

## TD n°10

### Automate des résiduels et relations d’équivalence

**Exercice 1** Considérons l’ensemble  $X = \{1, 2, 3\}$ . Pour chacune des relations ci-dessous, préciser si elle est réflexive, symétrique ou transitive. Pour celles qui sont des relations d’équivalence, donner la partition de  $X$  correspondante.

1.  $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
2.  $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
3.  $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
4.  $R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$

**Exercice 2** Parmi les relations suivantes sur  $\Sigma^*$ , lesquelles sont des relations d’équivalence ? Donner la partition de  $\Sigma^*$  dans ce cas.

1.  $w \sim_1 w'$  ssi  $w'$  est le miroir de  $w$
2.  $w \sim_2 w'$  ssi  $|w|_a \equiv |w'|_a \pmod{2}$
3.  $w \sim_3 w'$  ssi  $w$  est un préfixe de  $w'$
4.  $w \sim_4 w'$  ssi  $w$  est un préfixe de  $w'$  ou  $w'$  est un préfixe de  $w$
5.  $w \sim_5 w'$  ssi  $w$  et  $w'$  sont de longueur au moins un et commencent par la même lettre

**Exercice 3** Pour chacun des langages suivants, donner l’automate de résiduels.

1.  $L_1 = a(a + b)^*$
2.  $L_2 = (a + b)^*a$
3.  $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ est pair} \}$
4.  $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ est pair} \}$
5.  $L_5 = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a + 2|u|_b \equiv 0 \pmod{3}\}$
6. le langage  $L_6$  des mots de longueur au moins 2 sur l’alphabet  $\{a, b\}$  pour lesquels la première lettre et la dernière lettre sont différentes
7.  $L_6 = a^+b^+$
8.  $L_7 = a(aa + bb)^*b$
9.  $L_8 = (ab + ba)^*a^*$

En partant des automates résiduels, que peut-on dire des relations d’équivalence définies par les langages ? Quelles sont les classes d’équivalence ?

**Exercice 4** Pour  $n \geq 1$ , considérons la famille de langages :

$$L_n = (a + b)^*a(a + b)^{n-1}.$$

Le langage  $L_n$  est ainsi constitué des mots dont la  $n$ -ième lettre en partant de la fin est un  $a$ . Quelle est la taille d’un plus petit AFND pour  $L_n$  ? Quelle est la taille du plus petit AFD pour  $L_n$  ? Reasonner sur les résidus pour répondre à cette dernière question.