TD 3 – Espaces euclidiens

1. À travailler en classe

Exercice 1. On se donne E un espace euclidien, et $x, y \in E$. Montrer l'égalité :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

En donner une interprétation géométrique.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien et F un sev de E. Montrer que l'ensemble $\{\|x-y\|, y \in F\}$ admet un minimum et ce minimum est atteint en un unique vecteur $v \in F$ donné par $v = p_F(x)$, la projection orthogonale de x sur F.

Exercice 3. Soient E un espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 5. On considère l'espace $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

1. Justifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Soit f une fonction strictement positive sur $[a, b]$ on pose

$$\ell(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

   Montrer que $\ell(f) \geq (b-a)^2$. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 6. Soit E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$, on définit

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

1. φ est-elle un produit scalaire sur E ?
2. Montrer que la fonction ψ définit pour $f, g \in E$ par :

$$\psi(f, g) = f(0)g(0) + \varphi(f, g)$$

   définit un produit scalaire sur E.

Exercice 7. Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, mais pas forcément de dimension finie. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2$$

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$, donner l'ensemble $\mathcal{S}$ des vecteurs solutions de l'équation $\langle a, x \rangle = \lambda$ d'inconnue $x \in E$.

Exercice 9 (Gram-Schmidt). Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, construire une base orthonormée en utilisant le procédé de Gram-Schmidt à partir de la famille (u, v, w) définis par :

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, 1, 0)$$

Exercice 10. Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On se donne $u = (2, 1, 1, -1)$ et $v = (1, 1, 3, -1)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F
2. Donner un système d'équations cartésiennes de $F^\perp$
3. Donner la projection de $w = (1, 2, -2, 2)$ sur F et sur $F^\perp$
4. En déduire la distance de w à F

Exercice 11 (construction d'une base orthonormée). Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont deux vecteurs appartiennent au plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 12 (distance à un sous-espace). On considère $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de E défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

1. Déterniner une base orthonormée du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de E de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer $d(u, F)$, où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et φ définie par

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}\left({}^t AB\right)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.
3. Observer que les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
4. Établir que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}\left({}^t AA\right)}$$

et préciser les cas d'égalité.

2. À travailler chez soi : applications directes des définitions

Exercice 14 (exemple de produit scalaire). Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $b : E \times E \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$b(v_1, v_2) = (x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2) + (y_1 + z_1)(y_2 + z_2) + z_1 z_2 \qquad \text{pour } v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que b est bien un produit scalaire.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire. À partir de la base canonique, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ par le procédé de Gram-Schmidt pour le produit scalaire b.

Exercice 15. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On se donne $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et on pose :

$$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'\,.$$

Donner les conditions sur a, b, c, d pour que la fonction φ soit un produit scalaire sur E ?

Exercice 16. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit P le plan d'équation $2x+y-z+2 = 0$. Déterminer le supplémentaire orthogonal de P et donner la distance de $u = (3, 4, 5)$ à P.

3. À travailler chez soi : exercices d'entraînement

Exercice 17. Montrer que

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\left(1 - t^2\right) \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 18. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Soit H le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$2x + y - z = 0.$$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur non nul et orthogonal de H.
2. Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du projeté orthogonal sur H d'un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
3. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.
4. Déterminer une base orthonormée de H.

Exercice 19. Soit p une projection de E, un espace euclidien. Montrer l'assertion suivante

$$p \text{ est une projection orthogonale} \iff \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Exercice 20 (Gram-Schmidt, espace de polynômes). Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 21. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. On définit $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Montrer

$$I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$$

4. À travailler chez soi : exercices d'approfondissement

Exercice 22. Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Que dire en cas d'égalité ?

Exercice 23 (inégalité de Bessel). Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq k}$ un système orthonormé d'un espace euclidien E.

1. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{k} \langle x \mid u_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

   avec égalité si et seulement $x \in \mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_k\}$. *Indication :* remarquer que la famille des $v_i = \langle x, u_i \rangle u_i$ est orthogonale. Poser $y = x - \sum_i \langle x \mid u_i \rangle u_i$ et développer l'inégalité $\|y\|^2 \geq 0$ pour arriver au résultat.
2. En déduire une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 24 (déterminant de Gram). Soit E un espace euclidien et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On définit

$$G(x_1, \ldots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Montrer $(x_1, \ldots, x_n)$ liée $\iff \det G(x_1, \ldots, x_n) = 0$
2. On suppose que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre. On définit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ avec $\mathcal{B}$, une base orthonormée de F. Donner une expression de G en fonction de M et $M^\top$. En déduire que

$$\det G(x_1, \ldots, x_n) > 0$$

3. Soit $x \in E$. Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, x_1, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, \ldots, x_n)}}$$

Exercice 25. On se donne $n \geq 3$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que l'application φ définit comme suivant

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

   définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - (at^2 - bt - c))^2 dt$$

Exercice 26. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leq 4 \,\mathrm{tr}\left(A^2\right) \mathrm{tr}\left(B^2\right).$$