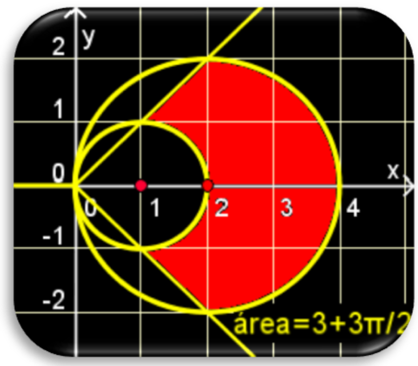












4. Graficar el macizo $\mathcal{M}$ y calcular su volumen V($\mathcal{M}$), mediante integrales dobles, adoptando el sistema de coordenadas más conveniente (se presentan algunos gráficos que ilustran algunos de los sólidos $\mathcal{M}$).

a. $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - x - y, x \ge 0, y \ge 0\}$. V($\mathcal{M}$)= 16/3

b. $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2 - y^2,\ \ 0 \le x \le 1\}$. V($\mathcal{M}$)= 1/3

c. $\mathcal{M}$ es el conjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ por encima del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = z$ y por debajo del plano de ecuación $z = 4$ V($\mathcal{M}$)= 8π

d. $\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le h - \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}, con\ a > 0, h > 0\right\}$ V($\mathcal{M}$)= $\frac{1}{3}\pi a^2 h$

e. $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ \ h > 0, a > 0\right\}$ V($\mathcal{M}$)= $\frac{\pi}{3}(h + 2a)a^2$

f. $\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ 1 \le x^2 + y^2\right\}$ V($\mathcal{M}$)= $\frac{54\pi}{3}$

g. $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le y, x^2 + y^2 \le 2ay, a > 0\}$ V($\mathcal{M}$)= πa^3

h. $\mathcal{M}$ es el conjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ entre los planos de ecuaciones $z = 3,\ z = 0$ y por debajo del cono de ecuación $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ V($\mathcal{M}$)= $\frac{63\pi}{3}$

i. $\mathcal{M}$ es el conjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ por encima del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = z$ y por debajo del cono de ecuación $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ V($\mathcal{M}$)= $\frac{32\pi}{3}$

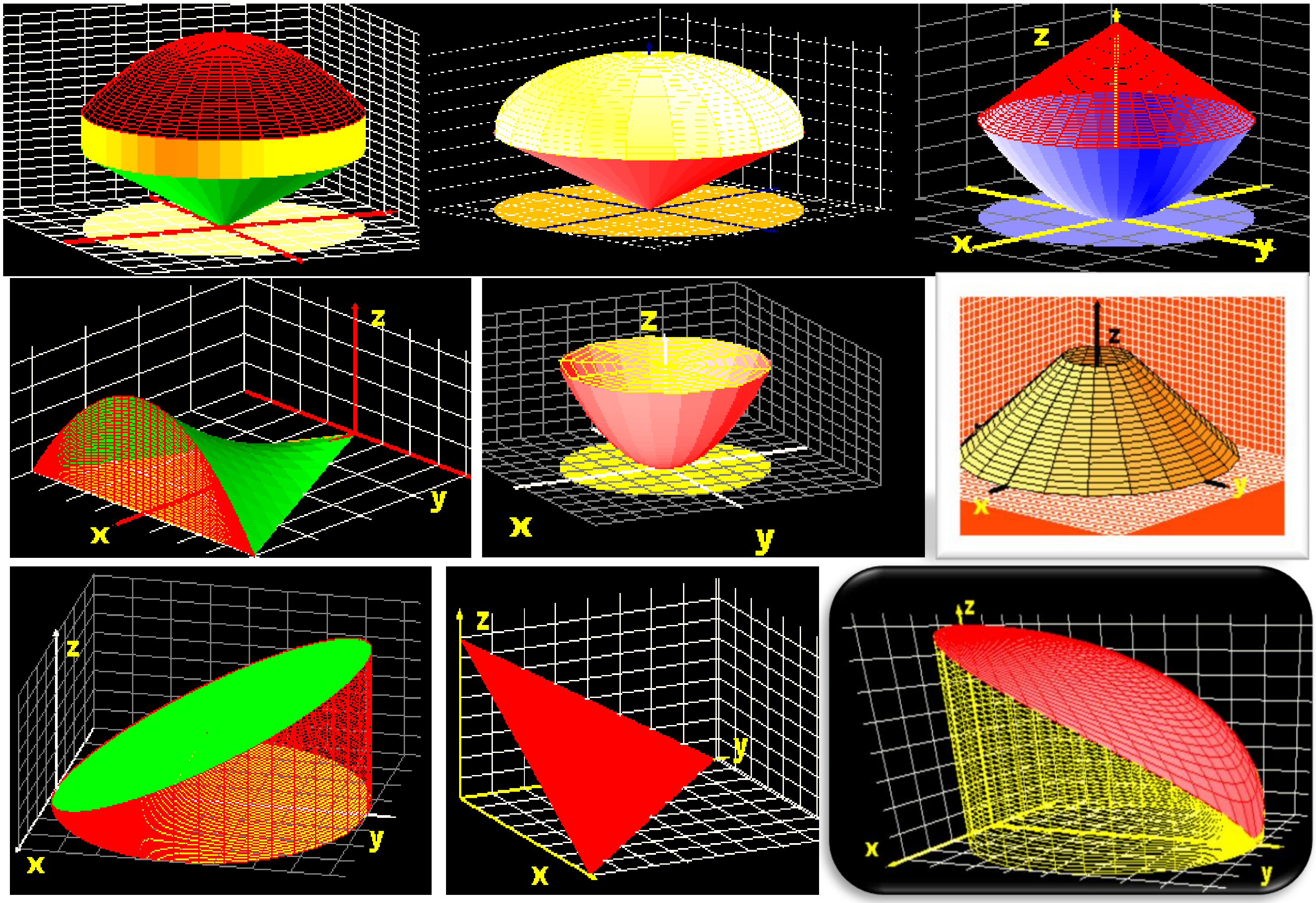
j. $\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 7 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le 4\right\}$ V($\mathcal{M}$)= $\frac{44\pi}{3}$

k. $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z, x^2 + y^2 + z^2 \le a^2,\ x^2 + y^2 \le ay, a > 0\}$ V($\mathcal{M}$)= $\frac{2}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})a^3$

l. $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z,\ 0 \le x,\ 0 \le y, x^2 + y^2 \le a^2,\ x^2 + z^2 \le a^2, a > 0\}$ V($\mathcal{M}$)= $\frac{2}{3}a^3$

m. Puntos del primer octante interior al cilindro $x^2 + z^2 = 4$ tales que $x + y \le 4$ V($\mathcal{M}$)=4π–8/3

n. Puntos del primer octante interiores a los cilindros de ecuaciones $x^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 9$, e interiores a la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 345$ V($\mathcal{M}$)=18



5. Para cada uno de los macizos $\mathcal{M}$ del ejercicio anterior, plantear la integral triple que permite obtener su volumen V($\mathcal{M}$), en las coordenadas más convenientes.

$(a)\int_0^4\int_0^{4-x}\int_0^{4-x-y} dzdydx,$ $(b)\int_0^1\int_{-x}^{x}\int_0^{x^2-y^2} dzdydx,$ $(c)\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} rdzdrd\theta,$ $(d)\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h-\frac{h}{a}r} rdzdrd\theta,$

$(e)\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{\frac{h}{a}r}^{h+\sqrt{a^2-r^2}} rdzdrd\theta,$ $(f)\int_0^{2\pi}\int_1^{4}\int_0^{4-r} rdzdrd\theta,$ $(g)\int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta}\int_0^{r\sin\theta} rdzdrd\theta,$

$(h)\int_0^{2\pi}\int_1^{4}\int_0^{4-r} rdzdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{3} rdzdrd\theta,$ $(i)\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{6-r} rdzdrd\theta,$ $(j)\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r}^{7-r^2} rdzdrd\theta,$

$(k)\int_0^{\pi}\int_0^{a\sin\theta}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} rdzdrd\theta,$ $(l)\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\theta}} rdzdrd\theta$ $(o\ mejor,\ \int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dzdydx\,)$

6. Calcular, siempre que exista, la integral triple $I(f,\mathcal{M}) = \iiint_{\mathcal{M}} f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ en el recinto $\mathcal{M}\subset\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^3$ del campo escalar $f\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}$. Graficar el recinto $\mathcal{M}$ en el que se integra y calcular su volumen V($\mathcal{M}$). Determinar, además, el valor medio $\mu(f,\mathcal{M}) = \dfrac{\iiint_{\mathcal{M}} f(x,y,z)dx\ dy\ dz}{\iiint_{\mathcal{M}} dx\ dy\ dz}$ del campo escalar en el recinto.

a. $\mathcal{M} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 2-y, x^2+\ z^2\le 4, y\ge 0, z\ge 0\}, f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y,z)=3$
$I(f,\mathcal{M}) = 6\pi - 8,\ \mathrm{V}(\mathcal{M}) = 2\pi - 8/3,\ \mu(f,\mathcal{M}) = 3$

b. $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, y \ge 0\}, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y,z) = x + z$
$I(f,\mathcal{M}) = 0,\ \mathrm{V}(\mathcal{M}) = \frac{2}{3}\pi a^3,\ \mu(f,\mathcal{M}) = 0$

c. $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z^2 \le x^2 + y^2 \le a^2, a > 0\}, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y,z) = x + y + z + 1$
$I(f,\mathcal{M}) = \frac{4}{3}\pi a^3,\ \mathrm{V}(\mathcal{M}) = \frac{4}{3}\pi a^3,\ \mu(f,\mathcal{M}) = 1$

7. Se presentan algunas aplicaciones de las integrales de superficie en áreas diversas de la ingeniería.

a. *Masa de una lámina plana*. Si δ es la densidad superficial de una lámina $\mathcal{R}$, su masa es $m(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} \delta\, dA$, y su densidad media es el valor medio de δ en $\mathcal{R}$. Determinar la densidad media de una lámina circular centrada en el origen de coordenadas, de radio α, si su densidad es $\delta(x,y) = k(\alpha + x)$. $\mu(\delta,\mathcal{R}) = k\alpha$

b. *Masa de un sólido macizo*. Si δ es la densidad volumétrica de un $\mathcal{M}$, su masa es $m(\mathcal{M}) = \iiint_{\mathcal{M}} \delta\, dV$, y su densidad media es el valor medio de δ en $\mathcal{M}$. Determinar la masa y la densidad media del sólido dado en coordenadas cilíndricas (¡graficarlo!) por $\mathcal{M} = \left\{(\theta, r, z): \frac{\pi}{4} \le \theta \le 3\frac{\pi}{4},\ 1 \le r \le \csc\theta,\ 0 \le z \le 1 - r\sin\theta\right\}$, si la densidad es $\delta(x,y,z) = 6y$. $m(\mathcal{M}) = 1,\ \mu(\delta,\mathcal{M}) = 3$

c. *Momento estático de una lámina plana*. Si δ es la densidad superficial de una lámina $\mathcal{R}$, se definen los dos momentos estáticos respecto de los ejes coordenados $T_x = \iint_{\mathcal{R}} y\delta\, dA, T_y = \iint_{\mathcal{R}} x\delta\, dA$. Determinar los momentos estáticos de la lámina dada en coordenadas polares (¡graficarla!) por $\mathcal{R} = \left\{(r,\theta): -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},\right.$ cos*θ≤r≤2*cos*θ, δ x, y=1x* *Tx=0, Ty=38(π+2)*

d. *Centro de masa de una lámina plana*. Si δ es la densidad superficial de una lámina $\mathcal{R}$, entonces su centro de masas[2] $G_0 = (x_0, y_0)$ se obtiene de $x_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} x\delta\ dS}{\iint_{\mathcal{R}} \delta\ dS}, y_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} y\delta\ dS}{\iint_{\mathcal{R}} \delta\ dS}$. Determinar el centro de masas de la lámina dada por $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2, y > 0, a > 0\}$ con densidad $\delta(x,y) = ky$, siendo k una constante positiva. Graficar la lámina $\mathcal{R}$ y el centro de masas obtenido. $G_0 = \left(0, \frac{3\pi}{16}a\right)$

e. *Centro geométrico de una lámina plana*. Coincide con el baricentro cuando la lámina es homogénea. Es el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, siendo $x_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} x\ dS}{\iint_{\mathcal{R}} dS}, y_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} y\ dS}{\iint_{\mathcal{R}} dS}$. Determinar el centro geométrico de la lámina dada por $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2, y > 0, a > 0\}$. Graficar y comparar con el anterior punto obtenido en el ejercicio anterior y observar que $G_0 \ne P_0$. $P_0 = \left(0, \frac{4}{3\pi}a\right)$

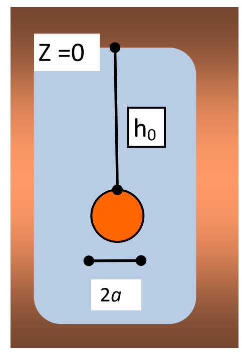
f. *Baricentro de un macizo*. Si δ es la densidad volumétrica de un macizo $\mathcal{M}$, entonces su baricentro es el punto $G_0 = (x_0, y_0, z_0)$ siendo $x_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} x\delta\ dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta\ dV}, y_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} y\delta\ dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta\ dV}, z_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} z\delta\ dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta\ dV}$. Graficar $\mathcal{M}$ y determinar su baricentro, siendo (f1) $\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in R^3 : \frac{h}{a}\sqrt{z^2 + y^2} \le x \le h, h > 0, a > 0\right\}$ con $\delta(x,y,z) = k(y^2 + z^2)$, donde $k$es una constante positiva. (f2) $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + z^2 + y^2 \le a^2, z \ge 0,\ a > 0\}$ con densidad $\delta(x,y,z) = k\,z$, donde $k$es una constante positiva. $(f1)\ G_0 = \left(\frac{5}{6}h, 0, 0\right),\ (f2)\ G_0 = \left(0, 0, \frac{8}{15}h\right)$

[2] También se llama *baricentro*, con el prefijo *bari* del griego barýs (pesado, grave): es la misma construcción que produce *barítono*.

g. *Centro geométrico de un macizo $\mathcal{M}$.* Es $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ siendo $x_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} x\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}} dV}, y_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} y\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}} dV}, z_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} z\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}} dV}$ (coincide con el baricentro si el macizo es homogéneo). Determinar el centro geométrico de los macizos del ejercicio anterior, comparar. $(g1)\ P_0 = \left(\frac{3}{4}h, 0, 0\right),\ (g2)\ P_0 = \left(0, 0, \frac{3}{8}h\right)$

h. *Momentos de Inercia de una lámina plana $\mathcal{R}$.* Para una placa plana $\mathcal{R}$ de densidad superficial δ, se definen los momentos de inercia axiales respecto de los ejes coordenados como $I_x = \iint_{\mathcal{R}} y^2 \delta\, dA, I_y = \iint_{\mathcal{R}} x^2 \delta\, dA$; el momento polar respecto al origen de coordenadas es $I_0 = \iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)\delta\, dA$. Tomando $\delta = 1$ resultan los momentos de inercia geométricos (también se les llaman *de superficie* a éstos y de *masa* a aquéllos). Calcular el momento de inercia I_e de una placa circular homogénea de radio a y masa m, respecto a un eje diametral, y el momento I_0 respecto del centro. $I_e = \frac{1}{4}ma^2, I_0 = \frac{1}{2}ma^2$

i. *Momentos de Inercia de un macizo $\mathcal{M}$.* Para un macizo $\mathcal{M}$ de densidad volumétrica δ, se definen los momentos de inercia axiales $I_x = \iiint_{\mathcal{M}} (y^2 + z^2)\delta\, dV, I_y = \iiint_{\mathcal{M}} (x^2 + z^2)\delta\, dV, I_z = \iiint_{\mathcal{M}} (x^2 + y^2)\delta\, dV$. El momento de inercia polar respecto del origen de coordenadas es $I_0 = \iiint_{\mathcal{M}} (x^2 + y^2 + z^2)\delta\, dV$,. Con $\delta = 1$ resultan los momentos de inercia geométricos (también se les llaman *de volumen* a éstos y de *masa* a aquéllos). (i1) Calcular el momento de inercia I_e de una bola[3] en $\mathbb{R}^3$ homogénea de radio a y masa m, respecto a un eje que pasa por su centro, y respecto del centro. (i2) Calcular el momento de inercia I_z del macizo homogéneo $\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in R^3 : \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h, h > 0, a > 0\right\}$ de masa m, respecto del eje 'z'. $(i1)\ I_e = \frac{2}{5}ma^2,\ (i2) I_z = \frac{3}{10}ma^2$



j. *Empuje hidrostático sobre compuertas*. La compuerta circular $\mathcal{R}$ de radio a de la figura se halla sobre el paramento vertical y está vista de frente. La compuerta obtura un canal de descarga de una presa cuyo pelo de agua se halla en la altura de cota z =0, mientras que el eje de la compuerta se halla en la profundidad de cota $z = -h_0 - a$. La presión relativa del agua en un punto está dada por $p\,(x, y, z) = -\gamma\, z$, siendo γ la densidad del líquido. Determinar la magnitud del empuje total ejercido sobre la compuerta. $E = \pi\gamma(h_0 + a)a^2$

k. *Caudal de aliviadero*. Rehacer el ejercicio anterior considerando una compuerta rectangular de ancho a y altura b. Si ahora se abre la compuerta dejando fluir el agua de la presa, determinar el caudal Q erogado por la abertura, aceptando que la magnitud de la velocidad es $v = \sqrt{-2gz}$, siendo g la aceleración de la gravedad. Obtener además una expresión aproximada para el caudal si, como sucede en la realidad con frecuencia, es $b \ll h_0$. $Q = \frac{2}{3}a\sqrt{2g}\left(\sqrt{(h_0 + b)^3} - \sqrt{h_0^3}\right)$ para la expresión aproximada, desarrollar por Taylor algunos términos de la primera raíz

8. *Probar* las siguientes afirmaciones, detallando las definiciones, resultados o argumentos que se utilicen en los desarrollos de las pruebas.

a. Las coordenadas del centro geométrico de una lámina plana $\mathcal{R}$ o de un macizo $\mathcal{M}$ no son sino el valor medio de las correspondientes funciones coordenadas, en esa lámina o macizo.

[3] El término *bola* designa el conjunto de puntos de un espacio métrico cuya distancia a uno fijo (centro) no supera un número positivo (radio). En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ a veces se designa como 'esfera maciza', término que combina significados contradictorios. En $\mathbb{R}^2$ la *bola* tiene nombre propio (círculo), de modo que jamás se usa el término 'circunferencia rellena'.

b. El momento estático de una lamina respecto de un eje que pasa por su baricentro, es nulo.

c. Si el campo escalar $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es el producto de dos funciones escalares $g: \mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h: \mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $g \in C(\mathcal{D}_1), h \in C(\mathcal{D}_2),\ \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, entonces $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathcal{D}_1} g(x)dx \int_{\mathcal{D}_2} h(y)dy$.

d. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Pista: considerar la función $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, luego aplicar el resultado anterior[4]).

e. Si I_x es el momento de inercia respecto del eje baricéntrico x de una lámina $\mathcal{R}$ de masa m, y x' es un eje paralelo al eje x que se halla a una distancia d, entonces $\mathrm{I}_{x'} = \mathrm{I}_x + m\,\mathrm{d}^2$ (este resultado se conoce como teorema de Steiner[5], y es válido sin la limitación de que se trate de una lámina plana y de la orientación del eje).

f. Si C es una curva plana cerrada que se hace rotar sobre un eje (coplanar a la curva), el volumen del sólido engendrado en una revolución completa es el producto del área encerrada por la curva por la longitud del recorrido de su baricentro (este resultado se conoce como uno de los teoremas de Pappus[6]).

[4] Este es un resultado esencial en el área de Estadística, para normalizar el área bajo la función gaussiana.
[5] En Systematische Entwicklung der Abhangigkeit geometrischer Gestalten voneinander (1832), del geómetra suizo Jakob Steiner.
[6] Pappus (Latinizado nombre de Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς), matemático de la escuela alejandrina, lo expone en el libro VII de su *Synagoge* hacia el 340 dc. También se le llama a veces teorema de Guldin, por el jesuita matemático Paul Guldin que lo redescubrió en el siglo XVII.