**Université Paris Cité – Grands Moulins**

---

# L2 Math et Math Info – Analyse 3<br>Contrôle 2<br>Corrigé de la version A<br>Durée : 2 heures

---

**21 Novembre 2022**

*Les documents et appareils électroniques sont interdits.*
*Tout argument devra être justifié par une référence précise au cours ou une démonstration.*

**Ne tournez pas la page avant d'avoir été autorisé.e à le faire**

**Exercice 1.** 1. *Montrer que l'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt$ *est absolument convergente.*

2. *Montrer que l'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ *est convergente.*

3. *L'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ *est-elle convergente ? (Justifier votre réponse)*

***Solution :***

1. ***(1pt)*** *D'abord la fonction* $t \mapsto \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$ *est continue sur* $[1, +\infty)$. *De plus, pour tout* $t \geq 1$, *on a*

$$\left|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

*De plus, l'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ *est une intégrale de Riemann convergente, car* $3/2 > 1$. *Donc l'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\right| dt$ *est convergente.*

2. ***(2pts)*** *D'abord la fonction* $t \mapsto \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ *est continue sur* $[1, +\infty)$. *Soit* $x > 1$. *Grâce à une intégration par parties, on a*

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt &= \left[\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \sin 1 + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt. \end{aligned}$$

*Il est clair que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$, *car*

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

*De plus, d'après la question précédente,*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt$$

*est absolument convergente et donc convergente. Ainsi*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt \in \mathbb{R}.$$

*Finalement,*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = -\sin 1 + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt \in \mathbb{R}.$$

*et l'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ *est convergente.*

3. ***(1pt)*** *On remarque qu'au voisinage de 0 la fonction* $t \mapsto \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ *est positive et*

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

*Comme* $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *est une intégrale de Riemann convergente, on déduit que l'intégrale impropre* $\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ *est convergente. Or d'après la question précédente, l'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ *est convergente. Ainsi l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ *est convergente.*

**Exercice 2.** *1. Montrer que la suite définie par*

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \int_1^n e^{-(t+1)^2} dt$$

*est de Cauchy.*

*2. La suite de terme général $v_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, est-elle de Cauchy ?.*

***Solution :***

1. ***(1,5pt)*** *D'abord, la fonction $t \mapsto e^{-(t+1)^2}$ est continue positive sur $[1, +\infty)$. De plus,*

$$\forall t \geq 1, \quad 0 \leq e^{-(t+1)^2} \leq e^{-t}.$$

*Aussi l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente car*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} (e^{-1} - e^{-x}) = e^{-1}.$$

*Ainsi l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} e^{-(t+1)^2} dt$ est convergente. En particulier,*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^n e^{-(t+1)^2} dt = \int_1^{+\infty} e^{-(t+1)^2} dt.$$

*Autrement dit, la suite $(u_n)$ est convergente. Elle est donc de Cauchy.*

2. ***(1pt)*** *On remarque que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{4n} = \sin\left(4n\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

*De même,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{4n+1} = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

*Ainsi $|v_{4n+1} - v_{4n}| = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et donc la suite $(v_n)_n$ n'est pas de Cauchy.*

**Exercice 3.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_n$ la fonction définie sur $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ par*

$$\forall t \in \left[\frac{1}{3}, 3\right], \qquad g_n(t) = \frac{1 + 2t^n}{2 + 3t^n}.$$

1. *Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ vers une fonction $g$ que l'on déterminera.*
2. *La convergence de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ ? (Justifier votre réponse)*
3. *Calculer $g_n(t_n)$ avec $t_n = \sqrt[n]{2}$.*
4. *La convergence de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $]1, 3]$ ? (Justifier votre réponse)*

***Solution :***

1. ***(1,5pts)*** *D'abord*

$$g_n(1) = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{5}.$$

*Soit* $t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right[$. *Comme* $t^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *on déduit que*

$$g_n(t) = \frac{1+2t^n}{2+3t^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

*Soit* $t \in ]1, 3]$. *Comme* $t^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *on déduit que*

$$g_n(t) = \frac{1+2t^n}{2+3t^n} = \frac{(1/t^n)+2}{(2/t^n)+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}.$$

*Ainsi la suite de fonctions* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement sur* $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ *vers la fonction* $g$ *donnée par*

$$\begin{cases} g(t) = \frac{1}{2} & si \;\; t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right[ \\ g(0) = \frac{3}{5} & si \;\; t = 1 \\ g(t) = \frac{2}{3} & si \;\; t \in ]1, 3] \end{cases}$$

2. ***(1,5pt)*** *D'après le cours, si la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément sur* $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ *vers une fonction* $f$ *alors elle converge simplement sur* $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ *vers cette même fonction. Ainsi, grâce à la question précédente et à l'unicité de la limite simple,* $f$ *n'est rien d'autre que la fonction* $g$. *Il s'agit donc de savoir si la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* $g$ *sur* $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.
   *Or d'après le cours aussi, la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Ici toutes les fonctions* $g_n$ *sont continues sur* $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ *alors que la fonction* $g$ *n'est pas continue sur* $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$. *On en déduit que la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas uniformément sur* $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ *vers* $g$.
3. ***(0,5pt)*** *D'abord on remarque* $t_n = \sqrt[n]{2} \in ]1, 3]$ *et* $t^n = 2$. *Ainsi*

$$g_n(t_n) = \frac{1+2\cdot 2}{2+3\cdot 2} = \frac{5}{8} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{5}{8}.$$

4. ***(1pt)*** *Comme* $t_n = \sqrt[n]{2} \in ]1, 3]$ *on a* $g(t_n) = \frac{2}{3}$. *On en déduit que*

$$g_n(t_n) - g(t_n) = \frac{5}{8} - \frac{2}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-1}{24} \neq 0.$$

   *Ainsi la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas uniformément sur* $]1, 3]$ *vers* $g$.

**Exercice 4.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f_n$ *la fonction définie sur* $[0, 1]$ *par*

$$f_n(t) = t^n\sqrt{1-t}.$$

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* $f_n$ *est bornée.*
2. *Calculer* $M_n = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)|$.
3. $M_n$ *est-elle atteinte ? c-à-d existe-t-il un* $t_n \in [0, 1]$ *tel que* $M_n = |f_n(t_n)|$ *?*
4. *Montrer que la suite* $(M_n)$ *ainsi obtenue est convergente et trouver sa limite.*
5. *En déduire que la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* $[0, 1]$ *vers une fonction* $f$ *que l'on déterminera.*

***Solution :***

1. ***(0,5pt)*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$. Donc la fonction $f_n$ est bornée sur $[0,1]$. En fait, on sait aussi que $f_n$ atteint ses bornes sur $[0,1]$, ce qui donne une réponse positive à la question 4) sans calcul.*

2. ***(2pts)*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n$ est de classe $C^1$ sur $]0,1[$. De plus, pour tout $t \in ]0,1[$,*

$$\begin{aligned} f_n'(t) = nt^{n-1}\sqrt{1-t} - \frac{t^n}{2\sqrt{1-t}} &= \frac{t^{n-1}}{2\sqrt{1-t}}\left(2n(1-t)-t\right) \\ &= \frac{t^{n-1}}{2\sqrt{1-t}}\left(2n-(2n+1)t\right). \end{aligned}$$

*Ainsi, sur l'intervalle $]0,1[$, on a*

$$f_n'(t) = \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t}}\left(2n-(2n+1)t\right) = 0 \iff t = \frac{2n}{2n+1}.$$

*De plus, $f(\frac{2n}{2n+1}) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. D'où le tableau de variation de $f_n$ :*

| $t$ | $0$ | $\frac{2n}{2n+1}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f_n'(t)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f_n(t)$ | $0$ $\nearrow$ | $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ | $\searrow$ $0$ |

*La fonction $f_n$ est positive et donc $|f_n| = f_n$. Ainsi d'après le tableau de variation de $f_n$ on a :*

$$M_n = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = \sup_{t\in[0,1]} f_n(t) = f_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

3. ***(0,5pt)*** *D'après la question précédente $M_n$ est atteinte au point $t_n = \frac{2n}{2n+1}$.*

4. ***(0,5pt)*** *On a*

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

*et donc*

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0.$$

5. ***(1pt)*** *On rappelle que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction $f$ sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *où* $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)|$.
*D'après la question précédente*

$$\|f_n\|_\infty = M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

*et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.*

**Exercice 5.** *On considère pour tout entier $n \geq 1$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-xn}).$$

1. *Démontrer que la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ que l'on précisera.*
2. *Démontrer que la suite converge aussi uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la même limite $f$.*
3. *Vérifier que la fonction $f$ n'est pas dérivable en 0. La suite des dérivées $(f'_n)$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$ ? (Justifier votre réponse).*
4. *Prouver que la suite des dérivées $(f'_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et préciser sa limite $g$.*
5. *Démontrer que pour tout $a > 0$, la suite $f'_n$ converge uniformément sur $]-\infty, -a]$ et sur $[a, +\infty[$ vers sa limite simple $g$.*

***Solution :***

1. ***(1,5pts)*** *D'abord $f_n(0) = \frac{\ln 2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, si $x > 0$ alors $e^{-xn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc*
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-xn}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
*Maintenant si $x < 0$ alors $e^{xn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc*
$$\begin{aligned} f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-xn}) &= \frac{1}{n}\ln(e^{-xn}(1+e^{xn})) \\ &= -x + \frac{1}{n}\ln(1+e^{xn}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -x. \end{aligned}$$
*Ains la suite $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f$ définie par*
$$\begin{cases} f(x) = -x & si \;\; x < 0 \\ f(x) = 0 & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

2. ***(2pts)*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a*
   — *si $x < 0$ alors*
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\ln(1+e^{xn}) \leq \frac{\ln 2}{n}$$
   — *si $x \geq 0$ alors*
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-xn}) \leq \frac{\ln 2}{n}$$
*Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\ln 2}{n},$$
*ou encore*
$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\ln 2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
*Donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f$.*

3. ***(0,5+1=1,5pts)*** *Si* $x > 0$ *alors*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

*et donc* $f$ *est dérivable à droite en 0 et* $f'_d(0) = 0$. *Maintenant si* $x < 0$ *alors*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1 \xrightarrow[x \to 0]{} -1$$

*et donc* $f$ *est dérivable à gauche en 0 et* $f'_g(0) = -1$. *La fonction* $f$ *n'est donc pas dérivable en 0 car* $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.
*Comme on sait que*
— *toutes les fonctions* $f_n$ *sont de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$,
— *la suite* $(f_n)$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers* $f$
*si la suite des dérivées* $(f'_n)$ *convergeait uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* $g$ *alors la fonction* $f$ *serait de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $g$, *ce qui est absurde. Ainsi la suite* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$.

4. ***(1,5pt)*** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *D'abord la fonction* $f_n$ *est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{-ne^{-xn}}{1 + e^{-xn}} = -\frac{e^{-xn}}{1 + e^{-xn}}.$$

*Ainsi* $f'_n(0) = -1/2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1/2$. *De plus, si* $x > 0$ *alors* $e^{-xn} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ *et donc*

$$f'_n(x) = -\frac{e^{-xn}}{1 + e^{-xn}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

*De même, si* $x < 0$ *alors* $e^{xn} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ *et donc*

$$f'_n(x) = -\frac{e^{-xn}}{1 + e^{-xn}} = -\frac{1}{1 + e^{xn}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1.$$

*Donc la suite des dérivées* $(f'_n)$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* $g$ *donnée par*

$$\begin{cases} g(x) = -1 & si \;\; x < 0 \\ g(0) = -\frac{1}{2} & si \;\; x = 0 \\ g(x) = 0 & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

5. ***(2pts)*** *Soit* $a > 0$. *On a*

$$\forall x \in (-\infty, -a], \quad f'_n(x) - g(x) = -\frac{e^{-xn}}{1 + e^{-xn}} + 1 = \frac{1}{1 + e^{-xn}}$$

*La fonction* $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-xn}}$ *est positive croissante sur* $(-\infty, -a]$. *Ainsi*

$$\forall x \in (-\infty, -a], \quad |f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{1 + e^{an}}$$

*Comme* $\frac{1}{1+e^{an}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ *on déduit que* $(f'_n)_n$ *converge uniformément sur* $]-\infty, -a]$ *vers* $g$.

*De même,*

$$\forall x \in [a, +\infty), \quad |f_n'(x) - g(x)| = \left| -\frac{e^{-xn}}{1 + e^{-xn}} \right| = \frac{1}{1 + e^{xn}}$$

*La fonction* $x \mapsto \frac{1}{1+e^{xn}}$ *est positive décroissante sur* $[a, +\infty)$*. Ainsi*

$$\forall x \in [a, \infty), \quad |f_n'(x) - g(x)| \leq \frac{1}{1 + e^{an}}$$

*Comme* $\frac{1}{1+e^{an}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *on déduit que* $(f_n')_n$ *converge uniformément sur* $[a, \infty)$ *vers* $g$*.*