Applications linéaires

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : E \to F$ **est linéaire si**

$$\begin{array}{rcl} \forall u \in E, \forall v \in E, \quad f(u+v) & = & f(u) + f(v) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\lambda u) & = & \lambda f(u). \end{array}$$

On montre qu'une application $f : E \to F$ est linéaire si, et seulement si,

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Définition

- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.
- Un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif de E.
- Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples

1. *L'application nulle*

$$\begin{array}{rccc} 0 : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & 0_F \end{array}$$

est linéaire.

2. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} p_i : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est une forme linéaire.

3. *Soit* $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \end{array}$$

est une forme linéaire.

4. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 \end{array}$$

n'est pas linéaire.

5. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+2y, x-y, x+y) \end{array}$$

est linéaire.

Exemples

1. *Soit X un ensemble non vide et $x \in X$. L'évaluation en $x \in X$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^X$:*

$$\begin{array}{rccc} ev_x : & \mathbb{K}^X & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

2. *Produit de deux fonctions. Soit X un ensemble non vide et $f \in \mathbb{K}^X$: L'application de multiplication par f est linéaire*

$$\begin{array}{rccc} m_f : & \mathbb{K}^X & \to & \mathbb{K}^X \\ & g & \mapsto & f.g \end{array}$$

3. *Soit $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. L'application suivante est linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & uv = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

4. *Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ est fixé, l'application suivante est linéaire :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & PQ \end{array}$$

Exemples

1. *Les applications*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} C^1(]0,1[,\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(]0,1[,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

   sont linéaires.

2. *L'application suivante est une forme linéaire :*

$$\begin{array}{ccc} C^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \end{array}$$

Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathscr{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base de E et $(v_1, \cdots, v_n)$ des vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$\forall i = 1, \cdots, n, \quad f(u_i) = v_i.$$

En effet, comme $\mathscr{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E, pour tout $u \in E$, il existe une unique famille

$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Ainsi

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

En particulier, f est complètement déterminée par les vecteurs images $f(u_1), \cdots, f(u_n)$.

Opérations sur les applications linéaires

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- *Si f et g sont des applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors les applications*

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f(u)+g(u) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \lambda f(u) \end{array}$$

  sont linéaires.
- *Muni de ces deux opérations l'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ que l'on note $\mathscr{L}(E,F)$.*

Si $F = E$ on note $\mathscr{L}(E) := \mathscr{L}(E,E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Proposition

- *La composée d'applications linéaires est linéaire : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.*
- *La bijection réciproque d'un isomorphisme est également linéaire : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective alors f^{-1} est linéaire.*
- *Soit f est un endomorphisme de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir $f^n = \underbrace{f \circ f \circ ..... \circ f}_{n \text{ fois}}$. il est clair que $f^n \in \mathscr{L}(E)$.*
- *$\circ$ est une loi de composition interne associative sur $\mathscr{L}(E)$ et possède un élément neutre qui est id_E.*
- *L'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est un groupe appelé le groupe linéaire de E.*

Proposition

Soit E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ h & \longmapsto & g \circ h \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ h & \longmapsto & h \circ f \end{array}$$

sont linéaires. Plus explicitement,

- *$\forall f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $g \circ (f_1 + \lambda f_2) = g \circ f_1 + \lambda (g \circ f_2)$.*
- *$\forall g_1, g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(g_1 + \lambda g_2) \circ f = g_1 \circ f + \lambda (g_2 \circ f)$.*

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et G un sous espace vectoriel de E. ***La restriction de f à G*** *est l'application linéaire*

$$f_{|G}: \begin{array}{ccc} G & \to & F \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Si $E = F$ alors $f_{|G}$ est une application linéaire de G dans E qui n'est, en général, pas un endomorphisme de G. En fait $f_{|G}$ est un endomorphisme de G si, et seulement si, G est stable par f, c'est-à-dire $f(G) \subset G$.

Noyau et image d'une application linéaire

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, G un sous espace vectoriel de E et H un sous espace vectoriel de F. Alors

- *$f(G) = \{f(x), x \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de F ;*
- *$f^{-1}(H) = \{x \in E, f(x) \in H\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. On appelle **image de** f le sous-espace vectoriel de F donné par
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E).$$
2. On appelle **noyau de** f le sous-espace vectoriel de E donné par
$$\ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a

- *f est injective si, et seulement si,* $\ker f = \{0_E\}$ *;*
- *f est surjective si, et seulement si, Im$(f) = F$.*

Exercice

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer les assertions suivantes :

1. *si f est injective et $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre de E alors $(f(u_1), \cdots, f(u_p))$ est une famille libre de F.*
2. *Si f est surjective et $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille génératice de E alors $(f(u_1), \cdots, f(u_p))$ est une famille génératrice de F.*
3. *Si f transforme une base de E en une famille libre de F alors f est injective.*
4. *Si f transforme une base de E en une famille génératrice de F alors f est surjective.*
5. *f est bijective si, et seulement si, f transforme une base de E en une base de F.*

Solution :

1. Supposons que f est injective et soit $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre de E. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des scalaires tels que
$$\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = 0.$$

Donc, par linéarité,
$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = 0.$$
Ainsi $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in \ker f = \{0\}$. Autrement dit, $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Finalement, $(f(u_1), \cdots, f(u_p))$ est une famille libre de F.

2. Supposons que f est surjective et $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille génératrice de E. Soit $v \in F$. Donc il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$. Pour ce u, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des scalaires tels que
$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$$
et donc
$$v = f(u) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p).$$
Ainsi $(f(u_1), \cdots, f(u_p))$ est une famille génératrice de F.

3. Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une base de E telle que $(f(u_1), \cdots, f(u_p))$ est une famille libre de F. Soit $u \in \ker f$. Pour ce u, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des scalaires tels que
$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$$
Donc
$$\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = f(u) = 0.$$
Ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Finalement, $u = 0$ et f est injective.

4. Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une base de E telle que $(f(u_1), \cdots, f(u_p))$ est une famille génératrice de F. Soit $v \in F$. Donc il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des scalaires tels que
$$v = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p).$$
Donc $v \in \mathrm{Im} f$ et f est surjective.

5. Suit immédiatement des point précédents.

Théorème

Tout espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration : Comme $\dim(E) = n$, on peut choisir une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de E. Donc, pour tout élément u de E, il existe une unique famille $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Alors l'application
$$\begin{array}{rcl} \psi_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \end{array}$$
est un isomorphisme. Il s'agit de l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^n$ vers E qui transforme la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ en la base $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$:
$$\varphi(1, 0, \cdots, 0) = u_1,\ \varphi(0, 1, 0, \cdots, 0) = u_2,\ \cdots,\ \varphi(0, 0, \cdots, 0, 1) = u_n$$

Théorème

Deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

Démonstration : Supposons que E et F ont la même dimension n. Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une base de E et $(v_1, v_2, \cdots, u_n)$ une base de F. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \to & F \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \end{array}$$

est un isomorphisme. Il s'agit de l'unique application linéaire de E vers F donnée par $\varphi(u_i) = v_i$, pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Réciproquement, supposons que E et F sont isomorphes. Alors il existe un isomorphisme f de E sur F. Si $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une base de E alors $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est une base de F et donc $\dim(E) = \dim(F)$.

Rang d'une application linéaire

Définition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle rang de f et on note $\mathrm{rang}(f)$ la dimension de l'image de f, i.e. $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im} f)$.

Remarque

Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(u_1), \cdots, f(u_n))$. Dans ce cas, $\mathrm{rang}(f)$ est le rang de la famille de vecteurs $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$.

On suppose dorénavant E et F de dimensions finies.

Théorème du rang

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On a

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \underset{\underset{\dim(Im f)}{\|}}{rang(f)}.$$

Démonstration : Soit G un supplémentaire de $\ker f$. Alors la restriction $f_{|G}$ de f à G est un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im} f$. En effet, par définition $f_{|G}$ est surjective. De plus, si $x \in \ker f_{|G}$ alors $x \in G$ et $x \in \ker f$ et donc $x = 0$. Finalement,

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \underset{\underset{\dim(\mathrm{Im} f)}{\|}}{\dim(G)} = \dim(\ker f) + \underset{\underset{\dim(\mathrm{Im} f)}{\|}}{\mathrm{rang}(f)}.$$

Voici une autre démonstration : Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une base de $\ker f$ et $(v_1, \cdots, v_q)$ une base de $\mathrm{Im} f$. Pour chaque $i = 1, \cdots, q$, il existe $u_{p+i} \in E$ tels que $f(u_{p+i}) = v_i$. Montrons que $(u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+q})$ est une base de E. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p+q}$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + \cdots + \lambda_{p+q} u_{p+q} = 0.$$

On applique f à cette relation et on utilise que $u_1, \cdots, u_p$ appartiennent au noyau de f. Il vient que

$$\lambda_{p+1} f(u_{p+1}) + \cdots \lambda_{p+1} f(u_{p+q}) = \lambda_{p+1} v_1 + \cdots + \lambda_{p+q} v_q = 0.$$

Donc $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_{p+q} = 0$, car $(v_1, \cdots, v_q)$ est une base de Imf. En particulier,

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0.$$

Finalement, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, car $(u_1, \cdots, u_u)$ est une base de $\ker f$. Ainsi $(u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+q})$ est une famille libre de E.

Soit $u \in E$. On sait qu'il existe $\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_{p+q}$ des scalaires tels que

$$f(u) = \lambda_{p+1} v_1 + \cdots \lambda_{p+1} v_q = \lambda_{p+1} f(u_{p+1}) + \cdots + \lambda_{p+q} f(u_{p+q}) = f(\lambda_{p+1} u_{p+1} + \cdots + \lambda_{p+q} u_{p+q}).$$

Ainsi $u - (\lambda_{p+1} u_{p+1} + \cdots + \lambda_{p+q} u_{p+q}) \in \ker f$. Finalement, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des scalaires tels que

$$u - (\lambda_{p+1} u_{p+1} + \cdots + \lambda_{p+q} u_{p+q}) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$$

ce qui montre que $(u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+q})$ est une famille génératrice de E. La preuve est terminée.

Remarque

Attention ! *En général,* $\ker f$ *et* Imf *ne sont pas en somme directe.*

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \to (y, 0) \end{array}$$

Nous avons $\ker f = \mathrm{Im} f$ avec $\ker f = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{Im} f = \{(y, 0), y \in \mathbb{R}\}$.

Corollaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. *Si* f *est injective alors* $\dim(F) \geq \dim(E)$.
2. *Si* f *est surjective alors* $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3. *Si* f *est bijective alors* $\dim(E) = \dim(F)$.
4. *Si* $\dim(E) = \dim(F)$ *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - f *est injective*
   - f *est surjective*
   - f *est bijective.*

Attention la dernière assertion n'est pas vraie en dimension infinie. Par exemple,

1. si $E = F = \mathbb{K}[X]$ alors l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f(P) = XP$ est injective sans être surjective.
2. De même, si $E = F = \mathbb{K}[X]$ alors l'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f(P) = P'$ est surjective sans être injective.

Théorème

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$, $\mathscr{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ *une base de* E *et* $(v_1, \cdots, v_n)$ *des vecteurs de* F. *Soit* $f : E \to F$ *l'unique application linéaire définie par*

$$\forall i = 1, \cdots, n, \quad f(u_i) = v_i.$$

1. *L'application* f *est injective si, et seulement si,* $(v_1, \cdots, v_n)$ *est libre.*
2. *L'application* f *est surjective si, et seulement si,* $(v_1, \cdots, v_n)$ *est génératrice de* E.
3. *L'application* f *est bijective si, et seulement si,* $(v_1, \cdots, v_n)$ *est une base de* F.

Démonstration : L'exercice précédent.

Cas des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et f est une application linéaire de E dans E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un automorphisme de E ;*
2. *l'image d'une base par f est une base.*
3. *f est injective ;*
4. *f est surjective*
5. *rang$(f) = n$;*
6. *il existe une application g de E dans E telle que $f \circ g = id_E$;*
7. *il existe une application h de E dans E telle que $h \circ f = id_E$;*

Dans ce cas $h = g = f^{-1}$.

Exemple

Soit E un espace vectoriel, $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ deux bases de E. On définit $f_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ par $f_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(e_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. C'est un automorphisme de E que l'on appelle application de changement de base.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs. Alors

$$\text{rang}(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)) \leq \text{rang}(u_1, u_2, \cdots, u_p).$$

Démonstration : Il sufit d'appliquer le théorème du rang à la restriction de f à vect$(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ à valeurs dans vect$(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p))$ qui est surjective.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. *rang$(f(u_1), \cdots, f(u_p)) =$ rang$(u_1, \cdots, u_p)$ pour toute famille $(u_1, \cdots, u_p)$ de E ;*
2. *f est injective.*

Démonstration : 1) $\Longrightarrow$ 2) : Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une base de E. La condition 1) implique que

$$\text{rang}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \text{rang}(u_1, \cdots, u_n) = n.$$

Donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre. Ainsi, f transforme une base en une famille libre et donc elle est injective.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Supposons que f est injective et soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. Posons rang$(u_1, \cdots, u_p) = r$. Donc $(u_1, \cdots, u_p)$ contient une sous famille libre $(u_{i_1}, \cdots, u_{i_r})$. Donc $(f(u_{i_1}), \cdots, f(u_{i_r}))$ est libre et donc rang$(f(u_1), \cdots, f(u_p)) \geq r$. La proposition précédente permet de conclure que rang$(f(u_1), \cdots, f(u_p)) = r$.

Proposition

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors

- $rang(g \circ f) \leq \min(rang(f), rang(g))$.
- *Si f est un isomorphisme alors $rang(g \circ f) = rang(g)$.*
- *si g est un isomorphisme alors $rang(g \circ f) = rang(f)$.*

Démonstration : Soit $\mathscr{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base de E.

1. Si f est un isomorphisme alors $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est une base de F. Ainsi
$$\text{rang}(g) = \text{rang}(g(f(u_1)), \cdots, g(f(u_n))) = \text{rang}(g \circ f(u_1), \cdots, g \circ f(u_n)) = \text{rang}(g \circ f).$$
2. Si g est un isomorphisme alors
$$\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(g(f(u_1)), \cdots, g(f(u_n))) = \text{rang}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \text{rang}(f).$$

Projecteurs, projections

Soit F, G deux sous espaces vectoriels supplémentaires, c-à-d
$$E = F \oplus G.$$
Ainsi pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que
$$x = x_F + x_G.$$

Définition

On appelle **projection sur F parallèlement à G** l'endomorphisme de E défini par $p(x) = x_F$ si $x = x_F + x_G$ dans la somme directe $E = F \oplus G$.

Proposition

Avec les notations de la définition ci-dessus, on a

1. *p est une application linéaire.*
2. *On a $p(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in F \\ 0 \text{ si } x \in G. \end{cases}$*
3. *On a $p_{|F} = id_F$ et $p_{|G} : G \to G$ est l'endomorphisme nul de G.*
4. *$p \circ p = p$.*
5. *$id_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.*

Définition

On appelle projecteur tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Proposition

Si p est un projecteur, alors :

1. *$Im(p) \oplus \ker(p) = E$.*
2. *p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.*

Symétries

Soit F, G deux sous espaces vectoriels tels que

$$E = F \oplus G.$$

Définition

On appelle **symétrie par rapport à F parallèllement à G** l'endomorphisme s de E défini par

$$s(x) = x_F - x_G.$$

si $x = x_F + x_G$ dans la somme directe $E = F \oplus G$.

En particulier,

$$\begin{cases} s^2 & := & s \circ s = & \mathrm{id}_E & & \\ s(x) & = & x & & \text{pour tout} & x \in F \\ s(x) & = & -x & & \text{pour tout} & x \in G \end{cases}$$

Si p est la projection de E sur F parallèlement à G alors

$$s = 2p - \mathrm{id}_E.$$

Proposition

Un endomorphisme s de E est un symétrie de E si, et seulement si, $s^2 = id_E$. Dans ce cas,

1. $\ker(s - id_E) \oplus \ker(s + id_E) = E$,
2. *s est la symétrie par rapport à $\ker(s - id_E)$ parallèlement à $\ker(s + id_E)$.*

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Un endomorphisme h de E est une homothétie de rapport λ si

$$\forall x \in E, \quad h(x) = \lambda x.$$

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et Q un élément non nul de $\mathbb{R}[X]$. Soit f l'application qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par Q. Montrer que f est un endomorphisme de E et le caractériser.

Solution : Montrons d'abord que f est un endomorphisme de E. Soit P_1 et P_2 deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Grâce à la division euclidienne et la définition de f, il existe deux polynômes A et B de E tels que

$$P_1 = AQ + f(P_1)\ , \quad P_2 = BQ + f(P_2)$$

et les polynômes $f(P_1)$ et $f(P_2)$ sont de degré strictement inférieur au degré de Q. Ainsi $f(P_1) + \lambda f(P_2)$ est aussi un polynôme de degré strictement inférieur au degré de Q. Comme

$$P_1 + \lambda P_2 = (A + \lambda B)Q + f(P_1) + \lambda f(P_2),$$

on déduit que $f(P_1)+\lambda f(P_2)$ est reste de la division euclidienne de $P_1+\lambda P_2$ par Q. Ainsi,

$$f(P_1+\lambda P_2)=f(P_1)+\lambda f(P_2)$$

et f est linéaire.

Maintenant, si P un élément de E alors il existe un polynôme A de E tel que

$$P=AQ+f(P) \quad \text{et} \quad \text{degré}(f(P))<\text{degré}(Q).$$

Ainsi la division euclidienne de $f(P)$ par Q s'écrit, $f(P)=0Q+f(P)$. Autrement dit $f(f(p))=f(p)$. D'où $f^2=f$ et f est un projecteur.

Cherchons son image et son noyau. Soit $P\in E$. $P\in\ker(f)$ si, et seulement si, $f(P)=0$, ce qui signifie aussi que Q divise P. Ainsi

$$\ker(f)=\{QP \;/\; P\in\mathbb{R}[X]\}=Q\cdot\mathbb{R}[X].$$

De plus, si degré$(Q)=0$ alors $\text{Im}(f)=\{0\}$ et f est l'endomorphisme nul. Si degré$(Q)=d\geq 1$ alors

$$\text{Im}(f)=\text{vect}(1,X,\cdots,X^{d-1})=.$$

Ainsi f est la projection de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ parallélement à $Q\mathbb{R}[X]$.

Exercice

Soit N un entier non nul et $E=\mathbb{R}_N[X]$. Soit Q un élément non nul de $\mathbb{R}[X]$ de degré d. Soit f l'application qui à un polynôme $P\in\mathbb{R}_N[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par Q. Montrer que f est un endomorphisme de E et le caractériser.

Solution : Montrons d'abord que f est un endomorphisme de E. D'abord remarquons que si $d>N$ alors $f=\text{id}_E$. De plus si $d=0$ alors f est l'endomorphisme nul.

Supposons que $0<d\leq N$. Soit P_1 et P_2 deux éléments de E et $\lambda\in\mathbb{K}$. Grâce à la division euclidienne et la définition de f, il existe deux polynômes A et B de E tels que

$$P_1=AQ+f(P_1)\ ,\quad P_2=BQ+f(P_2)$$

et les polynômes $f(P_1)$ et $f(P_2)$ sont de degré strictement inférieur à d. Ainsi $f(P_1)+\lambda f(P_2)$ est aussi un polynôme de degré strictement inférieur à d. Comme

$$P_1+\lambda P_2=(A+\lambda B)Q+f(P_1)+\lambda f(P_2),$$

on déduit que $f(P_1)+\lambda f(P_2)$ est reste de la division euclidienne de $P_1+\lambda P_2$ par Q. Ainsi,

$$f(P_1+\lambda P_2)=f(P_1)+\lambda f(P_2)$$

et f est linéaire.

Maintenant, si P un élément de E alors il existe un polynôme A de E tel que

$$P=AQ+f(P) \quad \text{et} \quad \text{degré}(f(P))<\text{degré}(Q).$$

Ainsi la division euclidienne de $f(P)$ par Q s'écrit, $f(P)=0Q+f(P)$. Autrement dit $f(f(p))=f(p)$. D'où $f^2=f$ et f est un projecteur.

Cherchons son image et son noyau. Soit $P\in E$. $P\in\ker(f)$ si, et seulement si, $f(P)=0$, ce qui signifie aussi qu'il existe $A\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=AQ$ et degré$(A)+$degré$(Q)\leq N$. Ainsi

$$\ker(f)=\{QP \;/\; P\in\mathbb{R}_{N-d}[X]\}=Q\cdot\mathbb{R}_{N-d}[X].$$

De plus,

$$\text{Im}(f)=\text{vect}(1,X,\cdots,X^{d-1})=.$$

Ainsi f est la projection de $\mathbb{R}_N[X]$ sur $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ parallélement à $Q\mathbb{R}_{N-d}[X]$.

Exercice

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n. Soit $t_0, \cdots, t_n$ des nombres réels. Montrer que pour toute suite de nombres réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$\forall i = 0, 1, 2, \cdots, n, \quad P(t_i) = \alpha_i$.

Solution : Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(t_0), P(t_1), \cdots, P(t_n)) \end{array}$$

Il est évident que f est une application linéaire. Montrons que f est injective. Pour cela, soit $P \in \ker(f)$. Alors

$$P(t_0) = P(t_1) = \cdots = P(t_n) = 0$$

et donc P admet $n+1$ racines. Comme P est un polynôme de degré au plus n, on déduit que $P = 0$. Ainsi f est injective. D'après le théorème de rang, comme les deux espaces sont de même dimension, on déduit que f est bijective. Donc quels que soient les scalaires $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = (\alpha_0, \cdots, \alpha_n),$$

autrement dit,

$$\forall i = 0, 1, \cdots, n, \quad P(t_i) = \alpha_i.$$

Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange aux point t_i.

Exercice

Trouver toutes les suites de nombres réels $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}\,. \tag{1}$$

Solution : D'abord l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ qui vérifient l'équation de récurrence (1) est un espace vectoriel pour l'addition et de multiplication par un scalaire.

Cherchons une base et la dimension de $\mathcal{S}$. Par un raisonnement par récurrence, il est clair que tout élément de $\mathcal{S}$ est uniquement déterminée par ses deux premiers termes u_0 et u_1. Autrement dit, l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & \binom{u_0}{u_1} \end{array}$$

est un isomorphisme. En effet, f est linéaire et pour tout (a, b) il existe une seule suite de $\mathcal{S}$ telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$. Ainsi $\mathcal{S}$ est de dimension 2.

Maintenant il suffit de trouver deux éléments de $\mathcal{S}$ linéairement indépendants. Pour cela, si $u_n = x^n$ est dans $\mathcal{S}$ alors

$$x^2 = x + 1$$

Donc

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (le nombre d'or)..}$$

On vérifie que les suites $u_n = x_1^n$ et $v_n = x_2^n$ sont bien dans $\mathcal{S}$. Il suffit de montrer que (u, v) est libre. Soit a, b des scalaires tels que $au + bv = 0$, ou plus explicitement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ax_1^n + bx_2^n = 0.$$

En prenant $n = 0$ et $n = 1$ on trouve que

$$a + b = 0 \ \text{ et } \ a - b = 0$$

et donc $a = b = 0$. Finalement (u, v) est une base de $\mathcal{S}$ et tout élément de $\mathcal{S}$ s'écrit

$$u_n = ax_1^n + bx_2^n.$$

En particulier, si $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ alors

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Il s'agit de la célèbre suite de Fibonacci dont les premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$ et comme $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ les termes sont tous entiers. On a donc besoin de nombres irrationnels pour exprimer des entiers naturels que sont les termes de cette suite.

Matrices

Définition

Soit n, p deux entiers naturels non nuls. On appelle **matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type $n \times p$** un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- La matrice A se note par $A = (a_{ij})_{i<i\leq n\ ,\ 1\leq j\leq p}$.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
- La matrice dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle** et se note $0_{n,p}$ ou juste 0 quand il n'y a pas de confusions.
- Si $n = p$ alors la matrice A est dite carrée.
- Si $n = p$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui valent tous 1 s'appelle la **matrice identité** et se note I_n.
- Si $p = 1$ un élément de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ s'appelle une matrice colonne.
- Si $n = 1$ un élément de $M_{1,p}(\mathbb{K})$ s'appelle une matrice ligne.
- Si tous les coefficients de A sont réels on dit que A est réelle.

On rappelle le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j. \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, on définit la matrice où

$$E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{lj})_{1<k\leq n\ ,\ 1\leq l\leq p}.$$

Il s'agit de la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

On munit $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des deux opérations suivantes :

1. **l'addition :** si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ alors la matrice somme est $A+B := (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.
2. **multiplication par un scalaire :** Si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on définit $\lambda A := (\lambda a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.

Proposition

$(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np. La famille $\left(E_{ij}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ appelé base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Ainsi les espaces $M_{n,1}(\mathbb{K}), M_{1,n}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes. Ce qui explique que l'on identifie parfois, quand il n'y a pas de confusions, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ avec le vecteur ligne $(a_1, \cdots, a_n)$.

Exemple

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles 2×2.

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet, pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{21} + cE_{12} + dE_{22}$$

ce qui montre que $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ est une famille génératrice. De plus si a, b, c, d sont des réels tels que $aE_{11} + bE_{21} + cE_{12} + dE_{22} = 0_E$ alors

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $a = b = c = d = 0$.

Définition

Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit la matrice $C = AB \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq q.$$

Par exemple

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$
$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

Proposition

Le produit des matrices est associatifs, c-à-d

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in M_{q,r}(\mathbb{K}),\ A(BC) = (AB)C.$$

Proposition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les applications

$$\begin{array}{ccc} M_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,q}(\mathbb{K}) \\ B & \longmapsto & AB \end{array} \quad et \quad \begin{array}{ccc} M_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{m,p}(\mathbb{K}) \\ B & \longmapsto & BA \end{array}$$

sont linéaires.

1. *Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $A(B_1 + \lambda B_2) = AB_1 + \lambda(AB_2)$*
2. *Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $(B_1 + \lambda B_2)A = BA_1 + \lambda(BA_2)$*

Définition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice ${}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les lignes de A. Plus explicitement, si $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ alors ${}^tA = (b_{ij})_{1\le i\le p, 1\le j\le n}$ avec $b_{ij} = a_{ji}$.

Proposition

L'application de transposition

$$\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus,

$${}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA \quad et \quad {}^t({}^tA) = A.$$

En particulier, si $n = p$ alors la transposition est un automorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.

Définition

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, la matrice B est unique, s'appelle la matrice inverse de A et se note B^{-1}.

On note que

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Notons aussi que toutes les matrices ne sont pas inversibles. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet,

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{K}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice

Soit $a, b, , c, d$ des scalaires. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il est facile de vérifier que $A^2 = A + 2I$. On en déduit que

$$A \cdot \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}(A - I_3) \cdot A = I_3$$

Ainsi la matrice A est inversible et son inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que sur $M_n(\mathbb{K})$ le produit des matrices est associatif, et admet la matrice unité I_n comme élément neutre :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \quad AI_n = I_n A = A.$$

Théorème

Muni de la multiplication, l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un groupe. Ce groupe est non commutatif pour tout $n \geq 2$.

Attention ! *$GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.*