CORRIGÉ DU PARTIEL 2
DU MERCREDI 15 MAI 2024

Exercice 1 - *Dans $\mathbb{R}^3$ on note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par*

$$q(u) = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

où a est un paramètre réel.

1. *Donner la forme polaire de q. Donner la matrice M de q dans la base e.*

En dissociant les termes définissant la forme quadratique q, on obtient sans calcul sa forme polaire, mettons pour $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$:

$$b(u, u') = xx' + 2yy' + azz' + xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z\,.$$

(À défaut d'avoir appris à faire cette dissociation, on peut maladroitement utiliser une identité de polarisation.)
Les coefficients de cette forme polaire sont ceux de la matrice M de q dans la base canonique e de $\mathbb{R}^3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

2. *A l'aide de l'algorithme de Gauss, exprimer q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendantes.*

On obtient en une seule étape de l'algorithme de Gauss : $q(x, y, z) = (x + y + z)^2 + y^2 + (a - 1)z^2$.

3. *Donner la signature et le rang de q en fonction du paramètre a.*

Il s'ensuit que la signature de q est $(3, 0)$ si $a > 1$, $(2, 0)$ si $a = 1$ et $(2, 1)$ si $a < 1$. La forme quadratique q est donc de rang 2 si $a = 1$ et de rang 3 sinon.

4. *Pour $a > 1$, donner une base q-orthogonale $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$.*

La forme réduite de Gauss que l'on a trouvée plus haut pour q nous invite à déterminer la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ dans laquelle un vecteur quelconque $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées $x' = x + y + z$, $y' = y$ et $z' = z$. En résolvant le système $\left[\begin{array}{l} x' = x + y + z \\ y' = y \\ z' = z \end{array}\right.$ on trouve $\left[\begin{array}{l} x = x' - y' - z' \\ y = y' \\ z = z' \end{array}\right.$ soit encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
Cette dernière matrice 3×3 est ainsi la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$ cherchée, qui est donc constituée des vecteurs $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = (-1, 0, 1)$. La forme quadratique q s'exprime dans cette base $\mathcal{B}$ par $q(x'u_1 + y'u_2 + z'u_3) = x'^2 + y'^2 + (a - 1)z'^2$, donc la matrice de q dans $\mathcal{B}$ est diagonale, ce qui assure que la base $\mathcal{B}$ trouvée est bien q-orthogonale.

Remarque. Pour $a > 1$, q a pour signature $(3, 0)$, de sorte que sa forme polaire est en fait un produit scalaire. Nous aurions donc pu trouver une base q-orthogonale en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt.

5. *On suppose $a = 1$.*
   (a) *Donner une base du noyau de q.*

Pour $a = 1$, la forme quadratique q est de rang 2, donc on sait par avance que son noyau $\operatorname{Ker} q$ est de dimension 1. On peut bien sûr déterminer $\operatorname{Ker} q$ en résolvant le système $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 0$, où M est la matrice de q trouvée à la question 1. Mais on peut aussi remarquer que la base q-orthogonale $\mathcal{B}$ que l'on a trouvée à la question précédente est en fait q-orthogonale pour tout $a \in \mathbb{R}$, en vertu de la méthode utilisée. Selon l'expression de q que l'on a trouvée dans cette base $\mathcal{B}$, son vecteur u_3 est q-isotrope pour $a = 1$, et bien sûr q-orthogonal à u_1 et u_2, donc q-orthogonal à $\mathbb{R}^3$, d'où $u_3 \in \operatorname{Ker} q$. Comme $\dim \operatorname{Ker} q = 1$, il s'ensuit que ce vecteur u_3 forme une base de $\operatorname{Ker} q$.

   (b) *Donner un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim F + \dim F^\perp > 3$, où $F^\perp \subset \mathbb{R}^3$ est le sous espace vectoriel orthogonal à F relativement à q.*

Il suffit de choisir $F = \operatorname{Ker} q$. En effet, comme $\operatorname{Ker} q$ est par définition l'ensemble des vecteurs q-orthogonaux à $\mathbb{R}^3$, on a alors immédiatement $F^\perp = \mathbb{R}^3$ et donc $\dim F + \dim F^\perp = 1 + 3 > 3$.

Exercice 2 - *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on pose :*

$$f_n(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{n(n+1)}.$$

(1) *Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est normalement convergente sur $[0,+\infty[$.*
On posera $s(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$, pour tout $x \in [0,+\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on a $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$; or la série (de Riemann) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.

(2) *Montrer que la fonction s est continue sur $[0,+\infty[$.*

Puisque les fonctions f_n sont toutes continues sur $[0,+\infty[$ et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, la fonction s est bien continue sur $[0,+\infty[$.

(3) *La série dérivée $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ est-elle normalement convergente sur $[0,+\infty[$?*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto |f_n'(x)| = \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n}$ décroît sur $[0,+\infty[$ et atteint donc sa plus grande valeur en $x = 0$. Ainsi, $\|f_n'\|_\infty^{[0,+\infty[} = |f_n'(0)| = 1/n$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n'\|_\infty^{[0,+\infty[}$ diverge (il s'agit de la série harmonique). Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

(4) *Démontrer que pour tout réel $b > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ est normalement convergente sur $[b,+\infty[$.*

En reprenant ce qui a été fait à la question précédente, on a cette fois-ci $\|f_n'\|_\infty^{[b,+\infty[} = |f_n'(b)| \leqslant e^{-(n+1)b}$. Or la série géométrique de terme général $e^{-(n+1)b}$, et donc de raison $e^{-b} < 1$, converge, d'où la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ sur $[b,+\infty[$.

(5) *Démontrer que s est dérivable sur $]0,+\infty[$ et est décroissante sur $[0,+\infty[$.*

Considérons un réel $x \in]0,+\infty[$. Soit b un réel tel que $0 < b < x$. La fonction s est dérivable sur $[b,+\infty[$, puisque la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge sur $[b,+\infty[$ (de par la question 1), que chaque fonction f_n est dérivable sur $[b,+\infty[$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[b,+\infty[$ (selon la question précédente). La dérivabilité de la fonction s sur $[b,+\infty[$ et le fait que le réel $x \in]0,+\infty[$ considéré est tel que $x > b$ entraînent que s est dérivable en x, à gauche comme à droite.

La décroissance de la fonction s sur $[0,+\infty[$ résulte de celle des fonctions f_n sur le même intervalle.

(6) *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x)$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. La convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[0,+\infty[$ permet d'en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} s(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Exercice 3 - *Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

$$a)\ \sum_{n\geq 1} \left(2\cos\frac{1}{n}\right)^n x^n, \qquad b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3}\, x^n, \qquad c)\ \sum_{n\geq 0} 2^n x^{2n}.$$

a) Pour $a_n = \left(2\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\cos\frac{1}{n} = 2$, donc le rayon de convergence de la série est $\dfrac{1}{2}$.

b) Pour $a_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$, on a $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{(3n+3)!}{(3n)!}\dfrac{n!^3}{(n+1)!^3} = \dfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = \dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 27$ et le rayon de convergence de la série est $\dfrac{1}{27}$.

c) Cette dernière série est une série géométrique de raison $q = 2x^2$, qui converge donc ssi $|q| < 1$, c'est-à-dire ssi $|x| < 1/\sqrt{2}$. Son rayon de convergence est donc $1/\sqrt{2}$.

Exercice 4 - *On considère la série entière*

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\, x^n.$$

(1) *Montrer que le rayon de convergence de cette série est $R = 1$. On notera s sa somme.*

En posant $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$, on obtient $\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \dfrac{n+1}{n-1} \longrightarrow 1$ lorsque $n \to \infty$, donc $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$.

(2) *Etudier la convergence de la série lorsque $x = 1$ et $x = -1$.*

Pour $x = \pm 1$, on a $|a_n x^n| = \dfrac{1}{n(n-1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ lorsque $n \to \infty$. Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc la série entière ci-dessus converge absolument pour $x = \pm 1$.

(3) *Que vaut $s(0)$? $s'(0)$?*

La série entière $s(x) = \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\, x^n$ et sa dérivée $s'(x) = \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n-1}\, x^{n-1}$ (de même rayon de convergence $R = 1$) n'ont pas de terme constant, donc $s(0) = s'(0) = 0$.

(4) *Calculer s'' sur $]-1, 1[$.*

En dérivant à nouveau, on obtient la série entière $s''(x) = \sum\limits_{n\geqslant 2} (-1)^n x^{n-2} = \sum\limits_{k\geqslant 0} (-1)^k x^k$ (toujours de même rayon de convergence $R = 1$, donc convergeant sur $]-1, 1[$). Il s'agit d'une série géométrique qu'on évalue facilement : $s''(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

(5) *En utilisant les deux questions précédentes montrer que*

$$s(x) = (1+x)\ln(1+x) - x, \qquad x \in\,]-1, 1[\ .$$

s' est la primitive de s'' s'annulant en 0 (selon la question 3), donc $s'(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in\,]-1, 1[$. De même, s est la primitive de s' s'annulant en 0, donc pour tout $x \in\,]-1, 1[$:

$$s(x) \;=\int_0^x \ln(1+t)\, dt \overset{(u=1+t)}{=} \int_1^{1+x} \ln u\, du \;=\; \Big[u \ln u\Big]_1^{1+x} - \int_1^{1+x} du \;=\; (1+x)\ln(1+x) - x\ .$$

(6) *Que vaut la limite de $s(x)$ lorsque $x \to (-1)^+$?*

Avec le changement de variable $x = t - 1$, on a : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} s(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} s(t-1) = \lim\limits_{t\to 0^+} (t\ln t - t + 1) = 1\ .$

(7) *En déduire la valeur de la somme de la série lorsque $x = -1$.*

La série entière définissant s converge normalement sur $[-1, 1]$. En effet, on a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\, x^n\right| \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge. Ainsi, s est continue sur $[-1, 1]$ donc $s(-1) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} s(x) = 1$.

Exercice 5 - *On considère la fonction*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = xy - \frac{1}{2}(x+y)^4. \end{aligned}$$

(1) *Déterminer tous les points critiques de f.*

(x, y) est un point critique de f ssi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - 2(x+y)^3 = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 2(x+y)^3 = 0$, c'est-à-dire ssi $x = y = 2(x+y)^3$. L'abscisse x doit alors être racine du polynôme $x - 2(2x)^3 = x(1 - 16x^2)$. Ainsi, les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(1/4, 1/4)$ et $(-1/4, -1/4)$.

(2) *Déterminer, pour chacun de ces points critiques, si c'est un minimum local, un maximum local ou bien ni l'un ni l'autre.*

En calculant les dérivées partielles secondes de f, on obtient que sa hessienne en un point (x, y) est

$$\mathrm{Hess}(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -6(x+y)^2 & 1-6(x+y)^2 \\ 1-6(x+y)^2 & -6(x+y)^2 \end{pmatrix}$$

En particulier, on a $\mathrm{Hess}(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det \mathrm{Hess}(f)_{(0,0)} = -1 < 0$, donc $(0, 0)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f : c'est un point-col.
En revanche, on a $H = \mathrm{Hess}(f)_{(1/4,\,1/4)} = \mathrm{Hess}(f)_{(-1/4,\,-1/4)} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$, $\det H = 2 > 0$ et aussi $\mathrm{tr}\, H = -3 < 0$, donc $(1/4, 1/4)$ et $(-1/4, -1/4)$ sont des maxima locaux stricts de f.

Exercice 6 - *Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} dt.$$

(1) *Montrer que la fonction F est de classe C^1.*

La fonction définie par $f(x, t) = \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$ et sa dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(t^2+1)x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0, 1]$, donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt = -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2} dt.$

(2) *Calculer $F(0)$.*

$F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$

(3) *Montrer que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.*

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, on a $|f(x, t)| \leqslant e^{-(t^2+1)x^2} \leqslant e^{-x^2}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, donc lorsque $x \to +\infty$ la fonction $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle. Il s'ensuit $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

(4) *Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $F(x) = a - \left(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du\right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Indication : On pourra considérer la fonction $G : x \mapsto G(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$, ainsi que sa dérivée.

Selon ce qui a été trouvé à la première question, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt = -2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2} dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\, x\, dt \overset{(u=xt)}{=} -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2} du = -2G'(x)G(x)$$

en posant $G(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$. Ainsi, les fonctions F et $-G^2$ ont même dérivée sur $\mathbb{R}$ et ne diffèrent donc que d'un terme constant a, comme attendu.

(5) *Montrer que $a = \frac{\pi}{4}$.*

Comme $G(0) = 0$, on en déduit $F(0) = a$. Or $F(0) = \dfrac{\pi}{4}$ (cf question 2), donc $a = \dfrac{\pi}{4}$.

(6) *En déduire l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Selon les questions précédentes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right)^2 = 0$, d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et l'égalité à établir, puisque son intégrale est clairement positive.