TD 5 – Isométries en dimension 2 et 3

1. À travailler en classe

Exercice 1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) Vérifier que les matrices ci-dessus représentent des isométries (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Dire si elles sont directes ou indirectes.

(2) Déterminer si il s'agit de rotations ou de symétries et en donner soit l'angle de rotation soit l'axe de symétrie le cas échéant.

(3) Pour les symétries, donner les valeurs propres et une base formée de vecteurs propres. Vérifier que les deux vecteurs propres ainsi choisis sont orthogonaux et donner la matrice de l'isométrie considérée dans cette nouvelle base.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base orthonormée canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on explicitera l'équation.

Exercice 3 (matrice d'une symétrie orthogonale). Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $e = (i, j, k)$. Former la matrice dans la base e de la symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $x = z$.

Exercice 4 (matrice d'une rotation). Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation f d'axe $\mathrm{Vect}(i + j + k)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Former une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que $v, w \in P = \{x + z = 0\}$.

(2) Former la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ et reconnaitre f.

Exercice 6 (automorphismes orthogonaux en dimension 3). Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Après avoir prouvé que ce sont des isométries, déterminer les éléments caractéristiques des endomorphismes de E déterminés par leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$, données par :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad C = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$. On définit l'application $f : E \to E$ par $f(x) = a \wedge x$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(2) Déterminer le noyau et l'image de f.

2. À travailler chez soi : applications directes des définitions

Exercice 8 (géométrie élémentaire dans le plan euclidien). Les deux questions suivantes sont indépendantes.

(1) Soit $\binom{a}{b}$ un vecteur $\neq 0$ de $\mathbb{R}^2$. Quel est l'unique vecteur de même norme qui lui est directement orthogonal ?

(2) Soit x et y deux vecteurs normés d'un plan euclidien E. Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(x) = y$.

Exercice 9. Soit un plan euclidien orienté, montrer la formule d'addition suivante sur les mesures des angles orientés (définis modulo 2π) pour $x, y, z \neq 0$:

$$\widehat{(x,z)} = \widehat{(x,y)} + \widehat{(y,z)}$$

Exercice 10. On considère dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer les différents produits vectoriels et produits mixtes formés à partir de ces vecteurs.

Exercice 11. Déterminer les matrices orthogonales triangulaires supérieures.

3. À travailler chez soi : exercices d'entraînement

Exercice 12. On considère la matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(1) Montrer que M est orthogonale.

(2) Calculer $\det(M)$.

(3) En donner la signification géométrique.

(4) Donner les caractéristiques géométriques de M.

Exercice 13 (Isométries de $\mathbb{R}^3$). Soient a et b deux paramètres réels, $b \neq 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit orthogonale. Décrire géométriquement dans ce cas l'endomorphisme f.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et soit f une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$.

(1) On suppose qu'il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = -v$. Montrer que f est un retournement.

(2) Montrer que toute rotation f peut s'écrire comme produit de deux retournements.

Exercice 15. Soit E un espace euclidien de dimension 3. Soit r une rotation et s une symétrie orthogonale. Caractériser l'application

$$s \circ r \circ s$$

Exercice 16. Déterminer les réels a, b, c, d, e tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$ représente une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Rechercher les rotations r de E telles que

$$r(i) = -j \text{ et } r(i - j + k) = i - j + k$$

Exercice 18. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 que l'on munit d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, donner les éléments caractéristiques de

$$\mathrm{Rot}_{k,\pi/2} \circ \mathrm{Rot}_{\cos\theta i + \sin\theta j, \pi}$$

Exercice 19. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$ unitaire. Soit $f : E \to E$ telle que

$$f(x) = \langle x|a\rangle a + a \wedge x$$

Montrer que $f \in \mathcal{O}(E)$ et préciser f géométriquement.

4. À travailler chez soi : exercices d'approfondissement

Exercice 20 (rotations de l'espace qui commutent). Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

(1) Montrer que deux rotations de même axe commutent. Montrer que deux retournements (rappel : rotation d'angle π) d'axes orthogonaux commutent.

(2) Soient f et g deux rotations de E, autres que Id_E , et telles que $f \circ g = g \circ f$. Soit u un vecteur unitaire de l'axe de f.

  (a) Montrer que $g(u)$ appartient à l'axe de f et en déduire que $g(u) = \pm u$.

  (b) Dans le cas $g(u) = u$, montrer que les rotations f et g ont même axe.

  (c) Dans le cas $g(u) = -u$, montrer que les axes de f et de g sont orthogonaux puis que f et g sont des retournements.

Exercice 21 (Formule de Rodrigues). Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ pour que $f : E \to E$ définie par :

$$f(x) = \alpha x + \beta\langle u, x\rangle u + \gamma u \wedge x$$

soit une rotation, et déterminer alors ses éléments caractéristiques.

Indication : on pourra considérer une base orthonormée directe (i, j, k) avec $i = u$, et introduire la matrice de f dans cette base.

Exercice 22. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul. Montrer que f est une rotation si et seulement si :

$$\forall u, v \in E \quad f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v).$$