15/01/2024 L2 Math/Math-Info
Université Paris Cité Algèbre

Devoir Final 2

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Prenez soin de rédiger correctement les questions que vous savez faire !
L'épreuve dure 2 heure.

Exercice 1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considére la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-t & t-2 & t \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique. Facile avec la première ligne ! On obtient
$$(1-X)(2-X)(t-X).$$

2. Pour quelles valeurs de t la matrice M_t est elle diagonalisable ?

   (a) Si $t \neq 1, 2$ alors le polynôme caractéristique est s.r.s donc M_t est diagonalisable.

   (b) Si $t = 1$: on a $M_t - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 donc le SEP est de dimension 1 donc
   $m_g(1) < m_a(1)$ et donc M_t n'est pas diagonalisable.

   (c) Si $t = 2$: on a $M_t - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1 donc
   $m_g(2) = m_a(2)$, donc M_t est diagonalisable.

3. On suppose $t = 2$. Calculer M_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$M_2^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$
avec par exemple pour P :
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul donne alors
$$M_2^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4. On suppose $t = 1$. Montrer que M_1 est semblable à
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Une basse (u, v, w) qui va fonctionner est une base formée par u un vecteur propre associé à la vp 2. Ensuite, on choisit w dans $\ker(M_1 - I_2)^2$ mais pas dans $\ker(M_1 - I_2)$ et on pose $v = (M_1 - I_2)w$. Le plus simple est de trouver explicitement ces vecteurs et de vérifier qu'on a bien une base. Par exemple prendre
   $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sont elles semblables ?

Indication: on pourra commencer par montrer que le polynôme caractéristique des matrices A et B peut s'écrire $-(X + 2)(X^2 - 2X - 1)$.

L'indication permet de s'assurer que A et B sont diagonalisables avec les mêmes valeurs propres. Ainsi, il existe $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = QDQ^{-1}$. Mais alors
$$A = (PQ^{-1})B(PQ^{-1})^{-1}$$
et $PQ^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$.

Problème. Autour du groupe de Heisenberg.
On considère le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :
$$H_3(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que $H_3(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.

   Tout d'abord si $m_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$, on a $\det(m_{x,y,z}) = 1$ et donc $m_{x,y,z}$ est inversible.

   (a) L'identité est bien dans $H_3(\mathbb{R}) \neq \varnothing$.

(b) Observons que

$$m_{x,y,z}.m_{x',y',z'} = m_{x+x',y+y',z+z'+xy'} \in H_3(\mathbb{R}).$$

(c) Et,

$$m_{x,y,z}^{-1} = m_{-x,-y,-z+xy} \in H_3(\mathbb{R}).$$

.

2. Montrer que $H_3(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.
Il suffit de donner deux matrices de $H_3(\mathbb{R})$ qui ne commutent pas. Prendre $m_{1,1,0}$ et $m_{2,1,0}$ par exemple...

3. Montrer que tous ses éléments sont d'ordre infini.
Remarquons que $m_{x,y,z}^n = m_{x^n,y^n,z^n+\alpha_n(x,y)}$. Donc, $m_{x,y,z}^n = m_{0,0,0}$ implique $x = 0$ et $y = 0$. Il faut s'assurer que $\alpha_n(0,0) = 0$. Dès lors, on a aussi $z = 0$.

4. Considérons l'application

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R}) \mapsto (x,y) \in (\mathbb{R}^2, +).$$

(a) Montrer que π est un morphisme de groupes.
On a bien

$$\pi(m_{x,y,z}m_{x',y',z'}) = \pi(m_{x+x',y+y',*}) = (x+x', y+y') = (x,y)+(x',y') = \pi(m_{x,y,z})+\pi(m_{x',y',z'}).$$

(b) Montrer que π est surjective.
Étant donné (x,y) il suffit de prendre $m_{x,y,0}$ pour avoir $\pi(m_{x,y,0}) = (x,y)$.

(c) Calculer le noyau de π.
$\ker\pi = \{m_{0,0,z}, z \in \mathbb{R}\} \subset H_3(\mathbb{R})$.

5. Le centre d'un groupe G, noté $Z(G)$, est défini comme

$$Z(G) = \{g \in G | gh = hg, \forall h \in G\}.$$

(a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
Vérifier que $e \in Z(G)$ et que $gh \in Z(G)$ et $g^{-1} \in Z(G)$ lorsque $g, h \in Z(G)$.

(b) Calculer $Z(G)$ pour $G = H_3(\mathbb{R})$. On a $Z(H_3(\mathbb{R})) = \ker\pi$.

6. On définit pour $t \in \mathbb{R}^*$, l'application

$$\delta_t : \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & tx & t^2z \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, l'application δ_t est un automorphisme du groupe $H_3(\mathbb{R})$.
Une façon de le voir est de remarquer que $\delta_t(m_{x,y,z}) = P m_{x,y,z} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$. Sinon, vérifier la définition d'un automorphisme.

(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, il existe un automorphisme θ_t du groupe $(\mathbb{R}^2, +)$ tel que

$$\pi \circ \delta_t = \theta_t \circ \pi.$$

Il faut définir

$$\theta_t(x, y) = (tx, ty),$$

et vérifier que c'est bien un automorphisme de $(\mathbb{R}^2, +)$ et vérifier la relation ci-dessus.

Exercice Bonus. Notons $C^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables. Soit $d : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de dérivation sur $C^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non-nul annulateur de d.

On remarque que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction $v_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre de d associé à la vp λ. Ainsi une formule du cours assure que pour tout polynôme P on a $P(d)v_\lambda = P(\lambda)v_\lambda$ et ce pour tout λ. Si P est annulateur, alors $P(\lambda) = 0$ pour tout λ. Le polynôme P a alors une infinité de racines et donc $P = 0$!