Partiel 1
Mardi 12 mars 2024
Corrigé

Question de cours.

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Donner la définition de la projection orthogonale de E sur F.

La projection orthogonale de E sur F est l'unique endomorphisme $p : E \to E$ tel que pour tout x dans E, le vecteur $p(x)$ est dans F et est orthogonal à $x-p(x)$. On peut également définir $p(x)$ comme l'unique élément de F situé à distance $d(x,F)$ de x.

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2, que l'on munit de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = (1, X, X^2)$, dont on note $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ la base duale. On considère les trois formes formes linéaires suivantes sur E :

$$\begin{aligned} \ell_1 :&P \mapsto P(2), \\ \ell_2 :&P \mapsto P(-2), \\ \ell_3 :&P \mapsto P'(2). \end{aligned}$$

(1) *Exprimer ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 comme combinaisons linéaires des éléments e_1^*, e_2^*, e_3^* de la base duale $\mathcal{B}^*$.*

Soit P un élément de E, et notons $a_i = e_i^*(P)$,de sorte que P est égal à $\sum_i a_i e_i = a_1 + a_2 X + a_3 X^2$. On a

$$\begin{aligned} \ell_1(P) &= P(2) = a_1 + 2a_2 + 4a_3 = (e_1^* + 2e_2^* + 4e_3^*)(P), \\ \ell_2(P) &= P(-2) = a_1 - 2a_2 + 4a_3 = (e_1^* - 2e_2^* + 4e_3^*)(P), \\ \ell_2(P) &= P'(2) = a_2 + 4a_3 = (e_2^* + 4e_3^*)(P), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \ell_1 &= e_1^* + 2e_2^* + 4e_3^*, \\ \ell_2 &= e_1^* - 2e_2^* + 4e_3^*, \\ \ell_2 &= \phantom{e_1^* - 2{}} e_2^* + 4e_3^*. \end{aligned}$$

(2) *Démontrer que* (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) *est une base de* E^*.

Par la question précédente, la matrice formée des coefficients de (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) dans la base $\mathcal{B}^*$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 4. \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut -16, et est en particulier non nul. Donc (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de E^*.

(3) *Déterminer la base antéduale de* (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3).

Il s'agit de trouver des éléments P_1, P_2, P_3 de E tels que $e_i^*(P_j) = \delta_{i,j}$. En particulier, le polynôme P_3, de degré au plus 2, s'annule en 2 et en -2. On a donc $P_3 = c_3(X-2)(X+2) = c_3(X^2-4)$ pour une constante c_3 ; la condition $P_3'(2) = 1$ donne alors $c_3 \cdot 4 = 1$, d'où $P_3 = \frac{1}{4}(X^2 - 4)$.

Par ailleurs, on a $P_2(2) = P_2'(2) = 0$, donc le polynôme P_2, de degré au plus 2, admet une racine double en 2 ; on a ainsi $P_2 = c_2(X-2)^2$. La condition $P_2(-2) = 1$ donne $16c_2 = 1$, puis $P_2 = \frac{1}{16}(X-2)^2$.

Enfin, le polynôme $P_1 = 1 - P_2$ vérifie $\ell_i(P_1) = \delta_{i,1}$. On en conclut que la base antéduale de (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est donnée par

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - \frac{1}{16}(X-2)^2 = \frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{16}e_3 \\ P_2 &= \frac{1}{16}(X-2)^2 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{16}e_3, \\ P_3 &= \frac{1}{4}(X^2-4) = -e_1 + \frac{1}{4}e_3. \end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et soit u, v des vecteurs unitaires de E tels que $\langle u|v \rangle = \frac{1}{2}$. On note F le sous-espace vectoriel de E défini par les équations $\langle x|u \rangle = 0$ et $\langle x|v \rangle = 0$, et p_F la projection orthogonale correspondante.

(1) *Justifier que la famille* (u, v) *est libre.*

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\langle u|v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$, avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires. Puisque $\frac{1}{2} = |\langle u|v \rangle|$ est différent de $1 = ||u|| \cdot ||v||$, on en déduit que u et v ne sont pas colinéaires.

(2) *Soit* (e_1, e_2) *la base orthonormée de* $\mathrm{Vect}(u, v)$ *obtenue par application de l'algorithme de Gram-Schmidt à* (u, v)*. Exprimer* (e_1, e_2) *comme combinaison linéaire de* u, v*.*

Puisque u est unitaire, on a simplement $e_1 = u$. On calcule alors

$$v - \langle v|e_1\rangle e_1 = v - \langle v|u\rangle u = v - \frac{1}{2}u.$$

Le carré de la norme de ce vecteur vaut

$$||v||^2 - 2\langle v|\frac{1}{2}u\rangle + ||\frac{1}{2}u||^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

On a donc

$$e_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} (v - \frac{1}{2}u) = \frac{2}{\sqrt{3}}v - \frac{1}{\sqrt{3}}u.$$

(3) *Soit* x *un élément de* E*. Exprimer* $p_F(x)$ *en fonction de* x, e_1, e_2*, puis en fonction de* x, u, v*.*

Par définition, F est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(u, v)$. Ainsi, $F^\perp$ est le sous-espace $\mathrm{Vect}(u, v)$, dont (e_1, e_2) est une base orthonormée. On a donc

$$p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x) = x - \langle x|e_1\rangle e_1 - \langle x|e_2\rangle e_2.$$

En remplaçant e_1, e_2 par leurs expressions en fonction de u,v, on trouve

$$\begin{aligned} p_F(x) &= x - \langle x|u\rangle u - \frac{1}{3}\langle x|2v - u\rangle(2v - u), \\ &= x - \frac{2}{3}\langle x|u\rangle(2u - v) - \frac{2}{3}\langle x|v\rangle(2v - u). \end{aligned}$$

À noter que l'énoncé est symétrique en u, v, ce qui explique que l'expression obtenue pour p_F le soit également.

(4) *Soit* x *un vecteur unitaire tel que* $\langle x|u\rangle = \frac{1}{3}$ *et* $\langle x|v\rangle = \frac{2}{3}$*. Calculer la distance de* x *à* F*.*

L'élément de F situé à distance minimale de x n'est autre que $p_F(x)$. La distance $d(x, F)$ de x à F vaut donc $||x - p_F(x)||$. On calcule

$$\begin{aligned} x - p_F(x) &= \frac{2}{3}\langle x|u\rangle(2u - v) + \frac{2}{3}\langle x|v\rangle(2v - u), \\ &= \frac{2}{9}(2u - v) + \frac{4}{9}(2v - u), \\ &= \frac{2}{3}v. \end{aligned}$$

Donc $d(x, F)$ vaut $||\frac{2}{3}v|| = \frac{2}{3}$.

Exercice 3.

Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) *Justifier que f est diagonalisable dans une base orthonormée.*

La matrice de f dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique ; l'endomorphisme f est auto-adjoint, ce qui équivaut, par le théorème spectral, à être diagonalisable dans une base orthonormée.

(2) *Vérifier que -2 est valeur propre de f, et déterminer l'espace propre correspondant.*

Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Le système linéaire $AX = -2X$ admet $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour ensemble des solutions. On en déduit que -2 est effectivement valeur propre de f, et que l'espace propre correspondant est $E_2 = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3)$.

(3) *Expliciter une base orthonormée $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres de f. On exprimera les éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Par la question précédente, le vecteur normé $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ est un vecteur propre de f, de valeur propre -2. Puisque f est auto-adjoint et qu'il préserve la droite $E_2 = \mathrm{Vect}(u_1)$, il préserve également le plan $P = \mathrm{Vect}(u_1)^{\perp}$, dont $(v_2, v_3) = (e_2, e_1 + e_3)$ est une base. On calcule

$$f(v_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 = 3v_2 + 2v_3,$$
$$f(v_3) = 4(e_1 + e_2 + e_3) = 4v_2 + 4v_3.$$

La matrice de $f_{|P}$ dans la base (v_2, v_3) est donc

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de B est $X^2 - 7X + 4$, et ses racines sont $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{33})$. En résolvant les systèmes linéaires $BX = \lambda_\pm X$, on obtient des vecteurs propres

$$v_\pm = (\frac{1}{4}\lambda_\pm - 1)v_2 + v_3 = e_1 + (\frac{1}{4}\lambda_\pm - 1)e_2 + e_3.$$

On obtient donc une base orthonormée de vecteurs propres en complétant $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ avec les vecteurs

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2 + (\frac{1}{4}\lambda_+ - 1)^2}}(e_1 + (\frac{1}{4}\lambda_+ - 1)e_2 + e_3),$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2 + (\frac{1}{4}\lambda_- - 1)^2}}(e_1 + (\frac{1}{4}\lambda_- - 1)e_2 + e_3).$$

Exercice 4.

Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormée.

(1) *Soit P_1 le plan d'équation $x + y - 2z = 0$, et soit f la symétrie orthogonale par rapport à P_1. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.*

Puisque P_1 est l'orthogonal de $e_1 + e_2 - 2e_3$, on a

$$f(x) = x - 2p_{P_1^\perp}(x) = x - \frac{1}{3}\langle x|e_1 + e_2 - 2e_3\rangle(e_1 + e_2 - 2e_3).$$

On en déduit que l'on a

$$f(e_1) = e_1 - \frac{1}{3}\langle e_1|e_1 + e_2 - 2e_3\rangle(e_1 + e_2 - 2e_3) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3,$$
$$f(e_2) = e_2 - \frac{1}{3}\langle e_2|e_1 + e_2 - 2e_3\rangle(e_1 + e_2 - 2e_3) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3,$$
$$f(e_3) = e_3 - \frac{1}{3}\langle e_3|e_1 + e_2 - 2e_3\rangle(e_1 + e_2 - 2e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3.$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) *Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que g est la symétrie orthogonale par rapport à un plan P_2 que l'on identifiera.

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est orthogonale et symétrique, donc g est une isométrie auto-adjointe, c'est-à-dire une symétrie orthogonale. Le système linéaire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)X = X$ admet pour ensemble des solutions $P_2 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$, donc g est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan P_2.

(3) *Justifier que la composition $f \circ g$ est une isométrie, et démontrer que pour tout élément u de $P_1 \cap P_2$, on a $f \circ g(u) = u$.*

Toute composition d'isométries est encore une isométrie ; puisque f et g sont des isométries, leur composition $f \circ g$ en est également. Si u est un élément de $P_1 \cap P_2$, alors u appartient aux plans fixes de symétries f, g, donc $f(u) = u$ et $g(u)$; on en déduit que l'on a $f \circ g(u) = f(g(u)) = f(u) = u$.

(4) *Calculer $(f \circ g)^2$, et en déduire les éléments caractéristiques de l'isométrie $f \circ g$.*

La matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g)$ vérifie $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$, et donc

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit à nouveau d'une matrice symétrique, donc $f \circ g$ est une symétrie orthogonale. En particulier, on a $(f \circ g)^2 = \mathrm{id}$. Par ailleurs le déterminant de $f \circ g$ vaut $(-1) \cdot (-1) = 1$; il s'agit donc d'une isométrie directe. Une symétrie orthogonale de déterminant 1 est soit l'identité, soit un retournement. On a manifestement $C \neq I_3$, donc $f \circ g$ est un retournement, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une certaine droite D.

Le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$ est dans $P_1 \cap P_2$, et donc dans le lieu D des points fixes de $f \circ g$ par la question précédente. Par conséquent, $f \circ g$ est le retournement par rapport à la droite $D = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.