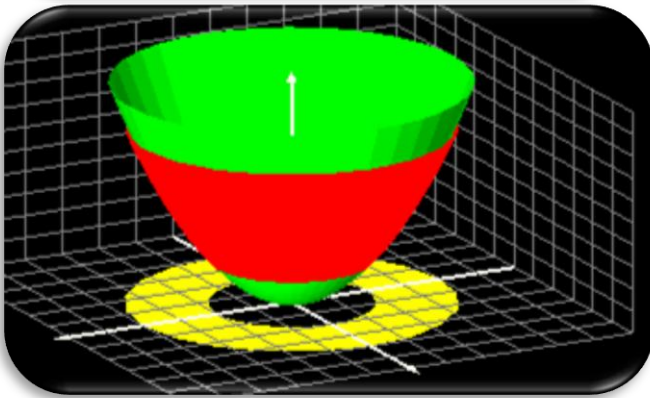
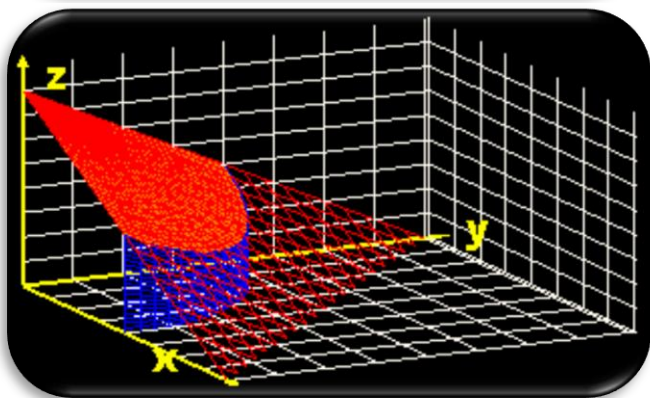
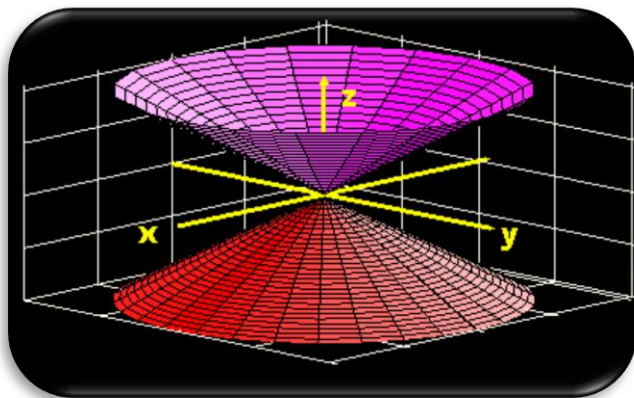
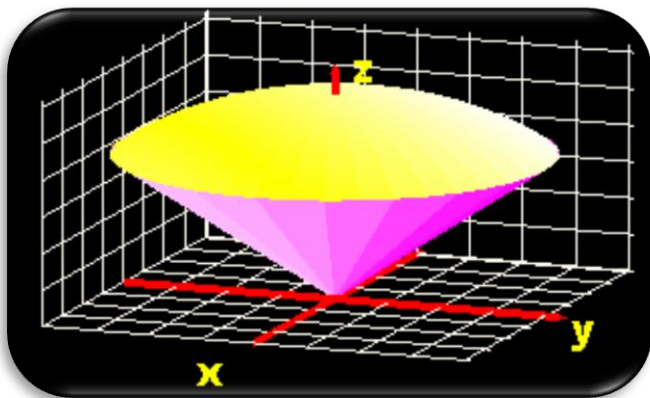


1. Graficar y determinar el área de cada una de las siguientes superficies S (en los gráficos que se añaden se presentan algunas de las superficies dadas: identifíquelas y señale sus dimensiones).

- S es la porción del plano del primer octante dado por la ecuación $2x + 3y + 4z = 12$ $\Rightarrow a(S) = 3\sqrt{29}$
- S es la porción de cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ que está en el interior de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 5z$ $\Rightarrow a(S) = 12\pi$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 4, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. $\Rightarrow a(S) = \sqrt{3}\pi$
- S es la imagen de $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$ a través de la parametrización dada por el campo vectorial $\bar{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}(u, v) = (\cos v, u, \sin v)$ $\Rightarrow a(S) = \pi$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 4, x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. $\Rightarrow a(S) = 4\pi - 8$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 4\}$. $\Rightarrow a(S) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = ax + by + c, (x, y) \in D, \text{área}(D) = \beta\}$. $\Rightarrow a(S) = \beta\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$
- S es la porción de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior al cono de ecuación $z \operatorname{tg}(\alpha) = \sqrt{x^2 + y^2}$, con α positivo fijo menor que $\frac{\pi}{2}$. ¿Cuál es el área de la esfera completa? $\Rightarrow a(S) = 4\pi a^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2, |z| \leq h\}$. $\Rightarrow a(S) = 2\pi a \sqrt{a^2 + h^2}$.

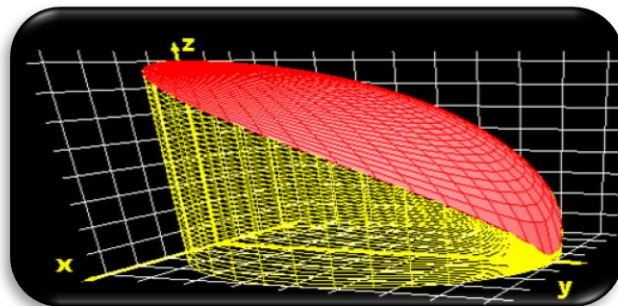


2. Calcular la integral del campo escalar f en la superficie S ($\iint_S f dS$). Graficar S en todos los casos (la figura muestra alguno de los objetos que intervienen en los enunciados: identificarlos).

a. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z = 4 - x^2 - y^2\}, f: D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = z + y^2 + x^2$. $\Rightarrow \frac{2\pi}{3}(17\sqrt{17} - 1)$

b. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq ay\}, f: D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = 1$.

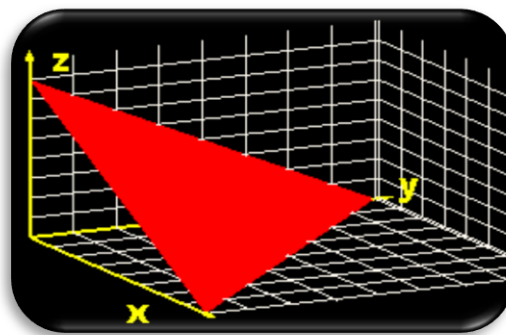
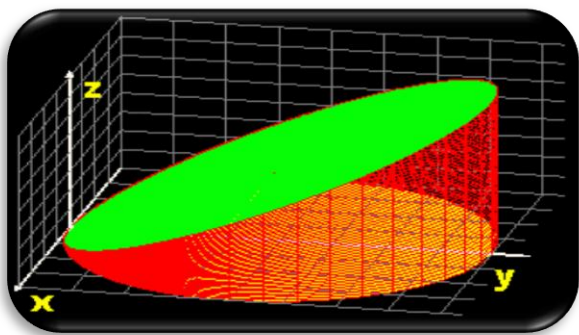
\Rightarrow el área es $(\pi - 2)a^2$ (es la semibóveda esférica de radio a interior al cilindro que tiene ese radio por diámetro; la curva intersección se llama Curva de Viviani)



c. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z \leq 4, z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}, f: D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = 3z$. $\Rightarrow 16\sqrt{5}\pi$.

d. S es la imagen de $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$ a través de la parametrización dada por $\bar{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}(u, v) = (\cos v, \sin u, \cos v)$, $f: D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = 1$. $\Rightarrow \sqrt{2}$

3. Determinar el flujo del campo vectorial $\bar{f}: D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a través de la superficie orientable S ($\iint_S \bar{f} \cdot \bar{n} dS$). Graficar S en todos los casos, estableciendo explícitamente una orientación, cuando ésta no se especifica en el enunciado (establecer además las correspondencias entre los gráficos que aquí se presentan y los objetos geométricos referidos en los enunciados) ¡En algunos casos resultará muy conveniente la aplicación del teorema de la divergencia¹!










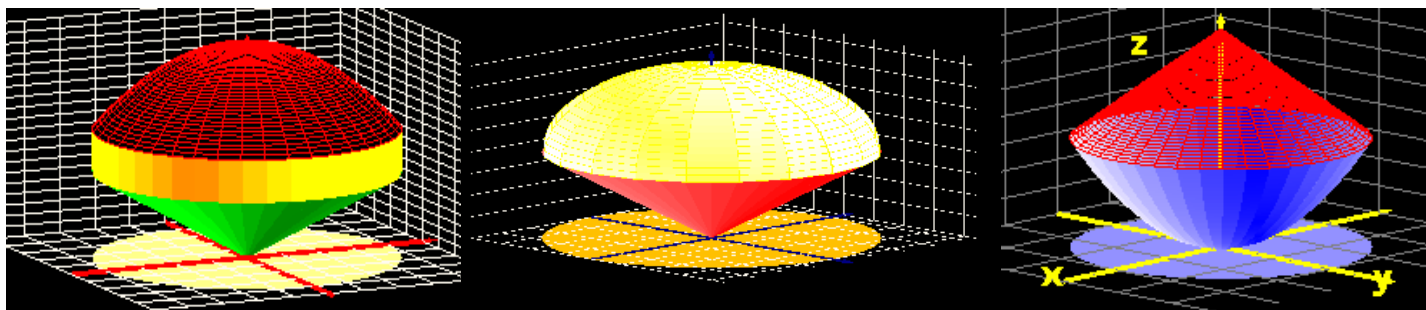
a. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z = 4 - x^2 - y^2\}, \bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x, y, z) = (x, y, z)$. \Rightarrow el flujo es 24π con S orientada con componente 'z' positiva.




b. S es la imagen de $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ a través de la parametrización dada por $\bar{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x, y, z) = (x + yz, y, z)$. $\Rightarrow 4\pi$



c. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z = y, x^2 + y^2 \leq 2ay, a > 0\}$ $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x, y, z) = (xyz e^{yz}, z, y + 1)$. \Rightarrow el flujo es πa^2 , con S orientada con componente 'z' positiva.

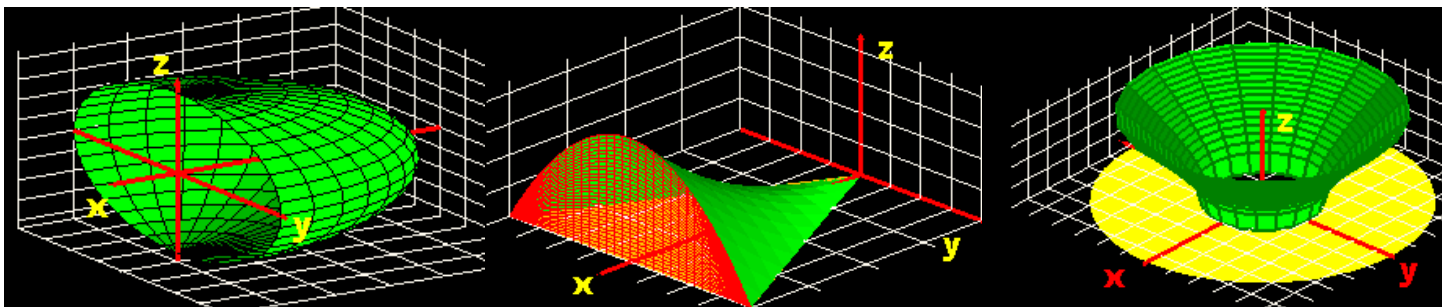
¹ Distintos aspectos del teorema son presentados por Lagrange en 1764 (campos gravitatorios), por Gauss en 1813 (campos eléctricos), probado por Green en 1828, en 1831 por Ostrogradsky. Se conoce como Teorema de Gauss, o de Gauss-Ostrogradsky.

- d. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z = 1 - x - y, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (z + x, z + y, x + y)$.  R: 1
- e. S es la porción de cilindro de radio 2 de eje 'z' que se halla comprendida entre el plano de ecuación $z = 0$ y el plano $z = 2 - y$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (0, 0, xyz e^{yz} \cos x)$  R: 0
- f. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y, x^2 + y^2 = 2ay, a > 0\}$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (y, -x, xyz e^{yz})$.  R: 0
- g. S es la frontera de un macizo M, orientada con normal saliente siendo el macizo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x - y, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (zeyz + \cos yz^2 + 2xz, z + 3y, z + \sin(x))$  ; aplicar el teorema de la divergencia! R: 1
- h. S es la esfera centrada en el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, de radio a , $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (-x + yz, -y + xe^z, -z + xy + \sin(x))$  normal entrante: $4\pi a^3$
- i. S es la frontera de un macizo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 7 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (ze^{yz} + \cos(yz^2) + yx^2, 3y - xy^2 + xz, xz + \sin(xy))$  con normal saliente, $44\pi/3$.
- j. S es la frontera de un macizo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, h > 0, a > 0\}$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (zye^{yz} + \cos(yz^3) + yx^2, -xy^2 + xz, z + xz + \sin(x))$. Determinar además el área de S y el volumen de M.  El volumen de M coincide con el flujo (saliente), su valor es $\frac{\pi}{3}(h + 2a)a^2$, el área de $S = \partial M$ es $\pi a(\sqrt{a^2 + h^2} + 2a)$.








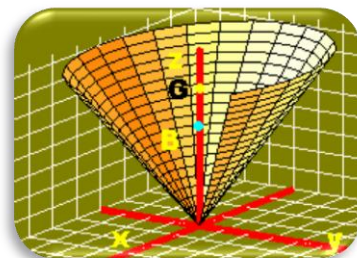
- k. S es la frontera $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 6 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (x + y, x + y, -2z + xy)$. Determinar además el área de S.  El flujo es nulo, el área de $S = \partial M$ es $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} + 24\sqrt{2} - 1)$
- l. S es la porción de cilindro de radio 3 cuyo eje es la recta intersección entre los planos $z = 0$, $x = 3$ y que se halla comprendida entre el plano de ecuación $y = 0$ y el plano $y = z$, siendo $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (0, x \cosh(yz), 0)$  R: 0
- m. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (xz + y^3z, x - yz, x^2 + y^2)$  orientando el hiperboloide con la componente radial del campo de normales alejándose del eje z, el flujo es $-3\pi/2$ (sugerencia: tape el hiperboloide, aplique el teorema de la divergencia, descuenta el flujo a través de las tapas circulares).

- n. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \leq 0\}$, orientada con el campo de normales con componente 'x' negativa, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (xz + yz - 1, x - yz + \sin(z), yx^2 + y^2x)$  orientando la superficie esférica con la componente 'x' del campo de normales positiva, el flujo es πa^2 (sugerencia: tape la semiesfera, aplique el teorema de la divergencia al macizo obtenido, descuenta el flujo a través de la tapa circular).
- o. S es la frontera del macizo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z \leq x^2 - y^2, 0 \leq x \leq 1\}$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (zye^{yz} + \cos(yz^3) + yx^2, -xy^2 + xz, 3z + yz + \sin(y))$.  El flujo (saliente) es 1.



4. Se presentan algunas aplicaciones de las integrales de superficie en áreas diversas de la ingeniería.

- a. *Valor medio de una función.* Si f es un campo escalar continuo que toma valores sobre una superficie S, su valor medio $\mu(f)$ en S se define por la expresión $\mu(f) = \frac{\iint_S f \, dS}{\iint_S dS}$. Determinar el valor medio del campo escalar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = z$ en $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$.  $\mu(f) = a/2$.
- b. *Masa.* Si δ es la densidad superficial de una superficie S, $m(S) = \iint_S \delta \, dS$ es la masa de S. Determinar la masa de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: y + z = 1, x^2 \leq y \leq 1\}$, $\delta(x, y, z) = 1 + x + y + z$.  $8\sqrt{2}/3$
- c. *Momento estático.* Si δ es la densidad superficial de una superficie S, se definen los momentos estáticos respecto de los planos coordenados $T_{xy} = \iint_S z \delta \, dS, T_{xz} = \iint_S y \delta \, dS, T_{yz} = \iint_S x \delta \, dS$. Determinar los momentos estáticos de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq h, 0 \leq x, 0 \leq y\}$, $\delta(x, y, z) = 1$.  $T_{xy} = \pi a h^2 / 4, T_{xz} = a^2 h, T_{yz} = a^2 h$.
- d. *Centro de masa (baricentro).* Si δ es la densidad superficial de una superficie S, su baricentro $G_0 = (x_0, y_0, z_0)$ se obtiene de $x_0 = \frac{\iint_S x \delta \, dS}{\iint_S \delta \, dS}, y_0 = \frac{\iint_S y \delta \, dS}{\iint_S \delta \, dS}, z_0 = \frac{\iint_S z \delta \, dS}{\iint_S \delta \, dS}$ (el momento estático respecto a cualquier plano que pase por G_0 es cero). Determinar el centro de masa de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} = z \leq h, h > 0, a > 0\}$ de densidad $\delta(x, y, z) = kz$.  $G_0 = (0, 0, 3h/4)$.
- e. *Centro geométrico.* Es el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ cuyas coordenadas son $x_0 = \frac{\iint_S x \, dS}{\iint_S dS}, y_0 = \frac{\iint_S y \, dS}{\iint_S dS}, z_0 = \frac{\iint_S z \, dS}{\iint_S dS}$ (coincide con el baricentro si la densidad es constante). (e1) Determinar el centro geométrico del cono del ejercicio anterior. (e2) Determinar la coordenada 'z' del centro geométrico de la bóveda de Viviani $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq ay\}$  (e1) $P_0 = (0, 0, 2h/3)$, (e2) $z_0 = \frac{\pi}{4\pi-8} a$.



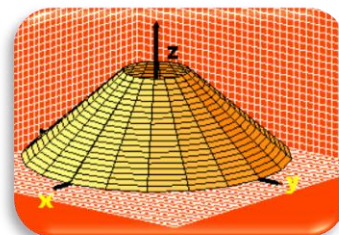
f. *Momentos de Inercia.* $I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \delta \, dS$, $I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \delta \, dS$, $I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta \, dS$, son los momentos axiales de S respecto a los ejes coordenados; el momento polar respecto al origen de coordenadas es $I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \delta \, dS$. Tomando $\delta = 1$ resultan los momentos de inercia geométricos (también se les llaman de superficie a éstos y de masa a aquéllos).

(f1) Calcular el momento de inercia de una esfera homogénea de radio a y masa m , respecto a un eje que pasa por su centro, y respecto del centro.

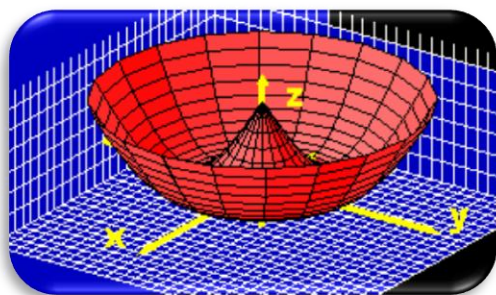
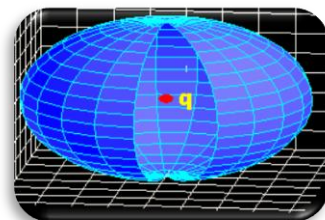
(f2) Calcular el momento de inercia del cono homogéneo $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} = z \leq h, h > 0, a > 0\}$ de masa m , respecto del eje 'z'. **➡** (f1) $I_e = 23ma^2$, $I_0 = ma^2$, (f2) $I_z = 12ma^2$.

g. *Presión del viento.* La cúpula troncocónica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - \sqrt{x^2 + y^2} = z, 0 \leq z \leq 3\}$ está sometida a la presión del viento que por unidad superficie está dada por $\vec{f}(x, y, z) = k(x + y, x + y, z - 1)$. La fuerza neta sobre una superficie S según la dirección (y sentido) de un versor \vec{v} se obtiene de integrar la componente del campo $\vec{f} \cdot \vec{v}$ sobre la superficie S . Determinar si la cúpula está sometida a una fuerza vertical de presión o succión y su magnitud. **➡** Succión, $3\sqrt{2}k\pi$;

observación: si la cúpula está simplemente apoyada (sin anclajes) y su peso es menor que el valor obtenido, se eleva.



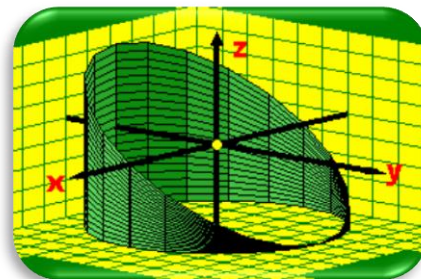
h. *Ley de Gauss.* El flujo del campo eléctrico \vec{E} en el vacío originado por la carga neta q en el interior de una superficie cerrada S es q/ϵ_0 , siendo ϵ_0 una constante (permitividad en el vacío). Probar que efectivamente es así en el caso particular de una carga puntual q ubicada en el origen, cuyo campo es $\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$, obteniendo el flujo a través de la esfera centrada en el origen de radio a , que encierra la carga q .



i. *Flujo de calor, Ley de Fourier.* Si la conductividad térmica es una constante k , y el campo escalar diferenciable T determina la distribución de temperaturas (régimen estacionario) en una región que contiene a la superficie S , el flujo de calor que atraviesa la superficie S está dado por $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$, siendo $\vec{f} = -k\nabla T$. (i1) Calcular el flujo de calor a través de la antena de transmisión sinusoidal dada en coordenadas cilíndricas por $z = 1 - \sin(r)$, $0 \leq r \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, si la temperatura en el punto (x, y, z) es proporcional (coeficiente de proporcionalidad α) a su distancia al plano xy .


➡ Con el campo de normales con componente z positiva, el flujo es $-\alpha k \pi^3$.


j. *Ley de Fick².* La expresión $\vec{f} = -d\nabla K$ proporciona el flujo por unidad de superficie de una sustancia que se difunde (d es el coeficiente de difusión) debido a un desequilibrio de la concentración K . Si la concentración de un soluto es proporcional al cuadrado de la distancia al plano xy , determinar el flujo que atraviesa la superficie $S =$

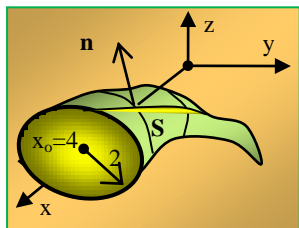


² Adolf Fick, fisiólogo alemán, propuso su modelo de difusión de gases a través de membranas hacia 1855, interesado en la factibilidad de las lentes de contacto, cuya invención se le atribuye.

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq -y\}$.  El flujo es nulo en S (global y localmente).

- k. *Caudal de un fluido.* Si $\vec{v}(x, y, z)$ es la velocidad de un fluido, el flujo de \vec{v} a través de S es el caudal del fluido que atraviesa la superficie. Determinar el caudal erogado por una compuerta circular $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + 4z^2 \leq 36, y = 0\}$ si el campo de velocidad del fluido es $v(x, y, z) = (0, z + 3, 0)$.  18π , hacia el semieje y positivo.

- l. Filtrado. Determinar el flujo (siguiendo la ley de Fick con coeficiente de difusión d) sobre la superficie regular S del filtro que se indica en la figura, cuyo anillo en la base es la imagen de la función vectorial $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(t) = (4, 2 \cos(t), 2 \sin(t))$, si la distribución de concentraciones está dada por el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = x + y + z$. Proponer una superficie S' con el mismo flujo que el que incide sobre S.  El flujo sobre la manga es el mismo que atraviesa la boca del filtro (pues el campo es solenoidal), es $4d\pi$. Cualquier otra superficie que se anille en la boca del filtro produce el mismo flujo, por ejemplo podría tomarse el paraboloide de ecuación $x = y^2 + z^2, 0 \leq x \leq 4$.



5. Probar las siguientes afirmaciones del cálculo vectorial referidas a integrales de superficie y al teorema de la divergencia.

- Si una lámina es homogénea, su centro geométrico coincide con su centro de masas, pero la recíproca es falsa.
- Si un campo es solenoidal en \mathbb{R}^3 , entonces el flujo de ese campo a través de cualquier superficie cerrada orientable es nulo y, recíprocamente, la nulidad del flujo de un campo de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ en toda superficie cerrada implica que el campo es solenoidal.
- Existen infinitos campos $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ no solenoidales cuyo flujo es nulo sobre cualquier esfera centrada en el origen.
- La divergencia de la suma de dos campos vectoriales $C^1(D)$ es la suma de sus divergencias en D.
- Si ϕ es un campo escalar $C^1(D)$, \vec{f} un campo $C^1(D)$, entonces $\text{div}(\phi \vec{f}) = \phi \text{div}(\vec{f}) + \nabla(\phi) \cdot \vec{f}$ en D.
- Si ϕ es un campo escalar $C^1(D)$, entonces $\text{div}(\phi \nabla(\phi)) = \phi \nabla^2(\phi) + \|\nabla(\phi)\|^2$ en D.
- El volumen de cualquier superficie cerrada S es igual al flujo del campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$ a través de su frontera, orientada con normales salientes, y existen infinitos campos con la misma propiedad.
- Si S es una superficie en \mathbb{R}^3 con la siguiente propiedad: $(x, y, z) \in S$ sii $(x, -y, z) \in S$, entonces el valor medio del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = y + y^3 + 2 \sin y + \alpha$ en S, es $\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- Si S es una superficie en \mathbb{R}^3 con la siguiente propiedad: $(x, y, z) \in S$ sii $(x, y, -z) \in S$, entonces el centro geométrico de S está contenido en el plano de ecuación $z = 0$.
- El momento estático de una superficie S respecto a cualquier plano que pasa por su baricentro es nulo.