1. Para cada una de las siguientes funciones f: R→R obtener mediante la definición, siempre que exista, la transformada de Laplace F: D_F→R, $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$, indicando el dominio D_F.

a. $u(t-a) = \begin{cases} 1, & si\ t \geq a \\ 0, & si\ t < a \end{cases}$

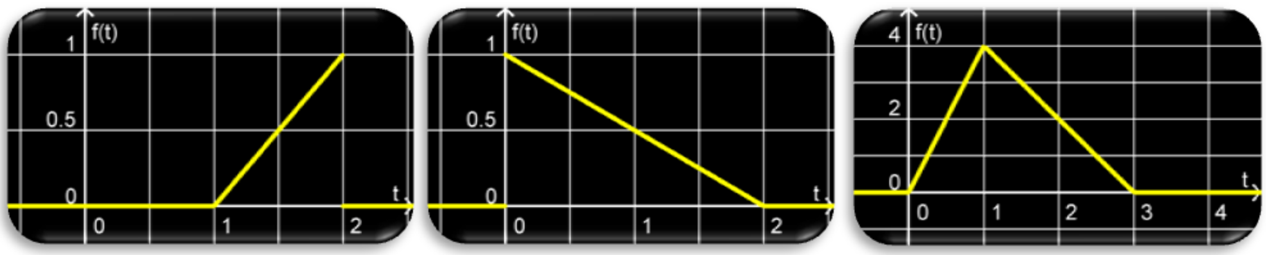
b. $f(t) = u(t-a) - u(t-b),\ 0 \leq a < b$

c. $f(t) = e^{at} u(t)$

d. $f(t) = e^{t^2} u(t)$

e. $h(t) = f(at), sabiendo\ que\ F(p) = L(f(t)), siendo\ la\ constante\ a > 0$

g. $f(t)$ definida por su gráfico en cada una de las figuras siguientes:



ⓘ🔑 Algunas respuestas: (a) $F: (0, \infty) \to R\ tal\ que\ F(p) = \frac{e^{-ap}}{p}$ (u es el 'escalón unitario'[1]) (b) $F: (0, \infty) \to R\ tal\ que\ F(p) = \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$, (d) no es L-transformable, (e) $H: (0, \infty) \to R\ tal\ que\ H(p) = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{p}{a}\right)$

2. Probar cada una de las siguientes propiedades (en todos los casos es $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$, mientras que α, β, a, son constantes reales). En todos los casos suponer cumplidas las condiciones de convergencia.

a. $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap} F(p)$

b. $\mathcal{L}^{-1}[F(p-a)] = e^{at} f(t)$

c. $\mathcal{L}[t\, f(t)] = -F'(p)$

d. $\mathcal{L}[\, f'(t)] = pF(p) - f(0)$

e. $\mathcal{L}[f(t)u(t-a)] = e^{-ap}\mathcal{L}[f(t+a)]$

f. $\mathcal{L} \int_0^t f(z)dz = \frac{F(p)}{p}$

g. $\mathcal{L}^{-1} \int_p^\infty F(z)dz = \frac{f(t)}{t}$

h. $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{L}[f] + \beta\mathcal{L}[g]$

3. La siguiente es una tabla elemental de transformadas. Obtener cada uno de los resultados nuevos, utilizando las propiedades anteriores. En la última, δ es la 'delta de Dirac' (Dirac, Proceedings of the Royal Society, 1927).

$f(t)$	$F(p)= \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$	$f(t)$	$F(p)= \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}\ , p > a$	$sen\ (at)\ u(t)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}\ , p > 0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}\ , n \in N, p > 0$	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}\ , n \in N, p > 0$
$e^{at} u(t)$	$\frac{1}{p-a}\ , p > a$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a} u(t), a \neq b$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}\ , p > \max\{\lvert a\rvert, \lvert b\rvert\}$

[1] Unit step function/sprungfunktion/fonction échelon unité/fonction brusque unité/función de Heaviside.

$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, p > a$	$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}u(t), a \neq b$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}, p > \max\{\lvert a\rvert, \lvert b\rvert\}$
$\cosh(at)\,u(t)$	$\frac{p}{p^2-a^2}, p > \lvert a\rvert$	$\frac{-1-at+e^{at}}{a^2}u(t), a \neq 0$	$\frac{1}{p^2(p-a)}, p > \lvert a\rvert$
$\operatorname{senh}(at)\,u(t)$	$\frac{a}{p^2-a^2}, p > \lvert a\rvert$	$(1+at)e^{at}u(t)$	$\frac{p}{(p-a)^2}, p > a$
$\cos(at)\,u(t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}, p > 0$	$\delta(t-a)u(t)$	e^{-ap}

4. Se define una lista de funciones que o bien es $f(t)$ o bien es $F(p)$. Obtener en cada caso la correspondiente función que completa el par tal que $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$, y definir el dominio de $F(p)$.

a. $F(p) = \frac{2p-4}{p^2-2p+5}$ b. $f(t) = t\,sen(t)u(t)$ c. $F(p) = \frac{2p-4}{p^2-2p+1}$ d. $F(p) = \frac{2p-4}{p^2-3p+2}e^{-p}$

e. $f(t) = 2t\cos^2 t\,u(t)$ f. $f(t) = t\,sen(t)e^{-t}u(t)$ g. $f(t) = e^{4t}t^4\cosh^2(2t)u(t)$

h. $F(p) = \frac{9}{(p+2)(p-1)^2},\ p > 1$ i. $f(t) = 2\cosh(t)\,u(t-1)$ j. $F(p) = \frac{2}{p^4-1}, p > 1$

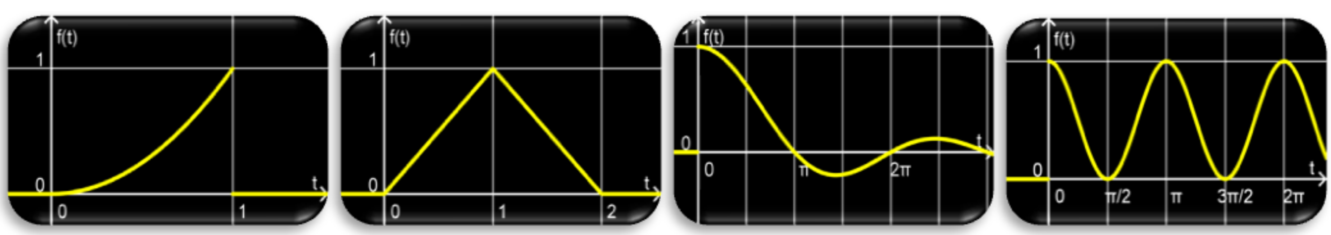
k. $F(p) = \frac{4p+6}{p^3+4p^2+3p}, p > 0$ l. $f(t) = t^2u(t-1)$ m. $f(t) = 2sen(t)\cosh(t)\,u(t)$

ñ. $f(t) = \frac{sen(at)}{t}u(t)$ o. $F(p) = \ln\left(\frac{p+a}{p+b}\right),\ p > \max\{\lvert a\rvert, \lvert b\rvert\}$ p. $f(t) = \int_0^t e^{-z}sen(z)dz$

Algunas respuestas: (a) $f(t) = e^t\big(\cos(2t) - sen(2t)\big)\,u(t),\ D_F = \{p \in R: p > 1\}$, (b) $F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$ $D_F = (0, \infty)$. (c) $f(t) = 2(1-t)\,e^t u(t),\ D_F = \{p \in R: p > 1\}$. (d) $f(t) = 2e^{t-1}\,u(t-1),\ D_F = \{p \in R: p > 2\}$. (e) $F(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$, $D_F = (0, \infty)$. (g) $F(p) = \frac{6}{p^5} + \frac{12}{(p-4)^5} + \frac{6}{(p-8)^5},\ p > 8$. (h) $f(t) = (e^{-2t} - e^t + 3te^t)\,u(t)$. (i) $F(p) = \frac{e^{-(p-1)}}{(p-1)} + \frac{e^{-(p+1)}}{(p+1)}, p > 1$. (j) $f(t) = \big(sh(t) - sen(t)\big)u(t)$. (k) $f(t) = (2 - e^{-t} - e^{-3t})\,u(t)$. (l) $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3} + \frac{2e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p},\ p > 0$. (m) $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}, p > 1$. (ñ) $F(p) = arctg\left(\frac{a}{p}\right), p > 0, 0 \leq arctg\left(\frac{a}{p}\right) \leq \pi/2$ (o) $f(t) = \frac{-e^{-at}+e^{-bt}}{t}u(t)$. (p) $F(p) = \frac{1}{p[(p+1)^2+1]}, p > 0$

5. Se presentan cuatro funciones $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$: establecer las correspondencias con sus gráficos.

a. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}\right]$ b. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2-2e^{-p}-2pe^{-p}-p^2e^{-p}}{p^3}\right]$ c. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}\right]$ d. $\mathcal{L}^{-1}\left[arctg\left(\frac{1}{p}\right)\right]$



6. La función $h(t) = f(t) \star g(t) = \int_0^t f(z)\, g(t-z)dz$ es el producto de convolución[2] de f y g.

a. Probar que $f \star g = g \star f$, y que $\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f)\, \mathcal{L}(g)$ y utilizarlo, siempre que sea posible, para hallar las siguientes funciones.

b. $F(p) = \mathcal{L}[u(t-a) \star t^n], n \in \mathbb{N}$ c. $F(p) = \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{t-z} \cosh^2(az)\, dz\right]$ d. $F(p) = \mathcal{L}[e^{-t} \star e^t]$

e. $F(p) = \mathcal{L}\left[\int_0^t (t-z)^2\, z^2 dz\right]$ f. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p(p^2-1)}\right], p > 1$ g. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2p^3}{p^4-1}\right], p > 1$

h. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2p^2}{p^4-1}\right], p > 1$

Algunas respuestas: (b) $F(p) = n!\frac{e^{-ap}}{p^{n+1}}, p > 0$. (c) $F(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2-4a^2}\right), p > \max\{1, |2a|\}$. (d) $F(p) = \frac{1}{p^2-1}, p > 1$ (e) $F(p) = \frac{4}{p^6}, p > 0$ (f) $f(t) = (-2 + e^{-t} + e^t)\, u(t)$ (g) $f(t) = (\cosh(t) + \cos(t))\, u(t)$ (h) $f(t) = (\mathrm{sh}(t) + \mathrm{sen}(t))\, u(t)$

7. Aplicar la Transformada de Laplace para obtener la función x = x(t) que satisface cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $\dot{x} + ax = 0, x(0) = 1$ b. $\dot{x} + 2x = 3 + 2t, x(0) = 1$ c. $\ddot{x} + x = 2cos(t), x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$

d. $\ddot{x} - \dot{x} + 9x = t^2 e^{3t}, x(0) = 2, \dot{x}(0) = 6$ e. $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 2cos(t) - 2sen(t), x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, \ddot{x}(0) = 0$

f. $\dot{x} + x = f(t), x(0) = 0, f(t) = \begin{cases} 1, & si\ 0 < t < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$; graficar la solución y analizar su suavidad en $t_0 = 0$ y en $t_1 = 1$

g. $\ddot{x} + x = \delta(t), x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ h. $\ddot{x} + x = \delta(t) - u(t), x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$

(a) $x(t) = e^{-at}\, u(t)$ (b) $x(t) = (1+t)\, u(t)$
(c) $x(t) = (\cos(t) + t\, sen(t))\, u(t)$ (d) $x(t) = \frac{e^{3t}}{12}(24 + t^4)\, u(t)$
(e) $x(t) = sen(t)\, u(t)$ (f) $x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & si\ 0 \le t < 1 \\ ee^{-t} - e, & si\ 1 \le t \end{cases}$
la solución x del ejercicio (f) produce una respuesta continua en $t_0 = 0$ y en $t_1 = 1$, pero no derivable allí, como se observa directamente en la figura, con los puntos del gráfico señalados con un círculo rojo. (g) $x(t) = sen(t)\, u(t)$

8. Aplicar la Transformada de Laplace para obtener las funciones x = x(t), y=y(t) que satisfacen el problema de valor inicial lineal dado matricialmente por X' = AX + B, $X(0) = X_0$, donde $X(t) = (x(t) \quad y(t))^T$ es la matriz incógnita.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

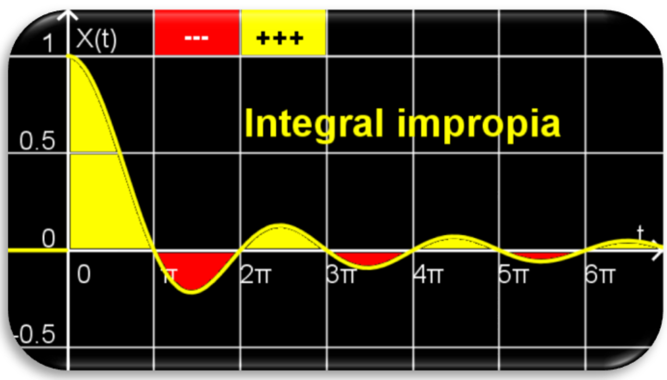
[2] Convolution/composition/prodotto di composizione/faltung/producto de composición.

c. $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4t+1\\ \frac{3}{2}t^2\end{pmatrix}, X_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ d. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\delta(t-\pi)\\ 0\end{pmatrix}, X_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

e. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}u(t)\\ 0\end{pmatrix}, X_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Algunas respuestas: (a) X(t)= $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}u(t)$ (b) X(t)= $2\begin{pmatrix}\cosh(t)\\ -senh(t)\end{pmatrix}u(t)$ (b) X(t)= $\begin{pmatrix}t^2+t\\ -\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}u(t)$
(d) X(t)= $\begin{pmatrix}-sen(t)\\ -cos(t)\end{pmatrix}u(t-\pi)$ (e) X(t)= $\begin{pmatrix}sen(t)\\ 1-cos(t)\end{pmatrix}u(t)$

9. Los siguientes problemas surgen en diversas áreas de la ingeniería, y pueden ser resueltos con relativa sencillez aplicando la Transformada de Laplace.



a. *Integrales impropias*. En diversas aplicaciones surgen integrales impropias al resolver modelos; una de gran importancia es la integral convergente $I=\int_0^\infty \frac{sen\,(t)}{t}dt$, cuyo valor mide geométricamente las regiones tal como se muestran en la figura. Calcularla. Utilizar el resultado para luego obtener la integral impropia $I_3=\int_0^\infty \frac{sen^3(t)}{t}dt$, cuyo valor es la mitad del anterior.

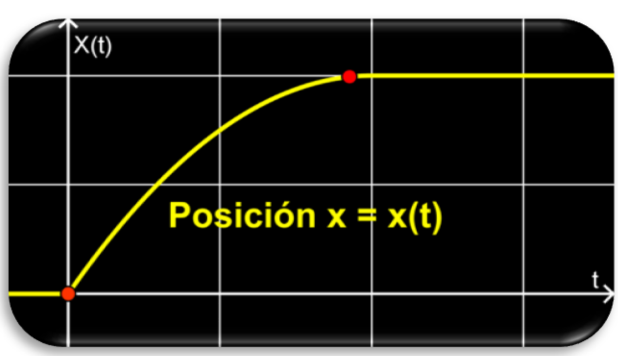
$I=\frac{\pi}{2}$ [para la segunda integral puede ser útil la identidad funcional $sen^3(t)=-\frac{1}{4}sen(3t)+\frac{3}{4}sen(t)$]

b. *Circuito R-C*. Un condensador de capacidad C en serie con una resistencia R en un circuito alimentado con una fuente de potencial E constituyen un circuito R-C; la segunda ley de Kirchoff es $Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(z)dz=E$, donde i = i(t) es la corriente establecida. Admitiendo que R, C son constantes positivas, determinar la corriente en los siguientes casos. (b1) E = 1, i(0) = 1. (b2) E(t) = δ(t), i(0) = 0. (b3) E(t) = u(t)–u(t–1), i(0) = 0.

c. *Ecuaciones Integrales*. Hallar, para cada uno, de los casos siguientes, una función f tal que satisfaga la ecuación integral. (c1) $f(t)+\int_0^t (t-z)f(z)dz=t$. (c2) $f(t)+\int_0^t f(z)dz=1$. (c3) $f(t)=sen(t)+2\int_0^t \cos(t-z)f(z)dz$ (c4) $f(t)=1+t+\int_0^t e^{2t-2z}f(z)dz$

(c1) $f(t)=sen(t)u(t)$ (c2) $f(t)=e^{-t}u(t)$ (c3) $f(t)=te^{t}u(t)$ (c4) $f(t)=(1+2t)u(t)$

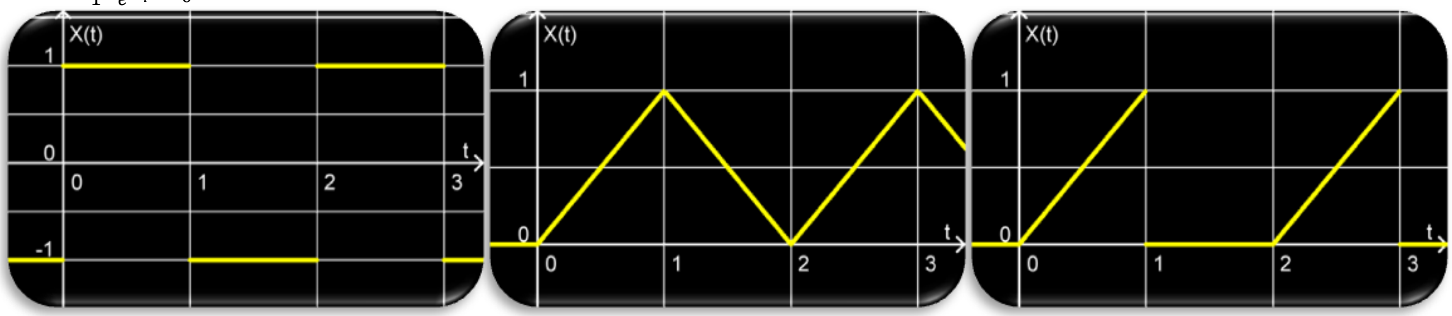
d. Una partícula de masa m, inicialmente en reposo, recibe en el instante $t_0=0$ un impacto αδ(t), siendo α una constante positiva (su unidad es de cantidad de movimiento). Si el coeficiente de rozamiento sobre la superficie que se desliza la partícula es μ, determinar el instante T en que se detiene y la distancia d recorrida. Graficar las funciones posición x = x(t), velocidad v = v(t), aceleración a = a(t) para 0< t < T.



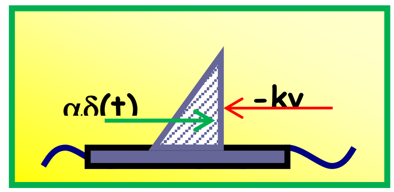
$d=\frac{\alpha^2}{2\mu m^2 g}, T=\frac{\propto}{\mu m g}, x(t)=\frac{\propto}{m}t-\frac{1}{2}\mu g t^2,\ v(t)=\frac{\propto}{m}-\mu g t,$ $a(t)=-\mu g, para\ 0<t<T$. Observar en el gráfico los puntos rojos: la función posición es continua (la partícula no

'desaparece' en ningún instante). ¿Qué sucede con la velocidad y la aceleración en esos instantes?

e. Función periódica. Probar que la Transformada de Laplace de una función de período T es $F(p) = \frac{1}{1-e^{-pt}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$, y aplicar este resultado a las funciones periódicas dadas por los siguientes gráficos.



f. El velero de masa m se encuentra detenido en el instante $t_0 = 0$, en el que recibe un súbita ráfaga cuya acción se modela con $\alpha\delta(t)$, siendo las dimensiones de α las de una cantidad de movimiento. Si la resistencia del medio es proporcional a la velocidad v con la que se desplaza, determinar la distancia d que el velero podrá avanzar, si no se suceden nuevas ráfagas.



$d = \frac{\alpha}{k}$