# Module EA4 – Éléments d'Algorithmique II

## *Outils pour l'analyse des algorithmes*

Dominique Poulalhon
dominique.poulalhon@irif.fr

Université Paris Cité
L2 Informatique & DL Bio-Info, Jap-Info, Math-Info
Année universitaire 2023-2024

# La semaine dernière...

apport de l'hypothèse « $L$ *est un tableau trié* » sur quelques problèmes manipulant des listes

# La semaine dernière...

apport de l'hypothèse « $L$ *est un tableau trié* » sur quelques problèmes manipulant des listes

deux exemples d'algorithmes de tri par comparaisons :

## La semaine dernière...

apport de l'hypothèse « $L$ *est un tableau trié* » sur quelques problèmes manipulant des listes

deux exemples d'algorithmes de tri par comparaisons :

- le tri par sélection

# La semaine dernière...

apport de l'hypothèse « $L$ *est un tableau trié* » sur quelques problèmes manipulant des listes

deux exemples d'algorithmes de tri par comparaisons :

- le tri par sélection
- le tri par insertion

# La semaine dernière...

apport de l'hypothèse « $L$ *est un tableau trié* » sur quelques problèmes manipulant des listes

deux exemples d'algorithmes de tri par comparaisons :

- le tri par sélection
- le tri par insertion

tri par comparaisons : algorithme n'utilisant pas d'autre propriété sur les éléments que l'existence d'un ordre total
$\Longrightarrow$ les éléments ne peuvent être utilisés que pour des comparaisons deux à deux

Tri par sélection — $\Theta(n^2)$ comparaisons ***dans tous les cas***

Tri par insertion — $\Theta(n^2)$ comparaisons ***au pire***
$\Theta(n)$ comparaisons ***au mieux***

## Questions

- peut-on être plus précis pour le tri par insertion ?
- peut-on faire mieux que $\Theta(n^2)$ dans le pire cas ?

## PERMUTATIONS

permutation de taille $n$ = bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même

# Permutations

permutation de taille $n$ = bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même

$\mathfrak{S}_n$ = ensemble des permutations de taille $n$

permutation de taille $n$ = bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même

$\mathfrak{S}_n$ = ensemble des permutations de taille $n$

notation bilinéaire : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

# Permutations

permutation de taille $n$ = bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même

$\mathfrak{S}_n$ = ensemble des permutations de taille $n$

notation bilinéaire : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

notation linéaire : $\sigma = \sigma(1)\ \sigma(2)\ \dots\ \sigma(n)$

## Exemple – représentations diverses

$$\sigma$$

$$\begin{aligned}
1 &\longmapsto 4\\
2 &\longmapsto 2\\
3 &\longmapsto 1\\
4 &\longmapsto 6\\
5 &\longmapsto 7\\
6 &\longmapsto 3\\
7 &\longmapsto 5
\end{aligned}$$

## Exemple – représentations diverses

$$
\begin{array}{ccc}
 & \sigma & \\
1 & \longmapsto & 4 \\
2 & \longmapsto & 2 \\
3 & \longmapsto & 1 \\
4 & \longmapsto & 6 \\
5 & \longmapsto & 7 \\
6 & \longmapsto & 3 \\
7 & \longmapsto & 5
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}
$$

# Exemple – représentations diverses

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 1 \\ 4 & \longmapsto & 6 \\ 5 & \longmapsto & 7 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & 5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \boxed{4 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \quad 7 \quad 3 \quad 5} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \boxed{4 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \quad 7 \quad 3 \quad 5}$$

# Exemple – représentations diverses

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 1 \\ 4 & \longmapsto & 6 \\ 5 & \longmapsto & 7 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & 5 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \quad 1 \longmapsto 4$$

## Exemple – représentations diverses

$$
\begin{array}{ccc}
 & \sigma & \\
1 & \longmapsto & 4 \\
2 & \longmapsto & 2 \\
3 & \longmapsto & 1 \\
4 & \longmapsto & 6 \\
5 & \longmapsto & 7 \\
6 & \longmapsto & 3 \\
7 & \longmapsto & 5
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\sigma =
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, mapsto] & 4 \arrow[d, mapsto] \\
 & 6
\end{tikzcd}
$$

# Exemple – représentations diverses

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 1 \\ 4 & \longmapsto & 6 \\ 5 & \longmapsto & 7 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & 5 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, mapsto] & 4 \arrow[d, mapsto] \\ 3 & 6 \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

# Exemple – représentations diverses

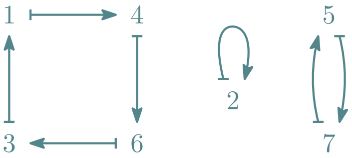
$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 1 \\ 4 & \longmapsto & 6 \\ 5 & \longmapsto & 7 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & 5 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 4 \\ \uparrow & & \downarrow \\ 3 & \longleftarrow & 6 \end{array}$$

# Exemple – représentations diverses

$$
\begin{array}{ccc}
 & \sigma & \\
1 & \longmapsto & 4 \\
2 & \longmapsto & 2 \\
3 & \longmapsto & 1 \\
4 & \longmapsto & 6 \\
5 & \longmapsto & 7 \\
6 & \longmapsto & 3 \\
7 & \longmapsto & 5
\end{array}
\quad \iff \quad
\sigma =
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, mapsto] & 4 \arrow[d, mapsto] & 2 \arrow[loop above, mapsto] \\
3 \arrow[u, mapsto] & 6 \arrow[l, mapsto] &
\end{tikzcd}
$$

# Exemple – représentations diverses

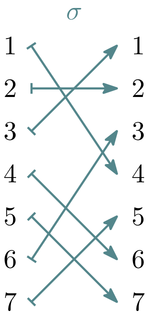
$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 1 \\ 4 & \longmapsto & 6 \\ 5 & \longmapsto & 7 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & 5 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma =$$




notation cyclique : sur cet exemple, $\sigma = (1\ 4\ 6\ 3)\ (2)\ (5\ 7)$,
ou plus simplement : $\sigma = (1\ 4\ 6\ 3)\ (5\ 7)$

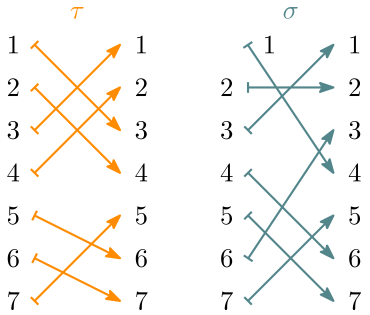
# Exemple – représentations diverses

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 1 \\ 4 & \longmapsto & 6 \\ 5 & \longmapsto & 7 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & 5 \end{array}
\quad \Leftrightarrow$$



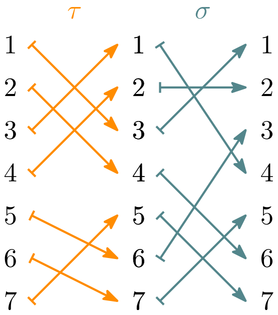
# Produit de permutations

produit : $\sigma\tau = \sigma \circ \tau \ : \ i \xmapsto{\tau} \tau(i) \xmapsto{\sigma} \sigma(\tau(i))$



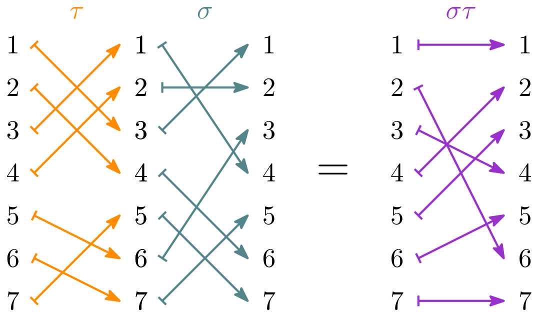
# Produit de permutations

produit : $\sigma\tau = \sigma \circ \tau \ : \ i \stackrel{\tau}{\longmapsto} \tau(i) \stackrel{\sigma}{\longmapsto} \sigma(\tau(i))$



# Produit de permutations

produit : $\sigma\tau = \sigma \circ \tau \;:\; i \xmapsto{\tau} \tau(i) \xmapsto{\sigma} \sigma(\tau(i))$

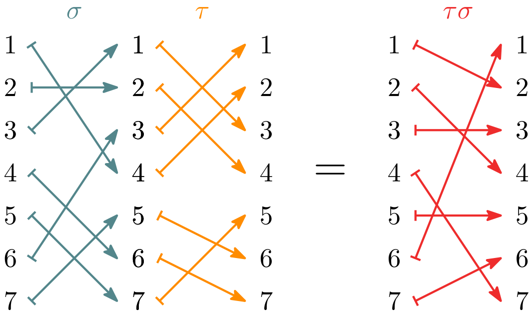



**Lemme**

$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n \implies \sigma\tau \in \mathfrak{S}_n$ *(loi de composition interne)*

# Produit de permutations

produit : $\sigma\tau = \sigma \circ \tau \;:\; i \overset{\tau}{\longmapsto} \tau(i) \overset{\sigma}{\longmapsto} \sigma(\tau(i))$




**Lemme**

$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n \implies \sigma\tau \in \mathfrak{S}_n$ *(loi de composition interne)*

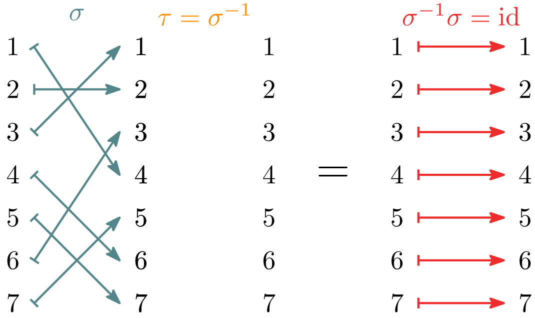
***attention, le produit n'est pas commutatif !***

# Permutation inverse

inverse de $\sigma$ : application $\tau$ telle que $\tau\sigma = \mathrm{id}_n = 1\ 2\ \ldots\ n$

notation : $\sigma^{-1}$

$$i \xmapsto{\ \sigma\ } \sigma(i) \xmapsto{\ \tau = \sigma^{-1}\ } i$$

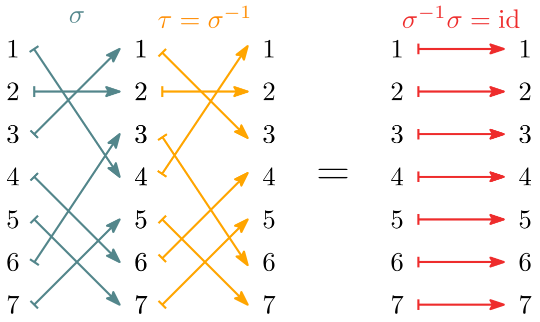


# Permutation inverse

inverse de $\sigma$ : application $\tau$ telle que $\tau\sigma = \mathrm{id}_n = 1\ 2\ \ldots\ n$

notation : $\sigma^{-1}$

$$i \xmapsto{\sigma} \sigma(i) \xmapsto{\tau = \sigma^{-1}} i$$

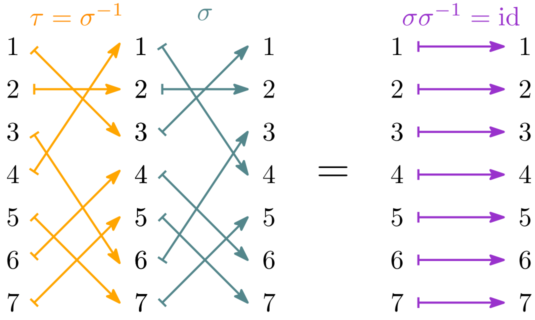


# Permutation inverse

inverse de $\sigma$ : application $\tau$ telle que $\tau\sigma = \mathrm{id}_n = 1\ 2\ \ldots\ n$

notation : $\sigma^{-1}$

$$i \xmapsto{\ \sigma\ } \sigma(i) \xmapsto{\ \tau = \sigma^{-1}\ } i$$



# Permutation inverse

inverse de $\sigma$ : application $\tau$ telle que $\tau\sigma = \mathrm{id}_n = 1\ 2\ \ldots\ n$

notation : $\sigma^{-1}$

$$i \xmapsto{\ \sigma\ } \sigma(i) \xmapsto{\ \tau\, =\, \sigma^{-1}\ } i$$

$$\sigma = \begin{tikzcd}
1 \arrow[r, mapsto] & 4 \arrow[d, mapsto] & & 5 \arrow[d, bend left, mapsto] \\
3 \arrow[u, mapsto] & 6 \arrow[l, mapsto] & 2 \arrow[loop above, mapsto] & 7 \arrow[u, bend left, mapsto]
\end{tikzcd}$$

inverse de $\sigma$ : application $\tau$ telle que $\tau\sigma = \mathrm{id}_n = 1\ 2\ \ldots\ n$

notation : $\sigma^{-1}$

$$i \xmapsto{\ \sigma\ } \sigma(i) \xmapsto{\ \tau = \sigma^{-1}\ } i$$

$$\sigma^{-1} = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, mapsto] & 4 \arrow[l, mapsto] & 2 \arrow[loop above, mapsto] & 5 \arrow[d, mapsto, bend right] \\ 3 \arrow[r, mapsto] & 6 \arrow[u, mapsto] & & 7 \arrow[u, mapsto, bend right] \end{tikzcd}$$

### Lemme

- $\sigma \in \mathfrak{S}_n \implies \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$
- $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{id}_n$ : $i = \sigma(j) \xmapsto{\ \sigma^{-1}\ } \sigma^{-1}(i) = j \xmapsto{\ \sigma\ } i$
- $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$

*(on dit que $\mathfrak{S}_n$ a une structure de groupe)*

## Tris *vs.* permutations

tableau à trier

tableau trié

# Tris *vs.* permutations

tableau à trier

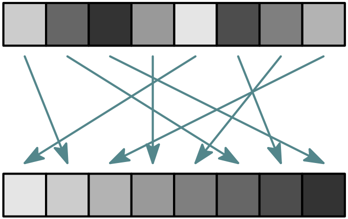
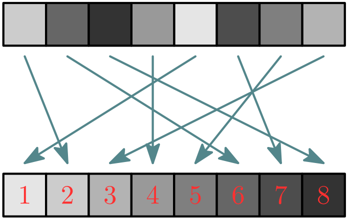


tableau trié

# Tris *vs.* permutations

tableau à trier

tableau trié



# Tris *vs.* permutations

tableau à trier

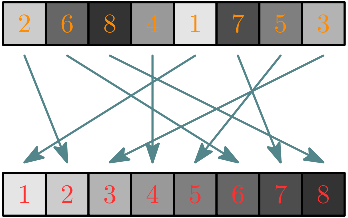



tableau trié

# TRIS *vs.* PERMUTATIONS

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \boxed{2 \quad 6 \quad 8 \quad 4 \quad 1 \quad 7 \quad 5 \quad 3} \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8} \end{pmatrix}$$

## Tris *vs.* permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \boxed{2 \quad 6 \quad 8 \quad 4 \quad 1 \quad 7 \quad 5 \quad 3} \end{pmatrix}$$

produit par $\sigma^{-1}$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

produit par $\sigma^{-1}$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

**Lemme**

*un algorithme de tri par comparaisons est correct si et seulement s'il trie correctement toutes les permutations*

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

**Lemme**

*un algorithme de tri par comparaisons est correct si et seulement s'il trie correctement toutes les permutations*

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

**Lemme**

*un algorithme de tri par comparaisons est correct si et seulement s'il trie correctement toutes les permutations*

**Lemme**

*le nombre de permutations de taille* $n$ *est* $n!$

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

**Lemme**

*un algorithme de tri par comparaisons est correct si et seulement s'il trie correctement toutes les permutations*

**Lemme**

*le nombre de permutations de taille* $n$ *est* $n!$

**Corollaire**

*un algorithme de tri doit avoir* $n!$ *comportements différents sur les entrées de taille* $n$

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

**Lemme**

*un algorithme de tri par comparaisons est correct si et seulement s'il trie correctement toutes les permutations*

**Lemme**

*le nombre de permutations de taille* $n$ *est* $n!$

**Corollaire**

*un algorithme de tri doit avoir* $n!$ *comportements différents sur les entrées de taille* $n$

**Corollaire**

*un algorithme de tri par comparaisons fait* ***au moins*** $\log_2 n!$ *comparaisons dans le pire cas parmi les entrées de taille* $n$

## Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

### Corollaire

*un algorithme de tri par comparaisons fait* ***au moins*** $\log_2 n!$ *comparaisons dans le pire cas parmi les entrées de taille* $n$

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

**Corollaire**

*un algorithme de tri par comparaisons fait* ***au moins*** $\log_2 n!$ *comparaisons dans le pire cas parmi les entrées de taille* $n$

Question : c'est gros comment, $\log_2 n!$ ?

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

## Corollaire

*un algorithme de tri par comparaisons fait* ***au moins*** $\log_2 n!$ *comparaisons dans le pire cas parmi les entrées de taille* $n$

Question : c'est gros comment, $\log_2 n!$ ?

## Théorème

$$\log_2 n! \in \Theta(n \log n)$$

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

## Corollaire

*un algorithme de tri par comparaisons fait* ***au moins*** $\log_2 n!$ *comparaisons dans le pire cas parmi les entrées de taille* $n$

Question : c'est gros comment, $\log_2 n!$ ?

## Théorème

$$\log_2 n! \in \Theta(n \log n)$$

## Corollaire

*la complexité dans le pire cas (et en moyenne) d'un algorithme de tri par comparaisons est en*

$$\Omega(n \log n)$$

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

## Corollaire

*la complexité dans le pire cas (et en moyenne) d'un algorithme de tri par comparaisons est en* $\Omega(n \log n)$

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

**Corollaire**

*la complexité dans le pire cas (et en moyenne) d'un algorithme de tri par comparaisons est en* $\Omega(n \log n)$

Rappel : le tri par sélection est de complexité $\Theta(n^2)$ dans tous les cas, de même que le tri par insertion dans le pire cas

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

## Corollaire

*la complexité dans le pire cas (et en moyenne) d'un algorithme de tri par comparaisons est en* $\Omega(n \log n)$

Rappel : le tri par sélection est de complexité $\Theta(n^2)$ dans tous les cas, de même que le tri par insertion dans le pire cas

Questions :

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

**Corollaire**

*la complexité dans le pire cas (et en moyenne) d'un algorithme de tri par comparaisons est en* $\Omega(n \log n)$

Rappel : le tri par sélection est de complexité $\Theta(n^2)$ dans tous les cas, de même que le tri par insertion dans le pire cas

Questions :

- existe-t-il des algorithmes de tri de complexité $\Theta(n \log n)$ en moyenne ? dans le pire cas ?

# Borne inférieure pour la complexité des tris par comparaisons

## Corollaire

*la complexité dans le pire cas (et en moyenne) d'un algorithme de tri par comparaisons est en* $\Omega(n \log n)$

Rappel : le tri par sélection est de complexité $\Theta(n^2)$ dans tous les cas, de même que le tri par insertion dans le pire cas

Questions :

- existe-t-il des algorithmes de tri de complexité $\Theta(n \log n)$ en moyenne ? dans le pire cas ?
- quid de la complexité en moyenne du tri par insertion ?

# Tri par fusion

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

- découper le problème en sous-problèmes de taille inférieure
- résoudre *récursivement* le ou les sous-problèmes
- résoudre le problème initial à l'aide des résultats des sous-problèmes

# Tri par fusion

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

- scinder la liste à trier en deux, `gauche` et `droite`

- résoudre *récursivement* le ou les sous-problèmes

- résoudre le problème initial à l'aide des résultats des sous-problèmes

## Tri par fusion

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

- scinder la liste à trier en deux, `gauche` et `droite`

- trier `gauche` et `droite`

- résoudre le problème initial à l'aide des résultats des sous-problèmes

## Tri par fusion

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

- scinder la liste à trier en deux, `gauche` et `droite`
- trier `gauche` et `droite`
- *fusionner* `gauche` et `droite` en une unique liste triée

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

## Étape élémentaire : la fusion de listes triées

**2** **3** **6** **8**     **1** **4** **5** **7**

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

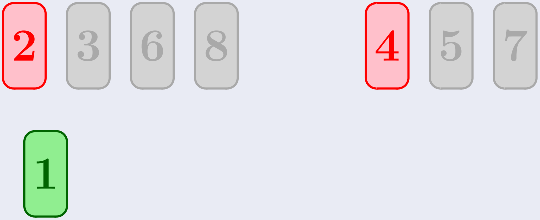
## Étape élémentaire : la fusion de listes triées

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | **3** | **6** | **8** | | **1** | **4** | **5** | **7** |

# Tri par fusion

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

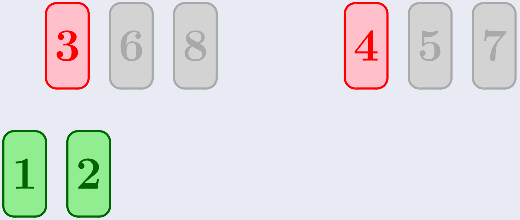
## Étape élémentaire : la fusion de listes triées



# Tri par fusion

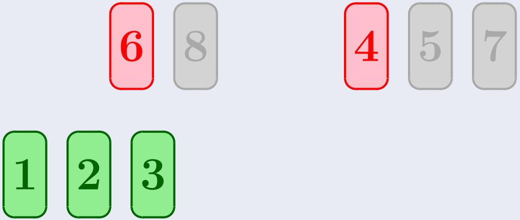
tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

## Étape élémentaire : la fusion de listes triées



tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

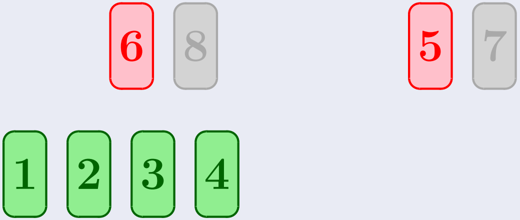
## Étape élémentaire : la fusion de listes triées



# Tri par fusion

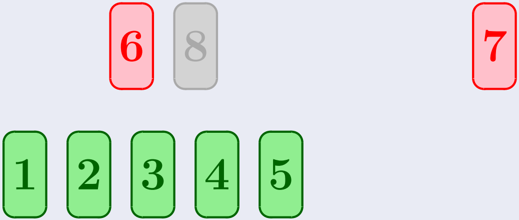
tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

## Étape élémentaire : la fusion de listes triées



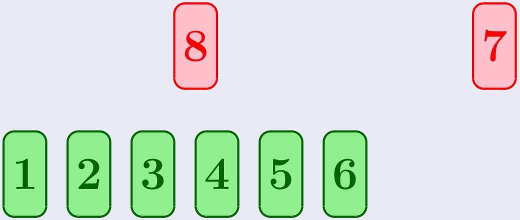
tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

## Étape élémentaire : la fusion de listes triées



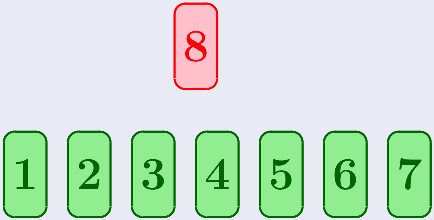
tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

## Étape élémentaire : la fusion de listes triées



tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

## Étape élémentaire : la fusion de listes triées



# Tri par fusion

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

## Étape élémentaire : la fusion de listes triées

1 2 3 4 5 6 7 8

# Tri par fusion

tri utilisant la stratégie « *diviser-pour-régner* »

## Étape élémentaire : la fusion de listes triées

2 3 6 8    1 4 5 7

1 2 3 4 5 6 7 8

# Fusion de deux listes triées

```
def fusion(L1, L2) :      # version récursive (mal écrite)
  if len(L1) == 0 : return L2
  elif len(L2) == 0 : return L1
  elif L1[0] < L2[0] :
    return [L1[0]] + fusion(L1[1:], L2)
  else :
    return [L2[0]] + fusion(L1, L2[1:])
```

# Fusion de deux listes triées

```
def fusion(L1, L2) :        # version récursive (mal écrite)
  if len(L1) == 0 : return L2
  elif len(L2) == 0 : return L1
  elif L1[0] < L2[0] :
    return [L1[0]] + fusion(L1[1:], L2)
  else :
    return [L2[0]] + fusion(L1, L2[1:])
```

$\Longrightarrow$ $\Theta(n)$ comparaisons, où $n$ est la taille de la liste fusionnée

## Fusion de deux listes triées

```
def fusion(L1, L2) :      # version récursive (mal écrite)
  if len(L1) == 0 : return L2
  elif len(L2) == 0 : return L1
  elif L1[0] < L2[0] :
    return [L1[0]] + fusion(L1[1:], L2)
  else :
    return [L2[0]] + fusion(L1, L2[1:])
```

$\Longrightarrow$ $\Theta(n)$ comparaisons, où $n$ est la taille de la liste fusionnée

*(ce n'est pas une bonne mesure de la complexité de la fonction écrite ci-dessus : chaque appel récursif travaille sur une* ***copie*** *de l'une des deux listes… mais c'est facile à résoudre, soit en dérécursivant la fonction, soit en passant les indices de début et fin en paramètre, et la complexité est alors bien en $\Theta(n)$)*

Exemple d'exécution complète :

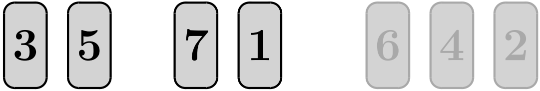
$\boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$

# Tri par fusion

**Exemple d'exécution complète :**

3 5 7 1    6 4 2

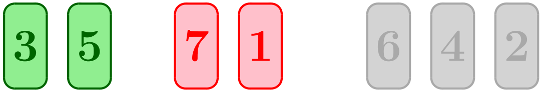
Exemple d'exécution complète :



Exemple d'exécution complète :

**3** **5** 7 1 6 4 2

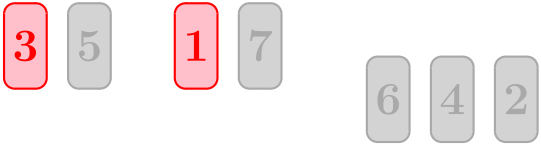
Exemple d'exécution complète :



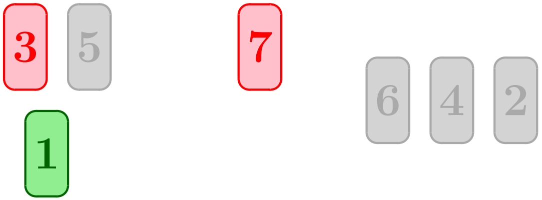
# Tri par fusion

Exemple d'exécution complète :

## Exemple d'exécution complète :

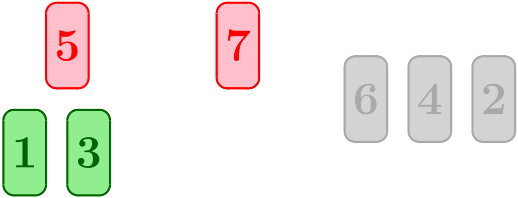


## Exemple d'exécution complète :



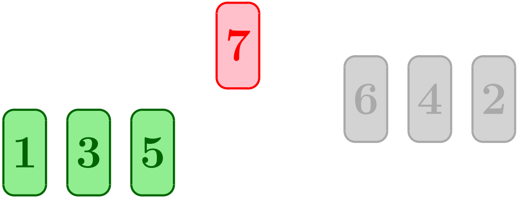
# Tri par fusion

## Exemple d'exécution complète :

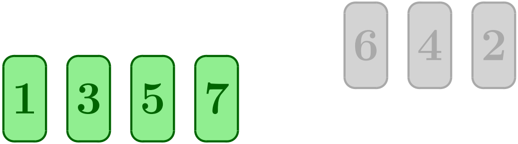


# Tri par fusion

Exemple d'exécution complète :



## Exemple d'exécution complète :



Exemple d'exécution complète :

## Exemple d'exécution complète :

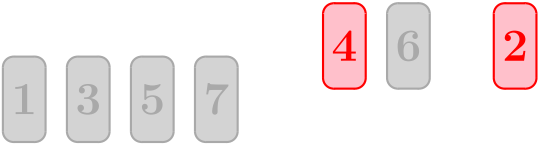
1 3 5 7 6 4 2

## Exemple d’exécution complète :

## Exemple d'exécution complète :

Exemple d'exécution complète :

Exemple d'exécution complète :



Exemple d'exécution complète :

Exemple d'exécution complète :

Exemple d'exécution complète :

# Tri par fusion

Exemple d'exécution complète :

**1** **3** **5** **7**    **2** **4** **6**

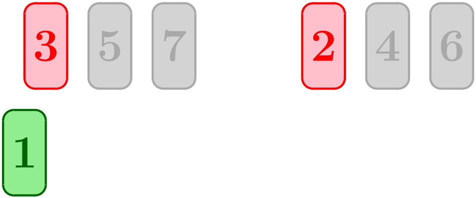
# Tri par fusion

**Exemple d'exécution complète :**

1 3 5 7     2 4 6

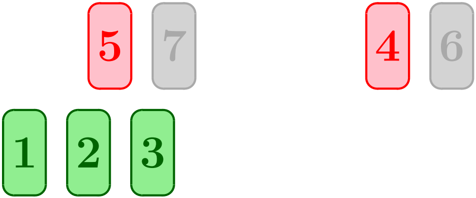
# Tri par fusion

Exemple d'exécution complète :



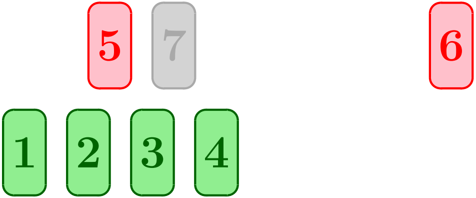
Exemple d'exécution complète :

Exemple d'exécution complète :

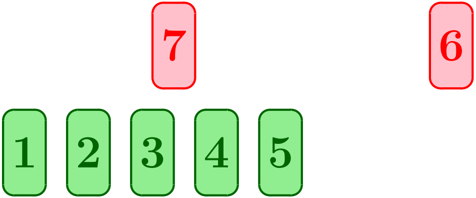


# Tri par fusion

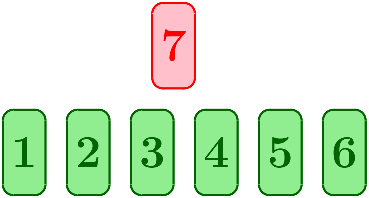
## Exemple d'exécution complète :



## Exemple d'exécution complète :



## Exemple d'exécution complète :

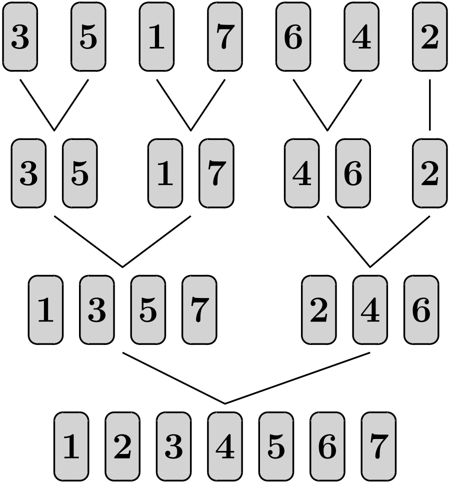


# Tri par fusion

Exemple d'exécution complète :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Récapitulatif des étapes de fusion :



# Tri par fusion

```
def tri_fusion(T) :   # attention, version trop naïve
  if len(T) < 2 : return T
  else :
    milieu = len(T)//2
    gauche = tri_fusion(T[:milieu])
    droite = tri_fusion(T[milieu:])
    return fusion(gauche, droite)
```

```
def tri_fusion(T) :   # attention, version trop naïve
  if len(T) < 2 : return T
  else :
    milieu = len(T)//2
    gauche = tri_fusion(T[:milieu])
    droite = tri_fusion(T[milieu:])
    return fusion(gauche, droite)
```

*(encore beaucoup de recopies de tableaux inutiles...)*

```
def tri_fusion(T, debut, fin) :
  ''' trie T entre les indices debut (inclus) et fin (exclue) '''
  if fin - debut < 2 : return T[debut:fin]
  else :
    milieu = (debut + fin)//2
    gauche = tri_fusion(T, debut, milieu)
    droite = tri_fusion(T, milieu, fin)
    return fusion(gauche, droite)
```

```
def tri_fusion(T, debut, fin) :
  ''' trie T entre les indices debut (inclus) et fin (exclue) '''
  if fin - debut < 2 : return T[debut:fin]
  else :
    milieu = (debut + fin)//2
    gauche = tri_fusion(T, debut, milieu)
    droite = tri_fusion(T, milieu, fin)
    return fusion(gauche, droite)
```

**Complexité**

$C(n)$ : nombre de comparaisons nécessaires pour trier T de taille $n$

$$C(n) = 2 \times C(n//2) + \Theta(n)$$

```python
def tri_fusion(T, debut, fin) :
  ''' trie T entre les indices debut (inclus) et fin (exclue) '''
  if fin - debut < 2 : return T[debut:fin]
  else :
    milieu = (debut + fin)//2
    gauche = tri_fusion(T, debut, milieu)
    droite = tri_fusion(T, milieu, fin)
    return fusion(gauche, droite)
```

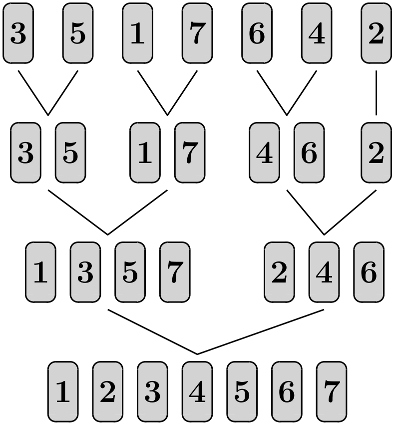
**Complexité**

$C(n)$ : nombre de comparaisons nécessaires pour trier T de taille $n$

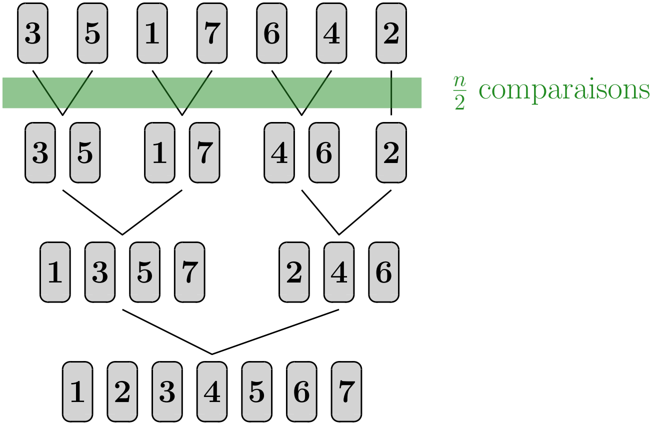
$$C(n) = 2 \times C(n//2) + \Theta(n)$$

Et donc ? ? ?

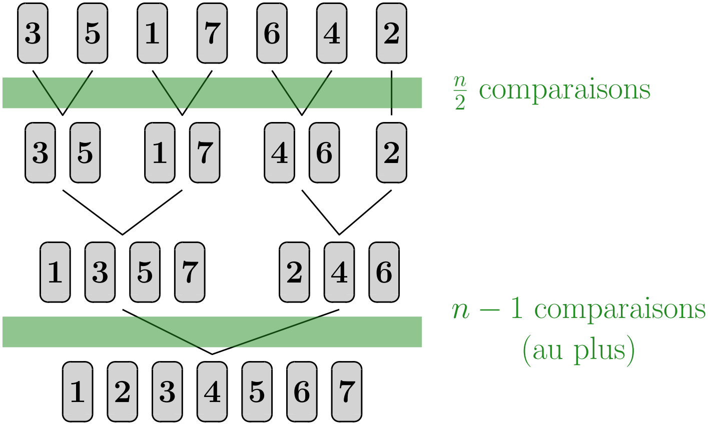
# Complexité du tri par fusion



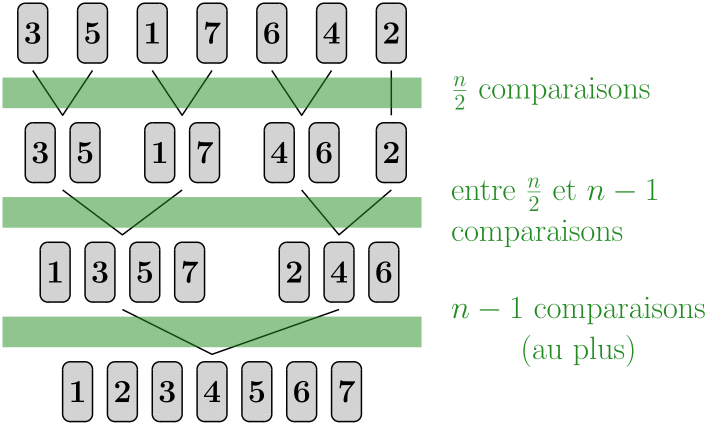
# Complexité du tri par fusion



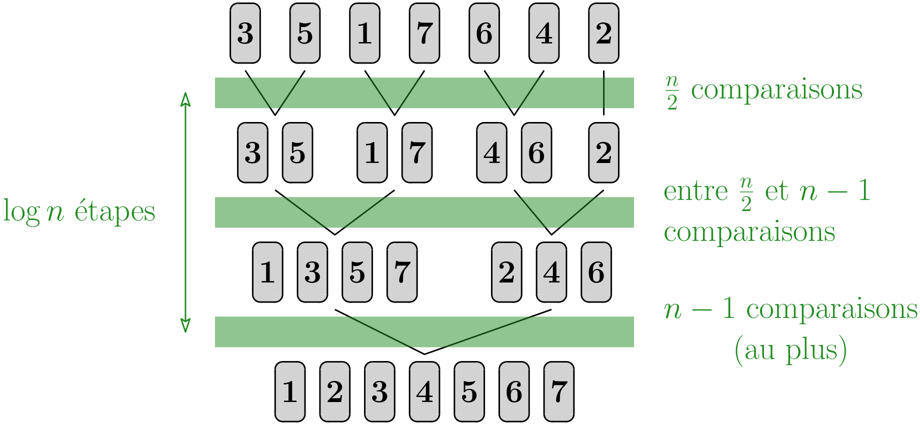
# Complexité du tri par fusion



# Complexité du tri par fusion



# Complexité du tri par fusion



## Complexité du tri par fusion

**Théorème**

*Le tri fusion d'un tableau de taille* $n$ *s'effectue en* $\Theta(n \log n)$ *comparaisons*

## Complexité du tri par fusion

**Théorème**

*Le tri fusion d'un tableau de taille $n$ s'effectue en $\Theta(n \log n)$ comparaisons*

**Corollaire**

*Le tri fusion est un tri par comparaisons **asymptotiquement optimal***

## Complexité du tri par fusion

### Théorème

*Le tri fusion d'un tableau de taille $n$ s'effectue en $\Theta(n \log n)$ comparaisons*

### Corollaire

*Le tri fusion est un tri par comparaisons **asymptotiquement optimal***

### Mais il y a des points négatifs

- $\Theta(n \log n)$ comparaisons ***dans tous les cas*** (et jamais moins)
- la ***constante cachée*** dans le $\Theta$ est importante
- ne trie ***pas en place*** : complexité en espace $\in \Theta(n)$

# Récapitulatif : fusion *vs* insertion

## Tri par fusion

- $\Theta(n \log n)$ comparaisons ***au pire*** (mais ***dans tous les cas***),
- la ***constante cachée*** dans le $\Theta$ est importante,
- ne trie ***pas en place*** : complexité en espace $\in \Theta(n)$

## Tri par insertion

- $\Theta(n^2)$ comparaisons ***au pire***, $\Theta(n)$ ***au mieux***,
- trie ***en place***

# Récapitulatif : fusion *vs* insertion

## Tri par fusion

- $\Theta(n \log n)$ comparaisons ***au pire*** (mais ***dans tous les cas***),
- la ***constante cachée*** dans le $\Theta$ est importante,
- ne trie ***pas en place*** : complexité en espace $\in \Theta(n)$

## Tri par insertion

- $\Theta(n^2)$ comparaisons ***au pire***, $\Theta(n)$ ***au mieux***,
- trie ***en place***

- quid de la complexité en moyenne du tri par insertion ?

# Récapitulatif : fusion *vs* insertion

## Tri par fusion

- $\Theta(n \log n)$ comparaisons ***au pire*** (mais ***dans tous les cas***),
- la ***constante cachée*** dans le $\Theta$ est importante,
- ne trie ***pas en place*** : complexité en espace $\in \Theta(n)$

## Tri par insertion

- $\Theta(n^2)$ comparaisons ***au pire***, $\Theta(n)$ ***au mieux***,
- trie ***en place***

- quid de la complexité en moyenne du tri par insertion ?
- dans quels cas trie-t-il en $\Theta(n)$ ?

# Récapitulatif : fusion *vs* insertion

## Tri par fusion

- $\Theta(n \log n)$ comparaisons ***au pire*** (mais ***dans tous les cas***),
- la ***constante cachée*** dans le $\Theta$ est importante,
- ne trie ***pas en place*** : complexité en espace $\in \Theta(n)$

## Tri par insertion

- $\Theta(n^2)$ comparaisons ***au pire***, $\Theta(n)$ ***au mieux***,
- trie ***en place***

- quid de la complexité en moyenne du tri par insertion ?
- dans quels cas trie-t-il en $\Theta(n)$ ?
- existe-t-il un algorithme plus efficace que le tri fusion, au moins en moyenne ?

# Récapitulatif : fusion *vs* insertion

## Tri par fusion

- $\Theta(n \log n)$ comparaisons ***au pire*** (mais ***dans tous les cas***),
- la ***constante cachée*** dans le $\Theta$ est importante,
- ne trie ***pas en place*** : complexité en espace $\in \Theta(n)$

## Tri par insertion

- $\Theta(n^2)$ comparaisons ***au pire***, $\Theta(n)$ ***au mieux***,
- trie ***en place***

- quid de la complexité en moyenne du tri par insertion ?
- dans quels cas trie-t-il en $\Theta(n)$ ?
- existe-t-il un algorithme plus efficace que le tri fusion, au moins en moyenne ?
- ... et qui trie en place ?