Idées de Correction Sujet A MMAN3

9 Nov 2023

Exercice 1 :

[redacted]

$f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \dfrac{t - \sin t}{t^\alpha}$ est continue

$t - \sin t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ donc f est positive

Etude en 0 : $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{3!\, t^{\alpha-3}}$ car $\sin(t) \underset{\text{en } 0}{=} t - \dfrac{t^3}{3!} + o(t^3)$

Etude en $+\infty$ $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ car $t \mapsto \sin(t)$ est bornée

Or on sait que $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha-3}}$ est intégrable en 0 ssi $\alpha - 3 < 1$

et que $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\alpha - 1 > 1$.

Conclusion : L'intégrale converge ssi $2 < \alpha < 4$

Exercice 2 :

[redacted]

Convergence simple :

$f_n(0) = 0$ et si $t > 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$

car $t \mapsto \sin(nt)$ est bornée

et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-nt} = 0$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

Convergence uniforme : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$

$$f_n(u_n) = e^{-1} \sin(2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-2} \sin(2) \neq 0$$

On en déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

$a>0$, Soit $t \in [a,+\infty[$ $\quad |f_n(t)| \le e^{-an}$

car $t \mapsto \sin(nt)$ est majorée par 1 et $t \mapsto e^{-tn}$ est décroissante sur $[a,+\infty[$.

On conclut que $0 \le \|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[a,+\infty[} |f_n(t)| \le e^{-an}$

or $e^{-an} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,+\infty[$.

Exercice 3 :

$f(t)$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$

[redacted] 1. $f'(t) = \dfrac{1-\ln(t)}{t^2}$

t	0	1	e		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$ [redacted]	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. La fonction f n'est pas bornée sur $]0,+\infty[$ $\left(\forall t\in[1,+\infty[\quad |f(t)| \le \frac{1}{e}.\ f \text{ est bornée sur } [1,+\infty[\right)$

3. D'après (1) $M = f(e) = |f(e)| = \frac{1}{e}$

La borne supérieure est atteinte en un unique $t_0 = e \in [1,+\infty[$

Exercice 4 :

1. Si $t=0$ $\quad f_n(0)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

si $t>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^* / \ \frac{1}{N} < t$

et il suit que $\forall n \geq N \quad f_n(t) = 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

2. $I_n = \int_0^1 f_n(t) = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt)\,dt$

$$= \left[\frac{n^2t^2}{2} - \frac{n^3t^3}{3}\right]_0^{1/n}$$

[redacted]

$$= 1/2 - 1/3 = 1/6$$

si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, alors I_n convergerait vers $\int_0^1 0\,dt = 0$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1/6$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

3. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ donc $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{n}{n^2}\right)$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 \neq 0$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$

Alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u_n) = 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$

4. $0 < a < 1 \qquad \exists N \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{N} < a.$

donc $\forall t \in [a, 1]$, $\forall n \geq N$ $\quad f_n(t) = 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, 1]$.

Exercice 4 :

1. L'ensemble $\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ est majoré et minoré

et de même $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n = \{u_p, p \geq n\} \subset \{u_k, k \in \mathbb{N}\}$

donc $\forall n$, A_n admet une borne supérieure et inférieure.

$$x_n = \inf A_n \qquad y_n = \sup A_n$$

2. (a) $\quad x_n = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\quad , y_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $\quad y_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , x_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. $\quad A_n = A_{n+1} \cup \{u_n\}$

$x_n = \min\{x_{n+1}, u_n\}$ $\quad | \quad$ $y_n = \max\{y_{n+1}, u_n\}$

donc $\quad x_{n+1} \geq x_n$ $\quad | \quad$ donc $\quad y_{n+1} \leq y_n$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée $\quad$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α $\qquad$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

4. $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leq y_n$

En passant à la limite $\alpha \leq \beta$

5. De plus $x_n \leq u_n \leq y_n$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \alpha = \beta$

alors par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

6. Soit $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite de u_n alors $\forall n\in\mathbb{N}$

$$x_{\sigma(n)} \leq u_{\sigma(n)} \leq y_{\sigma(n)}$$

or les trois suites $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

convergent donc en passant à la limite

$$\alpha \leq \ell \leq \beta.$$

7. $y_n = \sup A_n$

D'après la propriété de la borne supérieure $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists u_p \in A_n \ / \ y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n$$

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p \geq n \ / \ y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n$

8. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β donc $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p_0 \in \mathbb{N}$

$$\exists n > p_0 \ / \ \beta - \varepsilon < y_n < \beta + \varepsilon$$

On en déduit d'après la question précédente que

$\forall \varepsilon > 0, \ \forall p_0 \in \mathbb{N}^*,$

$p > n > p_0 \qquad \beta - 2\varepsilon \leq y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n \leq \beta + \varepsilon < \beta + 2\varepsilon$

9. On construit par récurrence sur k une suite strictement croissante d'entier (p_k) telle que

$$\beta - \frac{2}{k} \leq u_{p_k} \leq \beta + \frac{2}{k}.$$

Pour construire p_1, on applique la question précédente avec $\varepsilon = 1$ et $p_0 = 0$

Supposons p_{k-1} construit, on construit p_k en appliquant la question précédente avec $\varepsilon = 1/k$ et $p_0 = p_k$.

(u_{p_k}) est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

qui converge d'après le théorème des gendarmes vers β

10. On vient de démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass