Université Paris Cité – Grands Moulins

L2 Math et Math Info – Analyse 3
Contrôle 2
Version A
Durée : 1 heure 30 minutes

---

9 Novembre 2023

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Tout argument devra être justifié par une référence précise au cours ou une démonstration.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de changer.

Ne tournez pas la page avant d'avoir été autorisé.e à le faire

Exercice 1. *(4pt)*

Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ *la convergence de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

Exercice 2. *(4pt) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *défini par* $f_n(t) = e^{-nt}\sin(2nt)$ *sur* $\mathbb{R}^+$*, puis sur* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$.

Exercice 3. *(3pt) Soit* f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par*

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{t}.$$

1. *Étudier les variation de* f.
2. *La fonction* f *est-elle bornée ?*
3. *Calculer* $M = \sup_{t\in[1,+\infty[} |f(t)|$*. La borne supérieure* M *est-elle atteinte ? c-à-d existe-t-il un* $t_0 \in [1, +\infty[$ *tel que* $M = |f(t_0)|$ *? Si oui, ce* t_0 *est-il unique ?*

Exercice 4. *(4pt) Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $[0, 1]$ *par* $\forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $f_n(t) = n^2 t(1 - nt)$ *et* $f_n(t) = 0$ *sinon.*

1. *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $[0, 1]$ *vers une fonction* f *que l'on déterminera.*
2. *Calculer* $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ *et sa limite lorsque* n *tend vers* $+\infty$*. En déduire que la convergence* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas uniforme sur* $[0, 1]$.
3. *Donner une démonstration directe du fait que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément sur* $[0, 1]$.
4. *La convergence de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle uniforme sur* $[a, 1]$ *avec* $0 < a < 1$ *?*

Exercice 5. *(5pt) Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de nombre réels. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $x_n = \inf\{\mathrm{u_p}; \mathrm{p} \geq \mathrm{n}\}$ *et* $y_n = \sup\{\mathrm{u_p}; \mathrm{p} \geq \mathrm{n}\}$.

1. *Pourquoi les suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont-elles bien définies ?*
2. *Déterminer les suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans les cas suivants :*

   (a) $u_n = (-1)^n$ *(b)* $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

3. *Démontrer que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, que* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante. En déduire que ces deux suites sont convergentes. On notera* α *la limite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* β *celle de* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. *Démontrer que* $\alpha \leq \beta$
5. *Démontrer que si* $\alpha = \beta$ *, alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
6. *Démontrer que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergeant vers un réel* l *alors* $\alpha \leq l \leq \beta$
7. *Démontrer que, pour tout* $\epsilon > 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $p \geq n$ *tel que* $y_n - \epsilon \leq u_p \leq y_n$.
8. *Démontrer que, pour tout* $\epsilon > 0$ *et pour tout* $p_0 \in \mathbb{N}$*, il existe* $p > p_0$ *tel que* $\beta - 2\epsilon \leq u_p \leq \beta + 2\epsilon$.
9. *En déduire qu'il existe une sous-suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* β
10. *Quel théorème vient-on de redémontrer ?*