INTERROGATION 2
MERCREDI 3 AVRIL 2024
DURÉE : 45 MINUTES

Toutes les réponses doivent être rigoureusement justifiées.
Les documents, calculatrices et objets connectés ne sont pas autorisés.

Questions de cours : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
Montrer que si la série $\sum f_n$ converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Exercice.
Pour $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^3 x}$.
On étudie la série $\sum f_n$ pour $n \geq 1$.

(1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

(2) On note $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

(3) Montrer que pour tout réel $a > 0$ la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

(4) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(5) La série converge-t-elle normalement sur $]0, +\infty[$? Justifier.

(6) Calculer la limite de f en $+\infty$.