Devoir Final 2

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Prenez soin de rédiger correctement les questions que vous savez faire !
L'épreuve dure 2 heure.

Exercice 1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considére la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-t & t-2 & t \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Pour quelles valeurs de t la matrice M_t est elle diagonalisable ?
3. On suppose $t = 2$. Calculer M_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On suppose $t = 1$. Montrer que M_1 est semblable à

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sont elles semblables ?

Indication: on pourra commencer par montrer que le polynôme caractéristique des matrices A et B peut s'écrire $-(X+2)(X^2-2X-1)$.

Problème. Autour du groupe de Heisenberg.
On considère le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$H_3(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que $H_3(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $H_3(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.
3. Montrer que tous ses éléments sont d'ordre infini.

4. Considérons l'application

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R}) \mapsto (x, y) \in (\mathbb{R}^2, +).$$

   (a) Montrer que π est un morphisme de groupes.

   (b) Montrer que π est surjective.

   (c) Calculer le noyau de π.

5. Le centre d'un groupe G, noté $Z(G)$, est défini comme

$$Z(G) = \{g \in G | gh = hg, \forall h \in G\}.$$

   (a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

   (b) Calculer $Z(G)$ pour $G = H_3(\mathbb{R})$.

6. On définit pour $t \in \mathbb{R}^*$, l'application

$$\delta_t : \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & tx & t^2 z \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, l'application δ_t est un automorphisme du groupe $H_3(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, il existe un automorphisme θ_t du groupe $(\mathbb{R}^2, +)$ tel que

$$\pi \circ \delta_t = \theta_t \circ \pi.$$

Exercice Bonus. Notons $C^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables. Soit $d : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de dérivation sur $C^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non-nul annulateur de d.