EA4 – Éléments d'algorithmique
TD nº 7 : arbres binaires de recherche

Exercice 1 : généralités

1. Dessiner des ABR de toutes les hauteurs possibles pour l'ensemble de clés $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Combien y a-t-il d'ABR d'une forme donnée pour un ensemble de n valeurs fixées ?

3. Donner un algorithme *de complexité linéaire en la taille de l'arbre* qui teste si un arbre binaire est un arbre binaire de recherche.

4. À partir d'un ABR vide, insérer successivement les clés

`42, 63, 95, 4, 28, 71, 13, 21, 54, 9, 37, 86`

en appliquant l'algorithme d'insertion dans un ABR vu en cours.

Exercice 2 : recherche dans un ABR

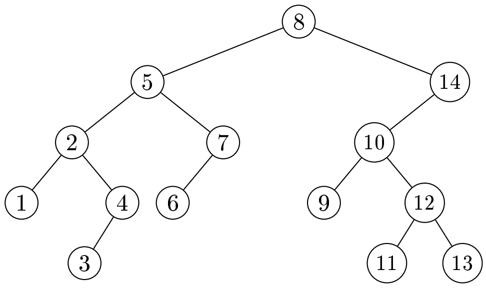
Indiquer à quelle(s) suite(s) d'entiers $a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots$ un entier x pourrait être comparé ($x \leqslant a_1$, puis $x \leqslant a_2$, puis etc) lors de la recherche de ce x dans un ABR.

- ☐ 600 ⟶ 299 ⟶ 475 ⟶ 388 ⟶ 430 ⟶ 399 ⟶ 395 ⟶ 401
- ☐ 237 ⟶ 266 ⟶ 245 ⟶ 244 ⟶ 239 ⟶ 242 ⟶ 243 ⟶ 241
- ☐ 500 ⟶ 590 ⟶ 536 ⟶ 569 ⟶ 583 ⟶ 586 ⟶ 585 ⟶ 584
- ☐ 478 ⟶ 140 ⟶ 259 ⟶ 453 ⟶ 375 ⟶ 272 ⟶ 271 ⟶ 273
- ☐ 276 ⟶ 655 ⟶ 801 ⟶ 875 ⟶ 816 ⟶ 811 ⟶ 814 ⟶ 812

Exercice 3 : suppression dans un ABR

1. Supprimer de l'ABR ci-dessous les nœuds d'étiquette 1, puis 2, puis 8, puis 9, en appliquant l'algorithme de suppression d'un nœud dans un ABR vu en cours.

2. Recommencer en utilisant cette fois la variante de l'algorithme de suppression qui remplace un nœud supprimé par son prédécesseur.



Exercice 4 : ordres d'insertions

1. Dessiner les trois ABR obtenus par insertion successive des clés `1` à `9` pour les ordres suivants :
   - `1, 9, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 5;`
   - `4, 2, 1, 3, 6, 5, 8, 7, 9;`
   - `4, 1, 2, 3, 8, 6, 5, 7, 9.`

2. Proposer, si possible, d'autres ordres d'insertion menant aux mêmes ABR.

3. Pour chacun des trois ABR, dénombrer les ordres possibles.

4. On appelle arbre binaire *parfait* un arbre binaire dont toutes les feuilles sont à la profondeur maximale – autrement dit, tous ses niveaux sont entièrement remplis. Donner une équation de récurrence pour $N(h)$, le nombre d'ordres d'insertion possibles pour l'ABR parfait de hauteur h.