PARTIEL 2
MERCREDI 15 MAI 2024
DURÉE : 3 HEURES.

Toutes les réponses doivent être rigoureusement justifiées.
Les documents, calculatrices et objets connectés ne sont pas autorisés.

Exercice 1 - Dans $\mathbb{R}^3$ on note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$q(u) = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

où a est un paramètre réel.

1. Donner la forme polaire de q. Donner la matrice M de q dans la base e.
2. A l'aide de l'algorithme de Gauss, exprimer q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendantes.
3. Donner la signature et le rang de q en fonction du paramètre a.
4. Pour $a > 1$, donner une base q-orthogonale $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
5. On suppose $a = 1$.
   (a) Donner une base du noyau de q.
   (b) Donner un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim F + \dim F^\perp > 3$, où $F^\perp \subset \mathbb{R}^3$ est le sous espace vectoriel orthogonal à F relativement à q.

Exercice 2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on pose :

$$f_n(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{n(n+1)}.$$

(1) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.
On posera $s(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$, pour tout $x \in [0, +\infty[$.
(2) Montrer que la fonction s est continue sur $[0, +\infty[$.
(3) La série dérivée $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est-elle normalement convergente sur $[0, +\infty[$?
(4) Démontrer que pour tout réel $b > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est normalement convergente sur $[b, +\infty[$.
(5) Démontrer que s est dérivable sur $]0, +\infty[$ et est décroissante sur $[0, +\infty[$.
(6) Calculer $\lim_{x\to+\infty} s(x)$.

Exercice 3 - Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geq 1} \left(2\cos\frac{1}{n}\right)^n x^n, \qquad b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3}\, x^n, \qquad c)\ \sum_{n\geq 0} 2^n x^{2n}.$$

TSVP ►

Exercice 4 - On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\, x^n.$$

(1) Montrer que le rayon de convergence de cette série est $R = 1$. On notera s sa somme.

(2) Etudier la convergence de la série lorsque $x = 1$ et $x = -1$.

(3) Que vaut $s(0)$? $s'(0)$?

(4) Calculer s'' sur $]-1, 1[$.

(5) En utilisant les deux questions précédentes montrer que

$$s(x) = (1+x)\ln(1+x) - x, \qquad x \in]-1, 1[.$$

(6) Que vaut la limite de $s(x)$ lorsque $x \to (-1)^+$?

(7) En déduire la valeur de la somme de la série lorsque $x = -1$.

Exercice 5 - On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = xy - \frac{1}{2}(x+y)^4. \end{aligned}$$

(1) Déterminer tous les points critiques de f.

(2) Déterminer, pour chacun de ces points critiques, si c'est un minimum local, un maximum local ou bien ni l'un ni l'autre.

Exercice 6 - Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}dt.$$

(1) Montrer que la fonction F est de classe C^1.

(2) Calculer $F(0)$.

(3) Montrer que l'on a $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

(4) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$F(x) = a - \left(\int_0^x e^{-u^2}du\right)^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : On pourra considérer la fonction $G : x \mapsto G(x) = \int_0^x e^{-u^2}du$, ainsi que sa dérivée.

(5) Montrer que $a = \frac{\pi}{4}$.

(6) En déduire l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$