Systèmes d'équations linéaires de Cramer

Soit le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $a_{ij}, b_j \in \mathbb{K}$, supposés connus, et les x_i sont les inconnus à chercher dans $\mathbb{K}$.

Ce système s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$AX = B$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, B est le vecteur colonne dont les coordonnées sont les b_j : ils représentent les données du problème, et où X est le vecteur colonne de coordonnées x_i qui est l'inconnue du problème.

Théorème :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\det A \neq 0$,
2. *la matrice A est inversible,*
3. *pour tout vecteur donné B, le système $AX = B$ admet une solution unique,*
4. *pour tout vecteur donné B, le système $AX = B$ admet au plus une solution,*
5. *pour tout vecteur donné B, le système $AX = B$ admet au moins une solution,*
6. *le système $AX = 0$ n'admet aucune solution autre que la solution triviale.*

Démonstration : Voir le chapitre sur les rappels d'algèbre linéaire.

Remarque

Si A n'est pas inversible alors, par linéarité, l'ensemble des solutions du système $AX = B$ est ou bien vide ou bien infinie.
En revanche, si A est inversible alors la solution est unique et est donnée par $X = A^{-1}B$.

Définition

Le système d'équations linéaires $AX = B$ est dit de Cramer si la matrice A est inversible.

Théorème :

Si le système $AX = B$ est de Cramer, alors il admet une solution unique et cette solution est donnée par :

$$x_k = \frac{\det A_k(B)}{\det A}, \qquad \textit{pour tout} \quad k = 1, \cdots, n$$

où $A_k(B)$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa kème colonne par le vecteur colonne B.

Notons que si $A = I$ alors

$$A_k(B) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_{k-1}, B, e_{k+1}, \cdots, e_n) = b_k.$$

ici $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration :

Comme A est inversible, le système $AX = B$ admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

De plus,

$$\det A \neq 0 \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{com}(A)) .$$

Donc pour $k = 1, \cdots, n$ on a

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{kj} b_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \Delta_{jk} b_j = \frac{\det A_k(B)}{\det A}.$$

ce qui est la formule souhaitée.

Exemple

Supposons que $n = 2$. Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & \alpha \\ cx & + & dy & = & \beta \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système de Cramer si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\det A_1(B)}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{\alpha d - \beta b}{ad - bc} \\ y & = & \dfrac{\det A_2(B)}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{a\beta - c\alpha}{ad - bc} \end{array}$$

Supposons que $n = 3$. Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{cccc} ax & +by & +cz = & \alpha \\ a'x & +b'y & +c'z = & \beta \\ a''x & +b''y & +c''z = & \gamma \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système de Cramer si, et seulement si,

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$x = \frac{\det A_1(B)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \beta & b' & c' \\ \gamma & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\det A_2(B)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha & c \\ a' & \beta & c' \\ a'' & \gamma & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

De plus,

$$z = \frac{\det A_3(B)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ a' & b' & \beta \\ a'' & b'' & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

Notons que si $\det A = 0$ et l'un des $\det A_k(B), k = 1, 2, 3$ est non nul alors le système n'a pas de solutions.

En revanche, si $\det A = \det A_1(B) = \det A_2(B) = \det A_3(B) = 0$ alors le système peut admettre une infinité de solutions comme il peut n'en admettre aucune.

Exemple

Soit

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & t & t^2 \\ 1 & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}^*.$$

Il est clair que

$$\det A(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & t & t^2 \\ 1 & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{vmatrix} = -1.$$

Donc le système $A(t)X = B(t)$ admet une unique solution $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Trouver le t qui minimise $z(t)$.

Comme $A(t)X = B(t)$ est un système de Cramer on peut appliquer la formule de Cramer pour trouver $z(t)$ sans résoudre le système entièrement. On a

$$z(t) = \frac{\det A_3(B)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & \frac{1}{t} \\ 1 & t^2 & \frac{1}{t^2} \end{vmatrix}}{-1} = t^2 + t - 1.$$

En étudiant la dérivée de cette fonction on voit que $z(t)$ atteint sa valeur minimale au point $t = -1/2$.

Exemples

Trouver les nombres réels x pour les quels la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

On calcule le déterminant :

$$\begin{aligned}
\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3+x & 3+x & 3+x \\ x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} \qquad (l_1 \curvearrowright l_1 + l_2 + l_3) \\
&= (3+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} \\
&= (3+x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 2-x \\ 2 & x-2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (3+x)(x - 1 + (x-2)^2) = (3+x)(x^2 - 3x + 3).
\end{aligned}$$

$A(x)$ est inversible si, et seulement si, $\det(A(x)) \neq 0$ si, et seulement si, $x \neq -3$.

Exemples

Calculer le déterminant de la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & x & 1 & -3 \end{pmatrix}$

On a :

$$\begin{aligned}
\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & x & 1 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad (l_2 \curvearrowright l_2 - l_1, \quad l_4 \curvearrowright l_4 - l_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout scalaire x, la matrice A n'est pas inversible.

Exemples

Trouver les réels x pour les quels les vecteurs

$$u_1 = (1,1,0,1),\ u_2 = (2,x,1,0),\ u_3 = (1,2,-1,1) \ \text{ et } \quad u_4 = (-1,0,-1,-3)$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Notons B la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On calcule le déterminant :

$$\begin{aligned}
\det_B(u_1,u_2,u_3,u_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad (l_2 \curvearrowright l_2 - l_1, \quad l_4 \curvearrowright l_4 - l_1) \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2(x-1).
\end{aligned}$$

La famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, $x \neq 1$.

Exemples

Soient a,b,c des nombres réels. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

Posons $s = a+b+c$ et $p = abc$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} s & a & b & c \\ s & 0 & b & c \\ s & b & 0 & c \\ s & b & c & 0 \end{vmatrix} \qquad (c_1 \curvearrowright c_1 + c_2 + c_3) \\
&= s \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & b & c \\ 1 & b & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Maintenant on remplace successivement L_4 par $L_4 - L_3$, puis L_3 par $L_3 - L_2$ et L_2 par $L_2 - L_1$:

$$\begin{aligned}
\Delta &= s\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ 0 & 0 & c & -c \end{vmatrix} \\
&= s\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ b & -b & 0 \\ 0 & c & -c \end{vmatrix} = -sp.
\end{aligned}$$

Exercice

Soient a, b, c, d des nombres réels. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 0 & b & c & d \\ a & b & 0 & c & d \\ a & b & c & 0 & d \\ a & b & c & d & 0 \end{vmatrix}$$

Posons $s = a + b + c + d$ et $p = abcd$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 0 & b & c & d \\ a & b & 0 & c & d \\ a & b & c & 0 & d \\ a & b & c & d & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} s & a & b & c & d \\ s & 0 & b & c & d \\ s & b & 0 & c & d \\ s & b & c & 0 & d \\ s & b & c & d & 0 \end{vmatrix} \quad (c_1 \curvearrowright c_1 + c_2 + \cdots + c_n) \\
&= s\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ 1 & 0 & b & c & d \\ 1 & b & 0 & c & d \\ 1 & b & c & 0 & d \\ 1 & b & c & d & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Maintenant on remplace successivement L_5 par $L_5 - L_4$, puis L_4 par $L_4 - L_3$, puis L_3 par $L_3 - L_2$ et L_2 par $L_2 - L_1$:

$$\begin{aligned}
\Delta &= s\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & -d \end{vmatrix} \\
&= s\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ b & -b & 0 & 0 \\ 0 & c & -c & 0 \\ 0 & 0 & d & -d \end{vmatrix} = sp.
\end{aligned}$$

Exercice

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des nombres réels. Calculer le déterminant

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

Solution : Posons $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $p = x_1 x_2 \cdots x_n$. On a

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} s & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ s & 0 & x_2 & \cdots & x_n \\ s & x_2 & 0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix} \quad (c_1 \curvearrowright c_1 + c_2 + \cdots + c_n) \\ &= s \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant on remplace L_i par $L_i - L_{i-1}$ successivement pout $i = n$ puis $i = n-1, \cdots, i = 2$:

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= s \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -x_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{n-1} & -x_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_n & -x_n \end{vmatrix} \\ &= s \begin{vmatrix} -x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x_2 & -x_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & x_{n-1} & -x_{n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & x_n & -x_n \end{vmatrix} = sp. \end{aligned}$$

Matrice compagnon

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p$ *un polynôme unitaire à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *On considère la matrice avec* $A \in M_p(\mathbb{K})$ *donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est appelée matrice compagnon de P. *Calculer* $\det(A - \lambda I_p)$, *pour tout scalaire* λ.

On a

$$\det(A-\lambda I_p) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_{p-1}-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ajoute à la première ligne L_1 la combinaison linéaire des autres lignes donnée $\lambda L_2 + \cdots + \lambda^{p-1} L_p$. Il vient que

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_p) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -P(\lambda) \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_{p-1}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-)^{p+2} P(\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^p P(\lambda). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\det(A-\lambda I_p) = (-1)^p P(\lambda) = (-1)^p(\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0).$$

Chapitre 5 : Réduction des endomorphismes 1 : diagonalisation

Introduction :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et u un endomorphisme de E.

Le calcul des puissances successives de u devient très rapidement compliqués et peu agréable.

On peut s'en rendre compte si on représente u par sa matrice dans une base quelconque de E.

En revanche, si on dispose d'une base de E dans laquelle la matrice représentant u est diagonale ou triangulaire les calculs de puissances de u se simplifient énormément.

Le but de ce chapitre est développer des méthodes permettant de trouver de telles bases.

Exemple

Supposons que N étudiants sont répartis en deux groupes A et B. Supposons que quotidiennement le tiers des étudiants du groupe A partent en groupe B et le quart des étudiant du groupe B partent en groupe A.

1. *Quelle est la répartition des étudiants entre les deux groupes après n jours ?*
2. *Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?*

Solution : Notons $a(n)$ le nombre d'étudiants du groupe A le $n$ème jour et $b(n)$ ceux du groupe B. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a(n) + b(n) = N.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a(n+1) &= \dfrac{2}{3}a(n) + \dfrac{1}{4}b(n) \\[2ex] b(n+1) &= \dfrac{1}{3}a(n) + \dfrac{3}{4}b(n) \end{cases} \qquad (S)$$

En écriture matricielle, le système (S) signifie que

$$\begin{pmatrix} a(n+1) \\ b(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi en posant

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix}$$

la solution du problème est

$$\begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \end{pmatrix} = A^n X_0.$$

Il suffit donc de calculer les puissances successives A^n de A.

Le calcul de A^2 montre que cette tâche, par un calcul direct, devient très vite peu commode :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/36 & 17/48 \\ 17/36 & 31/48 \end{pmatrix}$$

On a intérêt à faire autre chose !

Par contre, si on remarque que si
$$a(0) = 3 \quad \text{et} \quad b(0) = 4$$
alors le lendemain chaque groupe perd un étudiant et en gagne un et la situation est stable. Autrement dit,
$$AX_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
Ce qui montre le rôle spécial du vecteur $e'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On dit que e'_1 est un *vecteur propre* de la matrice A associé à la *valeur propre* 1.

De même, on remarque que si
$$a(0) = 1 \quad \text{et} \quad b(0) = -1$$
(il n'y a qu'un mathématicien pour penser qu'une salle peut contenir -1 étudiant) alors
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
Le vecteur $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 5/12.

Notons $B = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Comme
$$\det_B(e'_1, e'_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$
on déduit que (e'_1, e'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, pour tout $X_0 = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, il existe α, β des scalaires tels que
$$X_0 = \alpha e'_1 + \beta e'_2.$$
Les scalaires α et β se calculent à l'aide de l'inverse de la matrice de passage P de la base canonique à la base (e'_1, e'_2) formée de vecteurs propres de A. On a
$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Ainsi si $a(0) = a$ et $b(0) = b$ on a
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} a+b \\ 4a-3b \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} N \\ 4a-3b \end{pmatrix}$$
En particulier,
$$\begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \end{pmatrix} = A^n X_0 = \alpha A^n e'_1 + \beta A^n e'_2 = \alpha e'_1 + \beta (\frac{5}{12})^n e'_2.$$

Finalement,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a(n) & = & \dfrac{3N}{7} + \left(\dfrac{5}{12}\right)^n \dfrac{4a-3b}{7} \\ b(n) & = & \dfrac{4N}{7} - \left(\dfrac{5}{12}\right)^n \dfrac{4a-3b}{7} \end{array}\right.$$

En particulier, comme $(5/12)^n \to 0$ quand n tend vers l'infini,

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3N}{7} \\ \dfrac{4N}{7} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\ \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Ces calculs auraient pu être effectués avec les matrices :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5}{12} \end{pmatrix}}_{D}$$

On retient que

$$P^{-1}AP = D \qquad \textit{ou encore} \qquad A = PDP^{-1}$$

On dit que nous avons diagonalisé la matrice A. *Ceci équivaut à trouver une base de* $\mathbb{K}^2$ *formée de vecteurs propres de* A*, ce sont les vecteurs colonnes de la matrice* P*.*

Ce procédé, quand il est possible, facilite le calcul des puissance de A. En effet,

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ & \vdots & \\ A^n & = & PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 + 4\left(\dfrac{5}{12}\right)^n & 3 - 3\left(\dfrac{5}{12}\right)^n \\ 4 - 4\left(\dfrac{5}{12}\right)^n & 4 + 3\left(\dfrac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix} \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

En particulier,

$$A^nX_0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{3(a+b)}{7} + \left(\dfrac{5}{12}\right)^n \dfrac{4a-3b}{7} \\ \dfrac{4(a+b)}{7} - \left(\dfrac{5}{12}\right)^n \dfrac{4a-3b}{7} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Cherchons les puissances successives de la matrice suivante :

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ satisfait

$$Au = 2u.$$

En prenant $v = (2,1)$ la famille (u,v) est une base de E. Soit P la matrice de passage de la base canonique (u,v). On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct montre que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J \quad \textit{et donc} \quad A = P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

On dit que nous avons trigonalisé la matrice A.

Ce procédé, quand il est possible, facilite aussi le calcul des puissance de A. En remplaçant D par J dans le raisonnement de l'exemple précédent, on obtient

$$A^n \quad = \quad PJ^nP^{-1} = \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Or le bloc de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}.$$

De plus, les matrices D et N vérifient :

1. D et N commutent, i.e. $DN = ND$,
2. N est nilpotente, i.e. $N^2 = N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$.

Ainsi, la formule du binôme de Newton s'applique :

$$\begin{aligned} J^n = (D+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k \\ &= D^n + nD^{n-1}N = I + 2^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}(4+n) \\ -2^{n+1} & (-n+1)2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (5+n)2^n & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & (-n+5)2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice

Peut-on diagonaliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *? Et la matrice* A *de l'exemple précédent ?*

Solution : Il s'agit de savoir si on peut trouver une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de J. D'abord le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre 2, i.e. $Je_1 = 2e_1$. Cherchons les autres valeurs et vecteurs propres de J. Si $e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J alors e est non nul et il existe un scalaire λ tel que $Je = \lambda e$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} (2-\lambda)a + b &= 0 \\ (2-\lambda)b &= 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 2$ alors $a = b = 0$ ce qui contredit que e est non nul. Donc $\lambda = 2$, $b = 0$ et a est arbitraire. Ainsi J a une seule valeur propre $\lambda = 2$ et tout vecteur propre associé e est colinéaire à $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On ne peut pas trouver une base formée de vecteurs propres de J. Comme A est semblable à J on déduit que A n'est pas diagonalisable non plus (nous laissons les détailles au lecteur).

Valeurs propres, vecteurs propres et sous espaces propres

Dans ce qui suit, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

Définition

1. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **un vecteur propre de** u si x est *non nul et x et $u(x)$ sont colinéaires.*
2. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est **une valeur propre de** u s'il existe un vecteur *non nul* x de E tel que $u(x) = \lambda x$. Dans ce cas, on dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
3. On note $\sigma_{\mathbb{K}}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u dans $\mathbb{K}$. Cet ensemble s'appelle **le spectre de** u.
4. Si $\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(u)$, on appelle **sous espace propre associé à la valeur propre** λ le sous-espace vectoriel de E donné par
$$E_\lambda := \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E).$$

Pour des raisons de commodité, on posera, pour tout scalaire λ,

$$E_\lambda := \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E).$$

Ainsi

$$\lambda \quad \textit{est une valeur propre de } u \iff E_\lambda \neq \{0_E\}.$$

De plus,

si λ est une valeur propre de u alors $E_\lambda \setminus \{0_E\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à λ.

En effet, x est un vecteur propre de u associé à λ si, et seulement si,

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad u(x) = \lambda x = \lambda \mathrm{id}_E(x),$$

ce qui équivaut à,

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad (u - \lambda id_E)(x) = 0 \quad \text{ i.e. } \quad x \in E_\lambda \setminus \{0_E\}.$$