XJOI 进阶讲义（三）

杂题选讲（一）

Mr_Spade

2021.10

杂题选讲的主要目的在于帮助大家在短时间内“头脑风暴”，发散思维想到较为巧妙地解法，提升思维水平。因此接下来的题目的算法复杂性不高（即嘴巴起来比较快），难度也不会太大。希望大家积极思考，想到了解法可以先私发消息，最后进行交流。

本杂题选讲如果没有特殊标注，数据范围可以当作 $[0, 10^9]$。

Problem 1

给定一个长度为 n 的序列，进行 m 次操作。有两类操作：区间加、区间查询 gcd。

$n, m \leq 10^5$

主要考察对 gcd 性质的理解。考虑推广辗转相减法：$\gcd(a,b)=\gcd(a,b-a)$，有 $\gcd(a_l,a_{l+1},\dots,a_r)=\gcd(a_l,a_{l+1}-a_l,\dots,a_k-a_{k-1},\dots,a_r-a_{r-1})$，也就是说，除第一项以外，其余的项都来源于差分数组。

差分数组在区间加后只变化常数项，可以用线段树维护带单点修改的区间 gcd，对于首个元素特殊处理，用支持区间加、单点询问的线段树求值即可。复杂度 $O(n\log n\log W)$。

Problem 2

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，进行 m 次操作。有两类操作：区间乘 x、区间查询 $\sum_{k=l}^{r} \varphi(a_i)$。

$n, m \leq 10^5, a_i, x \leq 100$

序列中的数总是由 100 以内的质数相乘构成，于是可以考虑用质因数分解求 φ。

考虑 $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$，于是，$a_i$ 乘以质数 p 时，若 a_i 本没有因子 p，则 $\varphi(a_i)$ 将乘以 $p-1$，否则乘以 p。

而 a_i 乘以 p 后，就有了因子 p，以后无需特殊对待。100 以内的质数只有 25 个，于是特殊对待的总次数是 $O(n)$ 的。在区间乘 x 时，我们可以先分解 x，改为每次乘以质数 p；对于区间乘 p 的情况，先将维护 φ 的线段树区间乘 p，再利用 set 维护尚未含有因子 p 的位置，将对应的 φ 乘以 $\frac{p-1}{p}$ 后从 set 中删除。

这样做的复杂度为 $O(n \log n)$。

Problem 3 Codeforces 100570B

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，每条边有一种颜色和长度。一条路径是合法路径，当且仅当它的每一对相邻的边颜色不同。给定起点 s，求到达每个点的最短合法路径。$n, m \leq 10^5$

一个天然的想法是记录到每个点且最后的颜色为 c 的最短路径，但状态太多了。

考虑一条从 s 到 x，再经过一条边到达 y 的最短合法路径，这条路径的从 s 到 x 的部分会有哪些情况呢？

从 s 到 x 的部分恰是 s 到 x 的最短合法路径是一种情况；否则，我们不用这条最短路径的唯一理由就是这条路径的最后一个颜色和 x 到 y 的边的颜色相同。此时，假设 s 到 x 的最短合法路径最后的颜色为 c，那么现在显然应该采用 s 到 x 的最短的最后的颜色不为 c 的合法路径。

一个天然的想法是记录到每个点且最后的颜色为 c 的最短路径，但状态太多了。

考虑一条从 s 到 x，再经过一条边到达 y 的最短合法路径，这条路径的从 s 到 x 的部分会有哪些情况呢？

从 s 到 x 的部分恰是 s 到 x 的最短合法路径是一种情况；否则，我们不用这条最短路径的唯一理由就是这条路径的最后一个颜色和 x 到 y 的边的颜色相同。此时，假设 s 到 x 的最短合法路径最后的颜色为 c，那么现在显然应该采用 s 到 x 的最短的最后的颜色不为 c 的合法路径。

也就是说，现在要对每个点求解最短合法路径和最后颜色不同的次短合法路径。不过且慢，次短合法路径的前驱会不会又要求我们求解新的东西呢（常遇到这样的情况，为了递归求解某个量，我们必须求解一个新的量，而新的量有需要新新的量，如此不断，复杂度就不对了）？

由于次短路径也应该是结尾为此种颜色的最短路径，因此分析同之前，依然只需要最短合法路径和最后颜色不同的次短合法路径来更新。

最后由于不存在拓扑序，使用类似 Dijkstra 的算法：维护每个点的最短合法路径和最后颜色不同的次短合法路径，每当有一个点的两者之一被更新，就将被更新的那一个丢入优先队列中，每次取的堆顶显然不会再被更新，因此复杂度和 Dijkstra 类似为 $O((n+m)\log m)$。