TD 10 – Intégrales dépendant d'un paramètre

1. À travailler en classe

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)dt$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1. Pour tout nombre réel x, exprimer $f'(x)$ comme intégrale à paramètre.
2. Montrer que la fonction f est de classe C^2.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

Exercice 2. Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2\cos^2 t + \sin^2 t)dt.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Soit $x > 0$ tel que $x \neq 1$. Calculer $f'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3. Produit de convolution

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et T-périodiques (T réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_0^T f(x-t)g(t)dt.$$

1. Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et T-périodique.
2. Montrer que $f * g = g * f$.

Exercice 4.

1. Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t}\sin(t+x)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Plus généralement, soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $u, v : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. Démontrer que $F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$ est continue sur I.

Exercice 5. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction F est de classe C^1. Pour tout nombre réel x, calculer $F'(x)$.
3. En déduire une expression explicite de $F(x)$.

Exercice 6. La fonction Gamma.

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale impropre $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est convergente.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire la valeur $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.
3. Montrer que la fonction Γ est de classe C^2 et convexe. En déduire que Γ atteint son minimum en un point de l'intervalle $]1, 2[$.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}(x\Gamma(x)) = 1$ et dessiner l'allure du graphe de Γ.

5. On définit, pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $u_n(x, \cdot) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $u_n(x,t) = e^{-nt}t^{x-1}$.
   (a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n(x, \cdot)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x,t)dt$ est convergente et que l'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x,t)dt = \frac{1}{n^x}\Gamma(x)$.
   (c) En déduire l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}dt = \zeta(x)\Gamma(x),$$
   où ζ désigne la fonction de Riemann, définie comme somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Exercice 7. Intégrale de Poisson

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)dt.$$

1. (a) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est continue et paire.
   (b) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F(1/x)$ pour $x > 0$.
   (c) Montrer que F est dérivable sur $]-1, 1[$ puis sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.
   (d) Calculer $F'(x)$.
   (Indication : Faire le changement de variable $u = \tan(t/2)$, puis remarquer que
$$\frac{(x+1)u^2 + (x-1)}{((x+1)^2u^2 + (x-1)^2)(1+u^2)} = \frac{4}{x}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2u^2 + (x-1)^2} + \frac{1}{u^2+1}\right)$$
   si $x \neq 0$)
   (e) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi\ln x)$.
   (f) En déduire $F(x)$ pour tout réel x. Tracer le graphe de F.
2. (a) Quand $x \in]-1, 1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(1 - 2x\cos t + x^2)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de t).
   (b) En déduire $F(x)$ pour tout réel x de $]-1, 1[$ puis pour tout réel x.

2. À travailler chez soi : applications directes des définitions

Exercice 8. Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont de classe C^1, et déterminer leur dérivée.

1. $F(x) = \int_0^1 \cos(x + t^2)dt$.
2. $F(x) = \int_0^1 \sinh(x^2 + t)dt$.
3. $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx}\sin(t)dt$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

1. On suppose que $f(0) = 0$ et on pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Justifier que, pour $x \neq 0$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$ et en déduire que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, et on pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^n}$. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3. À travailler chez soi : exercices d'entraînement

Exercice 10.

1. Existence et calcul de $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cosh(tx)dt$, $x \in \mathbb{R}$. (cosh est la fonction cosinus hyperbolique)
2. Existence et calcul de $F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$, $x \in]-1, +\infty[$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}.$$

1. Démontrer que I_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire qu'il existe une suite λ_n telle que, pour tout $x > 0$, on a

$$I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{n-1}}.$$

Que vaut λ_n ?

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)dt$.

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{2}y$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Un calcul du cours de l'intégrale de Gauss

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a - \left(\int_0^x e^{-u^2} du\right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que l'on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En déduire l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. À travailler chez soi : exercices d'approfondissement

Exercice 14.

1. Montrer que pour tout réel x on a $\lim_{t \to 0} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} = x$. En déduire que l'application $\varphi : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,t) = \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$ pour $t > 0$ et $\varphi(x, 0) = x$ est continue.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$ est convergente pour tout x réel. On note $F(x)$ cette intégrale.
3. Montrer que la fonction F ainsi définie est impaire et continue.
4. Montrer que la fonction F est de classe C^1.

5. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$. On pourra utiliser la décomposition suivante :
$\dfrac{1}{(1+T)(1+aT)} = \dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{1+T} - \dfrac{a}{1+aT}\right)$.
6. Calculer $F(0)$ et déduire de ce qui précéde une expression explicite de la fonction F (on pourra faire le calcul d'abord pour $x > 0$).

Exercice 15. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation $y + y'' = \dfrac{1}{x}$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est la seule solution de l'équation différentielle $y + y'' = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ sont convergentes.
6. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt.$$
7. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.