



EA4 – Éléments d'algorithmique
Contrôle du 22 mars 2024 – Sujet A
Durée : 1 heure 30

*Aucun document autorisé
Appareils électroniques éteints et rangés*

Nom :

Prénom :

Numéro :

Groupe :

Exercice 1 :

Étant donné une liste L de nombres (non nécessairement entiers) de longueur n , on cherche à déterminer le nombre d'éléments *distincts* dans L .

Décrire un algorithme naïf permettant de résoudre ce problème sans modifier la liste L , et avec mémoire auxiliaire constante.

Quelle est sa complexité (en temps) ? Justifier.

On autorise maintenant les modifications de L et/ou l'utilisation de mémoire auxiliaire.

Comment résoudre ce problème avec une complexité (dans le pire cas) strictement meilleure ?

Quelle est la complexité de cette méthode ?

Exercice 2 :

On dit qu'un tableau T de n entiers distincts est *circulairement trié* si, pour un certain indice k (*inconnu a priori*), $T[k:] + T[:k]$ est trié en ordre croissant.

Décrire un algorithme de complexité optimale pour tester si un tableau T est circulairement trié.

Quelle est sa complexité (en temps) ? Justifier son optimalité.

On suppose maintenant que T est circulairement trié

Écrire une fonction `compare(i)` de coût constant qui renvoie respectivement 0, -1 ou 1 selon que i est égal, strictement inférieur ou strictement supérieur à l'indice du minimum de T .

Décrire un algorithme aussi efficace que possible pour déterminer l'indice du minimum de T .

Quelle est sa complexité (en temps) ?

Exercice 3 : des vis et des écrous

Catastrophe! Alors que tout était méticuleusement bien classé, votre chat a semé la pagaille dans votre stock de vis et d'écrous, qui gisent maintenant en vrac sur l'établi (et un peu par terre). Comment remettre de l'ordre? Impossible de comparer directement deux vis entre elles, ou deux écrous entre eux – les différences sont trop minimes. La seule solution consiste à tenter d'assembler une vis et un écrou pour déterminer s'ils ont le même diamètre, ou si l'un est plus grand que l'autre.



une vis + un écrou
= un boulon

(On suppose donc ici, implicitement, qu'il existe un ordre total sur les calibres des vis et des écrous, donné par le diamètre, et on néglige l'influence du pas de vis. On suppose également que le stock comprend autant de vis que d'écrous d'un même calibre)

Décrire une méthode aussi efficace que possible pour trouver le (ou un) plus petit écrou.

Quelle est sa complexité (en temps)?

En déduire un algorithme inspiré du tri par sélection pour trier les vis et les écrous.

Quelle est sa complexité (en temps)?

Décrire un algorithme plus efficace (au moins en moyenne) pour trier vis et écrous.

Quelle est sa complexité (en temps) dans le pire cas ? dans le meilleur cas ? en moyenne, en supposant que tous les écrous (et toutes les vis) sont de calibre distinct ?

Exercice 4 :

On rappelle l'identité remarquable $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$. En déduire une expression de $(2^p \cdot a + b)^2$ faisant intervenir uniquement des puissances de 2 et les trois carrés a^2 , b^2 et $(a + b)^2$.

En déduire un algorithme de type « diviser pour régner » *inspiré* de l'algorithme de Karatsuba pour calculer le carré d'un entier de n bits en temps $\Theta(n^{\log_2 3})$.

Justifier la complexité de cet algorithme.