Application I : calcul des puissances d'une matrice

On se donne $A \in M_n(\mathbb{K})$, et on cherche à calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Supposons que B est une matrice semblable à A, i.e.

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad A = PBP^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^2P^{-1} \\ & \vdots & \\ A^p & = & PB^pP^{-1} \quad (\forall p \in \mathbb{N}). \end{array}$$

Cas où A est diagonalisable

Si A est diagonalisable alors on peut choisir $B = D$ une matrice diagonale. On a ainsi

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \quad A^p = PD^pP^{-1}$$

D^p étant obtenue en élevant à la puissance p chacun des coefficients de la diagonale.

Cas où A est trigonalisable

Si A est trigonalisable alors

1. *On peut choisir $B = D + N$ avec D une matrice diagonale, N est une matrice nilpotente et $DN = ND$. On a ainsi*

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad A^p = P(D+N)^p P^{-1}$$

2. *La formule du binôme de Newton s'applique car $DN = ND$:*

$$(D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k.$$

Puisque $N^k = 0$ pour k supérieur à l'indice de nilpotence de N.

$1/3$

$2/3$

3/3

Équations différentielles linéaires de premier ordre

Il s'agit des équations de la forme

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1}$$

où les coefficients a, b, supposés connus, sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; et x est une fonction inconnue de classe C^1 sur I.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Pour tout couple (t_0, x_0) de $I \times \mathbb{R}$ le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & a(t)x + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

admet une unique solution. Cette solution $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\varphi(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-\int_{t_0}^{s} a(u)du} ds \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Démonstration : Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$. Comme a est continue sur l'intervalle I alors la fonction

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$

est de classe C^1 sur I et sa dérivée est donée par

$$\forall t \in I, \quad A'(t) = a(t).$$

De plus $A(t_0) = 0$. De même, pour la fonction

$$k(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(u)du}ds$$

est de classe C^1, $\lambda(t_0) = 0$ et

$$\forall t \in I, \quad k'(t) = b(t)e^{-A(t)}.$$

Ainsi, la fonction φ qui s'écrit

$$\varphi(t) = \Big(x_0 + k(t)\Big) e^{A(t)}$$

est de classe C^1. De plus, $\varphi(t_0) = x_0$ et

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \Big(k'(t) + (x_0 + k(t))A'(t)\Big) e^{A(t)} \\
&= \Big(b(t)e^{-A(t)} + (x_0 + k(t))a(t)\Big) e^{A(t)} \\
&= b(t) + a(t)\varphi(t).
\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer l'unicité. Pour cela soit x une autre solution du problème de Cauchy (2). Posons $z = x - \varphi$. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} z'(x) &= x'(x) - \varphi'(t) \\ &= (a(t)y(t) + b(t)) - (a(t)\varphi(t) + b(t)) \\ &= a(t)z(t). \end{aligned}$$

Ainsi z est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} z' = a(t)z \\ z(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Or une solution de l'équation $z' = az$ est donnée par $u(t) = e^{A(t)}$. De plus, la fonction définie sur I par $v(t) = z(t)e^{-A(t)}$ est de classe C^1 et vérifie

$$\forall t \in I, \quad v'(t) = \Big(z'(t) - a(t)z(t)\Big)e^{-A(t)} = 0.$$

Il s'agit d'une fonction constante. Donc

$$v(t) = v(0) = z(0) = 0.$$

Autrement dit,

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \varphi(t).$$

Remarque Au cours de la démonstration on a utilisé plusieurs faits de façon implicite :

1. Soit x_p est une solution particulière de l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$. *Une fonction x est solution de cette équation si, et seulement si $z = x - u_p$ est solution de l'équation $z' = az$.* Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ s'écrit comme

$$x = x_h + x_p$$

où x_h désigne la solution générale de de l'équation $z' = az$ dont l'expression a été donnée aussi, à savoir

$$x_h = ke^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \ , \quad k \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble de toutes ces solutions est visiblement une droite vectorielle sur $\mathbb{R}$.

2. Ainsi, pour trouver la solution générale de l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$, il suffit de trouver une solution particulière.

Méthode de la variation de la constante

Il s'agit de chercher une solution de la forme

$$x_p = k(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Après dérivation

$$x_p' = \Big(a(t)k(t) + k'(t)\Big)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

En remplaçant dans l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ on trouve

$$x_p'(t) = \Big(a(t)k(t) + k'(t)\Big)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = a(t)x_p + b(t)$$

ce qui implique

$$k'(t) = b(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Ainsi, une solution particulière est donnée par

$$x_p = \Big(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(u)du}ds\Big)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

En conclusion, la démonstration du théorème est une méthode pratique et générale pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre $x' = a(t)x + b(t)$ et qui est de la forme

$$x(t) = \left(k + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(u)du}dt\right)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\ , \quad k \in \mathbb{R}$$

Pour trouver la solution du problème de Cauchy (2) il suffit de remplacer $x(t_0) = x_0$ ce qui implique que $k = x_0$.

Systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, (b_i)_{1\leq i\leq n}$ des fonctions continues sur I. Soit le système de n équations différentielles linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & + & b_2 \\ & & & & & & \vdots & & & & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & + & b_n \end{array}\right. \qquad (4)$$

Une solution de ce système est une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de fonctions de classe C^1 sur I vérifiant le système.

Ce système s'écrit sous la forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où l'inconnue est une fonction $X : I \to \mathbb{K}^n$ dérivable sur un intervalle I et les données du problème sont la fonction $B : I \to \mathbb{K}^n$ que nous supposons continue sur I et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce système peut être complété par un condition initiale de type

$$X(t_0) = X_0 \quad \text{pour un couple } (t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n \text{ donné.}$$

Théorème

Pour tout point $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ il existe une solution unique de l'équation $X'(t) = AX(t) + B(t)$ vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$.

Le système d'équations différentielles :

$$X'(t) = AX(t) \tag{5}$$

s'appelle le système sans second membre associé à (1).

Corollaire

1. *L'ensemble E_0 des solutions du système $X'(t) = AX(t)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.*
2. *La solution générale du système avec second membre $X'(t) = AX(t) + B(t)$ est de la forme*

$$X = X_p + X_h$$

où X_p est une solution particulière du système avec second membre et $X_h \in E_0$.

Rôle de la réduction des matrices

Cas particulier où A est diagonale :

Supposons que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des scalaires.
Le système correspondant est la famille d'équations

$$\begin{cases} x_1' & = & \lambda_1 x_1 + b_1 \\ & \vdots & \\ x_n' & = & \lambda_n x_n + b_n \end{cases}$$

que l'on sait résoudre séparément.

Cas particulier où A est triangulaire

Supposons que A est une matrice triangulaire, c-à-d

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2,3} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le système correspondant est

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \quad (E_1) \\ \vdots \\ x_{n-1}' = a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n \quad (E_{n-1}) \\ x_{n-1}' = a_{nn}x_n \quad (E_n) \end{cases}.$$

Dans ce cas,

1. on commence par résoudre l'équation (E_n) pour trouver x_n
2. ensuite on résout (E_{n-1}) pour trouver x_{n-1}
3. $\vdots$
4. enfin on résout (E_1) pour trouver x_1.

Cas où A est diagonalisable

On procède comme suit :

1. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ (ou de façon équivalente $AP = PD$).
2. Changement de variables $X(t) = PY(t)$. Ainsi
$$X'(t) = PY'(t)$$
Ainsi X est solution du système $X' = AX + B$ si, et seulement si,
$$PY' = APY + B = PDY + B$$
si, et seulement si,
$$Y' = DY + P^{-1}B$$
3. On trouve $Y(t)$ puis on prend $X = PY$.
Le calcul de P^{-1} n'intervient que dans le calcul de $P^{-1}B$. En particulier, on en n'a pas besoin pour les systèmes homogènes.

Cas où A est trigonalisable

On procède comme suit :

1. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que $A = PTP^{-1}$.
2. On pose $X(t) = PY(t)$. Ainsi X est solution du système $X' = AX + B$ si, et seulement si,
$$Y' = TY + P^{-1}B$$
3. On trouve $Y(t)$ puis on prend $X = PY$.

Exemple

Comme exemple d'illustration nous considérons le modèle suivant. Supposons que nous préparons des oeufs dur dans un bain d'eau chaude dont la température est noté $T_e(t)$ qui est une fonction du temps donnée. Comme l'oeuf n'est pas homogène puisque constitué du jaune et du blanc le transfére de température est différent dans ces deux constituants. Notons la température du jaune T_1 et celle du blanc T_2. Le transfére de température est gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} T_1'(t) = a(T_2 - T_1) \\ T_2'(t) = a(T_1 - T_2) + b(T_e - T_2), \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} T_1'(t) = -aT_1 + aT_2 \\ T_2'(t) = aT_1 - (a+b)T_2 + bT_e. \end{cases}$$

Supposons que l'eau du bain est à 100 degré à l'instant $t = 0$ que l'on arrête de chauffer et donc sa température décroît exponentiellement, soit $T_e(t) = 100e^{-Kt}$. Prenons par exemple $a = 2$ et $b = 3$ et comme condition initiales prenons $T_1(0) = 40$ et $T_2(0) = 45$. Ainsi le système devient :

$$\begin{cases} T_1'(t) = -2T_1 + 2T_2 \\ T_2'(t) = 2T_1 - 5T_2 + 3T_e \end{cases}$$

Le système sans second membre

$$\begin{cases} T_1'(t) = -2T_1 + 2T_2 \\ T_2'(t) = 2T_1 - 5T_2 \end{cases}$$

correspond à $T_e(t) = 0$ et donc à un bain glacé.

Ce système différentiel s'écrit sous la forme matricielle $X' = AX$ Où

$$X = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Réduction de A **:** Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+6).$$

Le sous espace propre $E_{-1} = \ker(A + I_2)$ est la droite vectorielle engendrée par

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le sous espace propre $E_{-6} = \ker(A + 6I_2)$ est la droite vectorielle engendrée par

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a donc diagonalisé la matrice A est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Donc

$$X' = AX \iff Y' = DY.$$

Notons $u(t)$, $v(t)$ les coordonnées de $Y(t)$. Elles sont solutions du système

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = -6v \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = ae^{-t} \\ v(t) = be^{-6t} \end{cases}$$

avec a, b des scalaires.
Nous déduisons que toute solution du système $X' = AX$ est de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = PY = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae^{-t} + be^{-6t} \\ ae^{-t} - 2be^{-6t} \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Pour trouver la solution du système sans second membre avec les conditions initiales $T_1(0) = 40$ et $T_2(0) = 45$ il suffit de prendre $t = 0$ dans la solution générale trouvée ci-dessus. Il vient que

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2a + b \\ a - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 45 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $a = 25$ et $b = -10$ soit la solution

Remarque

$$\begin{pmatrix} 2a + b \\ a - 2b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = PY(0)$$

Exemple

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & 5x_1 - x_2 \\ x_2'(t) & = & 4x_1 + x_2. \end{array}\right.$$

Écrivons le système sous forme matricielle, $X'(t) = AX(t)$ où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

On montre que le sous espace propre associé à la valeur propre 3 est la droite vectorielle engendrée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas diagonalisable. Elle est cependant trigonalisable car P_A est scindé.

Pour la trigonaliser on résout l'équation

$$(A-3I)v = v_1.$$

On trouve que la vecteur que $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient. Ainsi on a trigonalisé la matrice A :

$$P^{-1}AP = T \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Notre système équivaut à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & PY \\ Y' & = & TY \end{array} \right.$$

Le système $Y' = TY$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcc} y_1' & = & 3y_1 + y_2 \\ y_2' & = & 3y_2 \end{array} \right.$$

La seconde équation a pour solution générale

$$y_2(t) = k_2 e^{3t} \ , \ k_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la première équation devient

$$z' = 3z + k_2 e^{3t}.$$

On remarque que

$$z_p(t) = k_2 t e^{3t}$$

est une solution évidente.
La solution générale de l'équation homogène associée, $z' = 3z$ a pour solution générale

$$z = k_1 e^{3t}.$$

Ainsi la solution du système triangulaire est donnée par

$$\begin{cases} y_1(t) = (k_1 + k_2 t)e^{3t} \\ y_2(t) = k_2 e^{3t} \end{cases}$$

avec k_1, k_2 deux constantes réelles.
Finalement, la solution du système $X' = AX$ est

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_1 + k_2 t)e^{3t} \\ k_2 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2 t)e^{3t} \\ (2k_1 - k_2 + 2k_2 t)e^{3t} \end{pmatrix}$$

Pour trouver la solution du système sans second membre avec les conditions initiales

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

on prend $t = 0$ dans la solution générale trouvée ci-dessus. Il vient que

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = X(0) = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_1 - k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit,

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ 2x(0) - y(0) \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour $x(0) = 40$ et $y(0) = 45$ on trouve $k_1 = 40$ et $k_2 = 35$. Finalement la solution générale est donnée par

$$X(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (1+2t)e^{3t} & -te^{3t} \\ 4e^{3t} & (e^{-t}+4)1-2t)e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

Exemple

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & 12x - 10y + 5z \\ y' = & 10x - 8y + 5z \\ z' = & -10x + 10y - 3z. \end{array}\right.$$

Ce système différentiel s'écrit sous la forme matricielle

$$X' = AX$$

Où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 12 & -10 & 5 \\ 10 & -8 & 5 \\ -10 & 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Réduction de A

Le polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(\lambda+3).$$

Le sous espace propre $E_{-3} = \ker(A + 3I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le sous espace propre $E_{-3} = \ker(A - 2I_3)$ est le plan vectoriel engendré par

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi A est diagonalisable.

Il vient que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Donc

$$X' = AX \iff Y' = DY.$$

Notons $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ les coordonnées de $Y(t)$. Elles sont solutions du système

$$u' = -3u, \quad v' = 2v \quad \text{et} \quad w' = 2w.$$

Ainsi, la solution générale s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = ae^{-3t}, \quad v(t) = be^{2t} \quad \text{et} \quad w(t) = ce^{2t}$$

avec a, b, c des scalaires.

Nous déduisons que toute solution du système $X' = AX$ est de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ X(t) = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-3t} \\ be^{2t} \\ ce^{2t} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{r} ae^{-3t} + be^{2t} \\ ae^{-3t} + ce^{2t} \\ -ae^{-3t} - 2be^{2t} + 2c \end{array} \right.$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas suivants, déterminer l'unique solution du système telle que

- $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 2$ (sans calculs),
- $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 1$.

On remarque que la condition initiale ici $X_0 = (0, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. Il est évident que la fonction $X(t) = e^{2t}X_3$ est solution du système. De plus, $X(0) = X_3$. Il s'agit donc de l'unique solution vérifiant cette condition initiale, merci au théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

Pour la deuxième condition initiale on prend $t = 0$ dans la solution gńerale et on résoud le système.

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1' = & x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = & 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 \\ x_3' = & 6x_1 - 7x_2 + 7x_3. \end{array} \right.$$

Ce système différentiel s'écrit sous la forme matricielle

$$X' = AX$$

Où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Réduction de A

Le polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = (1+\lambda)^2(3-\lambda).$$

Le sous espace propre $E_{-3} = \ker(A - 3I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le sous espace propre $E_{-1} = \ker(A + I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi A n'est pas diagonalisable. Elle est cependant trigonalisable car P_A est scindé.

Pour trouver une base qui trigonalise A on complète (v_1, v_2) par un vecteur v_3 vérifiant

$$f(v_3) = v_2 - v_3.$$

Ce qui équivaut à résoudre le système :

$$(A+I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore,

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a - 3b + 4c & = & 1 \\ 6a - 7b + 8c & = & 1 \end{array}\right.$$

ou encore,

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a - 3b + 4c & = & 1 \\ b - 2c & = & -1 \end{array}\right.$$

Donc on peut prendre

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que (v_1, v_2, v_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car

$$\det_B(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \text{ où } B \text{ est la base canonique}$$

Ainsi, avec les matrices suivantes

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on a

$$A = PTP^{-1}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
Donc

$$X' = AX \iff Y' = TY.$$

Le système $Y' = TY$ équivaut à ce que les coordonnées de Y vérifient :

$$\begin{cases} y_1' &= 3y_1 \\ y_2' &= -y_2 + y_3 \\ y_3' &= -y_3. \end{cases}$$

Nous résolvons d'abord la dernière équation dont la solution générale est de la forme $y_3(t) = \alpha_3 e^{-t}, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Ainsi la deuxième équation devient

$$y_2' = -y_2 + \alpha_3 e^{-t}$$

dont la solution générale est de la forme $y_2(t) = (\alpha_2 + \alpha_3 t)e^{-t}, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. La solution générale de la première équation est de la forme
$y_1(t) = \alpha_1 e^{3t}, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Nous déduisons que toute solution du système $X' = AX$ est de la forme :

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{3t} \\ (\alpha_2 + \alpha_3 t)e^{-t} \\ \alpha_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \alpha_1 e^{3t} + (\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_3 t)e \\ 2\alpha_1 e^{3t} + (2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_3 t) \\ 2\alpha_1 e^{3t} + (\alpha_2 + \alpha_3 t)e^{-t} \end{array} \right.$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Merci et à bientôt