TD 1 – Révisions d'algèbre linéaire

1. À travailler en classe

Exercice 1 (Bases, dimension, supplémentaire). Déterminer une base, des équations, la dimension et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

1. $A = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ avec $a_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$, $a_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $a_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.
2. $C = \left\{(2t+u, -u, -2t) \mid (t,u) \in \mathbb{R}^2\right\}$;
3. $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\right\}$;
4. $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\right\}$.

Exercice 2 (Applications linéaires et matrices). Soit l'application linéaire $f\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x+2y+z \\ 2x+y+3z \\ -x-y-z \end{smallmatrix}\right).$$

1. Donner la matrice de A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Déterminer le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}\, f$.
   (b) L'application f est-elle injective ?
3. f est-elle bijective ? Si oui, donner f^{-1}.

Exercice 3 (Applications linéaires et bases).

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
   $$f(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad f(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad f(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$
   Calculer $f(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right))$ et $f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right))$ en général.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$.
3. Donner la matrice de l'application linéaire f en munissant $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques.
4. On considère les bases $B_3 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ de $\mathbb{R}^3$ et $B_2 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ de $\mathbb{R}^2$. En utilisant la formule de changement de bases, donner la matrice de f dans les bases B_2 et B_3.

Exercice 4 (Diagonalisation avec un paramètre). Soit m un réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout entier $k \geq 0$.

Exercice 5 (Transposition). On note $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ la base canonique de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire (appelée transposition) ${}^t : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ telle que :
   $$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad {}^tE_{i,j} = E_{j,i}.$$

2. Ecrire la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que ^{t} est un automorphisme de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$.
4. Montrer que si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, on obtient ${}^tA$ par l'une des définitions suivantes :
   — $C_i({}^tA) = {}^tL_i(A)$;
   — $L_j({}^tA) = {}^tC_j(A)$;
   — $({}^tA)_{i,j} = (A)_{j,i}$.
   avec $C_j(A)$ la j-ème colonne de la matrice A et $L_i(A)$ la i-ème ligne de la matrice A.
5. Montrer que si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, on a ${}^t({}^tA) = A$.
6. Montrer que si A et B sont des matrices de $M_n(\mathbb{K})$, on a ${}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}^3$, soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E, et soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3 \qquad u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3 \qquad u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3.$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
2. Soit $F = \{x \in E \,:\, u(x) = x\}$. Montrer que $\dim(F) = 1$ et déterminer un vecteur non nul de F.
3. Soit H le sev de E défini par :
   $$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E \,:\, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}.$$
   Donner une base (b, c) de H.
4. Soit a le vecteur non nul déterminé à la question 2 et soit $\mathscr{B}' = \big(a, b, u(b)\big)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E et déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$.
5. Montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 7 (Matrice de passage). Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit e_1, e_2, e_3 les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ et calculer P^{-1}.
3. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ du vecteur $e_1 - e_2$.
5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer la matrice R de u dans la base $\mathscr{B}'$.
   (b) Calculer R^4.
   (c) Donner l'expression de A en fonction de R, de P et de P^{-1}.
   (d) En déduire les valeurs de A^{4n} pour tout entier $n \geq 0$.

2. À travailler chez soi

Exercice 8 (Bases, dimension). Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces quatre vecteurs. Déterminer la dimension de F et en donner une base. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

Exercice 9 (Liberté, équation cartésienne). On considère, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $v = (1, -2, 3)$ et $w = (2, -4, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition sur le paramètre m la famille (v, w) est-elle une famille libre ?
2. On suppose dans cette question que $m = 3$. Décrire l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v, w)$: nature géométrique, équation cartésienne, dimension, base. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(v, w)$.

Exercice 10 (Liberté). Soient $n \geq 1$ un entier. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée.

1. Montrer que si $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.
3. Montrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on ait $f(x) = \lambda x$.

Exercice 11 (Théorème du rang). Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes :

(i) $E = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker} f$,

(ii) $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2$,

(iii) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

Exercice 12 (Théorème du rang). Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$

(ii) $f^2 = 0$ et $n = 2 \times \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 13 (Applications linéaires et matrices).

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une expression de $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 14 (Manipulation des déterminants).

1. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

2. En déduire :

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 15 (Matrice de passage, endomorphisme). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus 2, et soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. On considère l'application $f : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \qquad f(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Déterminer les coordonnées de $f(P)$ dans la base canonique, pour $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$.
2. Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer que $\mathscr{B}' = \big(1, X-1, (X-1)(X-2)\big)$ est une base de E, et donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 16 (Valeurs propres). Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose qu'il existe un entier $n > 0$ tel que 0 est valeur propre de f^n. Montrer que 0 est valeur propre de f.

Exercice 17 (Déterminant). Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice réelle carrée vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \left|a_{i,i}\right| > \sum_{j \neq i} \left|a_{i,j}\right|.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. On suppose de plus que $a_{i,i} > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 18 (Matrice non diagonalisable). Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 19. Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à $n \geq 2$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme f de E dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
2. Supposons, dans cette question uniquement, que f est diagonalisable. Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.
3. Soit u un endomorphisme quelconque de E. Montrer qu'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$$E = \operatorname{Im}(u^k) \oplus \operatorname{Ker}(u^k).$$

4. Dans la question précédente, l'endomorphisme u^k est-il nécessairement diagonalisable ?