TD 2 – Formes linéaires

1. À travailler en classe

Exercice 1. Déterminer l'unique forme linéaire f sur $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(1,1,1)=0$, $f(2,0,1)=1$ et $f(1,2,3)=4$. Donner une base du noyau de f.

Exercice 2. Soit $E=\mathbb{R}^2$ et soit f_1, f_2 des éléments de E^* définis en $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par :

$$f_1(x,y)=x+y, \qquad f_2(x,y)=x-y.$$

1. Exprimer f_1 et f_2 dans la base canonique de E^*.
2. Montrer de deux façons différentes que (f_1,f_2) est une base de E^* :
   (a) en utilisant son expression en les points (x,y) de $\mathbb{R}^2$,
   (b) en utilisant le résultat de la question précédente.
3. Exprimer les formes linéaires g et h dans la base (f_1,f_2), où g et h sont définies en $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y)=x, \qquad h(x,y)=2x-6y.$$

Exercice 3 (Exemple de base duale). Soit (e_1^*,e_2^*,e_3^*), la base canonique de $(\mathbb{R}^3)^*$. Montrer que les vecteurs $u_1=(1,-1,2)$, $u_2=(2,0,2)$ et $u_3=(1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, puis exprimer la base duale de (u_1,u_2,u_3) au moyen de (e_1^*,e_2^*,e_3^*).

Exercice 4. Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. Soit $\mathscr{B}=(1,X,\dots,X^n)$ la base canonique de E, et soit $\mathscr{B}^*=(f_0,\dots,f_n)$ la base duale de $\mathscr{B}$.

1. Soit $P=a_0+\cdots+a_nX^n$. Pour tout $i\in\{0,\dots,n\}$, exprimer $f_i(P)$ en fonction de $a_0,\dots,a_n$.
2. Soit ϕ et ψ les deux éléments de E^* définis par :

$$\forall P\in E \quad \phi(P)=P(1), \qquad \forall P\in E \quad \psi(P)=P'(0).$$

   Déterminer les coordonnées de ϕ et de ψ dans la base $\mathscr{B}^*$.

Exercice 5. Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Pour $P\in E$, on pose :

$$\phi_1(P)=P(1) \qquad \phi_2(P)=P'(1) \qquad \phi_3(P)=P(0)$$

1. Montrer que (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3) est une base de E^*.
2. Déterminer la base dont elle est duale.
3. Mêmes questions avec (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_4) où $\phi_4(P)=P''(1)$.

Exercice 6 (Critère pour une base de E^*). Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et soient $\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_n$ des formes linéaires sur E. On suppose que :

$$\bigcap_{1\le k\le n}\operatorname{Ker}\ell_k=\{0\}.$$

On considère l'application linéaire $L:E\to\mathbb{R}^n$ définie en $x\in E$ par

$$L(x)=\begin{pmatrix}\ell_1(x)\\ \ell_2(x)\\ \vdots\\ \ell_n(x)\end{pmatrix}$$

1. Montrer que L est un isomorphisme d'espace vectoriel.
2. En déduire l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \qquad \ell_k(e_j) = \delta_{j,k}\,.$$

3. En déduire que $(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ est une base de E^*.

Exercice 7 (Polynômes de Lagrange). Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$. On se donne une famille de $n+1$ réels $(a_0, \cdots, a_n)$ deux à deux distincts. On définit pour $k \in \{0, \ldots, n\}$ la forme linéaire $f_k : E \to \mathbb{R}$ par $f_k(P) = P(a_k)$, pour tout $P \in E$.

1. En utilisant le résultat de l'exercice 6, montrer que $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E^*.
2. Déterminer la base dont elle est duale. *Indication : ou pourra introduire les polynômes d'interpolation de Lagrange définis par :*

$$L_k(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}.$$

3. En déduire que tout polynôme de degré inférieur ou égal à n est déterminé par sa valeur en $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$.
4. *Exemple d'application.* On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille $f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ d'éléments de E^* définie par :

$$\forall i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \forall P \in E \quad f_i(P) = P(i).$$

   (a) Montrer que f est une base de E^*.
   (b) Déterminer la base antéduale de f.

Exercice 8. Soit $E = M_2[\mathbb{R}]$, l'espace des matrices carrées à coefficients réels de taille 2, muni de sa base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ où $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note $(E^*_{1,1}, E^*_{1,2}, E^*_{2,1}, E^*_{2,2})$ la base duale de $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de E. Donner les valeurs de $E^*_{i,j}(M)$, pour $(i,j) \in \{1,2\}^2$ en fonction des coefficients a, b, c, d.
2. On considère les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une famille libre de E.
3. Déterminer la base duale $(A^*_1, A^*_2, A^*_3, A^*_4)$ de (A_1, A_2, A_3, A_4) en l'exprimant dans la base duale canonique.
4. Exprimer la trace d'une matrice dans cette base duale $(A^*_1, A^*_2, A^*_3, A^*_4)$

2. À travailler chez soi : applications directes des définitions

Exercice 9. Parmi les applications suivantes, déterminer lesquelles sont des formes linéaires.

1) $\ell_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + y$	2) $\ell_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + 3y$	3) $\ell_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$
4) $\ell_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$	5) $\ell_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2$	6) $\ell_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -x$
7) $\ell_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \exp(x) + y$	8) $\operatorname{tr} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$	9) $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Rappeler la définition de l'espace dual E^*. Quelle est la dimension de E^* ?

2. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Quelle est la définition de la base duale de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$? Dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$ et $e_1 = (1,0,0), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,1,1)$, déterminer (e_1^*, e_2^*, e_3^*).
3. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de E^*. Quelle est la définition de la base antéduale de $(f_1, f_2, \dots, f_n)$? Dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$ et $f_1(x,y,z) = x, f_2(x,y,z) = x+y, f_3(x,y,z) = x+y+z$, montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E^* et déterminer (e_1, e_2, e_3) la base antéduale de (f_1, f_2, f_3).
4. Que signifie H est un hyperplan de E ? Une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ est-elle un hyperplan ? Une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ est-elle un hyperplan ?

Exercice 11 (Supplémentaire d'un hyperplan). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que pour tout $u \in E \setminus \operatorname{Ker}(\varphi)$, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\operatorname{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

3. À travailler chez soi : exercices d'entraînement

Exercice 12. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré au plus 2, et soit u et v deux réels distincts et non nuls. On considère les trois formes linéaires f_1, f_2, f_3 définies par :

$$f_1(P) = P(u) \qquad f_2(P) = P(v) \qquad f_3(P) = P(0).$$

1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E, définie par $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$, et soit (e_1^*, e_2^*, e_3^*) la base duale canonique. Quelle est la valeur de $e_i^*(e_j)$, pour $i, j \in \{1,2,3\}$?
2. Soit $P = a + bX + cX^2$ un élément de E. Donner les valeurs de $e_1^*(P)$, $e_2^*(P)$ et $e_3^*(P)$ en fonction des coefficients a, b, c.
3. Donner les coefficients de la forme linéaire f_1 dans la base duale canonique.
4. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E^*.
5. Déterminer trois polynômes P_1, P_2, P_3 par leurs coefficients, tels que (f_1, f_2, f_3) est la base duale de (P_1, P_2, P_3).

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, avec $n > 0$. On fixe deux réels $a < b$, et pour tout $P \in E$, on définit l'application $\Phi_P : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\Phi_P(Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que, pour tout $P \in E$, Φ_P est une forme linéaire sur E.
2. Soit $(P_1, \dots, P_k)$ une famille de E.
   Établir l'implication suivante : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \Phi_{P_i} = 0\right) \implies \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i = 0\right)$.
   Indication. On pourra utiliser le fait que pour toute fonction f *continue et positive* sur $[a,b]$, on a :
   $$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \implies f = 0\,.$$
3. En déduire que $(P_1, \dots, P_k)$ est une famille libre de E si et seulement si $(\Phi_{P_1}, \dots, \Phi_{P_k})$ est une famille libre de E^*.

Exercice 14 (Polynômes de Taylor). Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $k = 0, \dots, n$ et $P \in E$ on pose $g_k(P) = P^{(k)}(x_0)$.

1. Montrer que la famille $(g_k)_{0 \le k \le n}$ est une base de E^*.
2. De quelle base la famille $(g_k)_{0 \le k \le n}$ est-elle duale ? *Indication : on pourra introduire les polynômes*
   $$Q_k(X) = \frac{(X - x_0)^k}{k!}.$$

4. À travailler chez soi : exercices d'approfondissement

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de n formes linéaires sur E.

1. On suppose que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre. Montrer la propriété suivante :
$$\forall x \in E \quad \big(\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad f_i(x) = 0\big) \implies x = 0. \tag{4.1}$$
2. On suppose maintenant que $(f_1, \ldots, f_n)$ satisfait la propriété (4.1) ci-dessus. Reformuler la propriété (4.1) en termes d'intersection des noyaux des formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$. En utilisant le résultat de l'exercice 6, en déduire que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre.
3. Déduire des questions précédentes le résultat suivant : *il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $f_i(x) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ si et seulement si la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est liée dans E^*.*

Exercice 16. Soient $n > 0$ un entier et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel réel E de dimension n. On suppose que :
$$\forall f \in E^* \qquad f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0 \implies f = 0.$$
Montrer que e est une famille libre de E. *Indication :* par l'absurde, on pourra considérer une forme linéaire $f \neq 0$ dont le noyau contient $n-1$ vecteurs qu'on aura choisis parmi $(e_1, \ldots, e_n)$, obtenir une contradiction et conclure.

Exercice 17 (Intersection d'hyperplans). Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n, et soit $f_1, \ldots, f_k$ des formes linéaires sur E. On veut montrer la propriété suivante :
$$\forall f \in E^* \qquad \Big(f \in \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_k) \iff \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f_i) \subseteq \operatorname{Ker}(f)\Big). \tag{4.2}$$

1. Pour $f \in E^*$ fixée, montrer le sens ($\Longrightarrow$) de l'équivalence dans (4.2).
2. On se fixe $f \in E^*$, et on suppose que l'hypothèse de droite de l'équivalence dans (4.2) est réalisée.
   (a) On extrait une famille libre maximale de $(f_1, \ldots, f_k)$, et quitte à renuméroter les formes linéaires $(f_1, \ldots, f_k)$, on suppose que cette famille libre maximale est $(f_1, \ldots, f_p)$. Montrer que :
   $$\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f_i) = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i).$$
   (b) On complète la famille libre $(f_1, \ldots, f_p)$ en une base $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_{n-p})$ de E^*, et on en considère la base antéduale $(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que $e_i \in \operatorname{Ker}(f)$ pour tout i tel que $p+1 \leq i \leq n$.
   (c) En conclure que $f \in \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$.
3. Conclure.

Exercice 18 (Application linéaire transposée). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour toute partie P de E, on pose :
$$P^{\perp} = \{\varphi \in E^* \,:\, \forall x \in P \quad \varphi(x) = 0\}.$$

On se donne un autre espace vectoriel F, et une application linéaire $f : E \to F$. On considère la transposée $f^* : F^* \to E^*$ de f.

1. Montrer que : $\operatorname{Ker}(f^*) = \big(\operatorname{im}(f)\big)^{\perp}$.
2. On cherche à montrer l'égalité $\operatorname{im}(f^*) = \big(\operatorname{Ker}(f)\big)^{\perp}$.
   (a) Montrer l'inclusion $\operatorname{im}(f^*) \subseteq \big(\operatorname{Ker}(f)\big)^{\perp}$.
   (b) Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E, et soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une base de G.
      i. Montrer que $\big(f(e_1), \ldots, f(e_q)\big)$ est une base de $\operatorname{im}(f)$.
      ii. Soit $h \in \big(\operatorname{Ker}(f)\big)^{\perp}$. Montrer qu'il existe $g \in F^*$ tel que $g\big(f(e_i)\big) = h(e_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$. En déduire que $h = g \circ f$ et conclure.