Rappels

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

1. *Il existe une* unique forme $n-$linéaire alternée $\det\limits_B : E^n \to \mathbb{K}$ *telle que*

$$\boxed{\det_B(e_1, \cdots, e_n) = 1.}$$

2. *Pour tout* $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$,

$$\boxed{\det_B(u_1, \cdots, u_n) \text{ s'appelle le déterminant } (u_1, \cdots, u_n) \text{ dans la base } B.}$$

3. *Si* $u_j = \sum\limits_{i=1}^{i=n} \lambda_{i,j} e_i, \quad j = 1, \cdots, n$ *alors on a :*

$$\begin{aligned} det_B(u_1, \cdots, u_n) &= \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\sigma(1)1} \lambda_{\sigma(2),2} \cdots \lambda_{\sigma(n),n} \end{aligned}$$

4. *Pour toute forme $n-$linéaire alternée f sur E, on a*

$$\boxed{f = f(e_1, \cdots, e_n) \cdot \det_B.}$$

Rappels

1. *Le $det_B(u_1, \cdots, u_n)$ est linéaire en chaque u_i.*
2. $det_B(e_1, \cdots, e_n) = 1$.
3. *$det_B(u_1, \cdots, u_n)$ change seulement de signe si on permute deux vecteurs.*
4. *$det_B(u_1, \cdots, u_n) = 0$ si la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ contient deux vecteurs identiques.*
5. *$det_B(u_1, \cdots, u_n)$ ne change pas si on ajoute à un vecteur u_i une combinaison linéaire des autres $u_j, j \neq i$.*
6. *$det_B(u_1, \cdots, u_n) = 0 \iff (u_1, \cdots, u_n)$ est une famille liée.*
7. *$det_B(u_1, \cdots, u_n) \neq 0 \iff (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E.*

Rappels : déterminant d'une matrice carré

Le déterminant d'une matrice carrée est le déterminant de ses vecteurs colonnes considérés comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique B de $\mathbb{K}^n$.

Plus explicitement, Soit A une matrice carrée à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes de A donnés par

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

sont considérés ici comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ exprimés dans la base canonique B de $\mathbb{K}^n$ donnée par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A est le scalaire

$$\begin{aligned} \det(A) := \det_B(c_1, \cdots, c_n) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}. \end{aligned}$$

Rappels : déterminant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et φ un endomorphisme de E.

1. *Il existe un unique scalaire appelé* le déterminant de φ *et noté* $\det(\varphi)$ *tel que pour toute base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ de E on a :*

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n, \quad det_B(\varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_n)) = \det(\varphi) \cdot det_B(u_1, \cdots, u_n).$$

2. *Si $B = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E alors*

$$det(\varphi) = det_B(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)).$$

et est indépendant du choix de la base B.

Lien entre les différentes notions de déterminants

Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E.

1. *Soit $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ des vecteurs de E. Alors*

$$det_B(x_1, \cdots, x_n) = \det(A)$$

   où

$$A = M(u_1, \cdots, u_n, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. *Si φ est un endomorphisme de E et A sa matrice par rapport à B alors*

$$det(\varphi) = det(A) = det_B(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)).$$

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et φ l'endomorphisme de E donné par

$$\varphi(x, y) = (x + y, x - y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer le déterminant de φ dans la base canonique $B = (e_1, e_2)$ de E.

On a :

$$\begin{array}{rcl} \det(\varphi) & = & \det_B(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) \\ & = & \det_B(e_1 + e_2, e_1 - e_2) \\ & = & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2. \end{array}$$

Exemple

1. Si $\varphi = Id$ est l'identité de E alors

$$\det(\varphi) = \det_B(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)) = \det_B(e_1, \cdots, e_n) = 1.$$

2. Si φ est une homothétie de E de rapport k alors $\det(\varphi) = k^n$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} \det(\varphi) & = & \det_B(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)) \\ & = & \det_B(ke_1, \cdots, ke_n) \\ & = & k^n \cdot \det_B(e_1, \cdots, e_n) = k^n. \end{array}$$

Exemple

Plus généralement, supposons qu'il existe une base $V = (v_1, \cdots, v_n)$ de E et des scalaires $\lambda_i \in \mathbb{K}$ telle que
$$\varphi(v_i) = \lambda_i v_i.$$
Alors
$$\begin{aligned} \det(\varphi) &= \det_V(\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n)) \\ &= \det_V(\lambda_1 v_1, \cdots, \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdot \det_V(v_1, \cdots, v_n) \\ &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$
Finalement,
$$\det(\varphi) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Exemple

Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et σ une permutation appartenant à $\mathcal{S}_n$. Soit φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Alors
$$\begin{aligned} \det(\varphi) &= \det_B(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)) \\ &= \det_B(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \varepsilon(\sigma) \cdot \det_B(e_1, \cdots, e_n) \\ &= \varepsilon(\sigma). \end{aligned}$$

Théorème

Soit φ, ψ deux endomorphismes de E. On a
$$det(\varphi \circ \psi) = det(\varphi) \cdot det(\psi).$$

Démonstration : Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Nous avons
$$\begin{aligned} \det(\varphi \circ \psi) &= \det_B(\varphi(\psi(e_1)), \cdots, \varphi(\psi(e_n))) \\ &= \det(\varphi) \cdot \det_B(\psi(e_1), \cdots, \psi(e_n)) \\ &= \det(\varphi) \cdot \det(\psi). \end{aligned}$$

Corollaire

Un endomorphisme φ de E est bijective si, et seulement si, $det(\varphi) \neq 0$. Dans ce cas,
$$det(\varphi^{-1}) = [det(\varphi)]^{-1}.$$

Démonstration : Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Supposons que φ est bijectif. Alors

$$1 = \det(id_E) = \det(\varphi^{-1} \circ \varphi) = \det(\varphi) \cdot \det(\varphi^{-1}).$$

Ainsi $\det(\varphi) \neq 0$ et on a la formule souhaitée.

Réciproquement, si $\det(\varphi) \neq 0$ alors

$$\det_B(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)) = \det(\varphi) \neq 0.$$

Donc $(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$ est une base de E et l'endomorphisme φ est bijectif.

Corollaire

Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n.

1. *Le déterminant du produit AB est le produit des déterminants :*

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

2. *Si A et B sont semblables alors elles ont le même déterminant :*

$$det(A) = det(B).$$

Démonstration :

1. Soient φ et ψ les deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B}$ sont respectivement A et B. Alors par définition $\det(A) = \det(\varphi)$ et $\det(B) = \det(\psi)$. Ainsi

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi) = \det(A)\det(B).$$

   Or la matrice de $\varphi \circ \psi$ dans la base $\mathcal{B}$ est AB. Par suite

$$\det(AB) = \det(\varphi \circ \psi) = \det(A)\det(B).$$

2. Les matrices A, B sont semblables signifie qu'elles représentent le même endomorphisme φ dans deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$. Ainsi

$$\det(A) = \det(\varphi) = \det(B).$$

Corollaire

Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul. Dans ce cas $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.

Démonstration : Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique B est A. On a $\det(A) = \det(\varphi)$. De plus, A est inversible si, et seulement si, φ est bijective, ce qui équivaut aussi à

$$0 \neq \det(\varphi) = \det(A).$$

Supposons que A inversible. Alors

$$1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Comme $\det(A) \neq 0$ alors $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Calcul de déterminants

Lemme

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice carrée telle que* $a_{in} = 0$ *pour tout* $1 \leq i \leq n-1$*. Notons* A_{nn} *la matrice carrée* $(n-1)\times(n-1)$ *obtenue à partir de* A *en rayant la dernière ligne et la dernière colonne. Alors*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}det(A_{nn}).$$

Démonstration : Par définition on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n, \sigma(n)=n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n-1)n-1}a_{nn} \end{aligned}$$

Comme les permutations de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ laissant invariant n sont les permutations de $\{1,\cdots,n-1\}$, et considérées comme élément de $\mathcal{S}_{n-1}$ elles sont de même signature. Par suite,

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{nn}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n-1)n-1} \\ &= a_{nn}\det(A_{nn}). \end{aligned}$$

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Pour tout $1 \leq i,j \leq n$ on définit

1. la matrice A_{ij} obtenue à partir de A en rayant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne,
2. le déterminant $\Delta_{ij} = \det(A_{ij})$ s'appelle le **mineur** d'indices i,j dans A,
3. le scalaire
$$(-1)^{i+j}\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$
s'appelle le **cofacteur** d'indices i,j dans A,
4. **la comatrice** de A est la matrice des cofacteurs de A donnée par
$$\text{com}(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Théorème

Soit $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée d'ordre n. Alors pour tout $1\le i,j\le n$ nous avons :

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i,2}\Delta_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}\Delta_{in}\\ &= \textit{le développement du déterminant de } A \textit{ suivant la } i^{\text{ème}} \textit{ ligne}\end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{j+1}a_{1j}\Delta_{1j}+(-1)^{j+2}a_{2j}\Delta_{2j}+\cdots+(-1)^{j+n}a_{nj}\Delta_{nj}\\ &= \textit{le développement du déterminant de } A \textit{ suivant la } j^{\text{ème}} \textit{ colonne}\end{aligned}$$

Démonstration : Notons $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par définition

$$\det(A)=\det_{\mathcal{B}}(c_1,\cdots,c_n)$$

où $c_j=\sum_{i=1}^{i=n}a_{ij}e_i$. Alors par la $n-$linéarité du déterminant on obtient

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det_{\mathcal{B}}(c_1,\cdots,c_{j-1},\sum_{i=1}^{i=n}a_{ij}e_i,c_{j+1},\cdots c_n)\\ &= \sum_{i=1}^{i=n}a_{ij}\det_{\mathcal{B}}(c_1,\cdots,c_{j-1},e_i,c_{j+1},\cdots c_n).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(c_1,\cdots,c_{j-1},e_i,c_{j+1},\cdots,c_n) &= -\det_{\mathcal{B}}(c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},e_i,\cdots,c_n)\\ &= (-1)^{n-j}\det_{\mathcal{B}}(c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_n,e_i)\\ &= (-1)^{n-j}\det(A').\end{aligned}$$

La matrice A' à tous les coefficients de la dernière colonne nuls sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1 :

$$A'=\begin{array}{c} L_1\\ \vdots\\ L_{i-1}\\ L_i\\ L_{i+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ L_n\end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0\\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0\end{pmatrix}.$$

En permutant la $^{\text{ème}}$ ligne avec la $(i+1)^{\text{ème}}$, puis $(i+1)^{\text{ème}}$ avec $(i+2)^{\text{ème}}$ et ainsi de suite on obtient :

$$\begin{aligned}
\det(A') &= \det_{\mathcal{B}}(L_1, \cdots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \cdots, L_n) \\
&= -\det_{\mathcal{B}}(L_1, \cdots, L_{i-1}, L_{i+1}, L_i, \cdots, L_n) \\
&= (-1)^{n-i}\det_{\mathcal{B}}(L_1, \cdots, L_{i-1}, L_{i+1}, \cdots, L_n, L_i) = (-1)^{n-i}\det(A'')
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\det(A'') &= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1
\end{vmatrix} \\
&= \det(A_{ij}) = \Delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\det_{\mathcal{B}}(c_1, \cdots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \cdots, c_n) = (-1)^{n-i}(-1)^{n-j}\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Finalement,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}\det_{\mathcal{B}}(c_1, \cdots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \cdots, c_n) = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}.$$

Exemples

Développer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On développe le déterminant suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -3 + 1 = -2.
\end{aligned}$$

Comparons avec le calcul suivant la première ligne :

$$\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -3 - 1 + 2 = -2.
\end{aligned}$$

On a donc intérêt à choisir la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

Exemples

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Le déterminant précédent se calcule plus facilement en manipulant les colonnes comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} \qquad (C_3 \curvearrowright C_3 - C_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (C_2 \curvearrowright C_2 - C_1) \end{aligned}$$

Notons que la même manipulation sur les colonnes montre que pour tout $n \geq 3$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n(n-1)+1 & \cdots & \cdots & n^2 \end{vmatrix} = 0$$

alors qu'un développement suivant une ligne ou une colonne est très difficile à utiliser.

On retient :

Il est toujours plus judicieux de faire quelques opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour simplifier les calculs en faisant apparaitre le plus de 0 possibles dans une même ligne ou colonne.

Exercice

Soit p, q deux entiers positifs $n = p + q$. Soient A une matrice carrée $p \times p$, C une matrice carrée $q \times q$, B une matrice carrée $p \times q$ et M une matrice carrée $n \times n$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = det(A)det(C)$$

Solution : D'abord si $C = I_q$ alors l'application $f : A \mapsto \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{vmatrix}$ est p-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A. Par définition du déterminant,

$$f(A) = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = f(e_1, \cdots, e_p)\det(A) \quad \text{pour toute matrice} \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Mais la matrice $\begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure dont la diagonale ne contient que des 1. Ainsi

$$f(e_1, \cdots, e_p) = \begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = 1.$$

Finalement,

$$f(A) = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \det(A) \quad \text{pour tout matrice} \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

De même on montre que

$$\begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(C) \quad \text{pour tout matrice} \quad C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}).$$

Maintenant fixons B et C. L'application $g : A \mapsto \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$ est une forme p-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A. De plus,

$$g(e_1, \cdots, e_p) = \begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(C).$$

Ainsi, par définition du déterminant,

$$f(A) = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A) \cdot \det(C) \quad \text{pour tout matrice} \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Théorème

Soit A une matrice carrée. alors

$$A \cdot {}^t com(A) = {}^t com(A) \cdot A = det(A) I.$$

En particulier, A est inversible si, et seulement si, $det(A) \neq 0$ et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t com(A)$$

Démonstration : Posons

$${}^t\mathrm{com}(A) = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

On a $b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ji}$. Posons aussi

$$A \cdot {}^t\mathrm{com}(A) = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Alors par définition du produit on a

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= a_{i1}(-1)^{1+j}\Delta_{j1} + a_{i2}(-1)^{2+j}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}(-1)^{n+j}\Delta_{jn} \end{aligned}$$

Par suite pour $i = j$ on a

$$\begin{aligned} c_{i,i} &= a_{i1}(-1)^{1+i}\Delta_{i1} + a_{i2}(-1)^{2+i}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{n+i}\Delta_{in} \\ &= \det(A) \quad \text{(développé suivant la ième ligne).} \end{aligned}$$

Pour $i \neq j$. Soit A' la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$. Cette matrice a deux lignes identiques et donc $\det(A') = 0$. Or en développant $\det(A')$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ ligne on obtient :

$$0 = \det(A') = a_{i1}(-1)^{1+j}\Delta_{j1} + a_{i2}(-1)^{2+j}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}(-1)^{n+j}\Delta_{jn} = c_{ij}.$$

Finalement

$$A \ {}^{t}\mathrm{com}(A) = \det(A)I.$$

De la même façon on montre que

$${}^{t}\mathrm{com}(A)A = \det(A)I.$$

Exemples

Soit $a, b, , c, d$ des scalaires. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Cependant, pour n arbitraire cette formule à plus de valeur théorique que pratique.