3.1.009. Análisis Matemático III. Examen final — UADE — T1

Apellido y Nombre : LN:

2 ½ horas

Los cinco puntos de este examen son de complejidad comparable; procure regular el tiempo de que dispone para resolverlos. La condición suficiente de aprobación es la presentación escrita, clara y prolijamente organizada, de la resolución completa, detallada y justificada, sin errores algebraicos, con los gráficos representados correctamente (esto es con la identificación de todos sus objetos, incluyendo ejes y orientación), de tres puntos cualesquiera. No son tenidos en cuenta cálculos dispersos, o poco claros, o sin justificaciones. ¡Suerte!

2 ½ horas

1

(a) Determinar la expresión analítica de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por $x = \alpha y^2$, con α tomando todos los valores reales, y determinar la única curva C de esa familia (la de las trayectorias ortogonales) que pasa por el punto $P_0 = (1, 2)$. Graficar ambas familias, poniendo en evidencia la ortogonalidad entre ambas.

(b) Calcular la circulación de $\bar{f}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $\bar{f}(x,y) = (2x + y + xy\,e^{xy} + e^{xy}, x^2 e^{xy} + 2y + 3x)$ a lo largo de la curva C obtenida en (a), orientada de modo que su velocidad en el punto P_0 tiene componente x positiva.

2

(a) Siendo $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ la Transformada de Laplace de la función escalar f, probar que $L[f(t-a)U(t-a)] = e^{-ap}.F(p)$ detallando las justificaciones correspondientes .

(b) Hallar dos funciones escalares continuas $x = x(t), y = y(t)$ tales que $\begin{cases} \dot{x} - y = f(t) \\ \dot{y} + x = 0 \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$ siendo $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 5 \\ 3 & \text{si } t \ge 5 \end{cases}$

3

(a) Determinar el flujo del campo vectorial $\bar{f}:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $\bar{f}(x,y,z) = (xz + y^3\cos(z), 1 + z - yz, 2z + x^3)$ a través de la superficie $S = \{(x,y,z) \in R^3:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2y, y \le 1\}$. (Graficar la superficie S, estableciendo explícitamente una orientación).

(b) Determinar la única función $x: I \to \mathbf{R}$ tal que $\sin^2(t)\dot{x} + 2\sin(t)\cos(t)x = 1 - \cos(t), x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Indicar claramente el intervalo I en el que está definida la solución del problema de valor inicial.

4

Sea el campo vectorial $\bar{f}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $\bar{f}(x,y) = (\sin(x^2 y) + 2x^2 y\cos(x^2 y), x^3\cos(x^2 y))$ sea C el arco de curva contenido en la gráfica de la solución del problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = y^2\sin(x), y(0) = \frac{1}{2}$, entre el punto $P_1 = (0, ½)$, y el punto $P_2 = (\pi, y(\pi))$. Calcular la circulación del campo a lo largo de la curva así orientada.

5

(a) Graficar el macizo $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4 - \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le 9\}$ y calcular su volumen.

(b) Graficar la superficie $S = \{(x,y,z) \in R^3: z + x = 2,\quad x^2 + y^2 \le 2x\}$ y calcular su área.

2 ½ horas