TD 9 – Fonctions de plusieurs variables

1. À travailler en classe

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,.$$

Montrer que f est bornée. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 2. Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont continues. Déterminer si elles convergent en $(0,0)$ et calculer la limite lorsque c'est le cas :

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+xy}, \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_4(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Etudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

Exercice 4. Montrer que la fonction $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Pour les deux fonctions suivantes, montrer que f admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$, mais que f n'est pas continue en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad\qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 6. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^y \quad (x>0), \qquad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = x\sin(x+y).$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Montrer que les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

   existent. Les calculer.
3. La fonction f est-elle de classe C^2 ?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^3y + \cos(xz)$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv, u - v)$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = f(t^2, t^4, e^t)$. Montrer que φ est dérivable. Pour tout nombre réel t, exprimer $\varphi'(t)$ au moyen des dérivées partielles de f.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = y^2 - x^3 + 3x$.

1. Calculer les dérivées partielles de f et trouver les points critiques de f.
2. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un point critique de f. Posons $a = f(x_0, y_0)$. Soit L la ligne de niveau a de f. Ecrire l'équation de la tangente à L au point (x_0, y_0).
3. Soit a un nombre réel.
   (a) Etudier la fonction $x \longmapsto x^3 - 3x + a$.
   (b) Dessiner les différentes allures de la ligne de niveau a de la fonction f.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 + xy - 1)$.

1. Que valent $f(y, x)$ et $f(-x, -y)$? Que peut-on en déduire sur les points critiques de f ?
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les extrema locaux de f.
4. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

Exercice 12. Etudier les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

(a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$, (b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
(c) $f(x, y) = xy(x + y - 3)$, (d) $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$.

Exercice 13. Etudier les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

(a) $f(x, y, z) = z^2(1 + xy) + xy$ (b) $f(x, y, z) = (x + y)e^{x+y-z^2}$.

Exercice 14. (Partiel 2022) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(0, 0) = 0 \text{ et par } f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0).$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, les calculer, puis montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x, y) = (x^2 + y^2)(f(x, y) - 2) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2)$.
   (a) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles à l'ordre 1 et à l'ordre 2.
   (b) Déterminer les points critiques de g.
   (c) Déterminer, parmi les points critiques, ceux qui sont des extrema locaux, et déterminer dans ce cas s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local.

2. À travailler chez soi : applications directes des définitions

Exercice 15. Soient N_1, N_2, N_∞ les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$N_1(x, y) = |x| + |y|, N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$$

Montrer que ces trois applications sont des normes. Pour chacune d'elles, décrire la boule unité centrée à l'origine et la représenter dans le plan.

3. À travailler chez soi : exercices d'entraînement

Exercice 16. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1, & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par :

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, & \text{si } x \neq y \\ f'(x), & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que F est continue.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$.

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de f.
2. Soit $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^{(x^x)}$. Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Pour tout nombre réel a, notons L_a la ligne de niveau a de la fonction f.

1. Trouver les points critiques de f.
2. Soit a un nombre réel. Supposons que L_a n'est pas vide et que $a \neq 0$ et $a \neq -8$. Montrer que la courbe L_a a une tangente en tout point.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) + 8 = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2$.
4. En déduire que la fonction f admet un minimum m et préciser les points (x,y) en lesquels ce minimum est atteint.
5. Montrer que les lignes de niveau de f sont des parties compactes de $\mathbb{R}^2$.

4. À travailler chez soi : exercices d'approfondissement

Exercice 20. Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = \min(x, y^2)$.

Exercice 21. Déterminer les fonctions de classe C^1 et solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = f(x\sin(y), xy^2, x+y^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = f\left(xye^{(x^2-y^2)}\right)\cdot$ Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g au moyen de f'.
2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $h(x,y) = \left(x + f(xy), \dfrac{y}{1+x^2}\right)\cdot$ Montrer que la fonction h est de classe C^1 et calculer la matrice jacobienne de h en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \geq 0$ on pose $f(t) = e^{-xt} \operatorname{sinc} t$ où sinc (lire *sinus cardinal*) est la fonction $t \mapsto \sin t/t$ prolongée par continuité en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,t)dt\,.$$

1. Expliciter une fonction $g_n(x,u)$ telle que :

$$u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} g_n(x,u)du\,.$$

2. Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. On pose :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

   Montrer que U est continue et expliciter $U(x)$ sous la forme d'une intégrale convergente.
4. Montrer que U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $U'(x)$.
5. Donner une expression de $U(x)$ pour $x > 0$ et en déduire la valeur de

$$U(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt\,.$$

Exercice 25.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que f s'annule en 0 si et seulement si il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xg(x)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer que $f'(0) = f(0) = 0$ si et seulement si il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 g(x)$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soient $a \in \mathbb{R}^2$ and $h \in \mathbb{R}^2$. On définit la fonction

$$g_h : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + th)$$

   Prouver que g_h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée en fonction de la différentielle de f. Montrer que

$$f(a+h) = f(a) + \int_0^1 df_{a+th}(h)ṭ$$

   En déduire que f s'annule en $a = (x_a, y_a)$ si et seulement si il existe deux fonctions continues $f_x, f_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x - x_a)f_x(x,y) + (y - y_a)f_y(x,y)$$