Université Paris Cité – Grands Moulins

L2 Math et Math Info – Analyse 3
Contrôle 3
Version A
Durée : 1 heure

---

30 novembre 2023

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Tout argument devra être justifié par une référence précise au cours ou une démonstration.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de changer.

Ne tournez pas la page avant d'avoir été autorisé·e à le faire

Exercice 1. (*5 points*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right).$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée $g_n = f_n'$.
3. Montrer que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g : x \mapsto x$.
4. La suite de fonctions (g_n) converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}$? On pourra considérer la suite (x_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 2\pi n$.
5. A-t-on $f' = g$?

Exercice 2. (*6 points*)

Étudier la nature des séries suivantes.

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(n e^{\frac{1}{n}} - n)$
2. $\sum\limits_{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{n^{2023}}{n!}$

Exercice 3. (*5 points*)

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sin x)^n}{3^n}$, où x est un nombre réel fixé.

Exercice 4. (*4 points*)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Donner la définition de « la suite (u_n) est de Cauchy ».
2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse :
   (a) Si la suite u est de Cauchy, alors $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
   (b) Si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors la suite u est de Cauchy.

Université Paris Cité – Grands Moulins

L2 Math et Math Info – Analyse 3
Contrôle 3
Version B
Durée : 1 heure

---

30 novembre 2023

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Tout argument devra être justifié par une référence précise au cours ou une démonstration.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de changer.

Ne tournez pas la page avant d'avoir été autorisé·e à le faire

Exercice 1. (*5 points*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = n \sin \frac{x^2}{n}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée $g_n = f'_n$.
3. Montrer que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g : x \mapsto 2x$.
4. La suite de fonctions (g_n) converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}$? On pourra considérer la suite (x_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \sqrt{\pi n}$.
5. A-t-on $f' = g$?

Exercice 2. (*6 points*)

Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n \geqslant 1} (n - n \cos \frac{1}{n})$
2. $\sum\limits_{n} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$
3. $\sum\limits_{n} \frac{n^{2024}}{n!}$

Exercice 3. (*5 points*)

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(\cos x)^n}{5^n}$, où x est un nombre réel fixé.

Exercice 4. (*4 points*)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Donner la définition de « la suite (u_n) est de Cauchy ».
2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse :
   (a) Si la suite u est de Cauchy, alors $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
   (b) Si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors la suite u est de Cauchy.