1. Para las ecuaciones diferenciales que se dan a continuación, identificar aquellas que sean ordinarias y determinar su orden.

a) $dy + (x^2y - sen\ x)dx = 0$ b) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + k\,x = sen\,(w\,t)$

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$ d) $(y'')^3 + (y')^3 + 3xy = x$

2. Obtener una ecuación diferencial cuya solución general sea la familia dada; verificar que así resulte.

a) $x = e^{t+\lambda}$ b) $x = At + B$ c) $x = A\,sen\,t$

d) $x = sen\,(t + a)$ e) $y = A\,x\,e^x + B\,e^x$ f) $\ln x = c_1t^2 + c_2$

3. Verificar que cada una de las siguientes expresiones es solución de la correspondiente ecuación diferencial. Indicar si se trata de una solución particular o de una solución general.

a) $y = 2x^2;\ \ y'x = 2y$ b) $y = Ae^{4x};\ \dfrac{dy}{dx} = 4y$

c) $y = Ae^{x} + Be^{-x};\ y'' - y = 0$ d) $y = -\dfrac{1}{x^2};\ x^2dy + 2xy\,dx = 0$

e) $y = x + 1;\ (y')^3 + xy' = y$ f) $y = A\cos 5x + B\,sen\,5x;\ y'' + 25y = 0$

4. Determinar todas las funciones que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, junto con sus condiciones iniciales, cuando se incluyen. Verificar que la solución obtenida satisface la ecuación diferencial o el problema de valor inicial (pvi, en adelante), según corresponda. En el caso de un pvi bien planteado, indicar claramente el intervalo en el que la solución está definida.

a) $xyy' = 1 - x^2$ b) $xy' - y = y^2$, $y(1) = -1$

c) $3e^t\,tg\,x\,dt + (1 - e^t)\sec^2 x\,dx = 0$ d) $(1 + e^{2t})\,x' + 2xe^{2t} = 0$

e) $t^2(1 + x^2) + 2x\dfrac{dx}{dt} = 0$, $x(0) = 1$ f) $y' = 2x\cos^2 y$, $y(0) = \pi/4$

g) $t^2\,dx + (1-x)\,dt = 0$, $x(0) = 1$ h) $t\,dx + x\,dt = 0$, $x(1) = \alpha$ [la solución depende de α]

5. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones diferenciales exactas o reducibles a exactas; verificar que todas las funciones halladas satisfacen la ecuación diferencial y, si corresponde, sus condiciones iniciales.

a) $(2t + x)dt + (2x + t)dx = 0$, $x(0) = 0$. b) $x^{-1}ydx + (\ln x + 3y^2)dy = 0$, $y(1) = 1$.

c) $x^{-1}dx + y^{-1}dy = 0$, $y(1) = e$. d) $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\,dy = 0$

e) $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$ f) $y\,dx - x\,dy - \ln x\,dx = 0$

g) $(x^2 - y^2)\,y' = 2xy$, $y(0) = 4$. [Graficar la solución y: $I \to \mathbb{R}$, indicando claramente el intervalo I]. Si la condición inicial fuese $y(0) = 2\alpha$, el intervalo I_α depende de α: definirlo $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$. [Respuesta: la única solución es y: $(-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - x^2}$].

h) $(t + x^2)\,dt - 2\,tx\,dx = 0$, $x(-1) = 0$. [Respuesta: x: $[-1, 0) \to \mathbb{R}$ tal que $x(t) = \sqrt{t\ln(-t)}$; otra solución?].

6. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden o reducibles a ellas; verificar que todas las funciones halladas satisfacen la ecuación diferencial y, si corresponde, sus condiciones iniciales. En los pvi indicar claramente el intervalo I en el que se define la solución y graficarla.

a) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}$, $y(\pi) = 0$ b) $\frac{dx}{dt} + x \ \mathrm{tg}(t) = 2 \,\mathrm{sen}\,(t)$, $x(0) = 2$

c) $y' + 2y \cot g\, x + \cos x = 0$ d) $y' + y \cos x = \cos x \,\mathrm{sen}\, x$, $y(0) = 1$

e) $x(x-1)y' + (1-2x)y - x^2 + x = 0$ f) $t\,x' + (1+t)\,x + e^t = 0$, $x(-1) = 1$.

g) $(t^2 \,\mathrm{sen}\, t)\, dx + (\mathrm{sen}^2 t - t^2 x \cos t)\, dt = 0$, con $x(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$

h) $\frac{dx}{dt} + x = x^2 \ln t$, $x(1) = 1$ [La ecuación puede reducirse a lineal con la sustitución $y = x^{-1}$].

i) $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$, $x(0) = 0$, con $f(t) = \{1, \text{ si } t \le 1;\ 0 \text{ si } t > 1\}$ [La solución debe ser continua en R].

7. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones diferenciales, verificando que satisfacen la ecuación diferencial o el problema de valor inicial según el caso. En el caso de un pvi, indicar claramente el intervalo I en el que está definida la función que lo resuelve y graficarla.

a) $xy'(y-3) = 4y$ b) $2x \ln y\, dx + \frac{x^2}{y} dy = 0$, $y(3) = e^2$

c) $(2xy^2 - 3y^3)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0$ d) $(2t^3 + tx^2)\, dt + (t^2 x + 2x^3)\, dx = 0$

f) $(y + 2e^x)dx + (1 + e^{-x})dy = 0$ g) $\mathrm{sen}\, t\, dx = x \ln x \ dt$, $x(\pi/2) = 1$

h) $y - x y' = 1 + x^2 y'$ con $y(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$

8. Determinar la expresión analítica de las trayectorias ortogonales a cada una de las familias dadas, graficando ambas familias para ilustrar la ortogonalidad. Seleccionar, en los casos que corresponda una curva de la familia ortogonal que pase por el punto P_0.

a) $x^2 + (y-1)^2 = a^2$ b) $x^2 - 2x + y^2 = \lambda$, $P_0 = (0, 1)$ c) $y = a x^2$

d) $4x^2 + y^2 = a$ e) $x^2 + y^2 = 2ax$, $P_0 = (0, 2)$ d) $x^2 - y^2 = a$

9. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de orden superior, determinar la solución general o la única solución del problema de valor inicial, según el caso.

a) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 1$ b) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 1$

c) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0$ d) $9\ddot{x} + x = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 1$

e) $\dddot{x} - 5\ddot{x} + 4\dot{x} = 0$ f) $\ddddot{x} + 16x = 0$

g) $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 5\dot{x} = e^{2t}$ h) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = t + e^{2t}$

i) $\dddot{x} - 9\dot{x} = t + e^t$ j) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = -2 + \cos(t)$

l) $\dddot{x} - 5\ddot{x} + 4\dot{x} = 0$, $x(t)$ acotada en R, con $x(\pi) = 1$.

10. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, obtener la solución general o la solución del pvi, según corresponda.

a) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$, $\begin{pmatrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 3 \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$, $\begin{pmatrix} x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + 1 \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \ddot{x} - 2x = y - 1 \\ \dot{y} - 1 = -y - 2x \end{cases}$

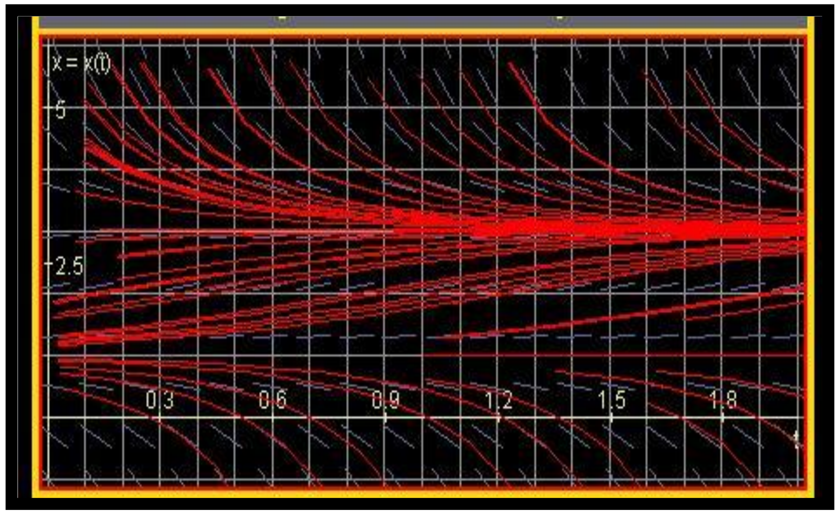
11. Para cada uno de los pvi siguientes, graficar de modo cualitativo las soluciones x= x(t, x_0), para todo x(0) = x_0 admisible (la figura es la respuesta de uno los ítems).

a) $\dot{x} = x(2 - x),\ x(0) = x_0$

b) $\dot{x} = x(4 - x) - 3,\ x(0) = x_0$

c) $\dot{x} = x(2 - e^x),\ x(0) = x_0$

d) $\dot{x} = x(4 - x^2),\ x(0) = x_0$



12. Los siguientes problemas, provenientes de disciplinas muy diversas (incluyendo la matemática), se expresan y resuelven en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Para cada uno de ellos, desarrollar y resolver el modelo y analizar las soluciones en el lenguaje de la disciplina residente.

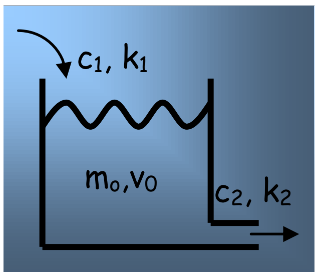
a) (Modelo de T. Malthus: An Essay on the Principle of Population, 1798) La población de una especie varía con una velocidad proporcional a la población. Inicialmente se tiene una población x(0) = x_0. Si en el instante t_1 la población es 2 x_0, determinar la constante de proporcionalidad y el instante en que la población es 5 x_0. Graficar x =x(t).

b) El modelo que interpreta la evolución de una población malthusiana x, en la que se retira una tasa β fija de individuos (por ejemplo por la acción de un antibiótico) es $\dot{x} = \alpha x - \beta$, con x(0) = x_0, con α, β, x_0 positivos. Obtener, graficar y analizar las soluciones para todos los valores de los parámetros. En particular, determinar el instante t* en que la población se extingue si $\beta > \alpha x_0$. [Respuesta parcial: $t^* = \alpha^{-1} \ln(\beta/(\beta-\alpha x_0))$].

c) (Modelo de P. F. Verhulst, 'Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance mathématique et physique, 1838). En ambientes de recursos restringidos, el modelo postula que la población de una especie varía con una velocidad proporcional a la población y a la diferencia entre una población límite N y la población. Inicialmente se tiene una población x(0) = x_0. Determinar la solución para todos los valores de k (la constante de proporcionalidad), N, x_0, positivos y graficarlas (la curva se llama 'logística'). Analizar el comportamiento asintótico.

d) Suponiendo que un alumno es portador del virus de la gripe regresa a su escuela, donde hay 800 estudiantes; si la población de engripados sigue el modelo de Verhulst, determinar la cantidad de infectados 6 días después, si se observa que a los 4 días el número de infectados es de 40. Determinar el instante t* en el que la gripe se propaga más velozmente.

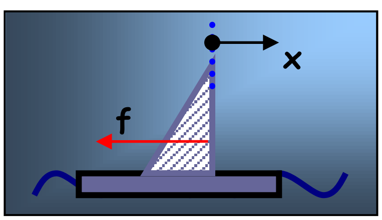
e) La concentración x de un medicamento inyectado en el flujo sanguíneo puede modelarse mediante el problema de valor inicial $\dot{x} = \alpha - \beta x$, con x(0) = 0, con α, β positivos. Determinar y graficar la solución, analizar su comportamiento asintótico. Determinar el instante t* en que alcanza el 90% de la concentración límite. [Respuesta parcial t* =(ln 10) / β)].



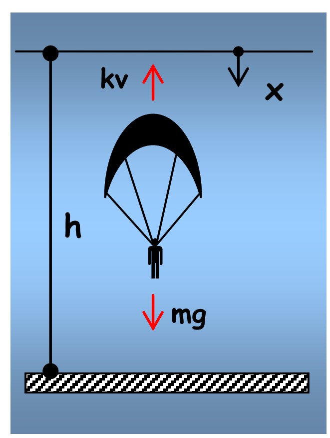
f) El tanque de la figura, de volumen v_0, es atravesado por una corriente de caudal constante $c_1 = c_2 = c$. Inicialmente en el tanque se tiene una cantidad m_0 de un contaminante. Si la corriente ingresa con una concentración de contaminante k_1, y se produce un mezclado perfecto, interesa determinar la cantidad m de contaminante y la concentración de salida k_2. Las unidades son homogéneas (por ejemplo, v_0 en m^3, c en m^3/s, k_1 en g/m^3, m_0 en g). Determinar y resolver el problema de valor inicial para obtener $m = m(t)$ y $k_2 = k_2(t)$. Graficar la curva $k_2 = k_2(t)$ para los siguientes casos: $k_1 = 0$, $k_1 < m_0/v_0$, $k_1 > m_0/v_0$, analizando el comportamiento asintótico. Finalmente, para $k_1 = 0$, determinar el instante t* en el que la masa de contaminante presente en el tanque se ha reducido a la mitad de la inicial. [Respuesta parcial: $t^* = c^{-1}\, m_0 \ln 2$].

g) Un lago está parcialmente lleno con un volumen V_0 de agua, con una cantidad x_0 de un contaminante disuelto. Por sus afluentes ingresa una corriente de caudal c_1 de agua limpia y tras el mezclado sale un flujo de $c_2 = \beta c_1$, $0 < \beta < 1$. Determinar el tiempo t* que transcurrirá para que la cantidad de contaminante en el tanque se reduzca a la mitad, el volumen v* del líquido embalsado y la concentración k_2^* del caudal efluente en ese instante. [Respuesta: $t^* = \dfrac{2^{\frac{1}{\beta}} - 2}{2 - 2\beta}\dfrac{v_0}{c_1}$, $v^* = 2^{\frac{1}{\beta}-1} v_0$, $k_2^* = 2^{-\frac{1}{\beta}}\dfrac{x_0}{v_0}$].

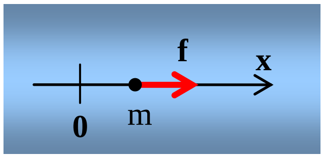
h) En ausencia de viento, el velero que lleva una velocidad v_0 en el instante $t_0 = 0$, x(0) = 0, disminuye su velocidad debido a una resistencia al movimiento que es proporcional a su velocidad. En el instante t_1 su velocidad se ha reducido a la mitad. Determinar las ecuaciones de la posición y velocidad del velero en función del instante t, graficarlas y analizar su comportamiento asintótico. Determinar la distancia d* que recorre hasta que su velocidad se reduce a una centésima parte de la original. ¿La distancia recorrida en tiempo infinito es finita? [Respuesta parcial: $v(t) = v_0\, (2)^{-t/t_1}$, $x(t) = v_0\, t_1\, [1- (2)^{-t/t_1}] / \ln 2$, la distancia $d^* = 99\, v_0\, t_1 / (100 \ln 2)$, sí, es $d_\infty = v_0\, t_1 / \ln 2$].



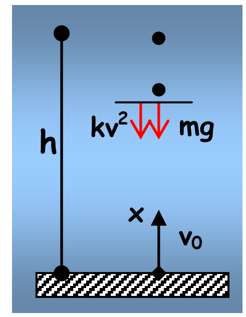
i) El paracaidista de la figura se lanza con las condiciones iniciales $\dot{x}(0) = 0, x(0) = 0$, siendo la resistencia proporcional a la velocidad. Plantear y resolver el modelo del movimiento para obtener las ecuaciones de x = x(t), v = v(t), a = a(t) determinando la velocidad asintótica v_∞. Graficar v = v(t), a= a(t) y comparar con el gráfico correspondiente al caso de caída libre (k = 0). Determinar el instante t* en el que la velocidad de paracaidista es la mitad de la velocidad límite y su correspondiente posición x*. Graficar además v = v(t) cuando la condición inicial sobre la velocidad cambia a $\dot{x}(0) = \alpha$, para todos los valores reales de α. [Respuesta parcial: $v(t) = v_\infty\, (1-e^{-(k/m)t})$, $v_\infty = mg/k$, $t^* = (v_\infty \ln 2) / g$].



j) Una partícula de masa m se mueve en el espacio unidimensional sometida a una fuerza $\mathbf{f} = f\ \check{\mathbf{i}}$; las condiciones iniciales son $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$. Para cada uno de los siguientes casos graficar las funciones x = x(t), v = v(t), a = a(t) comprobando sus relaciones mutuas. En todos los casos considerar k una constante positiva. **(j₁)** $f = f_0$ (constante). Incluir el caso $f_0 = 0$. **(j2)** $f = -k\,x$. Puede considerarse f la fuerza de restitución de un resorte elástico de constante $k > 0$. **(j3)** $f = -k\,\dot{x}$. Puede considerarse f una fuerza de resistencia de un medio viscoso. **(j4)** $f = -k\,\mathrm{sg}(\dot{x})\,\dot{x}^2$, $x_0 = 0$, $v_0 > 0$. [Respuesta parcial: la posición es $x(t)= m\,k^{-1} \ln(1 + m^{-1} k\, v_0\, t)$, $v(t) = m\, v_0 / (m + k\, v_0\, t)$, $a(t) = -\,k\, m\, v_0^2 / (k\, v_0\, t + m)^2$]. **(j5)**. $f = -k\, x^{-2}$, $v_0 = 0$. Puede considerarse f una fuerza de atracción en un campo gravitatorio. **(j6)**. $f = k \cos(wt)$, $x_0 = 0$.

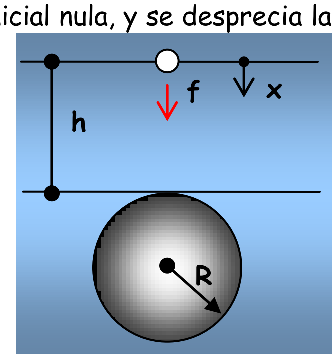


k) Se dispara verticalmente un proyectil con velocidad $\mathbf{v} = v_0\ \check{\mathbf{j}}$, con $v_0 > 0$, desde la posición x(0) = 0, siendo la resistencia del medio proporcional al cuadrado de la velocidad, con coeficiente de proporcionalidad k. Plantear el problema de valor inicial y obtener la altura máxima alcanzada por el proyectil y el instante t* en el que la alcanza [Respuesta: con $a = \sqrt{k/mg}$, $h = \dfrac{\ln(1 + a^2 v_0^2)}{2a^2 g}$, $t^* = \dfrac{\operatorname{arc\,tg}(a v_0)}{a g}$].

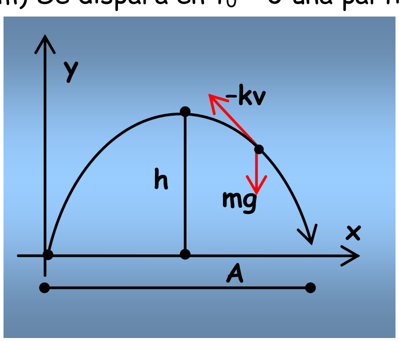


(Se supone que v_0 no sea tan grande como para necesitar considerar la variación de la atracción terrestre con la altura).

l) Un cuerpo se precipita desde una altura h sobre la Tierra, con velocidad inicial nula, y se desprecia la resistencia al movimiento. Llamando a al radio de la Tierra, g la aceleración gravitatoria en la superficie, y tomando en cuenta que la atracción gravitatoria es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia al centro de la Tierra, determinar la velocidad v_T con la que el cuerpo impacta en el planeta y el tiempo t* que le toma el descenso. Efectuar una estimación del tiempo que le insumiría, con éstas hipótesis, precipitarse sobre la Tierra a un cuerpo lunar ($h \sim 4\text{x}\ 10^5$ Km, $R \sim 6400$ Km). [Respuesta parcial: $v_T = \sqrt{\dfrac{2\,R\,g\,h}{R+h}}$, $t^* = \sqrt{\dfrac{R+h}{2\,R^2\,g}}\left[\sqrt{R\,h} + \dfrac{R+h}{2}\arccos\dfrac{R-h}{R+h}\right]$, ≈ 122 horas].

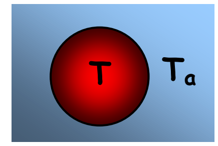


m) Se dispara en $t_0 = 0$ una partícula de masa m en $P_0 = (0, 0)$ con una velocidad $\mathbf{v} = (v_o \cos\theta_0, v_0 \operatorname{sen}\theta_0)$, bajo la acción de la única fuerza gravitatoria $\mathbf{f} = (-mg, 0)$. Determinar la ecuación vectorial que indica la posición P = (x, y) para todo instante t, probar que la trayectoria es parabólica, calcular la altura máxima alcanzada h, el alcance A del proyectil, el tiempo t* que tarda en alcanzarlo, la velocidad $\mathbf{v^*}$ en el momento del impacto. [Respuesta parcial: $P = (v_o\, t \cos\theta_0, v_0\, t \operatorname{sen}\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2)$, $h = \frac{1}{2} g^{-1} v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0$, $A = g^{-1} v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta_0)$, $t^* = 2\, g^{-1}\, v_0 \operatorname{sen}\theta_0$, $\mathbf{v^*} = (v_o \cos\theta_0, -v_0 \operatorname{sen}\theta_0)$.

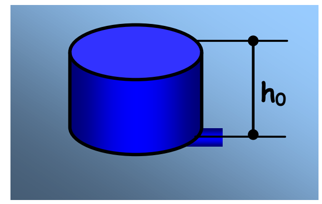


Rehacer el problema si ahora se considera una resistencia del medio proporcional a su velocidad, esto es, $\mathbf{f} = -\,k\,\mathbf{v}$, con la constante de proporcionalidad $k > 0$; comprobar que los resultados obtenidos en primer término resultan de $k \to 0$.

n) (Ley de enfriamiento de Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687). La velocidad con la que varía la temperatura T de un cuerpo colocado en un ambiente que se supone a una temperatura constante T_a es proporcional a la diferencia entre T_a y T (La constante de proporcionalidad es k >0). Plantear y resolver el problema de valor inicial con $T(0) = T_0$, para todos los valores de T_0, T_a, graficando las soluciones y analizando su comportamiento asintótico. Si en un instante t_1 la temperatura del cuerpo es T_1, determinar k. y la función T = T(t). Un termómetro que marca 40ºC se coloca en el instante $t_0 = 0$ en un medio con temperatura constante de 20ºC; después de 6 minutos, el termómetro marca 30ºC ¿Cuál es la lectura T_f en el instante t_f = 18 min?. [Respuesta parcial: $T = T_a + (T_0 - T_a)\left[\dfrac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right]^{t/t_1}$, T_f = 22.5ºC.]



o) El nivel del líquido incompresible sin viscosidad que llena el tanque cilíndrico de radio α de la figura en el instante $t_0 = 0$ es h_0. El tanque descarga por un orificio en el fondo de radio β. Admitiendo que no se produce contracción de la vena fluida a la salida, ni pérdida alguna, determinar la altura h(t) del nivel del líquido en el instante t, y el instante t* en el que el tanque se vacía. [Respuesta parcial: $t^* = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\sqrt{\dfrac{2\,h_0}{g}}$].



p) La cadena homogénea de la figura tiene longitud a < H y cuelga libremente inicialmente ($t_0 = 0$) una altura $x(0) = x_0 < a$. Determinar en qué instante t_1 el último eslabón abandona la plataforma horizontal y cuál es la magnitud v_1 de la velocidad de la cadena en ese instante. Graficar la función x(t) que da la posición del primer eslabón en cada instante t. Realizar el ejercicio para el caso $\mu = 0$, y luego para el caso $0 < \mu < x_0 / (a - x_0)$. Graficar aproximadamente la función x(t) desde el instante inicial hasta el instante en que el primer eslabón alcanza el nivel inferior A [Respuesta parcial, para el caso $\mu = 0$: $t_1 = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\ \text{arg cosh}\ \dfrac{a}{x_0}$].