18/12/2023 — L2 Math/Math-Info
Université Paris Cité — Algèbre

Correction Devoir Final 1

Voici un corrigé succint. Il n'a pas été nécessaire de terminer le sujet pour obtenir la note maximale (mais presque !).

Exercice de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.

On écrit $\det(A - XI) = \det(PBP^{-1} - XI) = \det(P(B - XI)P^{-1}) = \det(B - XI)$. Donc A et B ont même polynômes caractéristiques, donc mêmes vp.

Exercice 1. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ une permutation.

1. Écrire l'inverse de σ.
   $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 3 & 10 & 1 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
2. Décomposer σ en cycles à supports disjoints.
   $\sigma = c_1 \circ c_2$ avec $c_1 = (158692)$ et $c_2 = (4710)$
3. On rappelle que l'orbite d'un élément $i \in \{1, \ldots, 10\}$ associée à σ est définie comme l'ensemble
   $$O(i) := \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{Z}\}.$$
   Déterminer toutes les orbites associées à σ.
   Un élément i est soit dans le support de c_1 soit dans le support de c_2 ou soit 3. Dans le premier cas l'orbite de i est le support de c_1, dans le deuxième le support de c_2 et sinon c'est 3.
4. Calculer la signature de σ. $\epsilon(\sigma) = \epsilon(c_1)\epsilon(c_2) = -1$.
5. Quel est l'ordre de σ ? ppcm de l'ordre de c_1 et c_2 c'est à dire 6.
6. Calculer σ^{2025}. La division euclidienne par 6 et un calcul donnent $\sigma^{2025} = \sigma^3 = c_1^3 = (16)(59)(82)$.

Exercice 2. Considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. $(1-X)^3$

2. Justifier que u n'est pas diagonalisable. A n'est pas semblable à l'identité car différent de l'identité !

3. Quelle est la décomposition de Jordan-Chevalley de u ? $u = id + (u - id)$. Attention il faut tout justifier, en particulier $(u - id)$ nilpotent !

4. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base, notée $T = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_3(\mathbb{R})$, est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Plusieurs possibilités mais la plus courte: Poser $n = u - id$. Prendre $x \in E = \ker n^3 / \ker n^2$ (justifier) et vérifier que $(n^2(x), n(x), x)$ est une base et qu'elle a bien la propriété souhaitée pour u !

5. Quel est le polynôme minimal de u ? $(X-1)^3$ car ses diviseurs $(X-1)$ et $(X-1)^2$ n'annulent pas A !

Problème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. On note S_n le l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui même. Pour tout $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice dont le coefficient associé à ligne i et la colonne j vaut 1 si $i = \sigma(j)$, 0 sinon; où $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On dit que P_σ est la matrice de permutation associée à σ. Considérons

$$\mathcal{P}_n := \{P_\sigma | \sigma \in S_n\}$$

l'ensemble des matrices de permutations.

1. (a) Expliciter $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. On a I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $\mathcal{P}_2$. On a I_3 et les 5 matrices suivantes et pour $\mathcal{P}_3$:

   3 associées aux transpositions: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   et 2 aux 3-cycles $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de chaque élément de $\mathcal{P}_2$. Justifier que les éléments de $\mathcal{P}_2$ sont diagonalisables (sur $\mathbb{C}$). Je vous laisse traiter le que cas de I_2. Pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est $X^2 - 1$ qui est s.r.s, donc la matrice est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{C}$) de vecteurs propres $(1, 1)$ pour la vp 1 et $(1, -1)$ pour vp -1.

(c) Déterminer les valeurs propres de chaque élément de $\mathcal{P}_3$. Justifier que les éléments de $\mathcal{P}_3$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ (on ne demande pas de calculer les sous-espaces propres). Les vp des matrices associées aux transpositions sont 1 et -1 il faut vérifier que $m_g = m_a$ dans ce cas. Ou bien :), remarquer que les matrices de transpositions élevées au carré sont égales à elles-mêmes. On a donc un polynôme annulateur s.r.s de ces matrices. Pour les 3-cycles: le polynôme caractéristique est $X^3 - 1$ s.r.s dans $\mathbb{C}$, donc les matrices sont diagonalisables. Ou bien :(, remarquer que les matrices des 3-cycles élevées au cube sont égales à elles-mêmes...

2. (a) Soit $\sigma \in S_n$. Soit u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à P_σ. Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Par définition de P_σ, on a $u(e_i) = e_j$ avec $j = \sigma(i)$, pour tout $i = 1, \ldots, n$.

   (b) Montrer alors que $P_\sigma \in GL_n(\mathbb{C})$. P_σ transforme une base en une base !

   (c) Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Montrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$. Un utilise 2)$a$): $P'_\sigma P_\sigma(e_i) = e_{\sigma'(\sigma(i))} = P_{\sigma' \circ \sigma}(e_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. D'où le résultat. En déduire que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. $\mathcal{P}_n \ni I_n$ donnée par $\sigma = id$. On observe que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ pour tout σ, par la question juste avant. Et donc $P_{\sigma'}^{-1} P_\sigma = P_{\sigma'^{-1} \circ \sigma} \in \mathcal{P}_n$.

3. Soit $\sigma \in S_n$. Justifier que l'application $\phi_\sigma : k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k \in S_n$ ne peut pas être injective. On ne peut pas injecter un ensemble infini dans un ensemble fini ! En déduire que pour tout $\sigma \in S_n$, il existe un entier N tel que $\sigma^N = id$. Par le principe des tiroirs, il existe $k_1 \geq k_2$ tel que $\sigma^{k_1} = \sigma^{k_2}$, d'où on tire $\sigma^{k_1 - k_2} = id$.

4. En déduire que tout élément de $\mathcal{P}_n$ est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$). Étant donnée σ, il existe N tel que $\sigma^N = id$. D'où, $I_n = P_{\sigma^N} = P_\sigma^N$. Donc $X^N - 1$ est annulateur de P_σ et est s.r.s sur $\mathbb{C}$. Ainsi, toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est diagonalisable.

5. Notons c le cycle $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme minimal de P_c. Le résultat est $X^n - 1$ mais il faut le justifier...en calculant le polynôme caractéristique de P_c par exemple !