TD 6 – Formes quadratiques

1. À travailler en classe

Exercice 1 (formes bilinéaires). Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Écrire l'expression de la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ associée dans la base canonique à chacune de ces matrices.

Exercice 2 (matrice d'une forme quadratique). Donner les matrices dans la base canonique des formes quadratiques suivantes :

$$\text{sur } \mathbb{R}^2 : \quad q(x,y) = 3x^2 - y^2 + xy \qquad\qquad \text{sur } \mathbb{R}^4 : \quad q(x,y,z,t) = xy - yz + zt$$

Exercice 3 (orthogonalité et somme). Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique sur E. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$.
2. Montrer qu'on a $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$ si f est non dégénérée.
3. Donner un exemple pour E, f, F et G où l'on ait $F^\perp + G^\perp \neq (F \cap G)^\perp$.
4. Montrer que $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ avec égalité si f est non dégénérée. Donner un exemple où l'égalité n'a pas lieu.

Exercice 4 (orthogonal d'une droite non isotrope). Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique sur E et a un vecteur non isotrope pour f. Soit $D = \mathbb{R}a$. Montrer que $E = D \oplus D^\perp$. Que se passe-t-il dans le cas $\langle a, a \rangle = 0$?

Exercice 5 (polynômes trigonométriques de degré 1). Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c$ avec a, b et c dans $\mathbb{R}$. On considère la forme bilinéaire symétrique ϕ sur E définie par

$$\phi(f,g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer la matrice de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3) où les e_i sont définis par :

   $$e_1(x) = \cos(x) \qquad\qquad e_2(x) = \sin(x) \qquad\qquad e_3(x) = 1.$$

   Est-ce que ϕ définit un produit scalaire sur E ?
2. Déterminer le sous-espace vectoriel F des vecteurs orthogonaux à e_1 et e_3 pour ϕ. En déduire une base orthogonale pour ϕ de E.

Exercice 6 (forme bilinéaire → forme quadratique). Soit la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$b(u,v) = 2u_1v_1 + 4u_1v_2 + 4u_2v_1 - u_2v_2 + 3u_3v_3.$$

1. Écrire la forme quadratique q associée à b.
2. Écrire la matrice de q dans la base canonique.

Exercice 7 (forme quadratique → forme bilinéaire). Soit la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par $q(u) = 2u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 + u_3^2$. Donner la forme polaire et la matrice de q dans la base canonique.

Exercice 8 (réduction de Gauss). Effectuer une réduction de Gauss pour les formes quadratiques des exercices 2, 6 et 7.

Exercice 9 (forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$). Soit m un paramètre réel. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = m(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz - zx)$$

1. Quelle est sa forme polaire ?
2. Quelle est sa matrice dans la base canonique ?
3. Quel est son rang ? Pour quelles valeurs de m est-elle dégénérée ?
4. Lorsque q est dégénérée, trouver une base de son noyau.

Exercice 10 (forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$q(P) = \int_0^1 P(x)^2 \, dx.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique. Déterminer sa forme polaire et sa matrice dans la base $(1, X, X^2)$.
2. Soient les polynômes :

$$P_1 = 1 \qquad\qquad P_2 = X - \frac{1}{2} \qquad\qquad P_3 = \frac{1}{6} - X + X^2.$$

   Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de E. Donner la matrice de q dans cette base et montrer que q est non dégénérée.

Exercice 11 (base orthogonale). Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz.$$

1. Écrire la forme polaire de q et la matrice de q dans la base canonique.
2. Calculer le rang de q et déterminer son noyau.
3. Trouver une base orthogonale pour q. Donner la matrice de q dans cette base.
4. Mêmes questions pour $q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 2yz$.

Exercice 12 (cône isotrope). Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, q une forme quadratique sur E de forme polaire f. On pose $C(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq C(q)$.
2. On suppose dans cette question que pour tout $x \in E$, $q(x) \geqslant 0$. Montrer que $C(q) = \mathrm{Ker}(f)$. *Indication : on pourra étudier le signe de $q(x + \lambda y)$ pour x dans $C(q)$, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3. On suppose dans cette question qu'il existe u et v dans E tels que $q(u) > 0$ et $q(v) < 0$.
   (a) Montrer que u et v sont linéairement indépendants.
   (b) Montrer que la restriction de q au plan $\mathrm{Vect}(u, v)$ est non dégénérée.
   (c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q(\lambda u + v) = 0$. En déduire que $C(q) \neq \mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Conclure que $C(q) = \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si q est de signe constant.

Exercice 13 (formes quadratiques définies). Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et ϕ une forme quadratique définie sur E, c'est-à-dire telle que $\phi(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que ϕ est soit définie positive, soit définie négative.

2. À travailler chez soi : applications directes des définitions

Exercice 14 (quizz sur les formes quadratiques). Dans cet exercice, E désignera un espace vectoriel réel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Le noyau de q est un espace vectoriel.
2. La somme de deux vecteurs isotropes pour q est un vecteur isotrope pour q.
3. La somme de deux formes quadratiques définies positives est définie positive.
4. Une forme quadratique bornée est nulle.
5. Si f et g sont deux formes linéaires sur E, alors $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire sur E.
6. Si f est une forme linéaire sur E, alors $(x, y) \in E \times E \mapsto f(x)f(y)$ est définie positive.
7. Le déterminant (resp. le rang, la trace) de la matrice de q dans une base donnée est indépendant de la base choisie.

Exercice 15 (positivité). Soient λ, μ et α trois paramètres réels. Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives en fonction des paramètres :

$$q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2 \qquad q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

Exercice 16 (orthogonalité et hyperplan). Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E et H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $H = (\mathbb{R}x)^\perp$.

Exercice 17 (formes bilinéaires sur les matrices). Soient n un entier naturel non nul et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille n. On définit $f : E \times E \to \mathbb{R}$ par $f(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$.

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
2. On suppose que $n = 2$ dans cette question. Montrer que les matrices suivantes
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
forment une base de E. Donner la matrice de f dans cette base.
3. On revient au cas général dans cette question. On note $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{S}$) le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices antisymétriques (resp. symétriques). Montrer que $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{A}$.
4. Trouver une base orthogonale pour f.

3. À travailler chez soi : exercices d'entraînement

Exercice 18 (forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$). On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 5x_3^2 + 5x_1x_2 + 8x_2x_3 + 6x_3x_4.$$

1. Écrire la matrice de q dans la base canonique. Montrer que q est non dégénérée.
2. Soit a un paramètre réel ; on note $v_a = (a, 0, 0, 1)$, $w_a = (0, 1 - a, a, 0)$ et on appelle P_a le sous espace engendré par v_a et w_a. Montrer que P_a est un plan dont (v_a, w_a) est une base.
3. Donner la matrice de la restriction q_a de q à P_a dans la base (v_a, w_a).
4. Pour chaque réel a, déterminer le noyau de q_a. En déduire la dimension de $P_a \cap P_a^\perp$ et celle de $P_a + P_a^\perp$, l'orthogonalité étant relative à q.

Exercice 19 (réduction de Gauss). Soient a un nombre réel et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz \qquad \text{pour } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On note f la forme polaire de q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a la forme bilinéaire f définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 20 (formes quadratiques, injectivité, surjectivité). Soient n un entier naturel non nul, E un espace vectoriel réel de dimension n et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique.

1. Est-ce que q peut être injective ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que q soit surjective.

Exercice 21 (formes bilinéaires de rang 1). Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique sur E. On suppose que f est de rang 1.

1. En considérant l'application canonique $E \to E^*$ associée à f, montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, telle que pour tous $x, y \in E$:
$$f(x,y) = \lambda_x \varphi(y), \qquad \text{pour un certain réel } \lambda_x.$$
2. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \varphi_x$ est une forme linéaire proportionelle à φ.
3. En déduire qu'il existe une forme linéaire $\ell \in E^*$, non nulle, telle que :
$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad f(x,y) = \ell(x)\ell(y), \qquad \text{ou} \qquad \forall (x,y) \in E^2 \qquad f(x,y) = -\ell(x)\ell(y).$$

4. À travailler chez soi : exercices d'approfondissement

Exercice 22. Soit $E = \mathbb{R}^2$, et soit $h : E \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$h(x,y) = x^2 - y^2.$$

1. Montrer que h est non dégénérée. Déterminer la signature de h et l'ensemble de ses vecteurs isotropes.
2. Pour tout réel p, on note
$$D_p = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = px\right\}$$
la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ de pente p. On note aussi
$$D_\infty = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\right\}$$
la droite de pente infinie. Montrer que, si $p \neq 0$, l'orthogonal de D_p relativement à la forme h est la droite $D_{1/p}$. Déterminer aussi l'orthogonal de D_∞.
3. Montrer que la restriction de h à une droite D_p avec $|p| > 1$ est définie négative. Déterminer de même la signature de la restriction de h à D_p pour $|p| < 1$ puis pour $p = \pm 1$.
4. Soit maintenant φ une forme quadratique sur E de signature $(1,1)$.
   (a) Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de E dans laquelle la matrice de φ est :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   (b) Soit $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$. Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E formée de vecteurs isotropes de φ, et déterminer la matrice de φ dans cette nouvelle base.

(c) Étant donnée une autre forme quadratique ψ ayant exactement les mêmes vecteurs isotropes que φ, montrer que la matrice de ψ dans la base ε de la question précédente est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

pour un réel $a \neq 0$ que l'on donnera explicitement.

(d) En déduire que la notion d'orthogonalité relativement à une forme quadratique de signature $(1, 1)$ dans un espace de dimension 2, est entièrement déterminée par les vecteurs isotropes d'une telle forme quadratique.

Exercice 23. Soit m un paramètre réel. On définit la forme quadratique q_m de $\mathbb{R}^3$ par l'expression suivante :

$$q_m(x, y, z) = 2x^2 + (m+1)y^2 + (m+1)z^2 - 2xy - 2xz - 2myz.$$

1. Soit B_m la matrice de q_m dans la base canonique. Écrire B_m.
2. Donner l'expression de
$$\varphi_m\left((x, y, z), (x', y', z')\right),$$
où φ_m est la forme polaire de q_m.
3. Déterminer la dimension du noyau de B_m en fonction de m. En déduire que q_m est dégénérée quelle que soit la valeur du paramètre m.
4. Effectuez une réduction de Gauss pour écrire q_m comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Expliquer pourquoi le résultat trouvé est cohérent avec celui de la question précédente.
5. Donner la signature de q_m en fonction de m.
6. Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ qui soit orthogonale pour q_m quelle que soit la valeur de m.

Exercice 24 (formes quadratiques sur les matrices). Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les applications suivantes sont des formes quadratiques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer leurs signatures :

$$q(A) = \mathrm{Tr}(A)^2 \qquad q(A) = \mathrm{Tr}(A \cdot {}^tA) \qquad q(A) = \mathrm{Tr}(A^2).$$

Exercice 25 (orthogonalisation simultanée). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit q et q' deux formes quadratiques sur E. On suppose que q est définie positive. Montrer qu'il existe une base orthonormée pour q et orthogonale pour q'. Énoncer une version matricielle du résultat.