Rappels

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et u un endomorphisme de E. Supposons que le polynôme caractéristique P_u de u est scindé.

Définition

Soit λ une valeur propre de u de multiplicité algébrique $m_a(\lambda)$. On appelle **sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ** le sous-espace vectoriel

$$\mathcal{N}_\lambda = \ker\left((u - \lambda \mathrm{id}_E)^{m_a(\lambda)}\right).$$

1. Il s'agit d'un sous espace vectoriel de E stable par u de dimension $m_a(\lambda)$.
2. $\mathcal{N}_\lambda$ contient le sous-espace propre $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.
3. $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \sigma(u)} \mathcal{N}_\lambda$.
4. La projection π_λ de E sur $\mathcal{N}_\lambda$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\mu \in \sigma(u)\setminus\{\lambda\}} \mathcal{N}_\mu(u)$ est un polynôme en u. De plus, pour tout λ et μ deux valeurs propres distinctes de u,
$$\pi_\lambda \pi_\mu = \pi_\mu \pi_\lambda = 0.$$

De plus, si on note la restriction de u à $\mathcal{N}_\lambda$ par u_λ alors on a :

1. u_λ admet une seule valeur propre et cette valeur propre est λ.
2. Le polynôme caractéristique de u_λ est donné par $P_{u_\lambda}(X) = (\lambda - X)^{m_a(\lambda)}$.
3. Il existe une base B_λ de $\mathcal{N}_\lambda$ dans laquelle la matrice de u_λ s'écrit
$$T_\lambda = \mathrm{Mat}_{B_\lambda}(u_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & * & * & * \\ 0 & \lambda & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_{m_a(\lambda)} + N_\lambda,$$
avec N_λ une matrice triangulaire supérieure stricte (u_λ est trigonalisable).
4. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs où chaque bloc est une matrice triangulaire supérieure de la forme $T_\lambda = \lambda I_{m_a(\lambda)} + N_\lambda$, et N_λ est une matrice triangulaire supérieure stricte.

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?
2. Trouver les sous espaces caractéristiques de u.
3. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que $P^{-1}AP = T$.
4. Montrer que u est bijectif et donner u^{-1} comme un polynôme de u.
5. Trouver les puissances de $u^n, n \in \mathbb{N}$.
6. Soit F la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = (1, -2, 0)$ et G le plan vectoriel engendré par $v_2 = (1, -2, 1)$ et $v_3 = (1, -1, 1)$.
   (a) Montrer que F et G sont supplémentaires.
   (b) Exprimer la projection π_F de E sur F parallèlement à G comme polynôme de u. De même, pour la projection π_G de E sur G parallèlement à F.
   (c) Montrer que $d = 2\pi_F + \pi_G$ est diagonalisable.
   (d) Posons $n = u - d$. Calculer n^2.

Solution : (1) On calcule d'abord le polynôme caractéristique de u :

$$\begin{aligned} P_u(X) &= \begin{vmatrix} 4-X & 1 & -1 \\ -6 & -1-X & 2 \\ 2 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \underset{L_3 \curvearrowleft L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 4-X & 1 & -1 \\ -6 & -1-X & 2 \\ X-2 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &\underset{C_1 \curvearrowleft C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ -4 & -1-X & 2 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X)^2, \quad . \end{aligned}$$

En particulier, $\sigma_{\mathbb{R}}(u) = \{1, 2\}$. La valeur propre $\lambda = 1$ est double et $\lambda = 2$ est une valeur propre simple.

Le polynôme caractéristique de A est scindé et donc A est trigonalisable. En revanche, comme la valeur propre $\lambda = 2$ est simple et la valeur propre $\lambda = 1$ est double,

$$u \text{ est diagonalisable} \iff m_g(1) = m_a(1) = 2.$$

Nous devons donc calculer la dimension du sous espace propre E_1.

$(x, y, z) \in E_1$ si, et seulement si,

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut aussi à

$$\begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

de sorte que le sous espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par $x_1 = (1, -2, 1)$. Finalement, u n'est pas diagonalisable car $m_g(1) < m_a(1)$.

(3) Les sous espaces caractéristiques de u sont

$$\mathcal{N}_1 = \ker(u - \mathrm{id}_E)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2 = \ker(u - 2\mathrm{id}_E) = E_2.$$

D'abord, on calcule

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit alors que le noyau $\mathcal{N}_1 = \ker(u - \mathrm{id}_E)^2$ est le plan vectoriel d'équation $x = z$. Les vecteurs $x_1 = (1, -2, 1)$ et $x_2 = (1, -1, 1)$ forment une base de $\mathcal{N}_1$. On remarque que le sous espace propre E_1 est inclus strictement dans le sous espace caractéristique $\mathcal{N}_1$. De plus,

$$(u - \mathrm{id}_E)(x_2) = (1, -2, 1) = x_1.$$

La valeur propre 2 est simple et donc le sous espace caractéristique $\mathcal{N}_2 = \ker(u - 2\mathrm{id}_E)$ n'est rien d'autre que le sous espace propre E_2 associé à 2. Un vecteur (x, y, z) appartient à $\mathcal{N}_2$ si, et seulement si,

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à $y = -2x$ et $z = 0$. Finalement, le sous espace caractéristique $\mathcal{N}_2$ associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par $x_3 = (1, -2, 0)$.

(4) D'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton,

$$E = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2.$$

Donc la famille (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de u dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il suffit de prendre

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) D'après la question 1)

$$\det(u) = P_u(0) = 2.$$

Donc u est bijective. Le théorème de Cayley-Hamilton implique que

$$-u^3 + 4u^2 - 5u + 2\mathrm{id}_E = 0.$$

Ainsi, $u(u^2 - 4u + 5\mathrm{id}_E) = 2\mathrm{id}_E$ et

$$u^{-1} = \frac{1}{2}(u^2 - 4u + 5\mathrm{id}_E).$$

En language matriciel, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3).$$

Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -14 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 10 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) On peut aussi calculer les puissances successives de A en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton. En effet, pour $n = 3$ on a directement la formule

$$A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3.$$

Pour n quelconque on effectue la division euclidienne de X^n par $P_u(X)$ et on trouve qu'il existe a, b, c tels que

$$X^n = Q(X)P_u(X) + aX^2 + bX + c.$$

Comme 1 est racine double de $P_u(X)$ on obtient que

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ n = 2a + b. \end{cases}$$

De même, 2 est racine de de $P_u(X)$ et on a

$$2^n = 4a + 2b + c.$$

Il vient que

$$\begin{cases} a = 2^n - 1 - n \\ b = -2^{n+1} + 3n + 2 \\ c = 2^n - 2n \end{cases}$$

Finalement,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n + 2n & n & -2^n + 1 \\ -2^{n+1} - 4n + 2 & -2n + 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 2n & n & 1 \end{pmatrix}$$

(7)(a) On remarque que $F = \mathcal{N}_2$ et $G = \mathcal{N}_1$ et le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux nous permet de conclure.

(7)(b)&(c) Cherchons les projections π_F (respectivement π_G) de E sur F (respectivement G) parallèlement à G (respectivement F). D'abord, on a

$$X(2 - X) + (1 - X)^2 = 1$$

Ainsi

$$(\mathrm{id}_E - u)^2 + u(2\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{id}_E.$$

En particulier, tout $x \in E$ s'écrit

$$(\mathrm{id}_E - u)^2(x) + u(2\mathrm{id}_E - u)(x) = x$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a

$$\begin{cases} (\mathrm{id}_E - u)^2(x) \in \mathcal{N}_2 = F \\ u(2\mathrm{id}_E - u)(x) \in \mathcal{N}_1 = G \end{cases}.$$

Donc

$$\pi_F(x) = (\mathrm{id}_E - u)^2(x) \quad \text{et} \quad \pi_G(x) = u(2\mathrm{id}_E - u)(x).$$

Finalement,

$$\pi_F = (\mathrm{id}_E - u)^2 \quad \text{et} \quad \pi_G(x) = u(2\mathrm{id}_E - u).$$

On remarque que

$$\pi_F + \pi_G = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \pi_F\pi_G = \pi_G\pi_F = 0.$$

(7)(d) D'abord,

$$d = 2\pi_F + \pi_G = u^2 - 2u + 2\mathrm{id}_E.$$

Un calcul direct montre que

$$(d-1)(d-2) = (u - \mathrm{id}_E)^2 u(u - 2\mathrm{id}_E) = 0.$$

Ainsi d possède un polynôme annulateur scindé à racine simple et donc d est diagonalisable. De plus,

$$n = u - d = -u^2 + 3u - 2\mathrm{id}_E = -(u - \mathrm{id}_E)(u - 2\mathrm{id}_E)$$

En particulier

$$n^2 = (u - \mathrm{id}_E)^2(u - 2\mathrm{id}_E)^2 = 0.$$

Exemple

Soit u l'endomorphisme de E et $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons que P et P_u sont premiers entre eux. Alors $P(u)$ est inversible. En effet, d'après le théorème de Bezout, il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$AP + BP_u = 1.$$

Ainsi,

$$A(u)P(u) + B(u)P_u(u) = \mathrm{Id}_E.$$

Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_u(u)$ est l'endomorphisme nul. On en déduit que

$$A(u)P(u) = P(u)A(u) = \mathrm{Id}_E.$$

Donc $P(u)$ est inversible et son inverse est $A(u)$.

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. u est-il diagonalisable ? trigonalisable ?
2. L'endomorphisme u est-il bijectif ? Si oui donner son inverse comme polynôme de u.
3. Trouver les sous espaces caractéristiques de u.
4. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est la matrice triangulaire supérieure suivante :
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : (1) On cherche le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 3 \\ 5 & 3-X & 6 \\ -2 & -1 & -2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ 5 & 3-X & 3(X-1) \\ -2 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \quad C_3 \curvearrowright C_3 - 3C_1 \\ &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ -2 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \quad L_2 \curvearrowright L_2 + 3L_3 \\ &= (1-X)^3 \end{aligned}$$

Ainsi $\sigma_{\mathbb{R}}(u) = \{1\}$. La valeur propre $\lambda = 1$ est triple. Le polynôme caractéristique de u est scindé et donc u est trigonalisable. En revanche, u n'est pas diagonalisable. En effet,

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

équivaut à

$$\begin{cases} x+y+3z &= 0 \\ 5x+2y+6z &= 0 \\ -2x-y-3z &= 0 \end{cases}$$

ou encore $x = 0$ et $y = -3z$ de sorte que le sous espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par $v_1 = (0, -3, 1)$. Finalement, $m_g(1) < m_a(1)$.

(2) Par ailleurs, $\det(u) = P_u(0) = 1$ et donc u est inversible. De plus, grâce au théorème de Cayley-Hamilton on a

$$0 = P_A(A) = I - 3A + 3A^2 - A^3$$

Donc

$$I = A(3I - 3A + A^2) = (3I - 3A + A^2)A.$$

Finalement,

$$A^{-1} = 3I - 3A + A^2$$

et donc $u^{-1} = P(u)$ où $P(X) = 3 - 3X + X^2$.

(3) D'après la théorème de Cayley-Hamilton, $\mathcal{N}_1 = E$.

(4) Prenons pour v_1 le vecteur propre déjà trouvé ci-dessus. Cherchons $v_2 = (x, y, z)$ tel que $u(v_2) = v_2 + v_1$. Ceci équivaut à

$$\begin{cases} x + y + 3z &= 0 \\ 5x + 2y + 6z &= -3 \\ -2x - y - 3z &= 1 \end{cases}$$

ou encore $x = -1$ et $y = -3z + 1$. On peut prendre $v_2 = (-1, 1, 0)$. Puis on cherche $v_3 = (x, y, z)$ tel que $u(v_3) = v_3 + v_2$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x + y + 3z &= -1 \\ 5x + 2y + 6z &= 1 \\ -2x - y - 3z &= 0 \end{cases}$$

ou encore $x = 1$ et $y = -3z - 2$. On peut prendre $v_2 = (1, -2, 0)$.

On vérifie que (v_1, v_2, v_3) est une base de E. De plus, $u(v_1) = 0, u(v_2) = v_2 + v_1$ et $u(v_3) = v_3 + v_2$, de sorte que la matrice de l'endomorphisme u est le bloc de Jordan suivant :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

Voici une autre façon de faire la question précédente. On calcule d'abord

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Le noyau $\ker(u - \mathrm{id}_E)^2$ est la plan vectoriel d'équation $x + y + 3z = 0$. On prend un vecteur

$$v_3 \notin \ker(u - \mathrm{id}_E)^2.$$

Par exemple, $v_3 = (1, 0, 0)$. Ensuite on pose

$$v_2 = (u - \mathrm{id}_E)v_3 = (1, 5, -2)$$

et puis

$$v_1 = (u - \mathrm{id}_E)v_2 = (u - \mathrm{id}_E)^2 v_3 = (0, 3, -1)$$

qui est évidemment un vecteur propre de u. On montre que ces vecteurs forment une base de E. Par définition de ces vecteurs, la matrice de u dans cette base $(v_1, v_2, v_3$ est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Endomorphismes nilpotents

Définition

1. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$.
2. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice k si, et seulement si, $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$. Autrement dit, l'indice de nilpotence est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$.

- L'endomorphisme nul est nilpotent d'indice 1.
- L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est
$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
est nilpotent d'indice 2.
- L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est
$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
n'est pas nilpotent.
- L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et nilpotent d'indice 3.
- L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et nilpotent d'indice 2.
- Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et nilpotent d'indice 3. En effet,
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
et
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ et nilpotent d'indice 2. En effet,
$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition

Un endomorphisme u de E est nilpotent si, et seulement si, son polynôme caractéristique P_u est scindé et son spectre est réduit au singleton $\{0\} = \sigma(u)$. En particulier, l'indice de nilpotence est au plus égal à $n = \dim E$).

Démonstration : $\Longrightarrow$) Supposons que u est nilpotent d'indice k. Donc

$$(\det(u))^k = \det(u^k) = 0$$

et donc 0 est une valeur propre de u. De plus, on sait que $\sigma_{\mathbb{C}}(u)$ est l'ensemble des racines complexes du polynôme caractéristique P_u. Comme $P = X^k$ est un polynôme annulateur de u, si λ est une valeur propre de u alors

$$P(\lambda) = \lambda^k = 0$$

et donc $\lambda = 0$. Finalement $\sigma_{\mathbb{C}}(u) = \{0\}$ et le polynôme caractéristique de u s'écrit $P_u(X) = (-X)^n$ qui est scindé dans $\mathbb{K}$.

$\Longleftarrow$) Si P_u est scindé et $\sigma(u) = \{0\}$, alors $P_u(X) = (-X)^n$. Le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit alors

$$P_u(u) = (-1)^n u^n = 0$$

ce qui montre que u est nilpotent d'indice au plus n.

Corollaire

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.

Démonstration : Supposons qu'il existe une base dans laquelle la matrice N de u est triangulaire supérieure stricte. Alors $P_u(X) = \det(N - XI_n) = (-X)^n$. Le théorème de Cayley-Hamilton permet de conclure.

Réciproquement, si u est nilpotent, alors P_u est scindé. Donc il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure, avec sur la diagonale les valeurs propres de u. Mais u admet une seule valeur propre $\lambda = 0$. La matrice obtenue est ainsi triangulaire supérieure stricte.

Corollaire

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et nilpotent si, et seulement si, il est nul.

Démonstration Si u est nilpotent, $\sigma(u) = \{0\}$ donc u est diagonalisable si, et seulement si, $E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(u)} E_\lambda = E_0(u) = \ker(u)$, ou encore, u est l'endomorphisme nul.

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que u est nilpotent ? Est-il diagonalisable ?
2. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
3. Peut-on trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est la matrice triangulaire supérieure suivante :
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution : (1) On a

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi u est nilpotent d'indice 3. En particulier, u n'est pas diagonalisable. En revanche, il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.

(2) Cherchons une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte. On détermine d'abord le sous espace propre E_0. On a

$$(x,y,z) \in E_0 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut aussi à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 3z &=& 0 \\ 5x + 2y + 6z &=& 0 \\ -2x - y - 3z &=& 0 \end{array} \right.$$

ou encore $x = 0$ et $y = -3z$. Ainsi le sous espace propre associé à 0 est la droite vectorielle engendrée par $v_1 = (0, -3, 1)$.

De même, $\ker(u^2)$ est la plan d'équation $x + y + 3z = 0$. On remarque que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$. On complète v_1 par le vecteur $v_2 = (-1, 1, 0)$ pour obtenir une base de $\ker(u^2)$. Maintenant on complète par un vecteur $v_3 \notin \ker(u^2)$ par exemple $v_3 = (1, 0, 0)$. Ainsi on a

$$u(v_1) = 0, \quad u(v_2) = v_1, \quad u(v_3) = 2v_1 + v_2.$$

Donc la matrice de u dans cette base est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Prenons v_1 déjà trouvé. Cherchons v_2 tel que $u(v_2) = v_1$, c-à-d

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 3z &=& 0 \\ 5x + 2y + 6z &=& -3 \\ -2x - y - 3z &=& 1 \end{array} \right.$$

ou encore $x = -1$ et $y = -3z+1$. On peut prendre $v_2 = (-1, 1, 0)$. Puis on cherche v_3 tel que $u(v_3) = v_2$, c-à-d

$$\begin{cases} x + y + 3z & = & -1 \\ 5x + 2y + 6z & = & 1 \\ -2x - y - 3z & = & 0 \end{cases}$$

ou encore $x = 1$ et $y = -3z - 2$. On peut prendre $v_3 = (1, -2, 0)$.

On vérifie que (v_1, v_2, v_3) est une base de E. De plus, $Av_1 = 0, Av_2 = v_1$ et $Av_3 = v_2$, de sorte que la matrice de l'endomorphisme u est le bloc de Jordan suivant :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

Supposons que l'endomorphisme u de E est un nilpotent d'indice k. Si $x \notin \ker u^{k-1}$ alors la famille $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \cdots, u(x), x)$ est libre. En particulier, $k \leq \dim E$.

Démonstration : Comme u est nilpotent d'indice k, alors $\ker u^{k-1}$ n'est pas réduit au vecteur nul. Soit $x \notin \ker u^{k-1}$ et soit $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ des scalaires tels que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \cdots + \alpha_{k-1} u^{k-1}(x) = 0.$$

Appliquons u^{k-1} à cette identité. Vue que $u^i(x) = 0$ pour tout $i \geq k$, il vient que $\alpha_0 = 0$. Ensuite on applique u^{k-2} et on obtient $\alpha_1 = 0$ et ainsi de suite on montre que tous les α_j sont nuls.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence $n = \dim E$. Alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est une bloc de Jordan de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Comme u est nilpotent d'indice n, il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On sait que $(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \cdots, u(x), x)$ est libre et donc une base E. Dans cette base la matrice de u a la forme souhaitée.

Exemple

Refaire la question (3) de l'exemple précédent en utilisant la proposition ci-dessus.

Le noyau $\ker(u^2)$ est la plan vectoriel d'équation $x + y + 3z = 0$. On prend un vecteur

$$v_3 \notin \ker(u^2).$$

Par exemple, $v_3 = (1, 0, 0)$. Ensuite on pose

$$v_2 = u(v_3) = (1, 5, -2)$$

et puis

$$v_1 = u(v_2) = u^2(v_3) = (0, 3, -1)$$

qui est évidemment un vecteur propre de u. Ces vecteurs forment une base de E dans laquelle la matrice de u est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

Plus généralement, voici une méthode pour trigonaliser un endomorphisme nilpotent n d'indice de nilpotence k. Il est clair que

$$\ker n \subset \ker n^2 \subset \cdots \subset \ker n^k = E.$$

Alors on peut construire une base qui trigonalise u en procédant comme suit :

1. D'abord on choisit une base B_1 de $\ker n$;
2. si $\mathrm{Card}(B_1) < k$, on complète B_1 en une base B_2 de $\ker n^2$;
3. si $\mathrm{Card}(B_2) < k$, on complète B_2 en une base B_3 de $\ker n^3$;
4. On itère le procédé, jusqu'à obtenir une base B_k qui contient k vecteurs. Il y a au plus k étapes.
5. Par construction, la matrice de n dans cette base est triangulaire supérieure stricte, car si $x \in B_k \setminus B_{k-1}$, alors $n(x) \in \ker n^{k-1}$, et s'exprime donc en fonction des vecteurs de B_{k-1}.

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est nilpotente. Trouver une base dans laquelle la matrice de u est de le bloc de Jordan suivant :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = 0.$$

La matrice A est nilpotente d'indice maximal 3. En particulier, le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = -X^3$ et u admet une valeur propre $\lambda = 0$ triple. Un calcul direct montre que le sous-espace propre $E_0 = \ker u$ est la droite vectorielle engendrée par $v_1 = (1, 1, 1)$.

De même $\ker u^2$ est le plan d'équation $x = y$. On complète v_1 par le vecteur $v_2 = (1, 1, 0)$ pour obtenir une base de $\ker u^2$

Prenons un vecteur qui n'appartient pas à ce plan, par exemple $v_3 = e_1 = (1,0,0)$. On vérifie que (v_1, v_2, v_3) est une base de E. De plus, $u(v_1) = 0, u(v_2) = v_1$ et $u(v_3) = v_2$, de sorte que la matrice de l'endomorphisme u est de le bloc de Jordan suivant :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que la construction de cette base aurait pu être comme suit. D'abord on choisit un vecteur v_3 qui n'appartient pas à $\ker u^2$, puis on calcule $u(v_3) = u(e_1) = (1,1,0)$ et $u^2(e_1) = (1,1,1)$ qui est bien un vecteur propre de u. Finalement, on pose

$$\varepsilon_1 = u^2(e_1) = (1,1,1), \varepsilon_2 = u(e_1) = (1,1,0) \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 = (1,0,0).$$

Il est clair que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de E dans laquelle la matrice de l'endomorphisme u est le bloc de Jordan ci-dessus. La matrice de passage de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$P^{-1}AP = T$$

Proposition

Si u et v sont des endomorphismes nilpotents qui commutent, alors toute combinaison linéaire de u et v est nilpotente.

Démonstration : Puisque u et v commutent, on a pour tout entier N :

$$(au + bv)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} u^k v^{N-k}.$$

En particulier, si $N = 2n$, alors chaque terme $u^k v^{2n-k}$ est nul car si $k \leq n$, v^{2n-k} est nul, et si $k \geq n$, u^k est nul, donc $(au + bv)^{2n} = 0$ et ainsi $au + bv$ est nilpotent.

Remarque

La proposition n'est pas toujours vraie si u et v ne commutent pas. Par exemple, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont nilpotentes mais $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas car son carrée c'est la matrice identité.

La décomposition de Jordan-Chevalley

Dans certains livres et en particulier les livres de l'agrégation interne et externe on parle de décomposition **de Dunford**.

Théorème : la décomposition de Jordan-Chevalley

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors il existe un unique couple (d, n) tel que :

1. *d un endomorphisme diagonalisable ;*
2. *n un endomorphisme nilpotent ;*
3. *$u = d + n$;*
4. *d et n commutent, i.e. $d \circ n = n \circ d$;*
5. *les endomorphismes d et n sont des polynômes de l'endomorphisme u.*

Démonstration : (i) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de u et $m_a(\lambda_i)$ est la multiplicité algébrique λ_i. On sait que

$$E = \underset{1 \leq i \leq k}{\oplus} \mathcal{N}_{\lambda_i} \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_E)^{m_a(\lambda_i)}.$$

Notons π_i la projection de E sur $\mathcal{N}_{\lambda_i}$ parallèlement à $\underset{j \neq i}{\oplus} \mathcal{N}_{\lambda_j}(u)$. D'après le lemme des noyaux, chaque projection π_i s'écrit comme un polynôme en u. Posons

$$d = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \pi_i \quad \text{et} \quad n = u - d = \sum_{i=1}^{k} \pi_i (u - \lambda_i \mathrm{id}_E).$$

Autrement dit, pour tout $i = 1, \cdots, k$ et tout $x \in \mathcal{N}_{\lambda_i}$,

$$d(x) = \lambda_i x \quad \text{et} \quad n(u) = (u - \lambda_i \mathrm{id}_E) x.$$

Donc d est diagonalisable et n est nilpotent. De plus, d et n sont des polynômes de u, et donc ils commutent.

Pour montrer l'unicité de la décomposition supposons qu'il existe un autre couple (d', n') tel que

- $u = d' + n'$
- d' diagonalisable et n' nilpotent
- $d'n' = n'd'$.

Puisque d' commute avec n', il commute avec $u = d' + n'$ et donc avec d qui est par construction un polynôme en u. De la même façon on montre que n et n' commutent. Il vient que $v = d - d' = n' - n$ est à la fois diagonalisable et nilpotent Finalement $v = 0$, et donc $d = d'$ et $n = n'$.

Version matricielle

Théorème : la décomposition de Jordan-Chevalley

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d, n) de matrices où :

1. *d est une matrice diagonalisable ;*
2. *n est une matrice nilpotente ;*
3. *$A = d + n$;*
4. *d et n commutent, i.e. $dn = nd$;*
5. *les matrices d et n sont des polynômes de A.*

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice $J(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$?

- Si $x = 1$ alors
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = D + N.$$
De plus, la partie diagonale D et la partie nilpotente N commutent. La décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice J est donc $J = D + N$.
- En revanche, si $x \neq 1$ alors la matrice $J(x)$ admet deux valeurs propres distinctes et donc elle est diagonalisable. Ainsi sa décomposition de Jordan-Chevalley est $J = D + N$ avec $D = J(x)$ et $N = 0$.

Attention

Supposons que $x \neq 1$. Bien que
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'} = D' + N'$$
avec D' diagonalisable et N' nilpotente il ne s'agit pas de la décomposition de Jordan-Chevalley de $J(x)$, $x \neq 1$, car D' et N' ne commutent pas.

En particulier, une décomposition de la forme $A = D+N$ avec D diagonale et N triangulaire supérieure stricte n'est pas toujours la décomposition de Jordan-Chevalley de A. Ce n'est le cas que si *D et N commutent.*

Exemple

Quelle est la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = D + N.$$

De plus, la partie diagonale D et la partie nilpotente N commutent. La décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice J est $J = D + N$.

Exemple

Quelle est la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Ici aussi nous avons $J = D' + N'$ avec

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cependant, ce n'est pas la décomposition de Jordan-Chevalley de J car

$$D'N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici on remarque que J est diagonalisable et donc sa décomposition de Jordan-Chevalley est

$$J = D + N \quad \text{où} \quad D = J \quad \text{et} \quad N = 0.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice A est

$$d = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a d est diagonalisable, n est nilpotente d'indice 2 et $dn = nd$.

On retient que

En particulier, si $A = d + n$ est la décomposition de Jordan-Chevalley de A alors

1. *La partie diagonalisable d de A n'est pas diagonale en générale.*
2. *A est diagonalisable $\iff$ $A = d$ et $n = 0$.*
3. *A est nilpotente $\iff$ $A = n$ et $d = 0$*

Corollaire

Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u s'écrit

1. $Mat_B(u) = D + N$
2. $D = Mat_B(d)$ *une matrice diagonale,*
3. $N = Mat_B(n)$ *une matrice triangulaire supérieure stricte et*
4. D *et* N *commutent, i.e.* $DN = ND$.

Démonstration : Soient $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de u. Pour tout $i = 1, \cdots, k$, on choisit une base B_i du sous-espace caractéristique $\mathcal{N}_{\lambda_i}$ dans laquelle la matrice de $u_{|\mathcal{N}_{\lambda_i}}$ est triangulaire. Soit $B = (B_1, B_2, \cdots, B_k)$ la base de E obtenue en regroupant les bases B_i. Dans cette base B la matrice D de d est diagonale puisque pour chaque vecteur ε dans la base B Il existe un seul $i = 1, \cdots, k$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \pi_i(\varepsilon) & = & \varepsilon \\ \pi_j(\varepsilon) & = & 0 \quad \forall j \neq i \end{array}$$

et donc $d(\varepsilon) = \lambda_i \varepsilon$. De plus, toujours dans cette base B, la matrice N de n est diagonale par blocs, chaque bloc étant de taille $m_a(\lambda_i) = \dim \mathcal{N}_{\lambda_i}$. À l'intérieur de chaque bloc, la matrice correspondante, $\mathrm{Mat}_{B_i}(u - \lambda_i)_{|\mathcal{N}_{\lambda_i}}$ est triangulaire supérieure stricte par construction de B_i.

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. L'endomorphisme u est-il trigonalisable ?
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de u.
3. L'endomorphisme u est-il bijectif ?
4. Déterminer les sous espaces propres de u.
5. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
6. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. En déduire une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que $P^{-1}AP = T$.
7. Déterminer les sous espaces caractéristiques de u.
8. Trouver la décomposition de Jordan-Chevalley de u.

(1) Le polynôme caractéristique de u :

$$\begin{array}{rcl} P_u(X) & = & \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & X-2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} \quad L1 \curvearrowright L1 - L3 \\ & = & \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -1-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2 - 5X + 6) = (2-X)^2(3-X). \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de u est scindé et donc u est trigonalisabe.

(2) D'après 1), le spectre de u est $\sigma(u) = \{2, 3\}$. la valeur propre $\lambda = 2$ est double et la valeur propre $\lambda = 3$ est simple .

(3) On sait que $\det(u) = P_u(0) = 12 \neq 0$ et donc u est inversible.

(4) **Le sous espace propre** $E_3 = \ker(u - 3\mathbf{id}_E)$ **:** Un calcul simple montre que $u = (x, y, z) \in E_3$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Ainsi E_3 est la droite vectorielle engendrée par $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$.

Le sous espace propre $E_2 = \ker(u - 2\mathbf{id}_E)$ **:** Un calcul simple montre que $u = (x, y, z) \in E_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

Ainsi E_2 est la droite vectorielle engendrée par $\varepsilon_2 = (4, 3, 4)$.

(5) On en déduit que u n'est pas diagonalisable car $m_a(2) = 2 \neq m_g(2)$.

(6) Recherche d'une base qui trigonalise u : On complète $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ par un vecteur quelconque ε_3 por avoir une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple avec $\varepsilon_3 = (1, 0, 0)$.

$$\begin{cases} u(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1 \\ u(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 \\ u(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_1. \end{cases}$$

Ainsi la matrice de u dans cette base est

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il suffit de prendre P la matrice de passage de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Recherche des sous espaces caractéristiques de u. Comme la valeur propre 3 est simple le sous espace caractéristique

$$\mathcal{N}_3 = \ker(u - 3\mathrm{id}_E) = E_3 = \mathrm{vect}(\varepsilon_1).$$

La valeur propre 2 est double et donc le sous espace caractéristique associé est $\mathcal{N}_2 = \ker(u - 2\mathrm{id}_E)^2$. Or

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{N}_2 = \ker(u - 2\mathrm{id}_E)^2$ est le plan d'équation $3x + 4y - 6z = 0$. On remarque que $E_2 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_2$.

On sait que le sous espace caractéristique $\mathcal{N}_3$ et $\mathcal{N}_2$ sont complémentaires (grâce au lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton). Cherchons la projection π_3 de E sur $\mathcal{N}_3$ parallèlement à $\mathcal{N}_2$ et la projection π_2 de E sur $\mathcal{N}_2$ parallèlement à $\mathcal{N}_3$. Pour cela on remarque que $(X-2)^2-(X-1)(X-3)=1$ de sorte que

$$(u-2\mathrm{id}_E)^2-(u-\mathrm{id}_E)(u-3\mathrm{id}_E)=\mathrm{id}_E.$$

Ainsi, tout vecteur $x\in E$ s'écrit de façon unique

$$x=(u-2\mathrm{id}_E)^2(x)-(u-\mathrm{id}_E)(u-3\mathrm{id}_E)(x).$$

Comme $x_1=(u-2\mathrm{id}_E)^2(x)\in\mathcal{N}_3$ et $x_2=-(u-\mathrm{id}_E)(u-3\mathrm{id}_E)(x)\in\mathcal{N}_2$ on déduit que

$$\begin{aligned}\pi_3(x)&=(u-2\mathrm{id}_E)^2(x)\\ \pi_2(x)&=-(u-\mathrm{id}_E)(u-3\mathrm{id}_E)(x).\end{aligned}$$

Finalement, la décomposition de Jordan-Chevalley de u est $u=d+n$

où

$$\begin{aligned}d&=3\pi_3+2\pi_2=3(u-2\mathrm{id}_E)^2-2(u-\mathrm{id}_E)(u-3\mathrm{id}_E)\\ n&=u-d.\end{aligned}$$

En termes matriciels, $A=D+N$ où

$$\begin{aligned}D&=3(A-2I_3)^2-2(A-I_2)(A-3I_2)\\ &=3\begin{pmatrix}3&4&-6\\3&4&-6\\3&4&-6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&4&-6\\3&3&-6\\3&4&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&-6\\3&6&-6\\3&4&-4\end{pmatrix}\\ N&=A-D=\begin{pmatrix}-4&0&4\\-3&0&3\\-4&0&4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Cherchons une base dans laquelle la matrice de u est donnée par

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

On choisit une vecteur de ce plan qui n'appartient pas à E_2, par exemple, $\varepsilon_3=(2,0,1)$. Ensuite on pose $\varepsilon_2=(u-2\mathrm{id}_E)(2,0,1)=(-4,-3-4)$ que nous reconnaissons comme vecteur propre de u associé à la valeur propre 2. La base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ répond à la question.

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix}4&0&-1\\1&3&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$. *Mêmes questions que dans l'exemple précédent.*

Calculons le polynôme caractéristique de u :

$$\begin{aligned}
P_u(X) &= \begin{vmatrix} 4-X & 0 & -1 \\ 1 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 3-X & 3-X & -1 \\ 3-X & 1 & 2-X \end{vmatrix} \qquad (C_1 \curvearrowright C_1 + C_2 + C_3) \\
&= \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 0 & 3-X & 0 \\ 0 & 1 & 3-X \end{vmatrix} = (3-X)^3.
\end{aligned}$$

L'endomorphisme u admet une seule valeur propre $\lambda = 3$ qui est triple.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $(u - 3\mathrm{id}_E)^3 = 0$ et le sous espace caractéristique

$$\mathcal{N}_3 = E.$$

On en déduit que la décomposition de Jordan-chevalley :

$$u = d + n \quad \text{où} \quad d = 3\mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad n = u - 3\mathrm{id}_E$$

Ce qui se traduit pour la matrice A par :

$$A = D + N$$

où la partie diagonale est

$$D = 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et la partie nilpotente est

$$N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Recherche d'une base qui Trigonalise u : On a

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient que le sous-espace propre $E_3 = \ker(u - 3\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$. Posons $\varepsilon_1 = (1,1,1)$.

De même, le sous espace $\ker(u - 3\mathrm{id}_E)^2$ est le plan d'équation $x = y$. On complète ε_1 par $\varepsilon_2 = (1,1,0)$ pour avoir une base de $\ker(u - 3\mathrm{id}_E)^2$. On remarque que $(u - 3\mathrm{id}_E)\varepsilon_2 = \varepsilon_1$.

Finalement, on complète $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ par $\varepsilon_3 = (1,0,0)$. Il est clair que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E. On voit que $(u - 3\mathrm{id}_E)\varepsilon_3 = \varepsilon_1$

Finalement, la matrice de u dans cette base est le bloc de Jordan suivant :

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$P^{-1}AP = T$$

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisabe ?
3. Montrer que $n = f - \mathrm{id}_3$ est un endomorphisme nilpotent et préciser son indice de nilpotence.
4. Quelle est la décomposition de Jordan-Chevalley de f ?
5. Trouver une base de $\ker(n)$.
6. Soit w un vecteur qui n'appartient pas à $\ker(n)$. Posons $v = n(w)$. Montrer que (v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
7. Trouver une base dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

(1) $P_f(\lambda) = (1 - \lambda)^3$.

(2) E_1 est le plan d'équation $x - 3y - 4z = 0$. Ainsi f n'est pas diagonalisable car $m_g(1) = 2 < 3 = m_a(1)$.

(3) On a $(A - I)^2 = 0$ et donc f est nilpotent d'indice 2.

(4) $f = \mathrm{id}_3 + (f - \mathrm{id}_3)$ et donc il suffit de prende

$$d = \mathrm{id}_3 \quad \text{et} \quad n = f - \mathrm{id}_3.$$

En effet, d est diagonalisable, n est nilpotent et $dn = nd$.

(5) $\ker(n) = \ker(f - \mathrm{id}_3)$. Une base de $\ker(n)$ est $(3, 1, 0)$ et $(-4, 0, 1)$.

(6) Soit w un vecteur qui n'appartient pas à $\ker(n)$. Posons $v = n(w)$. Soit a, b des scalaires tels que $aw + bv = 0$. En appliquant n à cette identité on obtient

$$an(w) + bn(v) = an(w) + bn^2(w) = an(w) = 0.$$

Comme $v = n(w) \neq 0$ on déduit que $a = 0$. Ainsi $bv = 0$ et donc $b = 0$. Finalement, (v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

(7) Il suffit de choisir un w.

Exercice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de f.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisabe ?*
3. *Montrer que $n = f - id_3$ est un endomorphisme nilpotent et préciser son indice de nilpotence.*
4. *Quelle est la décomposition de Jordan-Chevalley de f ?*
5. *Trouver une base de $\ker(n)$.*
6. *Soit w un vecteur qui n'appartient pas à $\ker(n^2)$. Posons $v = n(w)$ et $u = n^2(w)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.*
7. *Quelle est la matrice de f dans cette base ?*
8. *Calculer A^{27}.*

Application I : calcul des puissances d'une matrice

On se donne $A \in M_n(\mathbb{K})$, et on cherche à calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Supposons que B est une matrice semblable à A, i.e.

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad A = PBP^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A^2 &= (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^2P^{-1} \\ &\vdots \\ A^p &= PB^pP^{-1} \quad (\forall p \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Cas où A est diagonalisable

Si A est diagonalisable alors on peut choisir $B = D$ une matrice diagonale. On a ainsi

$$\forall p \in \mathbb{N}\ , \quad A^p = PD^pP^{-1}$$

D^p étant obtenue en élevant à la puissance p chacun des coefficients de la diagonale.

Cas où A est trigonalisable

Si A est trigonalisable alors

1. *On peut choisir $B = D + N$ avec D une matrice diagonale, N est une matrice nilpotente et $DN = ND$. On a ainsi*
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad A^p = P(D+N)^p P^{-1}$$
2. *La formule du binôme de Newton s'applique car $DN = ND$:*
$$(D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k.$$
Puisque $N^k = 0$ pour k supérieur à l'indice de nilpotence de N.

Exemple

Soit a, b deux réels. Cherchons toutes les suites réelles (x_n) telles que
$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \quad \text{avec} \;\; x_1, x_0 \text{ deux réels donnés.}$$

Le cas particulier où $a = b = 1$ avec $x_0 = 0, x_1 = 1$ correspond à la célèbre suite **de Fibonacci** dont les premiers termes sont
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$
Posons
$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} \;,\; \forall n \geq 0.$$
Ainsi le problème est réduit à
$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n}^{A^n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$
Il suffit donc de calculer les puissances A^n avec
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique
$$P_A(X) = X^2 - aX - b.$$

1. Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$ alors A admet deux valeurs propres réelles distinctes :
$$\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2}$$
Dans ce cas, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Si $\Delta = a^2 + 4b < 0$ alors A admet deux valeurs propres complexes conjuguées distinctes :
$$\lambda_1 = \frac{a - i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{a + i\sqrt{-\Delta}}{2}$$
et A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (mais pas dans $\mathbb{R}$).
3. Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$ alors A admet une valeur propre réelle double $\lambda = \dfrac{a}{2}$ et A n'est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas A est semblable à un bloc de Jordan.

Premier cas : supposons que $\Delta > 0$.

Alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car admet deux valeurs propres réelles distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}$$

De plus, pour $i = 1, 2$ on a :

$$E_{\lambda_i} = \mathrm{vect}(u_i) \quad \text{avec} \quad u_i = (\lambda_i, 1)$$

(u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A. Posons

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ainsi

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Il vient que

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} & \lambda_2\lambda_1^{n+1} - \lambda_1\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n & \lambda_2\lambda_1^n - \lambda_1\lambda_2^n \end{pmatrix}$$

Comme $\lambda_1\lambda_2 = -b$

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} & b\lambda_2^n - b\lambda_1^n \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n & b\lambda_2^{n-1} - b\lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout $n \geq 2$ on a

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right) x_1 + \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \left(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}\right) x_0.$$

Par exemple si $a = 2$ et $b = 3$ alors $\Delta = 16$ et A admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$. Il vient que

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^{n+1} & 3(-1)^{n+1} + 3^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 3^n & 3(-1)^n + 3^n \end{pmatrix}$$

Finalement, pour tout $n \geq 2$ on a

$$x_n = \frac{1}{4} \left((-1)^{n+1} + 3^n\right) x_0 + \frac{1}{4} \left(3(-1)^n + 3^n\right) x_1.$$

En particulier, si $x_0 = x_1 = 1$ alors

$$x_n = \frac{1}{2}((-1)^n + 3^n).$$

Le cas particulier où $a = b = 1$

Dans ce cas,

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (le nombre d'or).}$$

Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^n - \lambda_1^n \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Finalement, si $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ alors

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_2^n - \lambda_1^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Il s'agit de la célèbre suite **de Fibonacci** dont les premiers termes sont

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

et comme

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

les termes sont tous entiers. On a donc besoin de nombres irrationnels pour exprimer des entiers naturels que sont les termes de cette suite.

Deuxième cas où $\Delta < 0$.

Est similaire au premier cas si on travaille dans $\mathbb{C}$. Le sous espace propre associé à $\lambda_i, i = 1, 2$ est la droite vectorielle engendrée par $u_i = (\lambda_i, 1)$. Alors (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A. La matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

où on a noté $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$. Comme dans le cas précédent :

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} & \lambda_2\lambda_1^{n+1} - \lambda_1\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n & \lambda_2\lambda_1^n - \lambda_1\lambda_2^n \end{pmatrix}$$

Comme $\lambda_1\lambda_2 = -b$

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} & b\lambda_2^n - b\lambda_1^n \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n & b\lambda_2^{n-1} - b\lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme les nombres a, b sont réels, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ et les coefficients de la matrices A^n sont aussi réels :

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \begin{pmatrix} 2\Im(\lambda_2^{n+1}) & b\Im(\lambda_2^n) \\ \Im(\lambda_2^n) & b\Im(\lambda_2^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout $n \geq 2$ on a

$$x_n = \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \left(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} \right) x_0 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\lambda_2^n - \lambda_1^n) x_1.$$

et $|\lambda_2|^2 = \lambda_1\lambda_2 = -b$, si les données x_0, x_1 sont réelles, les solutions restent réelles.

Finalement, pour tout $n \geq 2$ on a

$$x_n = \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \left(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} \right) x_0 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\lambda_2^n - \lambda_1^n) x_1.$$

Troisième cas : supposons que $\Delta = 0$.

Dans ce cas,

$$\lambda = \frac{a}{2} \quad \text{est valeur propre réelle double de } \ A.$$

Son sous espace propre E_λ est la droite vectorielle engendrée par $u = (\lambda, 1)$.

En prenant $v = (1, 0)$ la famille (u, v) est une base de E qui trigonalise A. Soit P la matrice de passage de la base canonique (u, v). On a :

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or le bloc de Jordan

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}.$$

De plus $DN = ND$ et $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. Ainsi

$$\begin{aligned} A^n = P(D^n + nD^{n-1}N)P^{-1} &= P \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (n+1)\lambda^n & -n\lambda^{n+1} \\ n\lambda^{n-1} & -(n-1)\lambda^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \geq 2$ on a :

$$x_n = -(n-1)\lambda^n x_0 + n\lambda^{n-1} x_1 = -(n-1)\left(\frac{a}{2}\right)^n x_0 + n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} x_1.$$

C'est une combinaison linéaire des deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ données par $\left(\left(\frac{a}{2}\right)^n\right)_n$ et $\left(n\left(\frac{a}{2}\right)^n\right)_n$.

Examinons le cas particulier important où $a = E$ et $b = -1$. Dans ce cas

$$\Delta = E^2 - 4.$$

Si $|E| > 2$ alors la matrice A admet deux valeurs propres distinctes

$$\lambda_1 = \frac{E - \sqrt{E^2 - 4}}{2} \ \text{ et } \quad \lambda_2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - 4}}{2}.$$

Dans ce cas, pour tout $n \geq 2$ on a

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}\right) x_0 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right) x_1.$$

Si $|E| < 2$ alors la matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \dfrac{E - i\sqrt{4-E^2}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{E + i\sqrt{4-E^2}}{2}$. Ces deux valeurs propres sont de modules 1. Dans ce cas, pour tout $n \geq 2$ on a

$$x_n = \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\left(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}\right)x_0 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right)x_1.$$

Si $|E| = 2$ alors la matrice A admet une valeur propres double $\lambda = \dfrac{E}{2}$. Dans ce cas, pour tout $n \geq 2$ on a

$$x_n = -(n-1)\lambda^n x_0 + n\lambda^{n-1}x_1 = -(n-1)\left(\frac{E}{2}\right)^n x_0 + n\left(\frac{E}{2}\right)^{n-1} x_1.$$

Avec le théorème de Cayley-Hamilton

Par la division euclidienne de X^n par $P_A(X) = X^2 - aX - b$,
il existe deux constantes α, β on a :

$$X^n = P_A(X)Q(X) + \alpha X + \beta.$$

Grâce au théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \alpha A + \beta I_2.$$

Il suffit de trouver α, β. Il y a plusieurs cas.

Si $\Delta \neq 0$ alors $P_A(X)$ a deux racines distinctes λ_1, λ_2.

$$\begin{aligned}\lambda_1^n &= \alpha\lambda_1 + \beta\\ \lambda_2^n &= \alpha\lambda_2 + \beta.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\alpha = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda_1\lambda_2^n - \lambda_2\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Comme $\lambda_1\lambda_2 = -b$ et $\lambda_2 - \lambda_1 = -\sqrt{\Delta}$ on a

$$\alpha = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{-\sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\left(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}\right)$$

Finalement, en tenant compte du fait que $a\lambda_i + b = \lambda_i^2$, on a

$$A^n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{-\sqrt{\Delta}}A + \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\left(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}\right)I_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{pmatrix}\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} & b\lambda_2^n - b\lambda_1^n\\ \lambda_2^n - \lambda_1^n & b\lambda_2^{n-1} - b\lambda_1^{n-1}\end{pmatrix}$$

Si $\Delta = 0$ alors pour trouver α, β on utilise le fait que $\lambda = a/2$ est racine double de $P_A(X)$:

$$\begin{aligned} \lambda^n &= \alpha\lambda + \beta \\ n\lambda^{n-1} &= \alpha. \end{aligned}$$

ou encore

$$\alpha = n\lambda^{n-1} \quad \text{et} \quad \beta = -(n-1)\lambda^n.$$

Finalement, on retrouve que

$$A^n = n\lambda^{n-1}A - (n-1)\lambda^n I_2 = \begin{pmatrix} (n+1)\lambda^n & -n\lambda^{n+1} \\ n\lambda^{n-1} & -(n-1)\lambda^n \end{pmatrix}$$