Université de Paris Cité
MMAL3 Algèbre

Année 2023-2024
L2 Maths, Math-info

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1 Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. On considère l'ensemble des racines n-èmes de l'unité

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \;/\; z^n = 1\}.$$

1. Vérifier que le produit des nombres complexes est une loi de composition interne sur $\mathbb{U}_n$.
2. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 On considère l'ensemble

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Vérifier que le produit des matrices est une loi de composition interne sur $\mathrm{SO}(2)$.
2. Montrer que $(\mathrm{SO}(2), \cdot)$ est un groupe. Préciser son élément neutre et une formule pour l'inverse.
3. Ce groupe est-il commutatif ?

Exercice 3 On considère l'ensemble

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;/\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Vérifier que le produit des matrices est une loi de composition interne sur $H_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $(H_3(\mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe. Préciser son élément neutre et une formule pour l'inverse.
3. Ce groupe est-il commutatif ?

Exercice 4 Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition associative notée $\star$. Montrer que $(G, \star)$ est un un groupe si et seulement si il existe un élément $e \in G$ tel que

$$\begin{array}{lll} (1) & \forall g \in G & g \star e = g \\ (2) & \forall g \in G & \exists g' \in G, g \star g' = e. \end{array}$$

Exercice 5 Soit $\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Vérifier que le produit des matrices est une loi de composition interne associative sur $\mathcal{E}$.
2. Trouver tous les éléments $E \in \mathcal{E}$ tels que
$$\forall A \in \mathcal{E}, AE = A.$$
De tels éléments E s'appellent des éléments neutres à droite de $(\mathcal{E}, \cdot)$.
3. Existe-t-il un élément $E \in \mathcal{E}$ tels que
$$\forall A \in \mathcal{E}, EA = A?$$
4. Soit E un élément neutre à droite de $(\mathcal{E}, \cdot)$. Montrer que tout élément A de $\mathcal{E}$ admet un inverse à gauche pour cet élément neutre, *i.e.*
$$\forall A \in \mathcal{E}, \exists B \in \mathcal{E}, BA = E.$$

Exercice 6 Montrer que $H = \{2^n \;/\; n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}^*$.

Exercice 7 On considère l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ des matrices carrées à coefficients réels de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \text{ et } ad - bc = 1.$$

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer l'ordre des éléments suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Quel est l'ordre du produit AB ?

Exercice 8 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et posons $g = e^{i\theta}$.

1. Supposons que $\theta = \pi(p/q)$ avec p/q est un rationnel sous forme irréductible. Montrer que l'ordre de g dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est q si p est pair et $2q$ sinon.
2. Quel est l'ordre de g si θ n'est pas comme dans la question précédente ?

Exercice 9 Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H une partie non vide de G stable pour $\cdot$. Montrer que si H est finie alors H est un sous-groupe. La propriété est-elle vraie dans le cas où H est infinie ?

Exercice 10 Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien et g_1, g_2 deux éléments de G d'ordre finis p_1, p_2.

1. Montrer que le produit $g_1 g_2$ est d'ordre fini p.
2. Montrer que p divise $\mathrm{PPCM}(p_1, p_2)$.
3. Montrer que si p_1 et p_2 sont premiers entre eux alors $p = p_1 p_2$.

Exercice 11 On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices carrées à coefficients réels de la forme

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} , (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ muni de la multiplication des matrices est un groupe.
2. Montrer que le groupe $(\mathcal{C}, \cdot)$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

Exercice 12 Soit $(G, \cdot)$ un groupe. L'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

est-elle un homomorphisme ? (discuter selon que G est commutatif ou non).

Exercice 13 Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_g : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

est un automorphisme de G.

2. Montrer que l'ensemble $\{\psi_g / g \in G\}$ est un sous-groupe du groupe $(S(G), \circ)$ où $S(G)$ est l'ensemble des bijections de G.
3. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & G & \longrightarrow & S(G) \\ & g & \longmapsto & \psi_g \end{array}$$

est un homomorphisme et trouver son noyau.

Exercice 14

1. Soit G_1 l'ensemble formé des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que G muni de la multiplication des matrices est un groupe, donner son tableau, et préciser l'ordre de chacun de ses éléments. Le groupe G_1 est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

2. Même questions pour l'ensemble G_2 formé des matrices suivantes

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Les groupes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?

Exercice 15

1. Trouver tous les groupes à isomorphe près d'ordre inférieur ou égal à 5.
2. En déduire que tout groupe non commutatif est d'ordre au moins égal à 6.
3. Donner un groupe non commutatif d'ordre 6. Ce groupe est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 16 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2021}.

Exercice 17 Considérons les deux permutations suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_8 \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$$

1. Décomposer σ_1 en produits de cycles à supports disjoints.
2. Déterminer la signature de σ_1.
3. Décomposer σ_2 en produits de cycles à supports disjoints.
4. Déterminer la signature de σ_2.

Exercice 18

1. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations suivantes.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_8,$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 3 & 7 & 8 & 2 & 11 & 1 & 12 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} \in S_{12},$$

2. Calculer σ^{-1} et τ^{-1}.
3. Calculer l'ordre de τ. Calculer τ^{2021}.
4. Calculer la signature de σ et τ.

Exercice 19 Soit σ la permutation de S_{10} donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Écrire l'inverse de σ.
2. Décomposer σ en cycles.
3. Calculer sa signature.
4. Quel est le plus petit entier non nul n tel que $\sigma^n = \mathrm{id}$?
5. Calculer σ^{147}.

Exercice 20 Soit σ la permutation de S_{12} définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 12 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Combien σ possède-t-elle d'inversions ?
2. Décomposer σ en produit de transpositions. Retrouver sa signature.
3. L'orbite d'un élément selon une permutation s est l'ensemble de ses images successives obtenues par applications répétées de s. Déterminer les orbites de σ, *i.e.* déterminer l'orbite de i selon σ pour tout $i \in \{1, \dots, 12\}$.
4. Déterminer σ^{2021}.

Exercice 21 Soit σ la permutation de S_9 donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le nombre d'inversions de σ et la signature de σ.
2. Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. On dit qu'une transposition est simple si elle est de la forme $(i \quad i+1)$. Décomposer σ en produit de transpositions simples.
5. Quel est l'ordre de σ dans S_9 ? Calculer σ^{1000}.

Exercice 22 Décomposer en cycles les permutations suivantes de S_7 :

1. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
2. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$
3. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 Soit σ la permutation de S_{10} définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 6 & 3 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Quelle est la signature de σ ?
4. Combien σ présente-t-elle d'inversions ?
5. Quel est l'ordre de σ ?
6. Calculer σ^{3914}.
7. Combien y a-t-il de cycles de longueur 4 dans S_{10} ?
8. Combien y a-t-il de permutations qui se décomposent en un produit de deux cycles disjoints, l'un de longueur 3, l'autre de longueur 6 ?

Exercice 24

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ s'écrit comme la composée de transpositions.
2. Soit $n \geqslant 3$. Soient i, j deux entiers distincts dans $\{2, \dots, n\}$. Calculer $(1 \quad i)(1 \quad j)(1 \quad i)$.
3. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ s'écrit comme la composée de transpositions de la forme $(1 \quad i)$ où i appartient à $\{2, \dots, n\}$.
4. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ s'écrit à l'aide de la transposition $(1 \quad 2)$ et du cycle $(2\ 3\ \dots\ n\ 1)$.