Université Paris Cité
L2 Informatique et doubles licences

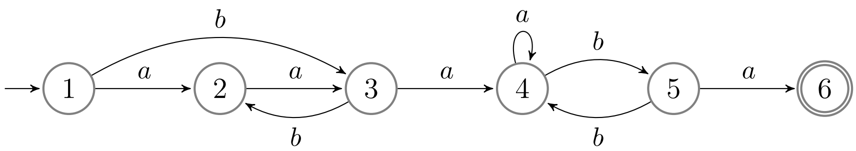
Automates et Analyse Lexicale
Année 2023-2024

Examen — Mardi, 9 janvier 2024

Aucun document n'est autorisé. Les ordinateurs, les téléphones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'extérieur, doivent être éteints et rangés.

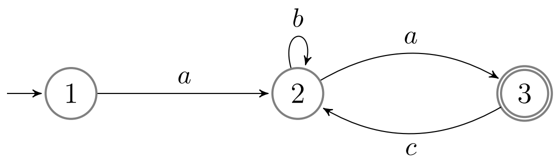
Le temps à disposition est de 2 heures. Cet énoncé a 2 pages. Le barème est indicatif.

Exercice 1 [2.5 points] Soit A l'automate suivant sur l'alphabet $\{a, b\}$:



Calculer une expression rationnelle pour $\mathcal{L}(A)$ en utilisant la méthode de Brzozowski–McCluskey. Éliminer les états dans l'ordre 2-3-4-5.

Exercice 2 [2.5 points] Soit A l'automate suivant sur l'alphabet $\{a, b, c\}$:



1. Déterminer le système d'équations associé à A.
2. Résoudre ce système en utilisant le lemme d'Arden. On commencera par éliminer la variable associée à l'état 3.

Exercice 3 [3 points] Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construire l'automate des résiduels pour l'expression rationnelle $(a^*bc^*)^* + (bc)^*a$.

Exercice 4 [3.5 points] Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Le miroir du mot w est noté $\overline{w}$, par exemple $\overline{aaba} = abaa$. Soit L le langage des palindromes sur Σ, c'est-à-dire

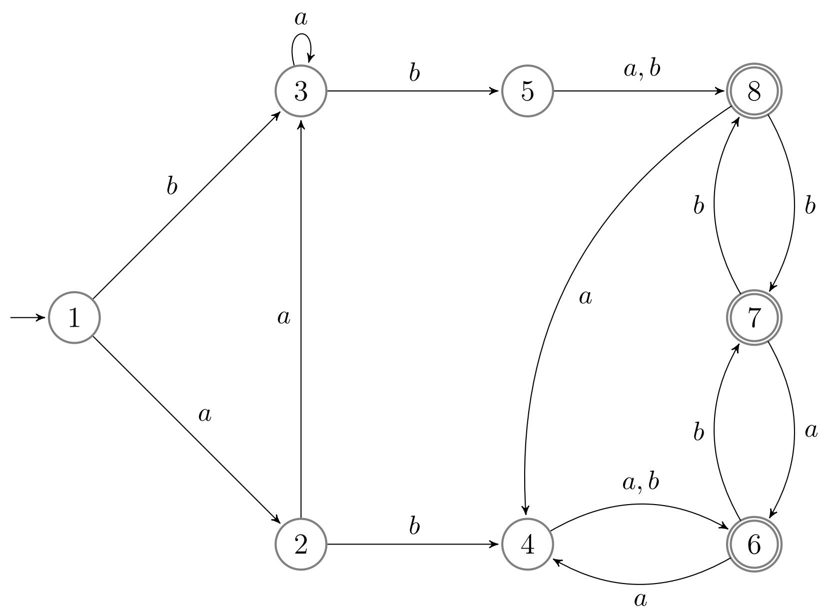
$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \overline{w} = w\}.$$

On rappelle que pour $x, y \in \Sigma^*$, $x \not\sim_L y$ quand il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $xw \in L$ et $yw \notin L$, ou $xw \notin L$ et $yw \in L$.

1. Montrer que $abc \not\sim_L cba$.
2. Montrer que $abaaba \not\sim_L aba$.
3. Montrer que, pour tous les entiers $n, m \geq 0$, si $n \neq m$ alors $a^n \not\sim_L a^m$.
4. En conclure que le langage L n'est pas rationnel.

Tourner la page s.v.p. ↷

Exercice 5 [3.5 points] Soit A l'automate suivant sur l'alphabet $\{a, b\}$:



Minimiser l'automate A selon la méthode de Moore. On écrira pour chaque étape la partition des états, et la lettre de l'alphabet par laquelle on obtient la partition suivante. Dessiner l'automate minimal finalement obtenu.

Exercice 6 [5 points] Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Soient les deux langages :

— $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{il existe } x, y \in \Sigma^* \text{ tels que } w = xy, |x| = |y|, |x|_a = 1, |y|_a = 0\}$,

— $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{il existe } x, y \in \Sigma^* \text{ tels que } w = xy, |x| = |y|, |x|_a > |y|_a\}$.

En d'autres termes, le langage L_1 consiste en tous les mots sur Σ de longueur paire tels que la première moitié contient exactement un a, et la deuxième moitié ne contient aucun a. Le langage L_2 consiste en tous les mots sur Σ de longueur paire tels que la première moitié contient strictement plus de a que la deuxième moitié.

1. Montrer, en utilisant le lemme de l'étoile, que le langage L_1 n'est pas rationnel.
2. Utiliser une propriété de clôture des langages rationnels pour déduire de la question (1) que le langage L_2 n'est pas rationnel.