Représentations matricielles

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_n)$ une base de E et $(u_1, \cdots u_p)$ des vecteurs de E. On appelle **matrice représentative de** $(u_1, \cdots u_p)$ **dans la base** $\mathscr{B}$ la matrice de type $n \times p$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$. On note cette matrice $M(u_1, \cdots u_p, \mathscr{B})$

Plus explicitement,

$$\forall j = 1, \cdots, p, \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

équivaut à

$$M(u_1, \cdots u_p, \mathscr{B}) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Si, $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors

$$M(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dans la suite on posera souvent $X = M(u, \mathscr{B})$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_n)$ une base de E. Avec les notations de la définition précédente, l'application

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathscr{B}} : E & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & M(u, \mathscr{B}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}' = (v_1, \cdots v_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle **matrice de f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** la matrice $M(f(e_1), \cdots f(e_p), \mathscr{B}')$. Il s'agit de la matrice de type $n \times p$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$ que l'on notera $Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}')$.

Plus explicitement, si

$$\forall j = 1, \cdots, p, \quad f(e_j) = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \cdots + a_{nj} v_n.$$

alors

$$
Mat(f,\mathscr{B},\mathscr{B}') = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}
$$

Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$f(x,y) = (x+2y, 3x+4y, 5x+6y).$$

Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, c-à-d

$$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$$
$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1).$$

Pour trouver la matrice de f dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on calcule

$$g(e_1) = g(1,0) = (1,3,5) = v_1 + 3v_2 + 5v_3$$
$$g(e_2) = g(0,1) = (2,4,6) = 2v_1 + 4v_2 + 6v_3.$$

Ainsi

$$
Mat(f,\mathscr{B},\mathscr{B}') = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.
$$

Définition

Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}' = (e_1, \cdots e_n)$. La matrice $Mat(f,\mathscr{B},\mathscr{B})$ s'appelle **la matrice de f par rapport à $\mathscr{B}$ et se note $Mat(f,\mathscr{B})$.**

Par exemple, soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire donnée par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = P'.$$

Pour trouver la matrice de f dans le base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$, on calcule

$$f(1) = 0, \; f(X) = 1 \quad \text{et} \quad f(X^2) = 2X.$$

Ainsi

$$
Mat(f,\mathscr{B}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (v_1, \cdots v_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et posons

$$A = Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}').$$

Pour tout $u \in E$ notons $X = M(u, \mathscr{B})$ et $Y = M(f(u), \mathscr{B}')$. On a

$$Y = AX.$$

Plus explicitement, si $u = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ alors $f(u) = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$ où

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X}.$$

En effet,

$$\sum_{i=1}^{n} y_j v_j = f(u) \quad = \quad f(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right) v_i$$

On déduit que

$$\forall j = 1, \cdots, n, \; y_j = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j.$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = AX. \end{aligned}$$

Finalement, la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ permet d'exprimer l'application f :

1. par ses colonnes : la jème colonne donne les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{B}'$;
2. par ses lignes : elle donne les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathscr{B}'$ en terme des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (v_1, \cdots v_n)$ une base de F. L'application

$$\begin{aligned} Mat : \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}') \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

L'application réciproque de cet isomorphisme associe à une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'unique application linéaire L_A de E dans F définie par

$$\forall j = 1, \cdots, p, \quad L_A(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_j.$$

Il s'agit de l'application dont la matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est la matrice A. Autrement dit,

$$\begin{aligned} L_A : E &\longrightarrow F \\ \sum_{i=1}^{p} x_i e_i &\longmapsto L_A(u) := \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \end{aligned}$$

où

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X}.$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \end{pmatrix}$$

on déduit $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z)$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire donnée par $g(P) = X^2P' + P$. Vérifions d'abord que g est bien définie. Pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$, le degré de P' est au plus 0 et donc le degré de X^2P est au plus 2. Ainsi $g(P) = X^2P' + P \in \mathbb{R}_2[X]$. La linéarité est évidente. Comme

$$g(1) = 1 \quad et \quad g(X) = X + X^2,$$

la matrice de g dans les bases $\mathscr{B} = (1, X)$ et $\mathscr{B}' = (1, X, X^2)$ est

$$M(g, \mathscr{B}, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aussi si on veut $g(a + bX)$ on calcule le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$g(a + bX) = a + bX + bX^2$$

Exemple

Soit $\mathscr{B}$ la base de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On se donne des réels a, b, c, d et posons $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. L'application

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow E \\ A &\longmapsto \psi(A) = \Lambda \cdot A \end{aligned}$$

est clairement un endomorphisme de E. De plus,

$$\psi(E_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + cE_2 \quad , \quad \psi(E_2) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_1 + dE_2$$
$$\psi(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_3 + cE_4 \quad , \quad \psi(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_3 + dE_4.$$

Ainsi la matrice de ψ dans la base $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est donnée par

$$M(g, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Supposons que ψ est bijective. Alors $I_2 \in \mathrm{Im}\psi$ et donc il existe une matrice A telle que $\Lambda A = I_2$, ou encore Λ est inversible. Réciproquement, si Λ est inversible alors l'équation $\Lambda A = 0_E$ implique que $A = 0_E$ et donc $\ker \psi = \{0_E\}$. Finalement, pour que ψ soit bijective il faut et il suffit que Λ soit inversible.

Proposition

Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ des bases respectives de E, F et G. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a :

$$Mat(g \circ f, \mathscr{B}, \mathscr{B}'') = Mat(g, \mathscr{B}', \mathscr{B}'') \cdot Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}').$$

Démonstration : Posons $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_m), \mathscr{B}' = (v_1, \cdots, v_n)$ et $\mathscr{B}'' = (w_1, \cdots, w_p)$. Posons

$$\begin{array}{rcl} A & = & (a_{ij}) = Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}') \\ B & = & (b_{ij}) = Mat(g, \mathscr{B}', \mathscr{B}'') \\ C & = & (c_{ij}) = Mat(g \circ f, \mathscr{B}, \mathscr{B}''). \end{array}$$

Pour un $u \in E$, posons

$$X = M(u, \mathscr{B}), \quad Y = M(f(u), \mathscr{B}') \ \text{ et } \ Z = M((g \circ f)(u), \mathscr{B}) = M(g(f(u)), \mathscr{B}'')$$

Par définition des matrices A, B et C on a :

$$Y = AX \quad \text{et} \quad CX = Z = BY = BAX.$$

Donc $C = BA$.

Une autre démonstration : Par définition de A on a :

$$\forall j = 1, \cdots, m, \quad f(e_j) \ = \ = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k.$$

Le définition de B implique que, pour tout $j = 1, \cdots, m$,

$$g(f(e_j)) \ = \ = g(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} g(v_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ik} \right) w_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \right) w_i.$$

Ainsi, par définition de C,

$$\forall i = 1, \cdots, p, \ \forall j = 1, \cdots, m, \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

Autrement dit, $C = BA$.

Proposition

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases respectives de E et F. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si, et seulement si, sa matrice $A = Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}')$ est inversible et

$$Mat(f^{-1}, \mathscr{B}', \mathscr{B}) = A^{-1}.$$

Démonstration : (i) Si f est bijective alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. Or

$$Mat(\mathrm{id}_E, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = I_n.$$

Ainsi, la formule de la proposition précédente, montre que

$$Mat(f^{-1}, \mathscr{B}', \mathscr{B}) \cdot Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}') = I_n.$$

De même, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et

$$Mat(\mathrm{id}_F, \mathscr{B}', \mathscr{B}') = I_n$$

et donc

$$Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}') \cdot Mat(f^{-1}, \mathscr{B}', \mathscr{B}) = I_n.$$

(ii) Réciproquement, si la matrice $A = Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}')$ est inversible alors il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$. Soit g l'application linéaire de E dans F telle que $B = Mat(g, \mathscr{B}', \mathscr{B})$. Ainsi

$$Mat(g \circ f, \mathscr{B}) = Mat(g, \mathscr{B}', \mathscr{B}) \cdot Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}') = BA = I_n.$$

Autrement dit $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De même,

$$Mat(f \circ g, \mathscr{B}') = Mat(g, \mathscr{B}, \mathscr{B}') \cdot Mat(f, \mathscr{B}', \mathscr{B}) = AB = I_n.$$

et donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Cas particulier où $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_p), \mathscr{B}' = (v_1, \cdots v_n)$ sont les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement.
À une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ on associe l'application $L(A) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement est la matrice A.
Si on identifie $M_{p,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^p$ et on identifie $M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{array}{rcl} L(A) : M_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{rcl} L : M_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ A & \longmapsto & L(A) \end{array}$$

est un isomorphisme qui vérifie $L(AB) = L(A) \circ L(B)$.

Voici un démonstration de l'associativité du produit des matrices. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$. On a

$$L\big(A(BC)\big) = L(A) \circ L(BC) = L(A) \circ \big(L(B) \circ L(C)\big) = \big(L(A) \circ L(B)\big) \circ L(C) = L\big((AB)C\big).$$

Ainsi

$$A(BC) = (AB)C.$$

Définition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle **noyau de la matrice** A, et on note $\ker(A)$ l'ensemble :
$$\ker(A) = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}.$$
- On appelle **image de la matrice** A, et on note $\ker(A)$ l'ensemble :
$$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in M_{p,1}(\mathbb{K}), AX = Y\}.$$

En identifiant $\mathbb{K}^p$ avec $M_{p,1}(\mathbb{K})$ on a :
$$\ker(A) = \ker(L(A)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}((L(A)).$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Trouver le noyau de f, l'image de f. Posons
$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \ v_2 = (-1,1,0), \ v_3 = (-1,1,0).$$
Vérifier que $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour que $u \in \ker f$, il faut et il suffit, que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker A$, ce qui équivaut
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+2y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
On voit que $x = y = z = 0$. Ainsi $\ker f = \{(0,0,0\}$ et f est injective. D'après la théorème du rang, f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et l'image de f est $\mathbb{R}^3$.

On vérifie aisément que $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Autrement dit,
$$f(v_1) = 4v_1, \ f(v_2) = v_2 \text{ et } \ f(v_3) = v_3.$$
Ainsi la matrice de f dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$ est
$$Mat(f, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier,

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Définition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **rang de la matrice** A et on note $\mathbf{rg}(A)$ le rang du système de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition

1. *$rg(A) = rg((L(A))$;*
2. *$rg({}^tA) = rg(A)$;*
3. *$rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$;*
4. *Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $rg(A) + \dim(\ker(A)) = p$.*
5. *$rg(A)$ est le rang du système de ses vecteurs lignes dans $\mathbb{K}^n$.*
6. *Si $\mathscr{B}$ est une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ alors le rang d'une famille de p vecteurs $(x_1, \cdots, x_p)$ est le rang de la matrice $M(\mathscr{B}, x_1, \cdots, x_p)$.*
7. *Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie munis respectivement des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ alors le rang de f est le rang de la matrice $M(f, \mathscr{B}, \mathscr{B})$.*

Proposition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La matrice A est inversible*
2. *l'application $L(A)$ est un isomorphisme*
3. *$p = n$ et $\ker(A) = \{0\}$*
4. *$p = n$ et $rg(A) = n$.*

Matrice de changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_n), \mathscr{B}' = (v_1, \cdots v_n)$.

Définition

On appelle **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** la matrice $M(\mathscr{B}, v_1, \cdots v_n)$ que nous noterons $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Il s'agit de la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne, pour tout $j = 1, \cdots, n$, sont les coefficients de vecteur v_j de la "nouvelle" base $\mathscr{B}'$ dans "l'ancienne base" $\mathscr{B}$.

Plus explicitement, si

$$\forall j = 1, \cdots, n, \quad v_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n$$

alors la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$:

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & \cdots & v_2 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Les polynômes

$$P_0 = 1, P_1 = X - 1, P_2 = (X - 1)^2$$

forment une base de E. La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ à la base $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

Notons $f_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ l'unique application linéaire qui transforme e_i en v_i, c-à-d

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \;\; f_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(e_i) = v_i.$$

Alors la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est la matrice de $f_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = Mat(f_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}, \mathscr{B})$$

Proposition

On a

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = Mat(id_E, \mathscr{B}', \mathscr{B}).$$

En particulier, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible, et

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = Mat(id_E, \mathscr{B}, \mathscr{B}').$$

Corollaire : formule de changement de base pour les vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_n), \mathscr{B}' = (v_1, \cdots v_n)$ et posons $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Pour tout $u \in E$, posons $X = M(u, \mathscr{B})$ et $Y = M(u, \mathscr{B}')$. Nous avons

$$X = PY \quad et \quad Y = P^{-1}X.$$

En effet, il suffit d'exprimer la fait que

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = Mat(\mathrm{id}_E, \mathscr{B}', \mathscr{B}) \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_E(u) = u.$$

Plus explicitement, pour tout $u = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = PY \ , \quad Y = P^{-1}X.$$

Proposition

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, muni de deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_1'$, et F un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, muni de deux bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_2'$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors, on a

$$Mat(f, \mathscr{B}_1', \mathscr{B}_2') = P_{\mathscr{B}_2',\mathscr{B}_2} \cdot Mat(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) \cdot P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_1'}.$$

Autrement dit, si on pose

$$A = Mat(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2), \ A' = Mat(f, \mathscr{B}_1', \mathscr{B}_2'), \ P = P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_1'}, \ Q = P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_2'}$$

alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Démonstration : Notons $\mathscr{B}_1 = (e_1, \cdots, e_m)$ et $\mathscr{B}_1' = (e_1', \cdots, e_m')$ les bases de E et $\mathscr{B}_2 = (v_1, \cdots, v_n)$ et $\mathscr{B}_2' = (v_1', \cdots, v_m')$ les bases de F. On sait que $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$. Donc

$$\begin{aligned} A' &= Mat(f, \mathscr{B}_1', \mathscr{B}_2') \\ &= Mat(\mathrm{id}_F, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_2') \cdot Mat(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) \cdot Mat(\mathrm{id}_E, \mathscr{B}_1', \mathscr{B}_1) \\ &= Q^{-1}AP = A' \end{aligned}$$

Une autre démonstration Notons $\mathscr{B}_1 = (e_1, \cdots, e_m)$ et $\mathscr{B}_1' = (e_1', \cdots, e_m')$ les bases de E et $\mathscr{B}_2 = (v_1, \cdots, v_n)$ et $\mathscr{B}_2' = (v_1', \cdots, v_m')$ les bases de F. Supposons que

$$u = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j = \sum_{j=1}^{m} x_j' e_j' \quad \textbf{et} \quad f(u) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i' v_i'.$$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Nous avons, par définition des différentes matrices,

$$X = PX', \ Y = QY', \ Y = AX \quad \text{et} \quad Y' = A'X'.$$

Ainsi

$$Y' = Q^{-1}Y = Q^{-1}APX' \text{ et } Y' = A'X'$$

et donc

$$Q^{-1}AP = A'.$$

On a la formule de changement de base suivante pour les endomorphismes :

Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Posons

$$P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}, \quad A = Mat_{\mathscr{B}}(f) \quad et \quad A' = Mat_{\mathscr{B}'}(f).$$

Alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

Définition

Deux matrices carrées $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables**, s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Théorème

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Retour sur les matrices inversibles

Proposition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- *A est inversible*
- *Il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.*
- *Il existe $B' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B'A = I_n$.*
- *${}^tA$ est inversible*
- *L'application linéaire associée $L(A)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
- $\ker(A) = \{0\}$.
- *$rg(A) = n$.*
- *Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.*
- *Les lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.*
- *A est la matrice de passage d'une base à un autre.*
- *Si $A = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ alors f est un automorphisme.*

Dans ce cas, $A^{-1} = B = B'$. De plus, $({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$

Caractérisation matricielle des bases

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots e_n)$ une base de E. Une famille $(u_1, \cdots u_n)$ est une base de E si, et seulement si, la matrice $M(u_1, \cdots u_n, \mathscr{B})$ est inversible.

Calcul de l'inverse d'une matrice : Matrice de passage

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$. Dans ce cas, on peut interprèter A comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la nouvelle base $\mathscr{B}'$ formée des vecteurs colonnes de la matrice A. Ainsi l'inverse de A n'est rien d'autre que la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base $\mathscr{B}'$. Pour calculer donc A^{-1} il suffit de trouver les coordonnées des vecteurs de la base canonique exprimés dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$.

Calcul de l'inverse d'une matrice : systèmes d'équations linéaires

Soit le système de n équations linéaires à n inconnues suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $a_{ij}, b_j \in \mathbb{K}$, supposés connus, et les x_i sont les inconnus à chercher dans $\mathbb{K}$. Ce système s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$AX = B$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, B est le vecteur colonne dont les coordonnées sont les b_j : ils représentent les données du problème, et où X est le vecteur colonne de coordonnées x_i qui est l'inconnue du problème.

Théorème :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *la matrice A est inversible,*
2. *pour tout vecteur donné B, le système $AX = B$ admet une solution unique,*
3. *pour tout vecteur donné B, le système $AX = B$ admet au plus une solution,*
4. *pour tout vecteur donné B, le système $AX = B$ admet au moins une solution,*
5. *le système $AX = 0$ n'admet aucune solution autre que la solution triviale.*

Dans ce cas, le système $AX = B$ admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Démonstration :

On considère l'endomorphisme $L(A)$ sur $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Ainsi l'assertion 2) signifie que $L(A)$ est bijective et donc que A est inversible.

De même, l'assertion 3) signifie que $L(A)$ est injective, ce qui équivaut à u soit bijective et donc que A soit inversible.

Aussi l'assertion 4) signifie que $L(A)$ est surjective, ce qui équivaut à u soit bijective et donc que A soit inversible.

En fin l'assertion 5) signifie que $\ker L(A) = \{0\}$, et donc à $L(A)$ est injective et finalement équivaut à A inversible.

Remarque

1. Si A n'est pas inversible alors, par linéarité, l'ensemble des solutions du système $AX = B$ est ou bien vide ou bien infinie.
2. Le système d'équations linéaires $AX = B$ est dit de Cramer si la matrice A est inversible.
3. Si A est inversible alors pour déterminer A^{-1} il suffit de résoudre le système linéaire $AX = B$.

Calcul de l'inverse d'une matrice : méthode parallèle

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{i<i\leq n\ ,\ 1\leq j\leq p} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle $i^{ème}$ *vecteur ligne* de A, la matrice $L_i(A) = (a_{i1}\ a_{i2}, \cdots, a_{ip}) \in M_{1,p}(\mathbb{K})$;
- On appelle $j^{ème}$ *vecteur colonne* de A, la matrice $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont :

1. La multiplication d'une ligne de A par un scalaire : dans la matrice on remplace la i-ème ligne $L_i(A)$ par $\lambda L_i(A)$, les autres lignes restant inchangées. On appelle cette opération dilatation de la i-ème ligne et on la note $\mathrm{Dil}_i^L(A, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. L'échange de deux lignes de la matrice A : dans la matrice on échange les i-ème et j-ème lignes $L_i(A)$ et $L_j(A)$ de la matrice, les autres lignes restant inchangées. On appelle cette opération échange des lignes i et j et on la note $\mathrm{Ech}_{i,j}^L(A)$.
3. L'addition à une ligne de A du produit d'une autre ligne de A par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$: dans la matrice on remplace la i-ème ligne $L_i(A)$ par $L_i(A) + \lambda L_j(A)$, les autres lignes restant inchangées. On appelle cette opération ajout à la ligne i et de λ fois la ligne j et on la note $\mathrm{Ajout}_i^L(A, j, \lambda)$.
4. On définit de manière analogue les opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\mathrm{Dil}_i^C(A, \lambda)\ ,\ \mathrm{Ech}_{i,j}^C(A)\ ,\ \mathrm{Ajout}_i^C(A, j, \lambda).$$

Méthode parallèle : on réalise des opérations élémentaires successives simultanément sur les lignes de la matrice A et sur celles de la matrice identité I_n. Lorsque l'on est arrivé à la matrice identité en partant de A, on a l'expression de A^{-1}, en prenant la matrice obtenue en effectuant les mêmes opérations à partir de la matrice I_n.

ATTENTION ! *On peut choisir de faire des opérations sur les colonnes plutôt que sur les lignes, mais on ne peut mélanger les opérations sur les lignes et les colonnes pour obtenir A^{-1}. par cette méthode*

Matrices diagonales

Définition

On dit qu'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls, c'est à dire si $A \in \mathrm{Vect}(E_{i,i})_{1\leq i\leq n}$. On note $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{K})$ ou $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales et on écrit $D = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ pour désigner la matrice diagonale dont les coefficients sont $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $d_{i,i} = a_i$.

Exemples

1. La matrice nulle est diagonale.
2. La matrice identité I_n est diagonale.
3. Les matrices d'homothéties λI_n sont diagonales.

Proposition

- *$D_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension n.*
- *La matrice identité $I_n \in D_n(\mathbb{K})$.*
- *Si A et B sont diagonales, AB est diagonale.*
- *Si A et B sont diagonales, $AB = BA$.*

On dit que $D_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative unitaire de $M_n(\mathbb{K})$, de dimension n.

Proposition

1. *Le rang d'une matrice diagonale est donné par le nombre de coefficients non nuls.*
2. *En particulier, une matrice diagonale $D =diag(d_1, d_2, \cdots d_n)$ est inversible si, et seulement si, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, d_i \neq 0$. Dans ce cas, l'inverse de D est la matrice $D^{-1} =diag(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \cdots d_n^{-1})$*

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle homothétie sur E de rapport λ l'endomorphisme h_λ défini par : $h_\lambda(x) = \lambda x$.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$ et h une homothétie sur E de rapport λ. Alors, dans toute base $\mathscr{B}$ de E, $Mat_{\mathscr{B}}(h) = \lambda I_n$.

Proposition

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice qui commute avec toute autre matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$, alors A est une matrice d'homothétie.

Matrices triangulaires

Définition

Soit $T \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice. On dit que :

- T est triangulaire supérieure si $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$.
- T est triangulaire supérieure stricte si $t_{i,j} = 0$ dès que $i \geq j$.

On note $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $T_n^s(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes.

Proposition

Les ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^s(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $M_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$. De plus,

$$T_n(\mathbb{K}) = D_n(\mathbb{K}) \oplus T_n^s(\mathbb{K}).$$

Proposition

Si $N \in T_n^s(\mathbb{K})$, alors $N^n = 0$, c'est à dire que N est une matrice nilpotente.

Définition

On appelle trace d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, et on note $Tr(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux : $Tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition

1. *L'application Tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.*
2. *Pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $Tr(AB) = Tr(BA)$.*
3. *Deux matrices semblables ont la même trace.*

Corollaire

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme, on peut définir $Tr(f) = Tr(Mat_{\mathscr{B}}(f))$, où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.