1. Calcular la longitud de la curva C en cada uno de los siguientes casos:

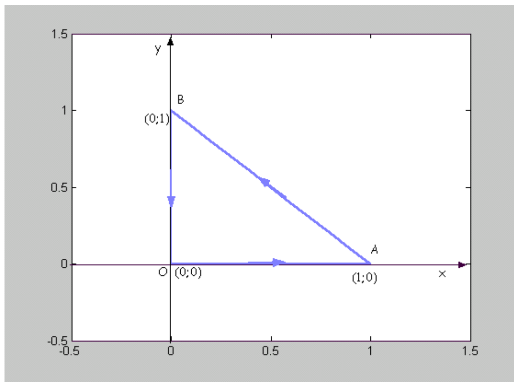
a) $\bar{r}(t) = (2t;\, 3\, sen\, t\, ;\, 3\cos t),\quad a \le t \le b$
$C = \operatorname{Im} \bar{r}$

b) $\bar{r}(t) = \left(6t\, ;\, 3\sqrt{2}\, t^2\, ;\, 2t^3\right),\ \ 0 \le t \le 1$
$C = \operatorname{Im} \bar{r}$

c) $C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$

d) $C: \begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t}\, sen\, t \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

2. Calcular la integral curvilínea $\int_C (x+y)\, dS$ donde la curva C está constituida por los lados del triángulo ABO

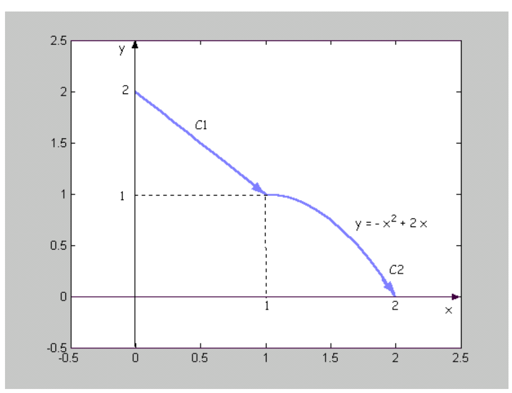


3. Calcular $\int_c xy\, ds$ donde C tiene ecuación $|x| + |y| = 5$

4. Calcular:

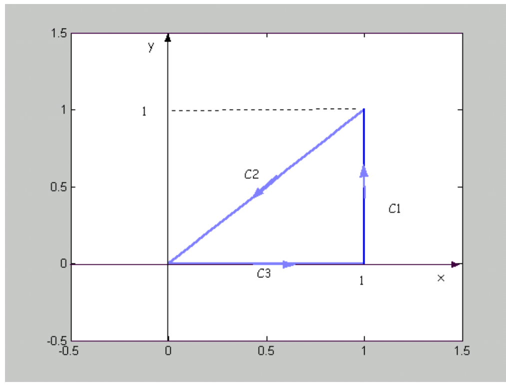
a) $\int_c xy\, dx + x^2 dy$ $\qquad C: y = 2x$, con $0 \le x \le 2$

b) $\int_c x^2 y\, dx + y^2\, dy$
$C = C_1 \cup C_2$

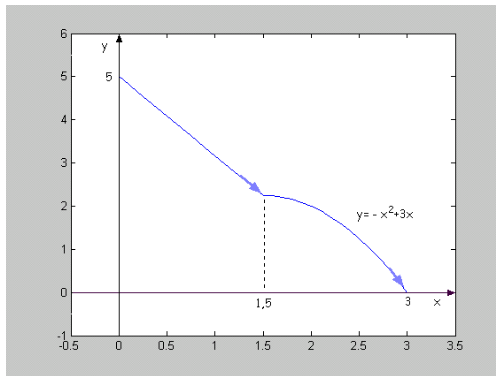


c) $\int_c xy^2\,dx + 2x\,dy$

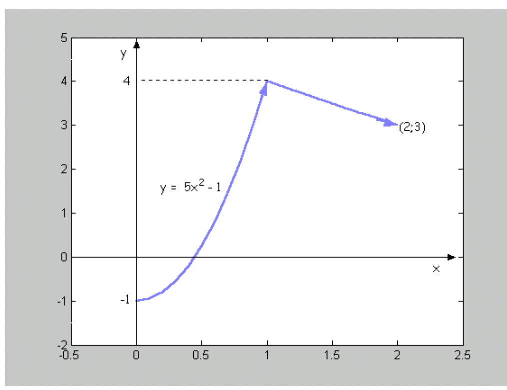
$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$



d) $\int_{(0;5)}^{(3;0)} (3x^2 + x^3 y)e^{xy}dx + x^4 e^{xy}dy$



e) $\int_{(0;-1)}^{(2;3)} e^x y^3 dx + 3y^2 e^x dy$



Para resolver d) y e) ¿Se puede elegir otro camino? ¿Cuál sería el más conveniente?

5. Calcular las siguientes integrales curvilíneas a lo largo de los caminos indicados, graficándolos en cada caso:

a) $\int_c (x^2y + 2x)dx - (x + y)dy$

$$C = C_1 \cup C_2 \quad \text{con } C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \,;\, 0 \le t \le 1 \end{cases} \quad ; \quad C_2: \begin{cases} x = t \\ y = t;\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

b) $\int_c (e^x + 2xye^{x^2y})dx + x^2e^{yx^2}dy$

i) $C: y = x^3 \ (-1 \le x \le 1)$

ii) $C: y = x;\ |x| \le 1$

c) $\int_c (y + 1)dx + (x - 1)dy$

$$C \begin{cases} x = sen\, t \\ y = cos\, t \quad (\pi \le t \le 2\pi) \end{cases}$$

d) $\int_c (2x + y)\, dx + (2y + x)dy$

$$C: \begin{cases} x = sen\, t \\ y = 2cos\, t;\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

e) $\int_c (xz - y)dx + (x^2y + z^3)dy + (3xz^2 - xy)dz$

$$C: \begin{cases} x = cost \\ y = sent \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = t \end{cases}$$

Recordar

- $sen^2 t + cos^2 t = 1$
- $cos\, 2t = cos^2 t - sen^2 t$
- $sen\, 2t = 2\, cos\, t.\, sen\, t$
- $sen^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$
- $cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$

6. Calcular las siguientes integrales curvilíneas a lo largo de los caminos cerrados correspondientes y graficarlos:

a) $\int_c (2xy + x^2)dx + x^2\,dy$

$$C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2sen\,t \end{cases} \quad ; 0 \le t \le 2\pi$$

b) $\int_c (2z^2y + 2xy^2 - 4y - 27x^2z)dx + (2xz^2 + 2x^2y - 4x)dy + (4z^3 + 4zxy - 9x^3)dz$

$$C: \begin{cases} x = 5 \\ y = \cos t; \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = sen\,t \end{cases}$$

7. Calcular la integral curvilínea $\int_c 2xyz^5 dx + 2yzx\,dy + xy\,dz$ a lo largo de los siguientes caminos cerrados:

a) curva de ecuación $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ (sentido positivo)

b) curva de ecuación $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ (sentido positivo)

8. Para los siguientes campos vectoriales $\bar{F}$ determinar , de ser posible, un campo escalar F tal que grad F = $\bar{F}$.

a) $\bar{F}(x;y) = x\,e^x\,\breve{i} + (1 + \cos y)\breve{j}$

b) $\bar{F}(x;y) = (seny + 2xy)\breve{i} + (x\cos y + x^2)\breve{j}$

c) $\bar{F}(x;y) = \dfrac{1}{x-1}\breve{i} + (y^2 + 2)\breve{j}$ tal que F(2;1) = 0

d) $\bar{F}(x;y) = (y^2 + x)\breve{i} + (2xy + y)\breve{j}$ tal que F tenga nivel 3 en (1;-5)

9. Calcular la integral curvilínea $\int_c 2xyz\,dx + (x^2z + y)dy + (x^2y + 3z^2)dz$ entre los puntos (0;0;0) y (1;1;1) a lo largo de los siguientes caminos:

a) quebrada de vértices (0;0;0); (1;1;0); (1;1;1)

b) quebrada de vértices (0;0;0); (1;0;0); (1;1;1)

c) $C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2; \; 0 \le t \le 1 \\ z = t^3 \end{cases}$

Comparar los resultados obtenidos en a), b) y c). ¿Qué se observa? ¿Cómo puede justificarse?

10. ¿Es exacta la forma diferencial $\left(2x+\frac{5}{3}y+2\right)dx+\left(\frac{5}{3}x-3y^2\right)dy$?

Usando el resultado anterior calcular el valor de la integral curvilínea de esta forma diferencial entre los puntos (4;0) y (12;0)

11. Dada la forma diferencial $(2xy - y^2e^x)dx + (x^2 - 2e^x y)dy$

Calcular la integral curvilínea de esa forma diferencial a lo largo de la quebrada de vértices (1;1); (500;800); (600;-700); (4;3).

12. Calcular $\int_C (x^2y\cos x + 2xy\,\mathrm{sen}\,x - y^2e^x)dx + (x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2ye^x)dy$ donde C es la curva de ecuación paramétrica $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

13. Calcular rot $\bar{F}$ para los siguientes campos vectoriales:

a) $\bar{F}(x;y;z) = xyz\,\breve{i} + x^2y^2z^2\,\breve{j} + yz^2\,\breve{k}$

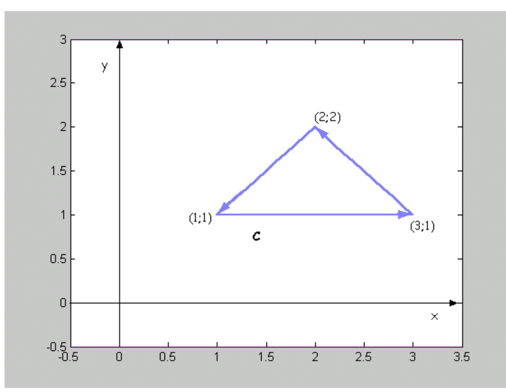
b) $\bar{F}(x;y;z) = \ln 2\,\breve{i} + \cos(xy+z)\,\breve{j} - 5z\,\breve{k}$

14. a) Dado cualquier campo escalar F con derivadas parciales segundas continuas, verificar que $\mathrm{rot}(\nabla F) = \vec{0}$

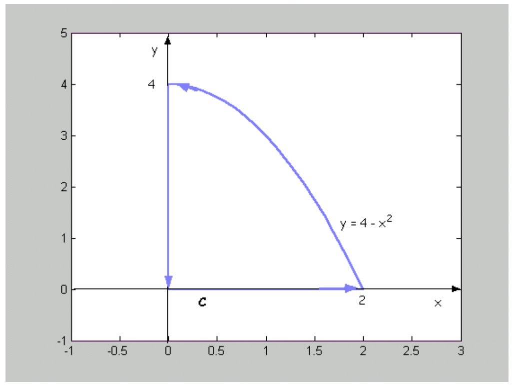
b) Dado cualquier campo vectorial $\bar{F}$ con derivadas parciales segundas continuas, verificar que div(rot $\bar{F}$) = 0

15. Aplicando el Teorema de Green, calcular:

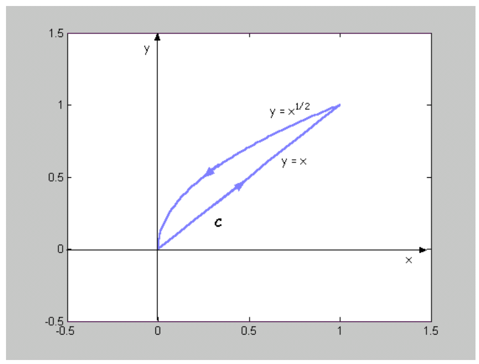
a) $\oint_C 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$



b) $\oint_C -x^2y\,dx + xy^2dy$

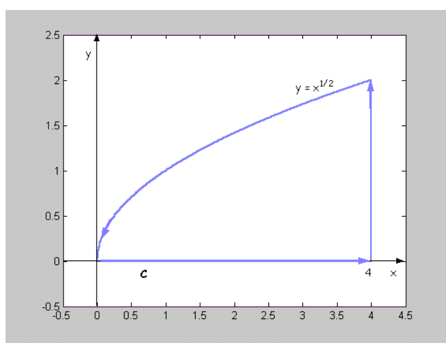


c) $\oint_C x\,dx + xy\,dy$

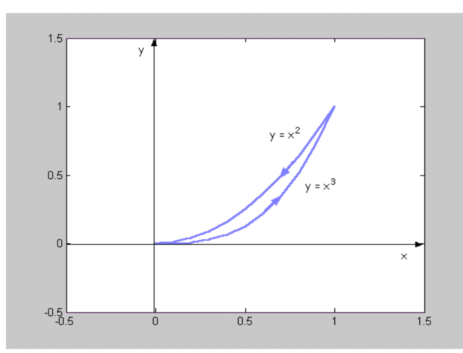


16. Verificar el Teorema de Green en los siguientes casos:

a) $\oint_C (x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy$



b) $\oint_C (x + y^2)dx + (1 + x^2)dy$



17. Verificar el Teorema de Stokes para $\bar{F}(x;y;z) = xy\breve{i} + yz\breve{j} + xz\breve{k}$; siendo S la parte del cilindro $z = 1 - x^2$ cuyos puntos verifican $0 \le x \le 1;\ -2 \le y \le 2$.

18. Aplicar el Teorema de Stokes para evaluar $\int_C (2z + x)dx + (y - z)dy + (x + y)dz$, donde C es el triángulo con vértices (1;0;0); (0;1;0); (0;0;1).

19. Aplicar el Teorema de Stokes para evaluar $\oint_C xy\,dx + 2yz\,dy + xz\,dz$, donde C es la frontera de la porción del plano z = 1-y ubicada en el primer octante, con $0 \le x \le 2$.

20. Aplicar el Teorema de Stokes para evaluar la circulación $\int_C F.d\bar{s}$, donde $\bar{F}(x;y;z) = y^3\breve{i} + x^3\breve{j} + z^3\breve{k}$ y C es la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano x + y + z = 1.

21. Calcular la circulación del campo vectorial $f(x, y, z) = (y^2z^3 + 2x, 2xyz^3 + y, 3xy^2z^2 + y)$ a lo largo de la curva intersección entre el plano z = y, con el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2y$.

22. Sea C la curva intersección entre las superficies $S_1 = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0\}$, $S_2 = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\colon 2y + z = 2\}$, y sea el campo vectorial dado por $\bar{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \bar{f}(x,y,z) = (xy\,e^{xy} + e^{xy},\ 2yz + x^2e^{xy}, 1 + y^2)$. Graficar C, indicar una orientación, y calcular la circulación del campo a lo largo de la curva así orientada.

23. Sea C la curva intersección entre las superficies $S_1 = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 = 2y\}$, $S_2 = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\colon y + z = 2\}$, y sea el campo vectorial $\bar{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \bar{f}(x,y,z) = (xy\,e^{xy} + e^{xy},\ 2yz + x^2e^{xy}, x + z + y^2)$. Graficar C, indicar una orientación, y calcular la circulación del campo a lo largo de la curva así orientada.

Aplicaciones físicas:

Considérese el movimiento de un cuerpo a lo largo de una curva arbitraria C, bajo la acción de una fuerza $\bar{F}$: $\bar{F}(x;y;z) = F_1(x;y;z)\breve{i} + F_2(x;y;z)\breve{j} + F_3(x;y;z)\breve{k}$

El trabajo total realizado por la fuerza $\bar{F}$ al desplazarse el cuerpo desde $(x_1;y_1;z_1)$ hasta $(x_2;y_2;z_2)$ es: $W = \int_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} F.d\bar{R}$ $\quad (d\bar{R} = dx.\breve{i} + dy.\breve{j} + dz.\breve{k})$

24. a) Hallar el trabajo de la fuerza $\bar{F}(x;y;z) = 3x^2\breve{i} + (2xz - y)\breve{j} + z\breve{k}$ al moverse un cuerpo

en:

i) la recta desde (0;0;0) hasta (2;1;3)

ii) la curva $x = 2t^2$; $y = t$; $z = 4t^2 - t$; desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

¿Depende el trabajo realizado de la trayectoria seguida en este caso?

b) Un cuerpo se mueve en línea recta desde $A = 2\breve{i} + 7\breve{j} - 3\breve{k}$, hasta $B = 5\breve{i} - 3\breve{j} - 6\breve{k}$, bajo la acción de una fuerza $\bar{F}(x;y;z) = 20\breve{i} - 30\breve{j} + 15\breve{k}$. Calcular el trabajo de la fuerza $\bar{F}$.

c) Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\bar{F}(x;y;z) = (2x - y + 4)\breve{i} + (5y + 3x - 6)\breve{j}$ en un desplazamiento alrededor del triángulo de vértices (0;0); (3;0); (3;2) en sentido positivo.

25. A un alambre delgado se le da forma de una semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$; $x \geq 0$. Si la densidad es una constante k, determinar la masa del alambre y la posición de su baricentro.