# Module EA4 – Éléments d'Algorithmique II

## *Outils pour l'analyse des algorithmes*

Dominique Poulalhon
`dominique.poulalhon@irif.fr`

Université Paris Cité
L2 Informatique & DL Bio-Info, Jap-Info, Math-Info
Année universitaire 2023-2024

# Arbres Binaires de Recherche

## I. Motivations – Rappels

# Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

## Solution 1 : une liste de ses éléments

## Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

Solution 1 : une liste de ses éléments

***Problème :*** la complexité ***en espace*** peut être sensiblement plus importante que nécessaire s'il y a des éléments répétés

## Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

Solution 1 : une liste de ses éléments

***Problème :*** la complexité ***en espace*** peut être sensiblement plus importante que nécessaire s'il y a des éléments répétés

c'est aussi un problème pour la complexité ***en temps*** : si un ensemble de $n$ éléments est représenté par une liste *(avec répétitions)* de longueur $\ell$, la complexité *en temps* de n'importe quel algo (parcours, recherche dichotomique...) dépend de $\ell$ et non de $n$

## Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

Solution 1 : une liste de ses éléments

***Problème :*** la complexité ***en espace*** peut être sensiblement plus importante que nécessaire s'il y a des éléments répétés

c'est aussi un problème pour la complexité ***en temps*** : si un ensemble de $n$ éléments est représenté par une liste *(avec répétitions)* de longueur $\ell$, la complexité *en temps* de n'importe quel algo (parcours, recherche dichotomique...) dépend de $\ell$ et non de $n$

donc : il est préférable d'interdire les doublons

## Solution 1 (bis) : une liste de ses éléments, sans doublon

| *(dans le pire cas)* | tableau | | liste chaînée | |
|---|---|---|---|---|
| | non trié | trié | non triée | triée |
| recherche d'un élément | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| minimum/maximum | | $\Theta(1)$ | | $\Theta(1)$ |
| sélection du k$^e$ plus petit | | | | $\Theta(k)$ |
| union/intersection/... | $\Theta(n^2)$ $(*)$ <br> $\Theta(n \log n)$ $(**)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n^2)$ $(*)$ <br> $\Theta(n \log n)$ $(**)$ | $\Theta(n)$ |

$(*)$ sans trier $(**)$ en triant

## Solution 1 (bis) : une liste de ses éléments, sans doublon

| *(dans le pire cas)* | tableau | | liste chaînée | |
|---|---|---|---|---|
| | non trié | trié | non triée | triée |
| recherche d'un élément | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| minimum/maximum | | $\Theta(1)$ | | $\Theta(1)$ |
| sélection du $k^e$ plus petit | | | | $\Theta(k)$ |
| union/intersection/... | $\Theta(n^2)$ $(*)$ <br> $\Theta(n \log n)$ $(**)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n^2)$ $(*)$ <br> $\Theta(n \log n)$ $(**)$ | $\Theta(n)$ |

$(*)$ sans trier $(**)$ en triant

Justification rapide :

- pour la recherche : linéaire *vs* dichotomique
- pour la sélection : *sélection rapide vs* accès direct ou parcours des $k$ premiers maillons
- pour l'union ou l'intersection : via la fusion de listes triées

## Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

**Solution 1 (bis) : une liste de ses éléments, sans doublon**

| *(dans le pire cas)* | tableau | | liste chaînée | |
|---|---|---|---|---|
| | non trié | trié | non triée | triée |
| recherche d'un élément | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| minimum/maximum | | $\Theta(1)$ | | $\Theta(1)$ |
| sélection du $k^e$ plus petit | | | | $\Theta(k)$ |
| union/intersection/... | $\Theta(n^2)$ $(*)$ <br> $\Theta(n \log n)$ $(**)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n^2)$ $(*)$ <br> $\Theta(n \log n)$ $(**)$ | $\Theta(n)$ |

$(*)$ sans trier $(**)$ en triant

$\Longrightarrow$ pour ces opérations ***statiques***, supériorité nette du tableau trié

## Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

**Solution 1 (bis) : une liste de ses éléments, sans doublon**

Quid des opérations *dynamiques* ?

## Solution 1 (bis) : une liste de ses éléments, sans doublon

### Quid des opérations *dynamiques* ?

| | tableau | | liste chaînée | |
|---|---|---|---|---|
| | non trié | trié | non triée | triée |
| recherche d'un élément | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| insertion | $+\Theta(1)$ | $+\Theta(n)$ | $+\Theta(1)$ | $+\Theta(1)$ |
| suppression | $+\Theta(n)$ | $+\Theta(n)$ | $+\Theta(1)$ | $+\Theta(1)$ |

*(chaque insertion/suppression nécessite une recherche préalable)*

# Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

## Solution 1 (bis) : une liste de ses éléments, sans doublon

Quid des opérations *dynamiques* ?

| | tableau | | liste chaînée | |
|---|---|---|---|---|
| | non trié | trié | non triée | triée |
| recherche d'un élément | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| insertion | $+\Theta(1)$ | $+\Theta(n)$ | $+\Theta(1)$ | $+\Theta(1)$ |
| suppression | $+\Theta(n)$ | $+\Theta(n)$ | $+\Theta(1)$ | $+\Theta(1)$ |

*(chaque insertion/suppression nécessite une recherche préalable)*

$\Longrightarrow$ coût linéaire pour chaque forme de liste !

*Le tableau est une forme trop* rigide *pour permettre des évolutions peu coûteuses : tout nouvel élément n'a qu'une seule place possible, et lui faire une place au bon endroit ne peut pas se faire uniquement via des modifications locales.*

## Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

Moralité : il faudrait trouver une structure ayant à la fois

- la souplesse de la liste chaînée,
- le caractère « ordonné » des listes triées,
- un moyen d'accès rapide à n'importe quel élément

*(peut-être pas en $O(1)$, mais pas en $\Theta(n)$)*

*(et toujours sans doublon)*

## Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

Moralité : il faudrait trouver une structure ayant à la fois

- la souplesse de la liste chaînée,
- le caractère « ordonné » des listes triées,
- un moyen d'accès rapide à n'importe quel élément

*(peut-être pas en* $O(1)$*, mais pas en* $\Theta(n)$*)*

*(et toujours sans doublon)*

Solution 2 : un arbre binaire, « trié », sans doublon

## Quelle structure de données pour représenter un ensemble ?

Moralité : il faudrait trouver une structure ayant à la fois

- la souplesse de la liste chaînée,
- le caractère « ordonné » des listes triées,
- un moyen d'accès rapide à n'importe quel élément

*(peut-être pas en $O(1)$, mais pas en $\Theta(n)$)*

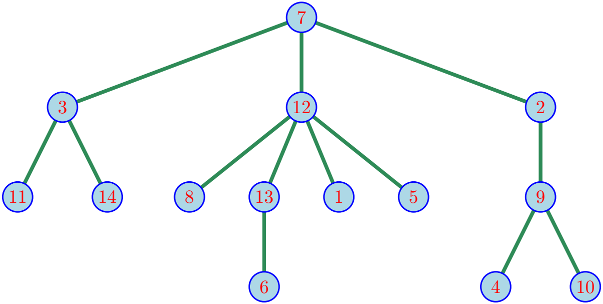
*(et toujours sans doublon)*

Solution 2 : un arbre binaire, « trié », sans doublon

- multiples formes possibles $\implies$ souplesse pour ajouter ou supprimer un élément en se contentant de modifications locales,
- on veut ranger les éléments – les petits à gauche, et les grands à droite, pour guider la recherche,
- si l'arbre est « à peu près » équilibré, aucun élément ne sera « très loin » de la racine (on peut espérer une hauteur en $\Theta(\log n)$).

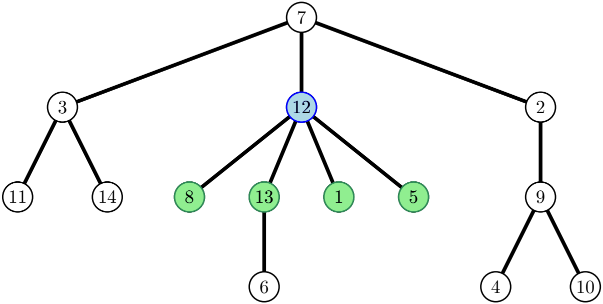
Arbres Binaires de Recherche

II. Généralités sur les arbres



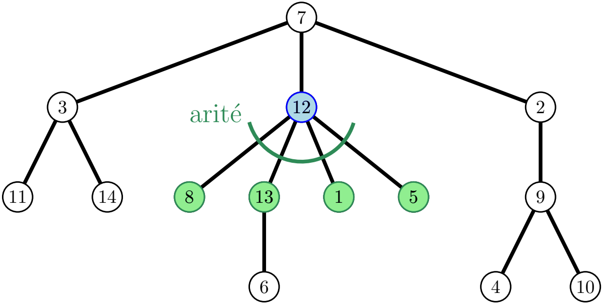

sommets contenant des étiquettes reliés par des arêtes

Ici, 14 sommets, reliés par 13 arêtes, et étiquetés de 1 à 14



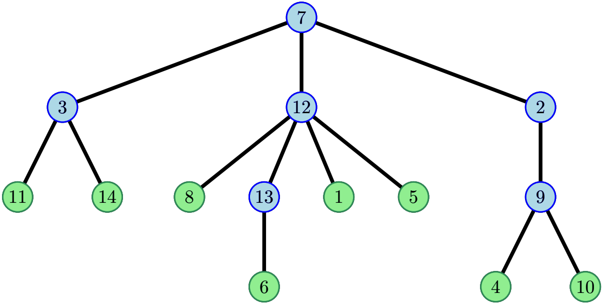

hiérarchie entre les sommets : père , fils

Le sommet d'étiquette 12 a 4 fils (d'étiquettes 8, 13, 1 et 5).




hiérarchie entre les sommets : père , fils

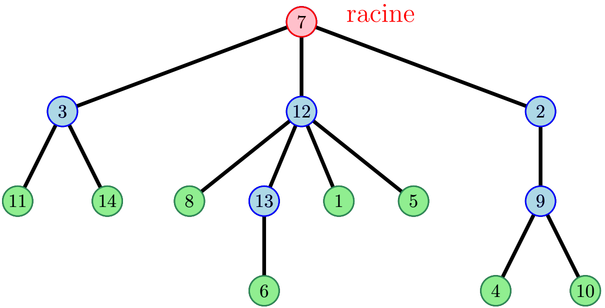
Le sommet d'étiquette 12 a 4 fils (d'étiquettes 8, 13, 1 et 5).
On dit qu'il est d'arité 4, ou que c'est un nœud quaternaire.




sommet = nœud ou feuille

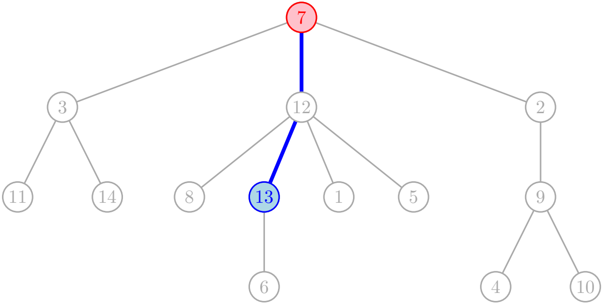
Les sommets d'arité 0 sont appelés *feuilles* – ici il y en a 8.
Les autres sont les *nœuds* – ici, 6.

# Rappels de terminologie



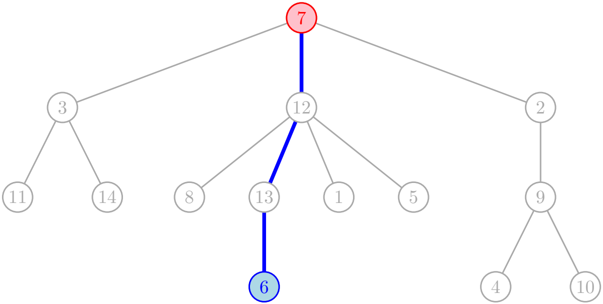

sommet $=$ nœud ou feuille

Les sommets d'arité 0 sont appelés *feuilles* – ici il y en a 8.
Les autres sont les *nœuds* – ici, 6.
Le seul sommet sans père est la racine – c'est en général un nœud.



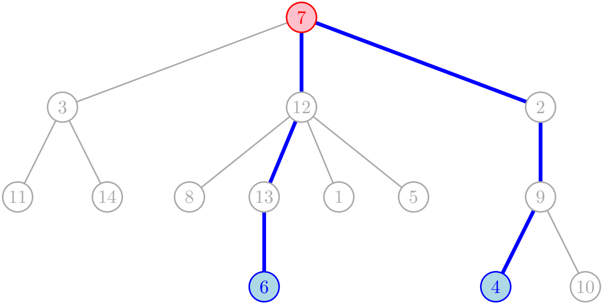

profondeur d'un sommet = distance à la racine

Le sommet d'étiquette 13 est à profondeur 2.




hauteur de l'arbre = profondeur maximale

La hauteur de cet arbre est 3.

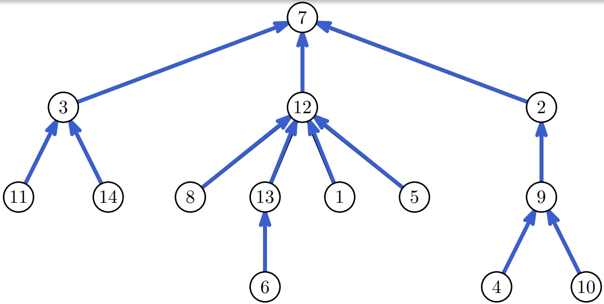



hauteur de l'arbre = profondeur maximale

La hauteur de cet arbre est 3.
Les sommets à profondeur 3 sont donc des feuilles
(et il peut très bien y en avoir plusieurs)

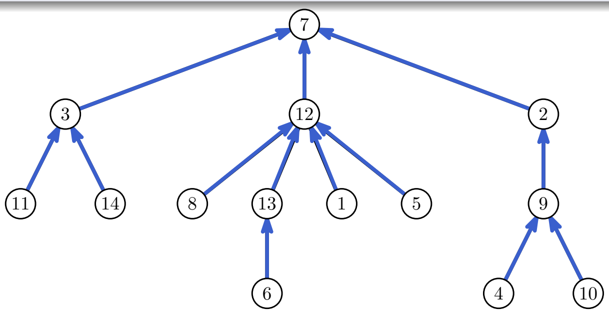
# Représentation des arbres – solution I

en gardant pour chaque sommet la référence du père (dans le sommet, ou regroupées dans un tableau)



# Représentation des arbres – solution I

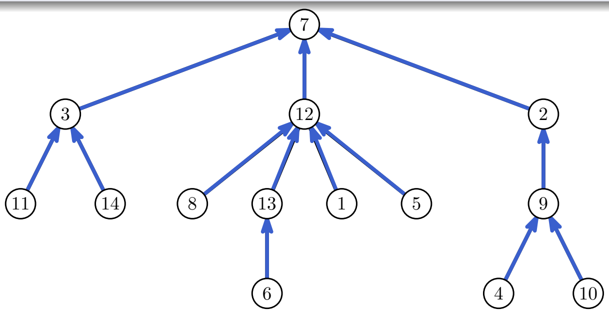
en gardant pour chaque sommet la référence du père (dans le sommet, ou regroupées dans un tableau)




avantage : représentation extrêmement compacte

# Représentation des arbres – solution I

en gardant pour chaque sommet la référence du père (dans le sommet, ou regroupées dans un tableau)



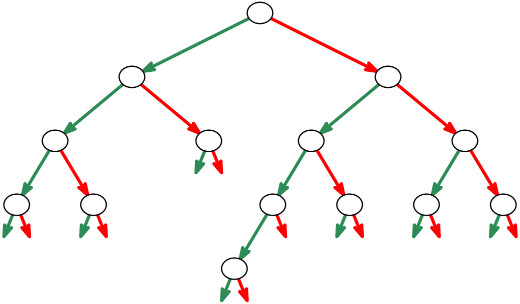

avantage : représentation extrêmement compacte

***(gros) inconvénient :*** l'arbre ne peut être parcouru (efficacement) que de bas en haut... ce qui n'est pas ce qu'on souhaite faire en général

$\Longrightarrow$ essentiellement utilisée pour représenter une partition en sous-ensembles (structure *union-find*, *cf* cours d'algo de L3)

## Représentation des arbres – solution II

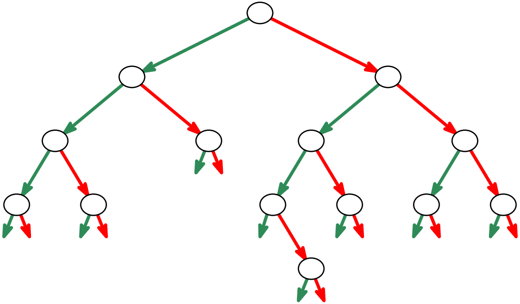
cas des arbres d'arité fixe, en particulier les arbres binaires : pour chaque nœud, stocker une référence de chaque fils



arbre binaire : au plus 2 fils par nœud, avec distinction entre fils gauche et fils droit. *(échanger les deux fils donne un arbre différent)*

## Représentation des arbres – solution II

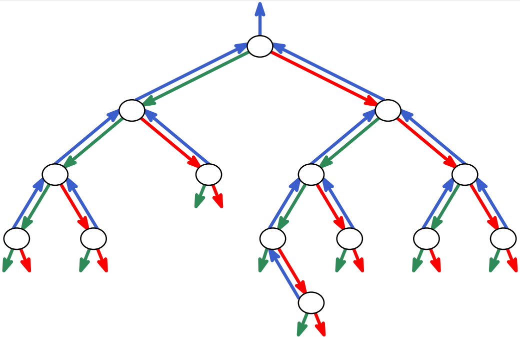
cas des arbres d'arité fixe, en particulier les arbres binaires : pour chaque nœud, stocker une référence de chaque fils



arbre binaire : au plus 2 fils par nœud, avec distinction entre fils gauche et fils droit. *(échanger les deux fils donne un arbre différent)*

## Représentation des arbres – solution II

cas des arbres d'arité fixe, en particulier les arbres binaires : pour chaque nœud, stocker une référence de chaque fils (et éventuellement du père)

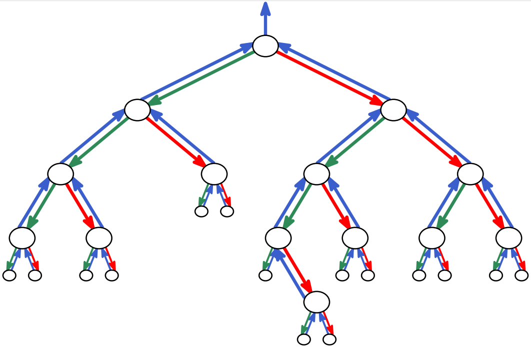


arbre binaire : au plus 2 fils par nœud, avec distinction entre fils gauche et fils droit. *(échanger les deux fils donne un arbre différent)*

ajouter un 3$^{e}$ pointeur vers le père facilite les manipulations, notamment les modifications (comme le double chaînage d'une liste)

# Représentation des arbres – solution II

cas des arbres d'arité fixe, en particulier les arbres binaires : pour chaque nœud, stocker une référence de chaque fils (et éventuellement du père)



*compléter* un arbre binaire = rajouter une feuille vide à la place de chaque pointeur vers un sommet absent

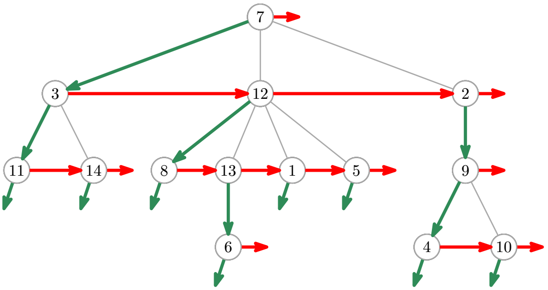
*(plus homogène, peut faciliter la programmation des modifications)*

arbres binaires *complets* : exactement 2 fils par nœud

# Représentation des arbres – solution III

*(Pour la culture générale, mais pas indispensable pour le cours sur les ABR)*

cas général : références du fils aîné et du frère cadet




le fils aîné sert de référence à la liste chaînée des fils.

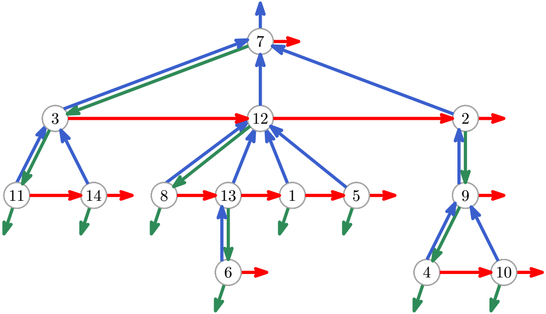
*i.e.* : on représente les arbres généraux par des arbres binaires *(dont la racine n'a pas de fils droit)* : le fils aîné d'un sommet devient son fils gauche, et son frère cadet devient son fils droit.

# Représentation des arbres – solution III

*(Pour la culture générale, mais pas indispensable pour le cours sur les ABR)*

cas général : références du fils aîné et du frère cadet

(et éventuellement du père)

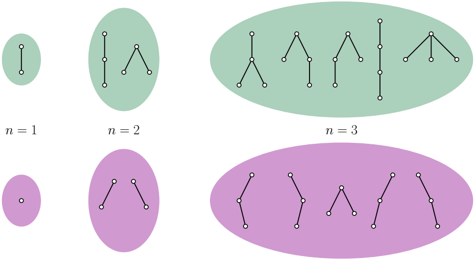



le fils aîné sert de référence à la liste chaînée des fils.

*i.e.* : on représente les arbres généraux par des arbres binaires *(dont la racine n'a pas de fils droit)* : le fils aîné d'un sommet devient son fils gauche, et son frère cadet devient son fils droit.

## Théorème

*Les arbres à $n+1$ sommets sont en bijection avec*
*les arbres binaires à $n$ sommets, et donc avec*
*les arbres binaires complets à $n$ nœuds et $n+1$ feuilles*




## Théorème (*admis*, juste pour avoir en tête que c'est un gros ensemble)

*Le nombre d'arbres binaires complets à $n$ nœuds et $n+1$ feuilles est*

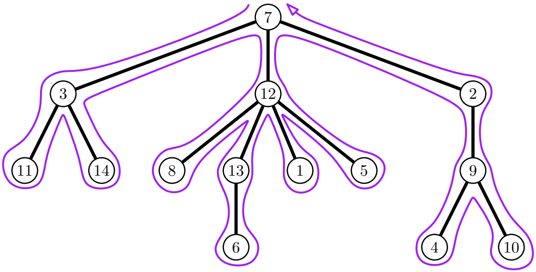
$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \in \Theta\left(\frac{4^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

À partir de maintenant, on suppose qu'on dispose des fonctions suivantes, dont le code dépend de la représentation choisie :

- `pere(noeud)`
- `liste_des_fils(noeud)`
- `arite(noeud)`
- `etiquette(noeud)`
- (pour les arbres binaires) `gauche(noeud)` et `droite(noeud)`

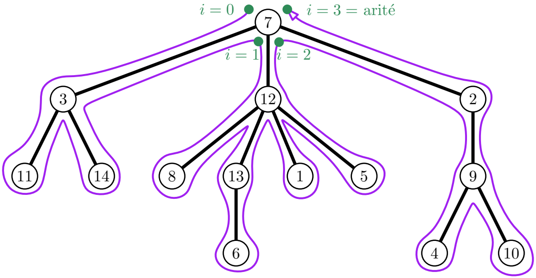
Que peut-on faire avec un arbre ? Par exemple, peut-on parcourir tous les éléments qu'il contient raisonnablement efficacement, comme une liste ?

Une solution : effectuer un parcours en profondeur d'un arbre, c'est-à-dire en faire le tour complet, en partant de la racine et en le tenant fermement de la main gauche :



# Parcours en profondeur générique

Une solution : effectuer un parcours en profondeur d'un arbre, c'est-à-dire en faire le tour complet, en partant de la racine et en le tenant fermement de la main gauche :



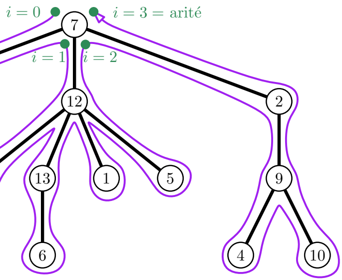

*ce tour passe plusieurs fois en chaque sommet – précisément une de plus que son arité*

*chaque passage en un sommet est l'occasion d'effectuer un traitement : un affichage, un stockage, un décompte... ou rien du tout.*

Un tel parcours se décrit particulièrement simplement de façon récursive.

# Parcours en profondeur générique

```
def parcours_generique(racine) :
  for i, noeud in enumerate(liste_des_fils(racine)) :
    traitement(i, racine)
    # = traitement après avoir visité i sous-arbres
    parcours_generique(noeud)
  traitement(arite(racine), racine)
```



# Parcours en profondeur générique

```
def parcours_generique(racine) :
  for i, noeud in enumerate(liste_des_fils(racine)) :
    traitement(i, racine)
    # = traitement après avoir visité i sous-arbres
    parcours_generique(noeud)
  traitement(arite(racine), racine)
```

**Théorème**

*`parcours_generique(racine)` visite tous les sommets de l'arbre enraciné en `racine`, en temps $\Theta(n)$ si chaque traitement est en $\Theta(1)$*

```
def parcours_generique(racine) :
  for i, noeud in enumerate(liste_des_fils(racine)) :
    traitement(i, racine)
    # = traitement après avoir visité i sous-arbres
    parcours_generique(noeud)
  traitement(arite(racine), racine)
```

**Théorème**

*`parcours_generique(racine)` visite tous les sommets de l'arbre enraciné en `racine`, en temps $\Theta(n)$ si chaque traitement est en $\Theta(1)$*

- si `i = 0` : on parle de *pré-traitement*
- si `i = arite(racine)` : on parle de *post-traitement*

## Parcours en profondeur spécifiques

Trois cas particuliers (et particulièrement importants) :

**Parcours préfixe** : `traitement(i, racine)` vide sauf si `i = 0`

```
def parcours_prefixe(racine) :
  pre_traitement(racine)
  for noeud in liste_des_fils(racine) : parcours_prefixe(noeud)
```

**Parcours postfixe** : `traitement(i, racine)` vide sauf si `i = arite(racine)`

```
def parcours_postfixe(racine) :
  for noeud in liste_des_fils(racine) : parcours_postfixe(noeud)
  post_traitement(racine)
```

**Parcours infixe** : cas binaire avec seulement un traitement intermédiaire

```
def parcours_infixe(racine) :
    if gauche(racine) != None : parcours_infixe(gauche(racine))
    traitement(racine)
    if (droite(racine) != None) : parcours_infixe(droite(racine))
```

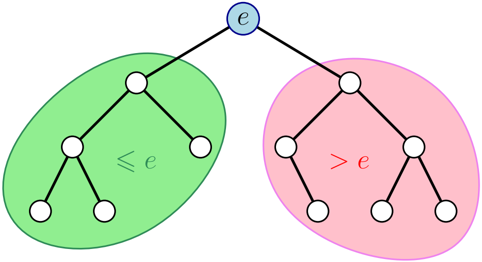
# Arbres Binaires de Recherche

## III. Définition et manipulations simples

# Que peut bien signifier « trier » un arbre ?

Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre binaire, étiqueté, tel que l'étiquette de *chaque* sommet est comprise entre

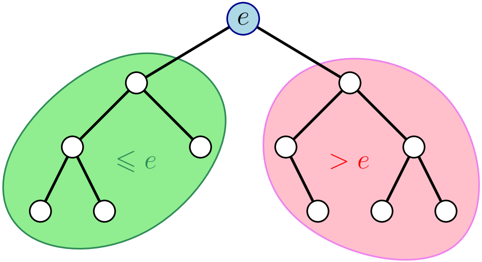
- ***toutes*** *les étiquettes du sous-arbre gauche (plus petites)* et
- ***toutes*** *les étiquettes du sous-arbre droit (plus grandes)*



## Que peut bien signifier « trier » un arbre ?

Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre binaire, étiqueté, tel que l'étiquette de ***chaque*** sommet est comprise entre

- ***toutes*** *les étiquettes du sous-arbre gauche (plus petites)* et
- ***toutes*** *les étiquettes du sous-arbre droit (plus grandes)*

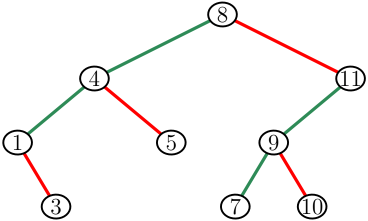


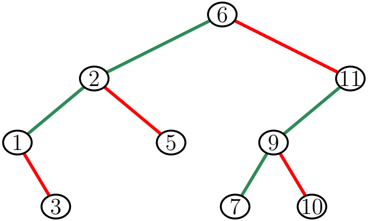

### *Attention ! ! !*

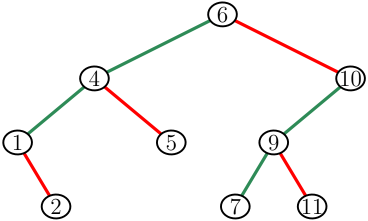
localement, *cela entraîne* que chaque nœud a une étiquette comprise entre celle de son fils gauche et celle de son fils droit ***mais ceci ne suffit pas***

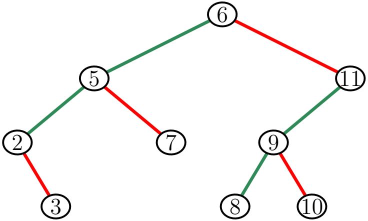
## ABR or not ?

Vérifier qu'il n'y a aucun ABR parmi les exemples ci-dessous.



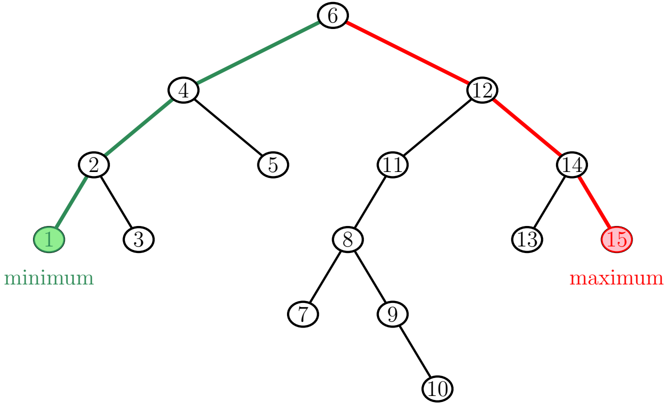



# Minimum et maximum d'un ABR

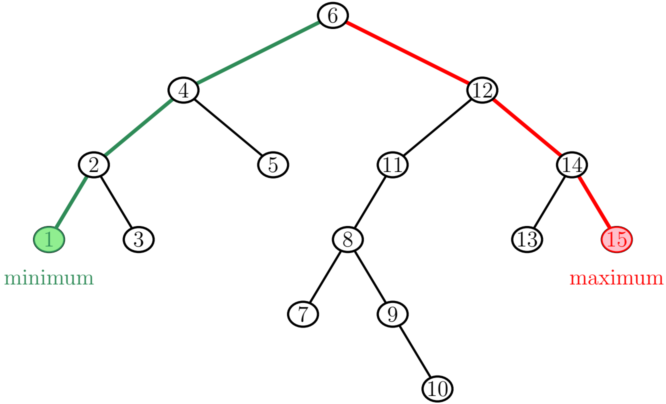
La règle définissant les ABR rend certaines recherches faciles…

# Minimum et maximum d'un ABR

La règle définissant les ABR rend certaines recherches faciles...



La règle définissant les ABR rend certaines recherches faciles…



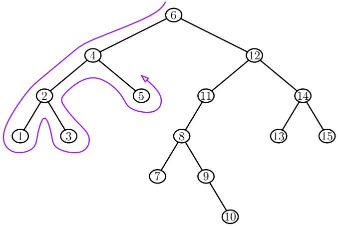

*Plus généralement, la « disposition spatiale » des éléments suit leur ordre : plus un élément est à gauche, plus il est petit.*

Propriété : dans un ABR, chaque sous-arbre contient un intervalle de la liste triée des clés

Propriété : dans un ABR, chaque sous-arbre contient un intervalle de la liste triée des clés

Un ABR est donc « presque » une liste triée :

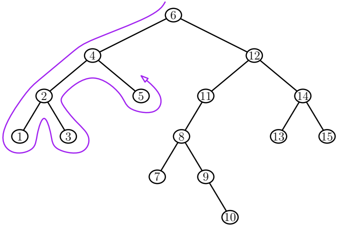
```
def liste_triee(noeud) :
  res = []
  if noeud != None :
    res = liste_triee(gauche(noeud))
    res += [ etiquette(noeud) ]
    res += liste_triee(droit(noeud))
  return res
```



Propriété : dans un ABR, chaque sous-arbre contient un intervalle de la liste triée des clés

Un ABR est donc « presque » une liste triée :

```
def liste_triee(noeud) :
  res = []
  if noeud != None :
    res = liste_triee(gauche(noeud))
    res += [ etiquette(noeud) ]
    res += liste_triee(droit(noeud))
  return res
```



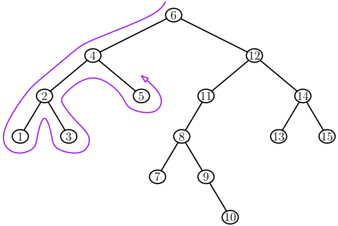

## Théorème

*le parcours infixe d'un ABR à* $n$ *nœuds produit la liste triée de ses éléments en temps* $\Theta(n)$.

Propriété : dans un ABR, chaque sous-arbre contient un intervalle de la liste triée des clés

Un ABR est donc « presque » une liste triée :

```
def liste_triee(noeud) :
  res = []
  if noeud != None :
    res = liste_triee(gauche(noeud))
    res += [ etiquette(noeud) ]
    res += liste_triee(droit(noeud))
  return res
```




## Théorème

*le parcours infixe d'un ABR à $n$ nœuds produit la liste triée de ses éléments en temps $\Theta(n)$.*

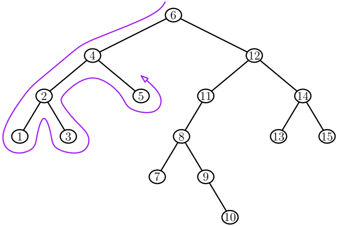
## Corollaire

*pour déterminer si un arbre est un ABR, il suffit de vérifier si son parcours infixe fournit bien une liste triée*

Propriété : dans un ABR, chaque sous-arbre contient un intervalle de la liste triée des clés

Un ABR est donc « presque » une liste triée :

```
def liste_triee(noeud) :
  res = []
  if noeud != None :
    res = liste_triee(gauche(noeud))
    res += [ etiquette(noeud) ]
    res += liste_triee(droit(noeud))
  return res
```




## Théorème

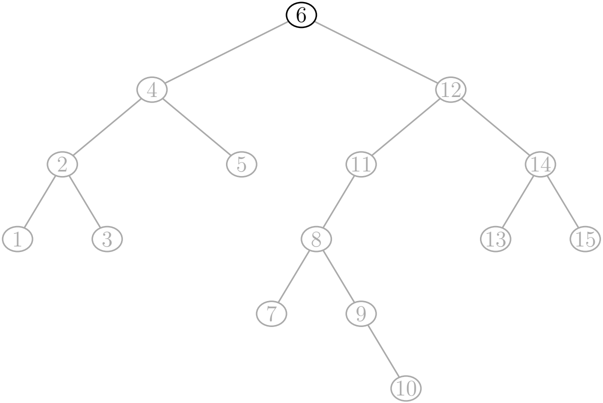
*le parcours infixe d'un ABR à $n$ nœuds produit la liste triée de ses éléments en temps $\Theta(n)$.*

## Corollaire

*pour déterminer si un arbre est un ABR, il suffit de vérifier si son parcours infixe fournit bien une liste triée (qu'il n'est même pas nécessaire de construire)*

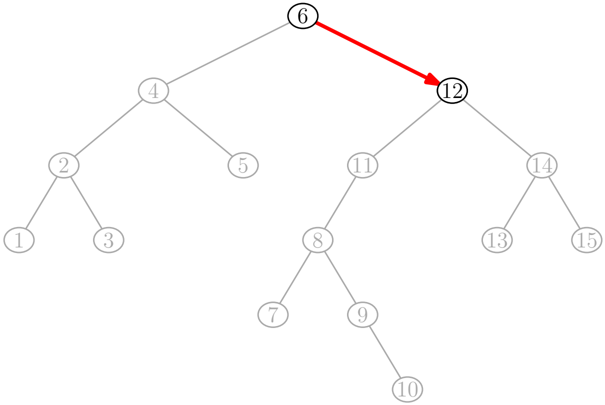
à la manière de la recherche dichotomique, en comparant l'élément cherché avec l'élément à la racine au lieu de l'élément médian du tableau

Exemple – recherche de 9 :



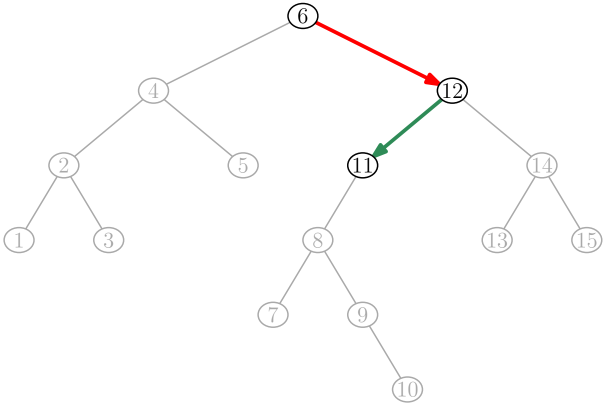
à la manière de la recherche dichotomique, en comparant l'élément cherché avec l'élément à la racine au lieu de l'élément médian du tableau

Exemple – recherche de 9 :



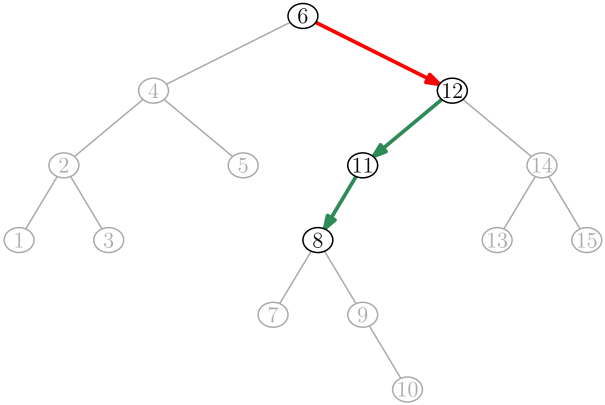
à la manière de la recherche dichotomique, en comparant l'élément cherché avec l'élément à la racine au lieu de l'élément médian du tableau

Exemple – recherche de 9 :



à la manière de la recherche dichotomique, en comparant l'élément cherché avec l'élément à la racine au lieu de l'élément médian du tableau

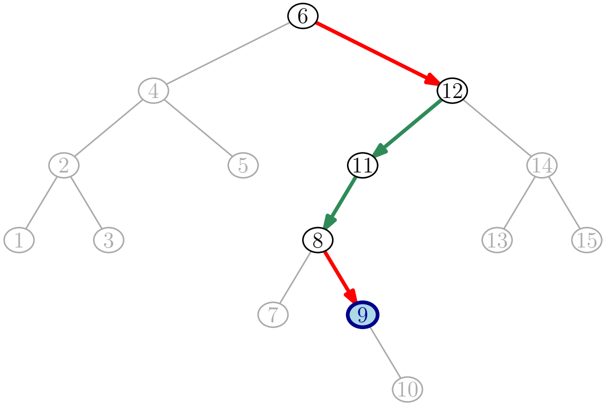
Exemple – recherche de 9 :



## Recherche dans un ABR

à la manière de la recherche dichotomique, en comparant l'élément cherché avec l'élément à la racine au lieu de l'élément médian du tableau

Exemple – recherche de 9 :



Cet algorithme s'écrit très simplement de manière récursive :

```
def recherche(noeud, x) :    # version récursive
  if noeud == None : return None
  elif etiquette(noeud) == x : return noeud
  elif etiquette(noeud) > x :
    return recherche(gauche(noeud), x)
  else :
    return recherche(droit(noeud), x)
```

Cet algorithme s'écrit très simplement de manière récursive :

```
def recherche(noeud, x) :    # version récursive
  if noeud == None : return None
  elif etiquette(noeud) == x : return noeud
  elif etiquette(noeud) > x :
    return recherche(gauche(noeud), x)
  else :
    return recherche(droit(noeud), x)
```

*(facile à dérécursiver, puisqu'il y a au plus un appel récursif, terminal)*

Cet algorithme s'écrit très simplement de manière récursive :

```
def recherche(noeud, x) :    # version récursive
  if noeud == None : return None
  elif etiquette(noeud) == x : return noeud
  elif etiquette(noeud) > x :
    return recherche(gauche(noeud), x)
  else :
    return recherche(droit(noeud), x)
```

*(facile à dérécursiver, puisqu'il y a au plus un appel récursif, terminal)*

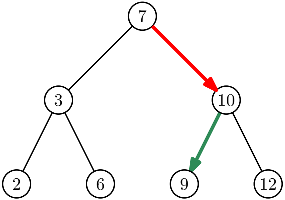
**Théorème**

*`recherche(r, x)` effectue la recherche d'un élément $x$ dans l'ABR de racine $r$ en temps $\Theta(\mathrm{h})$ au pire, où $\mathrm{h}$ est la hauteur de l'ABR.*

# Cas extrêmes

La recherche (et plus généralement tous les algorithmes sur les ABR) se comportent radicalement différemment selon la forme de l'arbre, qui détermine le rapport entre sa taille et sa hauteur.

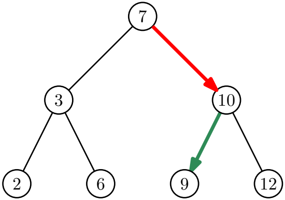
Cas sympathique : ABR « parfait »




Hauteur $\log n$, recherche aussi efficace que la recherche dichotomique

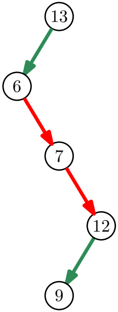
La recherche (et plus généralement tous les algorithmes sur les ABR) se comportent radicalement différemment selon la forme de l'arbre, qui détermine le rapport entre sa taille et sa hauteur.

Cas sympathique : ABR « parfait »




Hauteur $\log n$, recherche aussi efficace que la recherche dichotomique

Cas désagréable : ABR « filiforme »




Hauteur $n$, recherche aussi inefficace que dans une liste chaînée

## Cas particuliers : minimum/maximum

```
def minimum(noeud) :  # version récursive
  if gauche(noeud) == None : return noeud
  return minimum(gauche(noeud))

def minimum(noeud) :  # version itérative
  while gauche(noeud) != None :
    noeud = gauche(noeud)
  return noeud
```

**Théorème**

*minimum(r) détermine le plus petit élément dans l'ABR de racine r en temps $\Theta(\mathrm{h})$ au pire, où $\mathrm{h}$ est la hauteur de l'ABR.*

Un problème un peu plus compliqué :

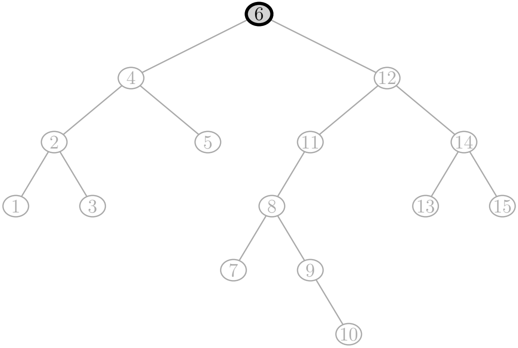
**successeur(n)**

étant donné un nœud `n` d'un ABR, d'étiquette `e`, déterminer le nœud de l'arbre ayant la plus petite étiquette supérieure à `e`.

## successeur(n)

étant donné un nœud n d'un ABR, d'étiquette e, déterminer le nœud de l'arbre ayant la plus petite étiquette supérieure à e.

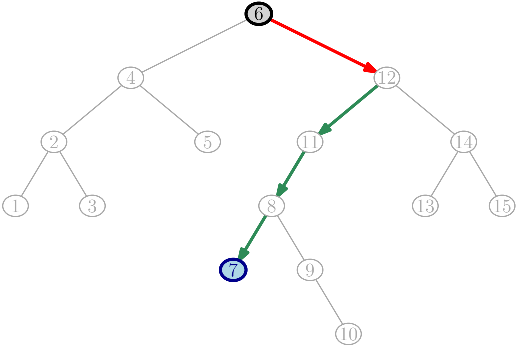
Cas n° 1 : si le nœud a un fils droit



## successeur(n)

étant donné un nœud n d'un ABR, d'étiquette e, déterminer le nœud de l'arbre ayant la plus petite étiquette supérieure à e.

Cas n° 1 : si le nœud a un fils droit

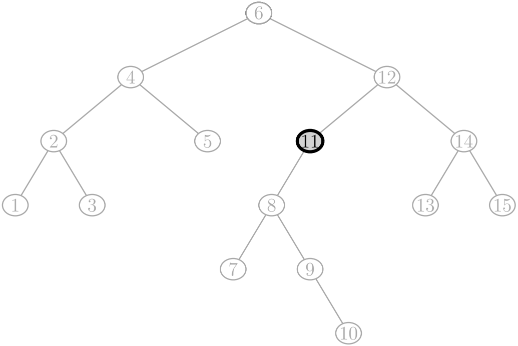



$\Longrightarrow$ le successeur est le minimum du sous-arbre droit

## successeur(n)

étant donné un nœud n d'un ABR, d'étiquette e, déterminer le nœud de l'arbre ayant la plus petite étiquette supérieure à e.

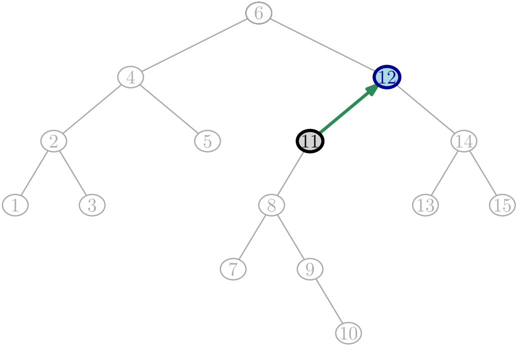
Cas n° 2 : si le nœud n'a pas de fils droit



## successeur(n)

étant donné un nœud n d'un ABR, d'étiquette e, déterminer le nœud de l'arbre ayant la plus petite étiquette supérieure à e.

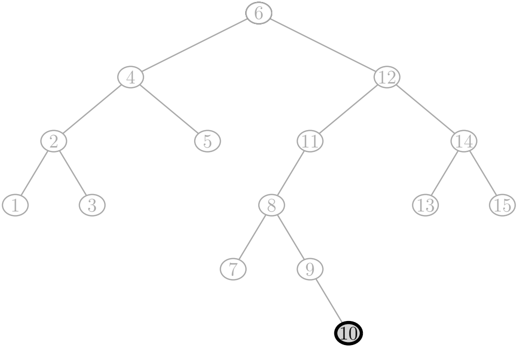
Cas n° 2 : si le nœud n'a pas de fils droit



## successeur(n)

étant donné un nœud n d'un ABR, d'étiquette e, déterminer le nœud de l'arbre ayant la plus petite étiquette supérieure à e.

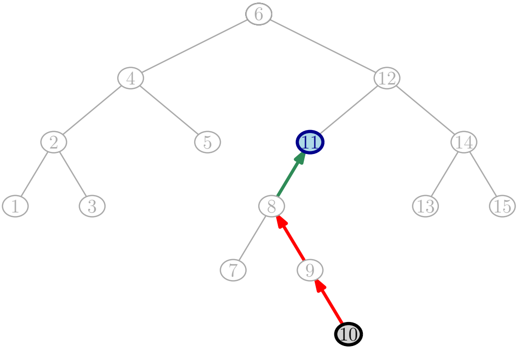
Cas n° 2 : si le nœud n'a pas de fils droit



## successeur(n)

étant donné un nœud n d'un ABR, d'étiquette e, déterminer le nœud de l'arbre ayant la plus petite étiquette supérieure à e.

### Cas n° 2 : si le nœud n'a pas de fils droit




$\Longrightarrow$ le successeur est le premier ancêtre supérieur à l'élément – donc le premier vers lequel on remonte depuis la gauche

Ce qui donne :

```
def successeur(noeud) :
  if droit(noeud) != None :
    return minimum(droit(noeud))
  while pere(noeud) != None and est_fils_droit(noeud) :
    noeud = pere(noeud)
  # soit pere(noeud) == None : noeud est la racine, le noeud
  # initial était le maximum, et n'a pas de successeur
  # soit noeud est un fils gauche : le successeur est son père
  return pere(noeud)
```

**Théorème**

*successeur(noeud) détermine le successeur d'un noeud d'un ABR en temps $\Theta(\mathrm{h})$ au pire, où $\mathrm{h}$ est la hauteur de l'ABR.*

# Arbres Binaires de Recherche

## IV. Opérations de modification

stratégies imaginables pour ajouter un élément `x` à un ABR :

1. *insertion à la racine*, comme une insertion en tête de liste chaînée
2. *insertion aux feuilles*, comme une insertion en queue de liste chaînée

stratégies imaginables pour ajouter un élément x à un ABR :

1. *insertion à la racine*, comme une insertion en tête de liste chaînée
2. *insertion aux feuilles*, comme une insertion en queue de liste chaînée

*insertion à la racine :* idée plus naturelle, car la racine est le « point d'entrée » de l'arbre ; il faudrait :

- créer une nouvelle racine contenant x,
- partitionner les éléments de l'ABR selon le « pivot » x
- reconstruire deux sous-ABR avec, respectivement, les petits et les grands éléments

non seulement c'est compliqué, mais en plus, il faudrait le faire *efficacement* – c'est-à-dire sans parcourir tout l'arbre stratégies imaginables pour ajouter un élément `x` à un ABR :

1. ~~*insertion à la racine*, comme une insertion en tête de liste chaînée~~
2. *insertion aux feuilles*, comme une insertion en queue de liste chaînée

*insertion à la racine :* idée plus naturelle, car la racine est le « point d'entrée » de l'arbre ; il faudrait :

- créer une nouvelle racine contenant `x`,
- partitionner les éléments de l'ABR selon le « pivot » `x`
- reconstruire deux sous-ABR avec, respectivement, les petits et les grands éléments

non seulement c'est compliqué, mais en plus, il faudrait le faire *efficacement* – c'est-à-dire sans parcourir tout l'arbre

c'est peine perdue... moralité : essayons autrement !

stratégies imaginables pour ajouter un élément x à un ABR :

1. ~~*insertion à la racine*, comme une insertion en tête de liste chaînée~~
2. *insertion aux feuilles*, comme une insertion en queue de liste chaînée

*insertion aux feuilles :* créer une feuille à un emplacement libre, c'est-à-dire l'attacher à un nœud non complet

# Insertion dans un ABR

stratégies imaginables pour ajouter un élément x à un ABR :

1. ~~*insertion à la racine*, comme une insertion en tête de liste chaînée~~
2. *insertion aux feuilles*, comme une insertion en queue de liste chaînée

*insertion aux feuilles :* créer une feuille à un emplacement libre, c'est-à-dire l'attacher à un nœud non complet

contrairement aux listes chaînées, non-unicité des emplacements libres

- point négatif, il faut trouver la bonne feuille,
- point positif, cela donne de la souplesse : insérer une feuille revient, en terme de liste, à insérer un élément à n'importe quelle position, sans effectuer de réorganisation majeure de la structure

stratégies imaginables pour ajouter un élément x à un ABR :

1. ~~*insertion à la racine*, comme une insertion en tête de liste chaînée~~
2. *insertion aux feuilles*, comme une insertion en queue de liste chaînée

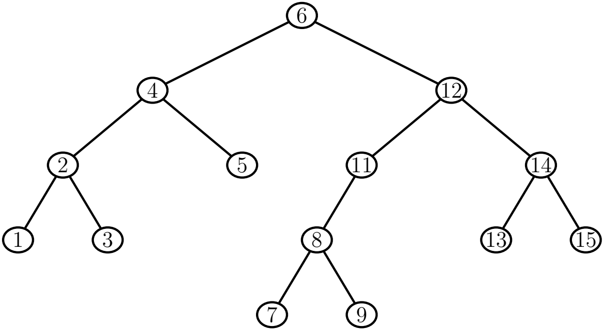
*insertion aux feuilles :* créer une feuille à un emplacement libre, c'est-à-dire l'attacher à un nœud non complet

contrairement aux listes chaînées, non-unicité des emplacements libres

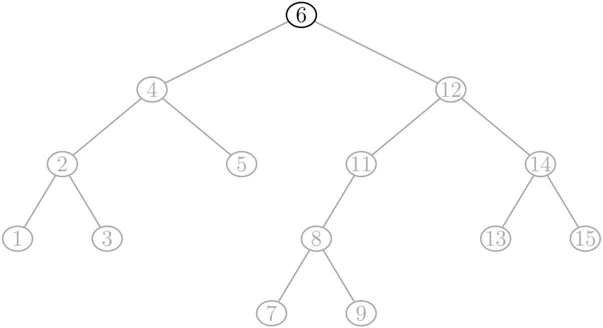
- point négatif, il faut trouver la bonne feuille,
- point positif, cela donne de la souplesse : insérer une feuille revient, en terme de liste, à insérer un élément à n'importe quelle position, sans effectuer de réorganisation majeure de la structure

autre point positif : cela permet d'éviter facilement les doublons

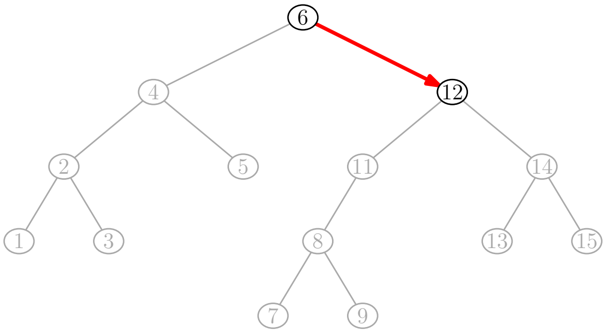
Exemple – insertion de 10 :



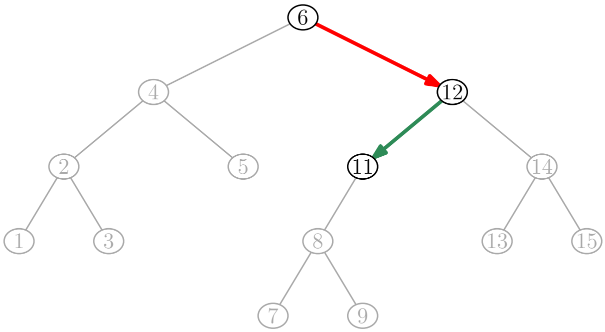
Exemple – insertion de 10 :



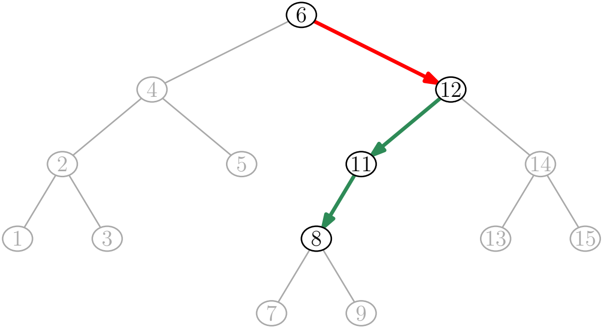
Exemple – insertion de 10 :



Exemple – insertion de 10 :

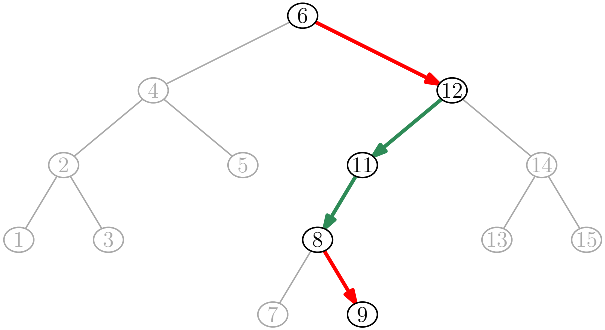


Exemple – insertion de 10 :

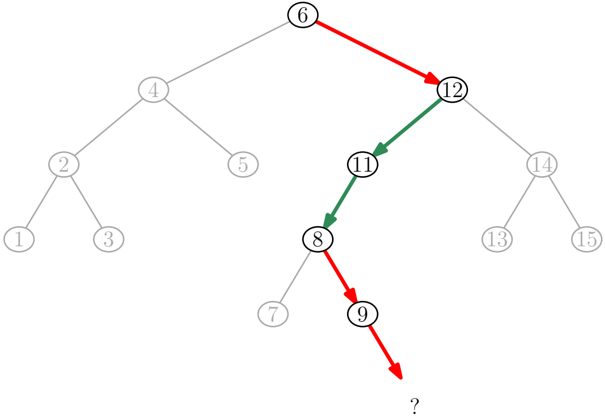


## Insertion dans un ABR

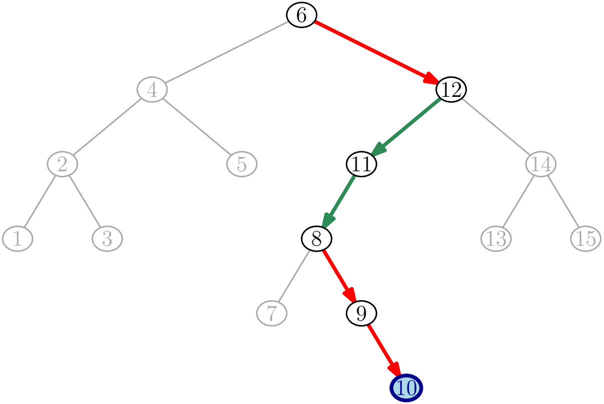
Exemple – insertion de 10 :



Exemple – insertion de 10 :



Exemple – insertion de 10 :



l'algorithme d'insertion n'est finalement qu'une petite modification de l'algorithme de recherche, donc :

**Théorème**

*L'insertion d'un nouvel élément dans un ABR de hauteur* $\mathrm{h}$ *peut se faire en temps* $\Theta(\mathrm{h})$ au pire.

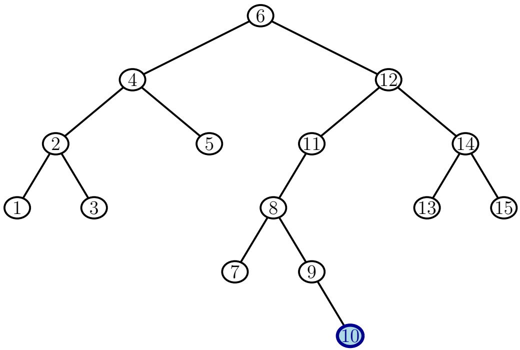
## Suppression dans un ABR

*La suppression d'un élément* $x$ *est relativement plus compliquée, notamment parce qu'il est utopique d'espérer éviter un peu de réorganisation lorsque* $x$ *est contenu dans un nœud vraiment binaire.*

*La suppression d'un élément* $x$ *est relativement plus compliquée, notamment parce qu'il est utopique d'espérer éviter un peu de réorganisation lorsque* $x$ *est contenu dans un nœud vraiment binaire.*

Il y a tout de même des cas très simples :

1. si le nœud à supprimer n'a pas d'enfant : on l'enlève

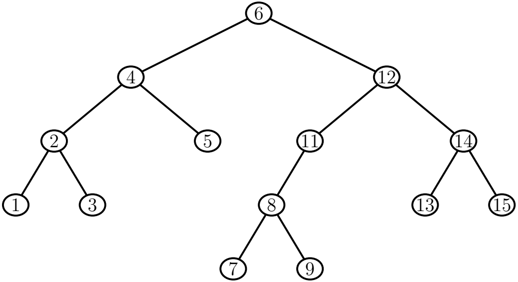


## Suppression dans un ABR

*La suppression d'un élément $x$ est relativement plus compliquée, notamment parce qu'il est utopique d'espérer éviter un peu de réorganisation lorsque $x$ est contenu dans un nœud vraiment binaire.*

Il y a tout de même des cas très simples :

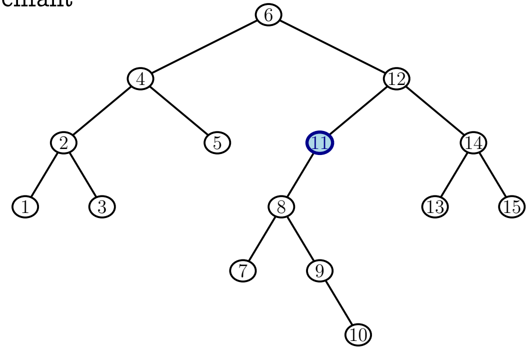
1. si le nœud à supprimer n'a pas d'enfant : on l'enlève



*La suppression d'un élément $x$ est relativement plus compliquée, notamment parce qu'il est utopique d'espérer éviter un peu de réorganisation lorsque $x$ est contenu dans un nœud vraiment binaire.*

Il y a tout de même des cas très simples :

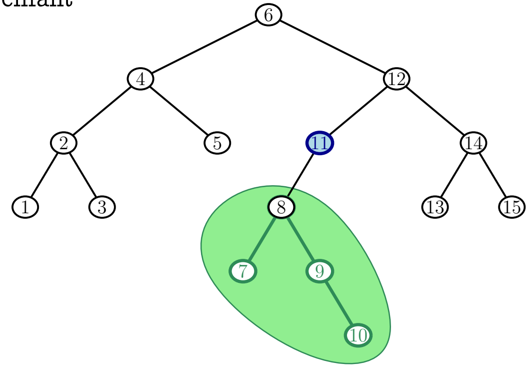
1. si le nœud à supprimer n'a pas d'enfant : on l'enlève
2. si le nœud à supprimer n'a qu'un enfant : on « remonte » son unique enfant



*La suppression d'un élément* $x$ *est relativement plus compliquée, notamment parce qu'il est utopique d'espérer éviter un peu de réorganisation lorsque* $x$ *est contenu dans un nœud vraiment binaire.*

Il y a tout de même des cas très simples :

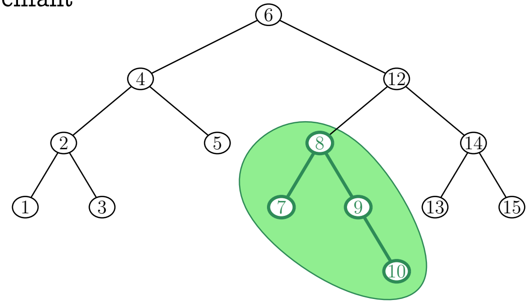
1. si le nœud à supprimer n'a pas d'enfant : on l'enlève
2. si le nœud à supprimer n'a qu'un enfant : on « remonte » son unique enfant



*La suppression d'un élément* $x$ *est relativement plus compliquée, notamment parce qu'il est utopique d'espérer éviter un peu de réorganisation lorsque* $x$ *est contenu dans un nœud vraiment binaire.*

Il y a tout de même des cas très simples :

1. si le nœud à supprimer n'a pas d'enfant : on l'enlève
2. si le nœud à supprimer n'a qu'un enfant : on « remonte » son unique enfant



Sinon (cas générique où le nœud contenant `x` a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

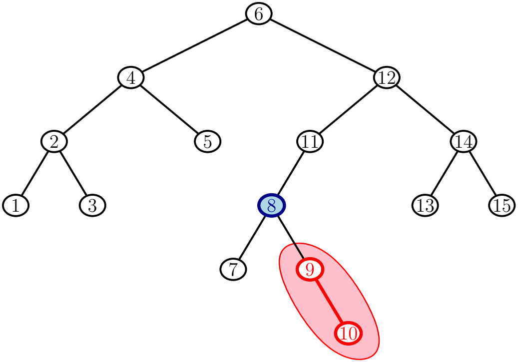
Sinon (cas générique où le nœud contenant `x` a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que* $x$
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que* $x$

Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que $x$*
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que $x$*

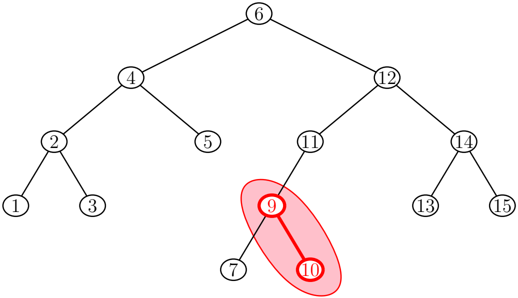
*donc (le prédécesseur ou) le successeur de $x$ – c'est symétrique*



Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que* $x$
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que* $x$

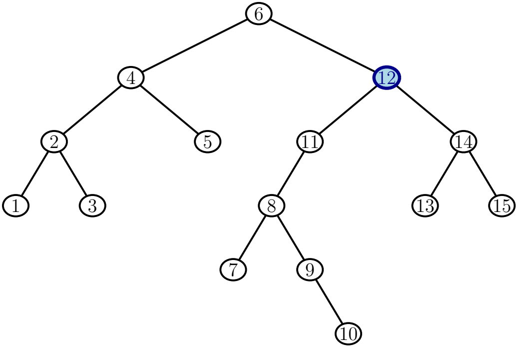
*donc (le prédécesseur ou) le successeur de* $x$ *– c'est symétrique*



Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que $x$*
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que $x$*

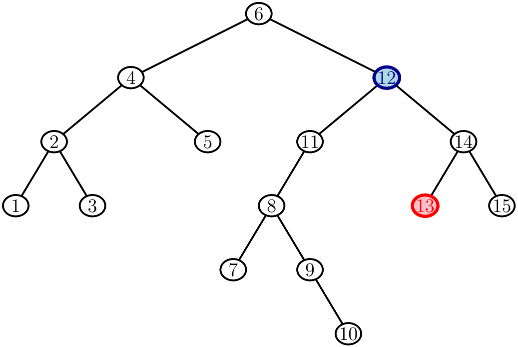
*donc (le prédécesseur ou) le successeur de $x$ – c'est symétrique*



Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que $x$*
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que $x$*

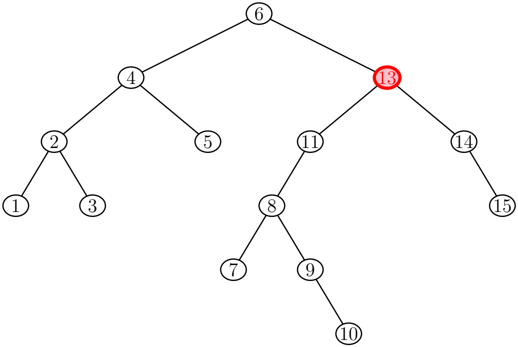
*donc (le prédécesseur ou) le successeur de $x$ – c'est symétrique*



Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que $x$*
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que $x$*

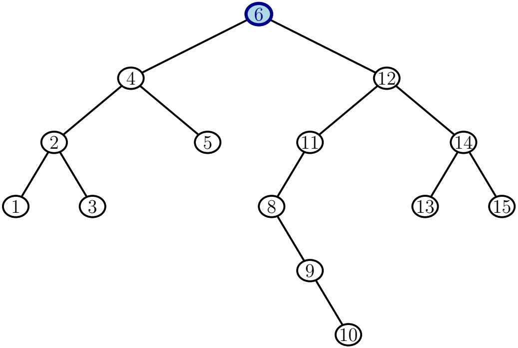
*donc (le prédécesseur ou) le successeur de $x$ – c'est symétrique*



Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que* $x$
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que* $x$

*donc (le prédécesseur ou) le successeur de* $x$ *– c'est symétrique*

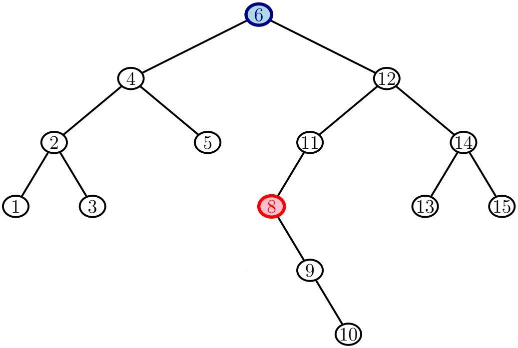


## Suppression dans un ABR

Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que $x$*
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que $x$*

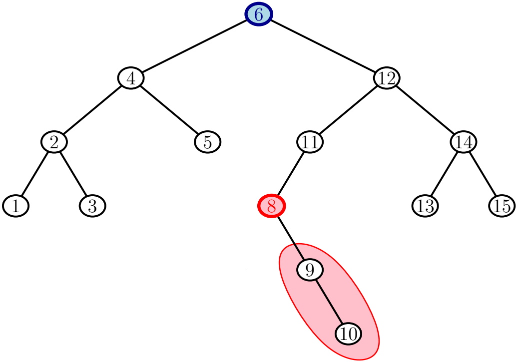
*donc (le prédécesseur ou) le successeur de $x$ – c'est symétrique*



Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que $x$*
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que $x$*

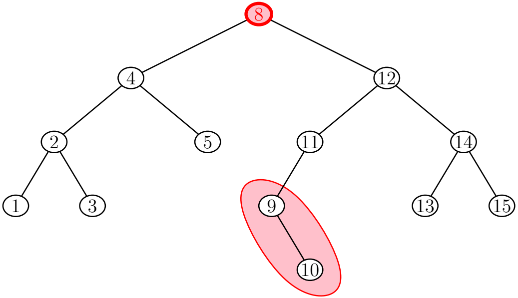
*donc (le prédécesseur ou) le successeur de $x$ – c'est symétrique*



Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que $x$*
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que $x$*

*donc (le prédécesseur ou) le successeur de $x$ – c'est symétrique*



Sinon (cas générique où le nœud contenant x a deux enfants) : *le nœud ne peut pas être supprimé, il faut trouver un autre élément qui puisse prendre sa place, i.e. :*

- *plus petit que tous les (autres) éléments plus grands que* $x$
- *plus grand que tous les (autres) éléments plus petits que* $x$

*donc (le prédécesseur ou) le successeur de* $x$ *– c'est symétrique*

On remarque en fait la propriété suivante :

**Lemme**

*Le successeur d'un nœud à deux enfants n'a lui-même pas de fils gauche.*

(forcément, puisque dans ce cas, il s'agit du minimum du sous-arbre droit...)

## Suppression dans un ABR

1. cas d'une feuille : suppression simple
2. cas d'un nœud à un seul fils : l'autre fils remonte d'un niveau
3. cas où le successeur est le fils droit : le fils droit remonte d'un niveau et adopte son frère
4. autres cas : le noeud est remplacé par son successeur, dont l'unique fils (droit) remonte d'un niveau

# Suppression dans un ABR

1. cas d'une feuille : suppression simple
2. cas d'un nœud à un seul fils : l'autre fils remonte d'un niveau
3. cas où le successeur est le fils droit : le fils droit remonte d'un niveau et adopte son frère
4. autres cas : le noeud est remplacé par son successeur, dont l'unique fils (droit) remonte d'un niveau

remarques :

- le point 3 n'est qu'un cas particulier du point 4
- la même manipulation peut être faite avec le prédécesseur plutôt que le successeur

1. cas d'une feuille : suppression simple
2. cas d'un nœud à un seul fils : l'autre fils remonte d'un niveau
3. cas où le successeur est le fils droit : le fils droit remonte d'un niveau et adopte son frère
4. autres cas : le noeud est remplacé par son successeur, dont l'unique fils (droit) remonte d'un niveau

remarques :

- le point 3 n'est qu'un cas particulier du point 4
- la même manipulation peut être faite avec le prédécesseur plutôt que le successeur

donc :

**Théorème**

*la suppression d'un nœud d'un ABR de hauteur* $h$ *se fait en temps* $\Theta(h)$ *au pire.*

**Théorème**

*la liste triée des éléments d'un ABR de taille* $n$ *peut être obtenue en temps* $\Theta(n)$ *par un parcours en profondeur infixe.*

## Théorème

*la liste triée des éléments d'un ABR de taille* $n$ *peut être obtenue en temps* $\Theta(n)$ *par un parcours en profondeur infixe.*

## Théorème

*la recherche, l'ajout et la suppression d'un élément dans un ABR de hauteur* $h$ *se font en temps* $\Theta(h)$ *au pire.*

**Théorème**

*la liste triée des éléments d'un ABR de taille* $n$ *peut être obtenue en temps* $\Theta(n)$ *par un parcours en profondeur infixe.*

**Théorème**

*la recherche, l'ajout et la suppression d'un élément dans un ABR de hauteur* $h$ *se font en temps* $\Theta(h)$ *au pire.*

**Corollaire**

*la construction d'un ABR de taille* $n$ *par insertion successive de ses éléments a un coût* $O(nh)$*, si* $h$ *est la hauteur de l'arbre obtenu.*

**Théorème**

*la liste triée des éléments d'un ABR de taille* $n$ *peut être obtenue en temps* $\Theta(n)$ *par un parcours en profondeur infixe.*

**Théorème**

*la recherche, l'ajout et la suppression d'un élément dans un ABR de hauteur* $h$ *se font en temps* $\Theta(h)$ *au pire.*

**Corollaire**

*la construction d'un ABR de taille* $n$ *par insertion successive de ses éléments a un coût* $O(nh)$*, si* $h$ *est la hauteur de l'arbre obtenu.*

La clé de l'efficacité de ces opérations réside donc dans la hauteur de l'ABR considéré en fonction de sa taille. On démontrera :

**Théorème**

*la hauteur moyenne d'un ABR construit par l'insertion des entiers* $1, \ldots, n$ *dans un* ***ordre aléatoire choisi uniformément*** *est en* $\Theta(\log n)$*.*