Idées de Correction Sujet B MMAN3
9 Nov 2023

Exercice 1 : $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \dfrac{e^{-t}-1}{t^{\alpha}}$ est continue

$e^{-t}-1 \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ donc f est negative

Etude en 0 : $f(t) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ car $\sin(t) = t - \dfrac{t^3}{3!} + o(t^3)$ en 0

Etude en $+\infty$ $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{t^{\alpha}}$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$

or on sait que $t \longmapsto \dfrac{-1}{t^{\alpha-1}}$ est integrable en 0 ssi $\alpha - 1 < 1$

et que $t \longmapsto \dfrac{-1}{t^{\alpha}}$ est integrable en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$.

Conclusion : L'intégrale converge ssi $1 < \alpha < 2$

Exercice 2 : **Convergence simple :**

$t = 0 \qquad f_n(0) = 1$

$t > 0 \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$ car $(1+t)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Convergence uniforme : La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^+$ donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes continues)

$a>0$, Soit $t \in [a, +\infty[$ $\quad |f_n(t)| \leq \dfrac{1}{(1+a^2)^n}$

car $f_n(t)$ est strict^t décroissante sur $[a, +\infty[$

On en déduit que $0 \leq \|f_n\|_\infty = \sup\limits_{t \in [a, +\infty[} |f_n(t)| \leq \dfrac{1}{(1+a^2)^n}$

or $\dfrac{1}{(1+a^2)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3 : $g(t)$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

1. $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \times \dfrac{1}{1+(\sqrt{t})^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \times \dfrac{1}{1+t} > 0$

t	0		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\pi/2$.

2. La fonction f est bornée $\quad |f(t)| \leq \pi/2$

3. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \pi/2$ $\quad$ g strict^t croissante

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A / \forall t \geq A, \quad \pi/2 - \varepsilon \leq g(t) \leq \pi/2$

donc $\pi/2 = \sup\limits_{\mathbb{R}^{+*}} |g(t)| = M$ n'est pas atteinte

$\forall n, \quad t_n = n \quad \lim\limits_{n \to +\infty} |g(t_n)| = \pi/2$.

Exercice 4 :

1. $f_n(0) = 0 \qquad t > 0 \quad f_n(t) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2^n t}{n 2^n t^2} = \dfrac{1}{nt}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1)$ vers la fonction nulle.

2. $$I_n = \int_0^1 \frac{2^n t}{1+n2^n t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2n}\ln(1+n2^n t^2)\right]_0^1.$$
$$= \frac{1}{2n}\ln(1+n2^n)$$

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\ln(n2^n) = \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{1}{2}\ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln(2)$$

si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur $[0,1)$, alors I_n convergerait vers $\int_0^1 0\,dt = 0$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}\ln(2)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

3. $$f_n(1/n) = \frac{2^n}{n+2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1)$

Alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u_n) = 0$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$

4. $0<a<1$
$\forall t\in[a,1]$ $$|f_n(t)| \leq \frac{2^n}{1+n2^n a^2}$$

donc $\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[a,1]} |f_n(t)| \leq \dfrac{2^n}{1+n2^n a^2}$

or $\dfrac{2^n}{1+n2^n a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,1]$.

Exercice 4 :

1. L'ensemble $\{u_k, k\in\mathbb{N}\}$ est majoré et minoré

et de même $\forall n\in\mathbb{N}$ $A_n = \{u_p, p\geq n\} \subset \{u_k, k\in\mathbb{N}\}$

donc $\forall n$, A_n admet une borne supérieure et inférieure.

$x_n = \inf A_n \qquad y_n = \sup A_n$

2. (a) $x_n = -1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, $y_n = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(b) $y_n = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, $x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

3. $A_n = A_{n+1} \cup \{u_n\}$

$x_n = \min\{x_{n+1}, u_n\}$ | $y_n = \max\{y_{n+1}, u_n\}$

donc $x_{n+1} \geq x_n$ | donc $y_{n+1} \leq y_n$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α $\qquad (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

4. $\forall n\in\mathbb{N} \qquad x_n \leq y_n$

En passant à la limite $\alpha \leq \beta$

5. De plus $x_n \leq u_n \leq y_n$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \alpha = \beta$

alors par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

6. Soit $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite de u_n alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_{\sigma(n)} \leq u_{\sigma(n)} \leq y_{\sigma(n)}$$

or les trois suites $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

convergent donc en passant à la limite

$$\alpha \leq \ell \leq \beta.$$

7. $y_n = \sup A_n$

D'après la propriété de la borne supérieure $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists u_p \in A_n \,/\, y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n$$

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p \geqslant n \,/\, y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n$

8. $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers β donc $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p_0 \in \mathbb{N}$

$$\exists n > p_0 \,/\, \beta - \varepsilon < y_n < \beta + \varepsilon$$

On en déduit d'après la question précédente que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall p_0 \in \mathbb{N}^*,$$

$$p > n > p_0 \qquad \beta - 2\varepsilon \leq y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n \leq \beta + \varepsilon \leq \beta + 2\varepsilon$$

9. On construit par récurrence sur k une suite strictement croissante d'entier (p_k) telle que

$$\beta - \frac{2}{k} \leq u_{p_k} \leq \beta + \frac{2}{k}.$$

Pour construire p_1, on applique la question précédente avec $\varepsilon = 1$ et $p_0 = 0$

Supposons p_{k-1} construit, on construit p_k en appliquant la question précédente avec $\varepsilon = 1/k$ et $p_0 = p_k$.

(u_{p_k}) est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

qui converge d'après le théorème des gendarmes vers β

10. On vient de démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass