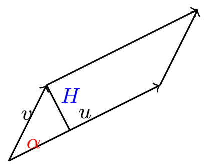
Les déterminants (4 séances)

1. Introduction : les déterminants en dimension 2 et 3. Formes multilinéaires.
2. Formes n-linéaires dans un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Déterminant et changement de base.
3. Déterminant d'une matrice et déterminant d'un endomorphisme. Opérations élémentaires et déterminant.
4. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Applications : rang d'une famille de vecteurs, caractérisation de l'inverse, formules de Cramer.

Les déterminants : Introduction, déterminants 2×2

Soit E le plan euclidien orienté usuel et u, v deux vecteurs de E.

- Soit P le parallélogramme engendré par u et v :



- Notons α l'angle orienté entre u et v, $\|u\|$ est longueur de u et $\|v\|$ celle de v.
- Notons $\mathcal{A}(u,v)$ l'aire algébrique de P. On sait que :

$$\begin{array}{rcl} |\mathcal{A}(u,v)| & = & \|u\| \cdot H \quad \text{(produit d'un côté de } P \text{ par la hauteur relative à ce côté)} \\ & = & \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\alpha \end{array}$$

On vérifie que $(u,v) \mapsto \mathcal{A}(u,v)$ est

1. linéaire par rapport à u :

$$\begin{array}{rcl} \forall (u,v) \in E^2 \ , \quad \mathcal{A}(\lambda u, v) & = & \lambda \mathcal{A}(u,v) \\ \forall (u_1,u_2,v) \in E^3 \ , \quad \mathcal{A}(u_1+u_2, v) & = & \mathcal{A}(u_1,v) + \mathcal{A}(u_2,v) \end{array}$$

2. linéaire par rapport à v :

$$\begin{array}{rcl} \forall (u,v) \in E^2 \ , \quad \mathcal{A}(u, \lambda v) & = & \lambda \mathcal{A}(u,v) \\ \forall (u,v_1,v_2) \in E^3 \ , \quad \mathcal{A}(u, v_1+v_2) & = & \mathcal{A}(u,v_1) + \mathcal{A}(u,v_2). \end{array}$$

On dit que $(u,v) \mapsto \mathcal{A}(u,v)$ est *une forme bilinéaire.* De plus,

$$\begin{array}{rcl} \forall u \in E \ , \quad \mathcal{A}(u,u) & = & 0 \\ \forall (u,v) \in E^2 \ , \quad \mathcal{A}(v,u) & = & -\mathcal{A}(u,v) \end{array}$$

On dit que $(u,v) \mapsto \mathcal{A}(u,v)$ est *une forme bilinéaire alternée.*

Remarque

Rappelons que le produit scalaire de u et v est défini par une formule similaire :

$$\mathcal{B}(u,v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha.$$

L'application $(u,v) \mapsto \mathcal{B}(u,v)$ est bilinéaire mais pas alternée. Elle est en fait positive définie :

$$\mathcal{B}(u,u) = \|u\|^2 \geq 0 \text{ avec égalité si et seulement si } \quad u = 0.$$

Le produit scalaire s'exprime en terme des coordonnées des vecteurs u et v. Plus explicitement, soit $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E.

$$\text{Si } u = ae_1 + be_2 \text{ et } v = ce_1 + de_2 \text{ alors } \quad \mathcal{B}(u,v) = ac + bd.$$

On voit que $\mathcal{B}(u,u) = a^2 + b^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $a = b = 0$.

Nous avons une formule similaire pour $\mathcal{A}(u,v)$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}(u,v) & = & \mathcal{A}(ae_1 + be_2, v) \\
& = & a\mathcal{A}(e_1, v) + b\mathcal{A}(e_2, v) \\
& = & a\mathcal{A}(e_1, ce_1 + de_2) + b\mathcal{A}(e_2, ce_1 + de_2) \\
& = & ac\mathcal{A}(e_1, e_1) + ad\mathcal{A}(e_1, e_2) + bc\mathcal{A}(e_2, e_1) + bd\mathcal{A}(e_2, e_2) \\
& = & ad\mathcal{A}(e_1, e_2) + bc\mathcal{A}(e_2, e_1) \\
& = & ad - bc
\end{array}$$

La quantité $\mathcal{A}(u,v)$ s'appelle *le déterminant de* (u,v) *dans la base* B et se note $\det_B(u,v)$. Il s'agit d'une forme bilinéaire alternée sur le plan vectoriel E. Une notation pratique du déterminant, qui met en évidence le rôle des coordonnées des vecteurs u et v, est

$$\det_B(u,v) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Conclusion

Finalement pour définir $\det_B(u,v)$ on n'a pas besoin d'être dans un plan euclidien ni que B soit une base orthonormée. En effet,

Définition :

Soit $B = (e_1, e_2)$ une base d'un espace vectoriel E. On définit le déterminant de deux vecteurs u et v relativement à la base B par

$$\det_B(u,v) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

où la matrice $M(u,v,B)$ de (u,v) dans la base B est $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que l'application $(u,v) \mapsto \det_B(u,v)$ est une forme bilinéaire alternée. De plus,

$$\det_B(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Aussi, toute forme bilinéaire alternée f sur E est proportionnelle au $\det\limits_{B}$. En effet,

$$\begin{array}{rcl}
f(u,v) & = & f(ae_1+be_2,v) \\
 & = & af(e_1,v)+bf(e_2,v) \\
 & = & af(e_1,ce_1+de_2)+bf(e_2,ce_1+de_2) \\
 & = & acf(e_1,e_1)+adf(e_1,e_2)+bcf(e_2,e_1)+bdf(e_2,e_2) \\
 & = & adf(e_1,e_2)+bcf(e_2,e_1) \\
 & = & (ad-bc)f(e_1,e_2)
\end{array}$$

En conclusion, $\det\limits_{B} : (u,v) \mapsto \det\limits_{B}(u,v)$ est l'unique *forme bilinéaire alternée sur E* qui vérifie

$$\det_{B}(e_1,e_2)=1$$

De plus, elle détermine toutes les autres formes bilinéaires alternées sur E.

Déterminant d'une matrice 2×2

Il est naturel de définir le déterminant de la matrice $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ comme étant le déterminant de ses vecteurs colonnes

$$C_1=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad C_2=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$, de sorte que

$$\det(A):=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

Le but de ce chapitre est de généraliser cette notion de déterminant à des espaces de dimension supérieure.

Les déterminants en dimension 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $B=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E. On cherche une application

$$\begin{array}{rcl}
f : E^3 & \to & \mathbb{K} \\
(u,v,w) & \mapsto & f(u,v,w)
\end{array}$$

qui soit *tri-linéaire* et *alternée* . Ici f est tri-linéaire signifie qu'elle est linéaire par rapport à chacun des vecteurs quand on fixe les deux autres :

$$\begin{array}{rcl}
\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall(u,v,w)\in E^3,\ f(\lambda u,v,w) & = & \lambda f(u,v,w)=f(u,\lambda v,w)=f(u,v,\lambda w) \\
\forall(u_1,u_2,v,w)\in E^4\ ,\ f(u_1+u_2,v,w) & = & f(u_1,v,w)+f(u_2,v,w) \\
\forall(u,v_1,v_2,w)\in E^4\ ,\ f(u,v_1+v_2,w) & = & f(u,v_1,w)+f(u,v_2,w) \\
\forall(u,v,w_1,w_2)\in E^4\ ,\ f(u,v,w_1+w_2) & = & f(u,v,w_1)+f(u,v,w_2).
\end{array}$$

Le fait que f soit alternée signifie que

$$f(u,v,w)=0 \quad \text{si, et seulement si, deux vecteurs parmi les trois sont identiques.}$$

Dans ce cas, f change seulement de signe si on permute deux vecteurs parmi les trois :

$$\begin{array}{rcl}\forall(u,v,w)\in E^3,\ f(v,u,w) & = & -f(u,v,w)\\ \forall(u,v,w)\in E^3,\ f(u,w,v) & = & -f(u,v,w)\\ \forall(u,v,w)\in E^3,\ f(w,v,u) & = & -f(u,v,w).\end{array}$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl}\forall(u,v,w)\in E^3,\ f(v,w,u) & = & f(u,v,w)\\ \forall(u,v,w)\in E^3,\ f(w,u,v) & = & f(u,v,w).\end{array}$$

Écrivons les vecteurs u,v,w dans la base B :

$$u=\sum_{i=1}^{3}a_ie_i\ ,\ v=\sum_{i=1}^{3}b_ie_i\ ,\ w=\sum_{i=1}^{3}c_ie_i$$

Autrement dit, la matrice des vecteurs u,v,w dans la base B est donnée par

$$M(u,v,w,B)=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}.$$

Maintenant, grâce à la multi-linéarité de f,

$$\begin{array}{rcl}f(u,v,w) & = & f(\sum_{i=1}^{3}a_ie_i,v,w)\\ & = & \sum_{i=1}^{3}a_if(e_i,v,w).\end{array}$$

Toujours, grâce à la multi-linéarité de f, en utilisant $v=\sum_{j=1}^{3}b_je_j$, puis $w=\sum_{k=1}^{3}c_ke_k$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}f(u,v,w) & = & \sum_{i=1}^{3}a_if(e_i,\sum_{j=1}^{3}b_je_j,w)\\ & = & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_jf(e_i,e_j,w)\\ & = & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_jf(e_i,e_j,\sum_{k=1}^{3}c_ke_k)\\ & = & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}a_ib_jc_kf(e_i,e_j,e_k)\end{array}$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les applications de $\{1,2,3\}$ sur lui même. Se donner trois éléments i,j,k compris entre 1 et 3 revient à se donner un élément $\sigma \in \mathcal{F}$ donné par $\sigma(1)=i, \sigma(2)=j, \sigma(3)=k$. À priori la somme ci-dessus contient 27 éléments. En fait, non. Comme f est alternée,

$$f(e_i,e_j,e_k) = f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},e_{\sigma(3)}) \neq 0 \iff \sigma \quad \text{est bijective.}$$

Ainsi la somme ci-dessus, contient seulement 6 éléments correspondants aux permutations de $\mathcal{S}_3$. Ainsi

$$f(u,v,w) \quad = \quad f(e_1,e_2,e_3)(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2)$$

Si en plus on demande que $f(e_1,e_2,e_3)=1$ alors

$$f(u,v,w) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2$$

Réciproquement, on vérifie aisément que l'application

$$(u,v,w) \mapsto a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2$$

est une forme trilinéaire. En effet, en fixant v et w, il nous reste une forme linéaire en u. Les deux autres cas sont similaires. Cette forme trilinéaire est alternée. En effet, si $u=v$ alors les a_i et les b_i coïncident et donc

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2 = a_1a_2c_3+a_2a_3c_1+a_3a_1c_2-a_2a_1c_3-a_3a_2c_1-a_1a_3c_2 = 0.$$

Les deux autres cas sont similaires. On notera cette forme trilinéaire alternée $\det\limits_B(u,v,w)$. Afin de mettre en évidence le rôle des coordonnées dans B des vecteurs u,v et w on notera

$$\det_B(u,v,w) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Notons qu'en plus, nous avons

$$\det_B(e_1,e_2,e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Définition :

Soit $B=(e_1,e_2,e_3)$ une base de l'espace vectoriel. Le déterminant de trois vecteurs (u,v,v) de E dans la base B se note $\det_B(u,v,w)$ et est donné par

$$\begin{aligned}\det_B(u,v,w) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.\end{aligned}$$

où la matrice des vecteurs u,v,w dans la base B est donnée par

$$M(u,v,w,B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de l'unique forme tri-linéaire alternée *sur l'espace vectoriel E vérifiant*

$$\det_B(e_1,e_2,e_3) = 1.$$

De plus, toute forme tri-linéaire alternée f sur E est proportionnelle à $\det_B()$:

$$\forall (u,v,w) \in E^3 \ , \ f(u,v,w) = f(e_1,e_2,e_3) \cdot \det_B(u,v,w).$$

Déterminant d'une matrice 3×3

On définit le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

comme le déterminant de ses vecteurs colonnes

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad et \quad C_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathbb{K}^n$. Ainsi, ce nombre que l'on notera $det(A)$, est donné par

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.\end{aligned}$$

Règle de Sarrus

On peut se rappeler de l'expression de $\det_B(u,v,w)$ par la règle dite de Sarrus qui consiste à écrire la matrice et à répéter dans l'ordre, les deux premières lignes en dessous de la matrice. Prendre ensuite les produits des coefficients de chaque diagonale avec un signe + si la diagonale est descendante ou un signe - si la diagonale est ascendante :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Exemple

Par exemple, le déterminant des vecteurs $u = (-1,1,0), v = (1,1,2), w = (2,2,1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \det_B(u,v,w) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1+4+0-(0-4+1) = 6. \end{aligned}$$

Développement suivant une ligne ou une colonne

On peut réarranger l'expression du $\det_B(u,v,w)$ *comme suit :*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'agit du développement du déterminant suivant la première colonne.

De même, le déterminant $\det_B$ peut être développer suivant toute autre colonne ou ligne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} && \text{(développement suivant la 1ère ligne)} \\ &= -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} && \text{(développement suivant la 2ème ligne)} \\ &= a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} && \text{(développement suivant la 3ème ligne)} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} && \text{(développement suivant la 2ème colonne)} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} && \text{(développement suivant la 3ème colonne)} \end{aligned}$$

Remarque

Ainsi on peut définir par récurrence le déterminant d'une matrice $n \times n$ en termes des déterminants de matrices $(n-1) \times (n-1)$ avec un développement suivant une ligne ou une colonne. L'inconvénient de cette méthode est que les propriétés de multi-linéarité par rapport aux lignes et aux colonnes deviennent moins faciles à mettre en évidence, mais aussi le manque de transparence de la signification de l'objet ainsi défini.
Dans ce cours nous avons choisi d'utiliser les formes multilinéaires qui nous permettent de montrer l'existence et l'unicité du déterminant avec ses propriétés (de multi-linéarité). La formule donnant un déterminant $n \times n$ en termes de déterminants $(n-1) \times (n-1)$ sera démontré plus tard dans le cours dans la partie réservée aux calculs pratiques des déterminants.

Exemple

Calculer le déterminant des vecteurs $u = (1, 1, 0), v = (-1, 1, 2), w = (2, 2, -1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On choisit de développer ce déterminant par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \det_B(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -5 + 3 = -2. \end{aligned}$$

Voici le calcul de déterminant suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} \det_B(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -5 - 1 + 4 = -2. \end{aligned}$$

Il est plus judicieux de développer suivant la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

Exemple

Calculer le déterminant des vecteurs $u = (1, 2, -1), v = (-1, 1, 1), w = (3, 2, 2)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

On peut faire le développement suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} \det_B(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 10 + 5 = 15 \end{aligned}$$

Il est plus judicieux d'utiliser les propriétés du déterminant avant de le développer. Par exemple, on remarque que

$$u + v = (1, 2, -1) + (-1, 1, 1) = (0, 3, 0).$$

Comme $\det_B(u,v,w) = \det_B(u+v,v,w)$. Il vient que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

On observe que ceci peut se faire par des opérations élémentaires sur les colonnes.

On peut choisir d'effectuer le calcul en manipulant les lignes :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Exercice

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Solution 1 : En développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -3 + 12 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Solution 2 : En manipulant les colonnes, on a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} \qquad (C_3 \curvearrowright C_3 - C_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (C_2 \curvearrowright C_2 - C_1) \end{aligned}$$

La deuxième méthode est visiblement plus efficace.

Les formes multi-linéaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $p \geq 1$ une entier et notons $E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$.

Définition :

Une forme $p-$linéaire sur E est une application

$$\begin{aligned} f : E^p &\to \mathbb{K} \\ (u_1, \cdots, u_p) &\mapsto f(u_1, \cdots, u_p) \end{aligned}$$

linéaire par rapport à chaque vecteur u_i.

Plus explicitement, pour tout $i = 1, \cdots, p$, et tout vecteurs $u_1, \cdots u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots u_p$ alors

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & \mathbb{K} \\ \mathbf{u} & \mapsto & f(u_1, \cdots u_{i-1}, \mathbf{u}, u_{i+1}, \cdots u_p) \end{array}$$

est linéaire :

1. pour tout $(u, v) \in E \times E$ on a :

$$\begin{array}{rcl} f(u_1, \cdots u_{i-1}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, u_{i+1}, \cdots u_p) & = & f(u_1, \cdots u_{i-1}, \mathbf{u}, u_{i+1}, \cdots u_p) + \\ & & +f(u_1, \cdots u_{i-1}, \mathbf{v}, u_{i+1}, \cdots u_p) \end{array}$$

2. pour tout $u \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$f(u_1, \cdots u_{i-1}, \lambda\mathbf{u}, u_{i+1}, \cdots u_p) = \lambda f(u_1, \cdots u_{i-1}, \mathbf{u}, u_{i+1}, \cdots u_p).$$

Définition

Une forme $p-$linéaire f sur E est dite alternée *si*

$$f(u_1, \cdots, u_p) = 0$$

dès que la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ contient deux des vecteurs identiques.

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. L'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1 \end{array}$$

   est une forme bilinéaire alternée. En effet,

$$f((x, y), (x, y)) = xy - yx = 0.$$

2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. La forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 \end{array}$$

   n'est pas alternée. En effet,

$$f((1, 0), (1, 0)) = 1 \neq 0.$$

Théorème

Soit f une forme $p-$linéaire alternée sur E. Alors, f est antisymétrique, c-à-d pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_p$, on a :

$$f(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \cdots, u_{\tau(p)}) = -f(u_1, u_2, \cdots, u_p).$$

Démonstration : Supposons que $\tau = (i\ j)$. Il s'agit de montrer que

$$\forall (u_1, \cdots, u_p) \in E^p, \quad f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots u_p) = -f(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots u_p).$$

Or, comme f est une forme $p-$linéaire alternée, on a :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & f(u_1, \cdots, u_i + u_j, \cdots, u_i + u_j, \cdots u_p) \\ & = & f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_i + u_j, \cdots u_p) + f(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i + u_j, \cdots u_p) \\ & = & f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots u_p) + f(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots u_p). \end{array}$$

Remarque

Si une forme $p-$linéaire f est antisymétrique alors elle est alternée.

En effet, si $u_i = u_j$ avec $i < j$ alors

$$\begin{aligned} f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_i, \cdots u_p) &= f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots u_p) \\ &= -f(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots u_p) \\ &= -f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_i, \cdots u_p). \end{aligned}$$

Corollaire

Soit f une forme $p-$linéaire alternée sur E. Alors pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$ on a

$$f(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \cdots, u_p).$$

Démonstration : On sait d'après le théorème ci-dessus que si $\sigma = \tau$ est une transposition alors l'assertion est vraie. Or on sait que toute permutation de $\{1, \cdots, p\}$ est produit de m transpositions. Une simple récurrence sur m permet de conclure la démonstration.

Corollaire

Soit f une forme $p-$linéaire alternée sur E. Alors

$$(u_1, \cdots, u_p) \text{ une famille liée } \Rightarrow f(u_1, \cdots, u_p) = 0.$$

En particulier, si f est une forme $p-$linéaire alternée sur E alors pour tout $(u_1, \cdots, u_p) \in E^p$ le nombre $f(u_1, \cdots, u_p)$ ne change pas si on ajoute à l'un des u_i une combinaison linéaire des autres vecteurs $u_j, j \neq i$.

Démonstration : (i) Comme la famille de vecteurs $(u_1, \cdots, u_p)$ est liée, il existe $i = 1, \cdots, p$, tel que u_i soit une combinaison linéaire des autres vecteurs $u_j, j \neq i$. Quitte à changer de notation on peut supposer que $i = 1$. Il existe alors des scalaires $\lambda_k, k = 2, \cdots p$, tels que

$$u_1 = \sum_{k=2}^{p} \lambda_k u_k$$

En utilisant la $p-$linéarité de f, puis le fait que f est alternée on obtient

$$f(u_1, \cdots, u_p) = f\left(\sum_{k=2}^{p} \lambda_k u_k, u_2, \cdots, u_p\right) = \sum_{k=2}^{p} \lambda_k f(u_k, u_2, \cdots, u_p) = 0.$$

(ii) En utilisant la $p-$linéarité de f suivi du point (i) de la preuve on obtient :

$$\begin{aligned} f\left(u_1 + \sum_{k=2}^{p} \lambda_k u_k, u_2, \cdots, u_p\right) &= f(u_1, \cdots, u_p) + f\left(\sum_{k=2}^{p} \lambda_k u_k, u_2, \cdots, u_p\right) \\ &= f(u_1, \cdots, u_p). \end{aligned}$$

Ceci montre que le nombre $f(u_1, \cdots, u_p)$ ne change pas si on ajoute à u_1 une combinaison linéaire des vecteurs $u_j, j > 2$.

ATTENTION ! **La réciproque est fausse si $p < n$.**

Par exemple, considérons la forme bilinéaire alternée définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$b\left((x,y,z),(x',y',z')\right) = xz' - zx'.$$

Il est clair que

$$b(e_1,e_2) = b(e_2,e_3) = 0$$

et pourtant les vecteurs (e_1,e_2) et (e_2,e_3) sont linéairement indépendants. Cependant, **si** $p = n$ **alors nous allons montrer plus tard que la réciproque est vraie**.