Value Creating University
POSTECH

김정훈 교수님 연구실 연구참여 3주차 수업
About ‘Controller Design’

소속: CTRL
발표자: 양정균

수업 내용

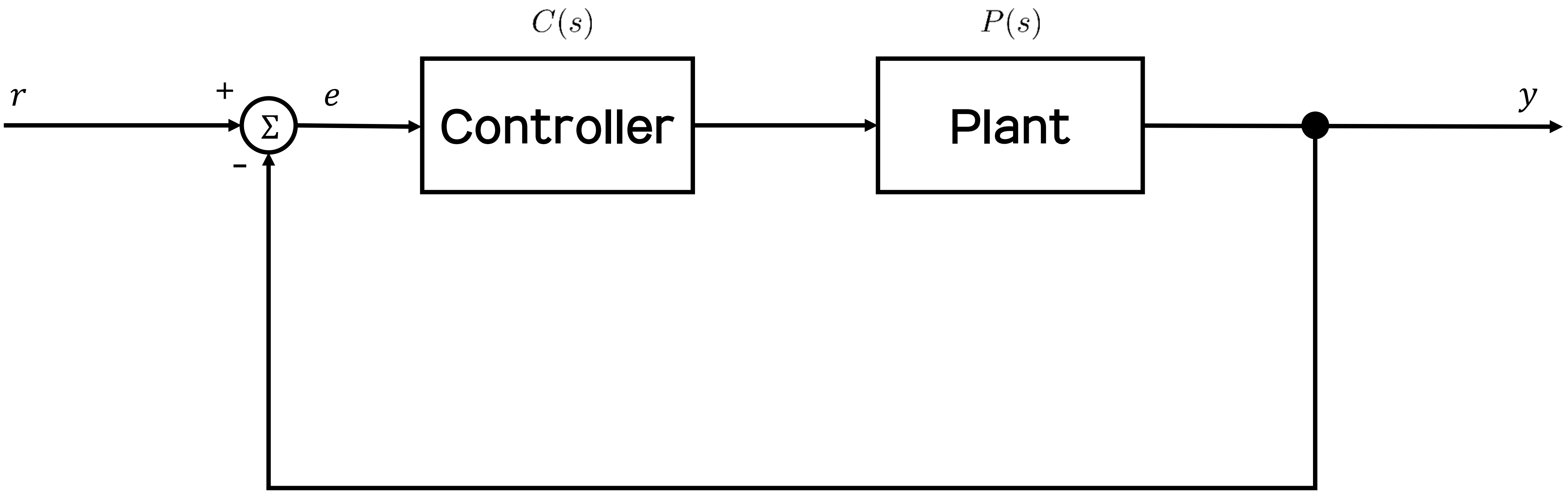
(1) Controller Design on Frequency Domain

- PID Controller

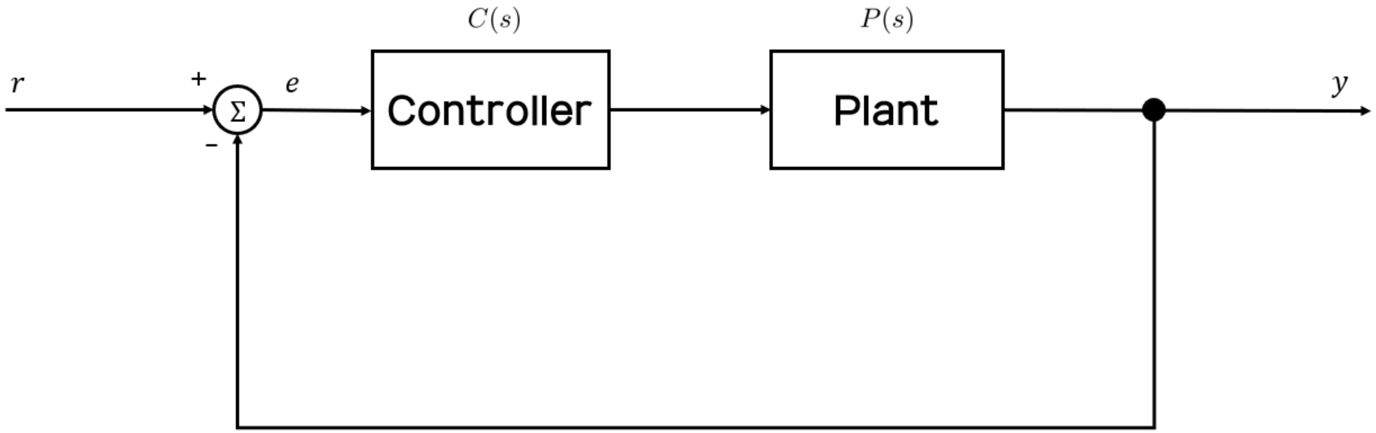
(2) Controller Design on Time Domain

- Pole Placement Controller
- LQR

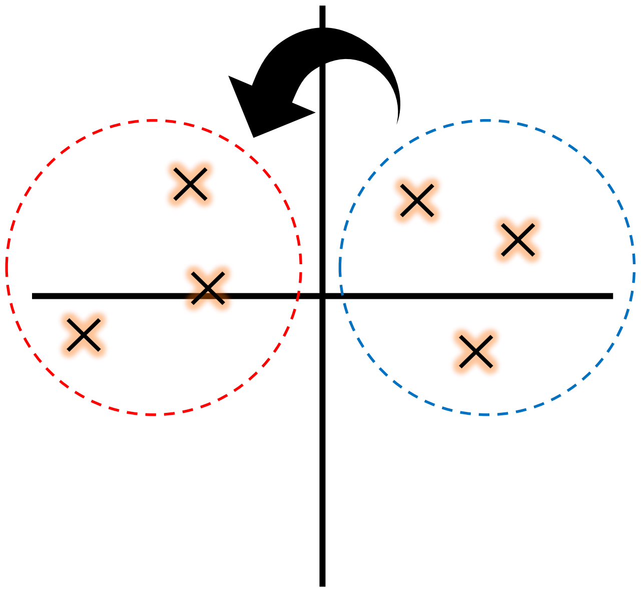
1.1. Output Feedback Control



1.2. Controller Design on Frequency Domain



$$P(s) = \frac{a(s)}{b(s)},\ C(s) = \frac{c(s)}{d(s)}$$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\frac{a(s)}{b(s)}\frac{c(s)}{d(s)}}{1+\frac{a(s)}{b(s)}\frac{c(s)}{d(s)}} = \frac{a(s)c(s)}{a(s)c(s)+b(s)d(s)}$$

$a(s)c(s)+b(s)d(s)$의 pole들이 Open Left Half Plane에 존재하게 한다면

시스템을 안정하게 할 수 있다! $\rightarrow$ Controller의 역할

$$\textbf{PID Controller} : C(s) = k_P + k_I \frac{1}{s} + k_D s$$

$$\textbf{System Error} : e(t) = r(t) - y(t) \;\Rightarrow\; E(s) = R(s) - Y(s) \quad (\because \text{ Laplace Transform})$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e(t)\,dt\right\} = \frac{E(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}e(t)\right\} = sE(s)$$

$$U(s) = C(s)E(s) = k_P E(s) + k_I \frac{E(s)}{s} + k_D s E(s)$$

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(t)\,dt + k_D \frac{d}{dt} e(t)$$

[세미나 주제 1 (공통)]

System의 Specifications(Rising time, Settling time, Overshoot)과 관련 지어서, PID controller의 각 Gain (P, I, D)의 역할을 공부해서 발표해보세요! (HINT : 자동제어 수업자료 참고, 예시도 한 번 들어보세요!)

Example 1)

$$P(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2w_n\zeta s + w_n^2} \qquad C(s) = k_P + k_I\frac{1}{s} + k_D s$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{w_n^2(k_p s + k_I + k_D s^2)}{s^3 + (2w_n\zeta + w_n^2 k_D)s^2 + (w_n^2 + w_n^2 k_P)s + w_n^2 k_I}}$$

전달함수 분모의 각 항에 k_P, k_I, k_D 가 포함되어 있어서

이 PID 계수들을 잘 조절하면 원하는 위치로 pole을 이동시킬 수 있다!

Example 2)

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \qquad C(s) = k_P + k_I \frac{1}{s} + k_D s$$

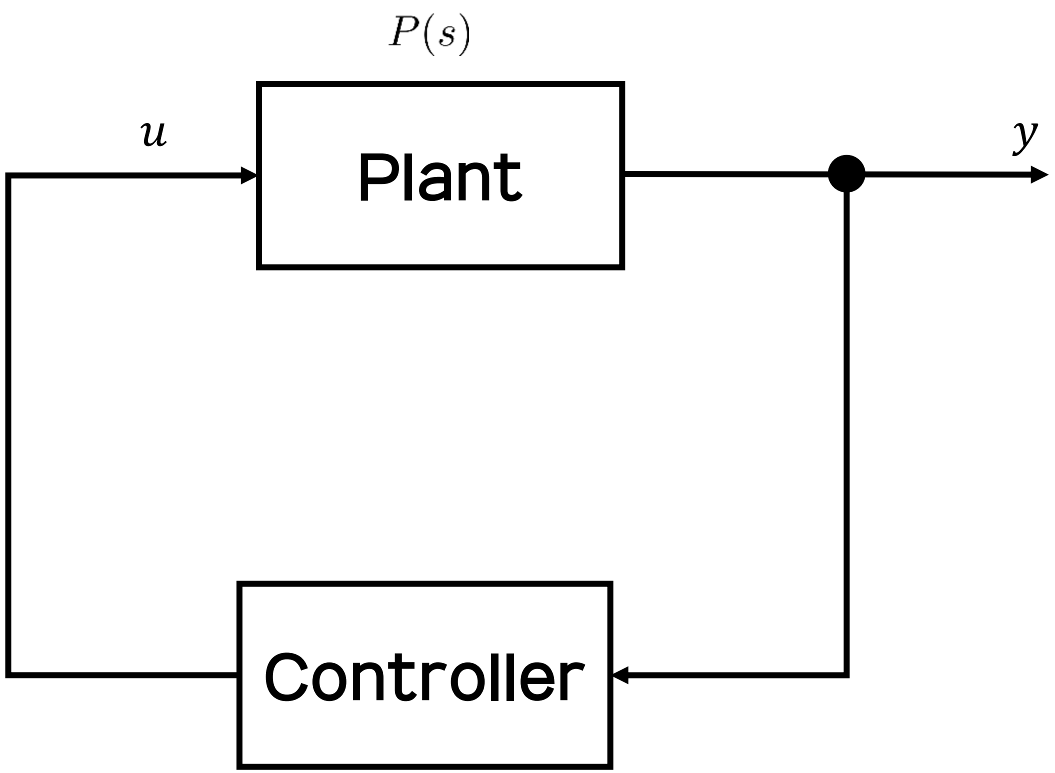
$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{k_p s + k_I + k_D s^2}{s^3 + k_D s^2 + (1 + k_P)s + k_I}}$$

$$\text{Desired Characteristic Equation : } (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 9s + 6 = 0$$

$$\therefore\ k_D = 6,\ k_P = 8,\ k_I = 6$$

2.1. State Feedback Representation with State Space Equation

[Block Diagram of State Feedback Control System]

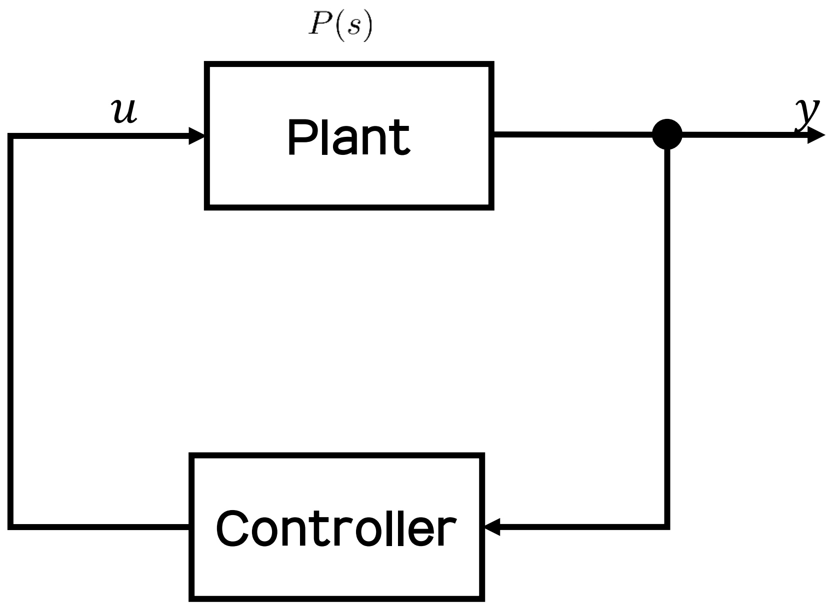


[Plant]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = (A - BK)x$$

[Controller]

$$u = -Kx$$



[Plant]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

[Controller]

$$u = -Kx$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = (A - BK)x$$

[Characteristic Equation]

$$|sI - (A - BK)| = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)$$

$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$: Desired pole locations

그렇다면, 이러한 방식의 제어를 언제나 사용 가능할까? $\Rightarrow$ NO!

Controllability를 만족해야 한다!

[Controllability]

주어진 시스템에 있어서 임의의 상태를 유한 시간 내의 원하는 상태로 옮길 수 있는 입력 값의 존재할 때, 이를 'Controllability를 만족한다.' 라고 한다.

$x(t_0) = x_0$를 시간 t_0에서,

원하는 상태 $x(t_1) = x_1$으로 옮기는 제어 입력 $u(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$이 존재할 때!

[Controllability의 동치 조건]

$$\text{Controllability Matirx : } U_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Rank(U_c)=n 일 때 System은 Controllable!

Controllable 한 system은 state-space equation을 다음과 같이 만들 수 있음.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$u = -Kx$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = (A-BK)x = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \right) x$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & -a_{n-2} - k_3 & -a_{n-3} - k_4 & \cdots & -a_1 - k_n \end{bmatrix} x$$

[Characteristic Equation]

$$|sI - (A - BK)| = s^n + (a_1 + k_n)s^{n-1} + (a_2 + k_{n-1})s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_1)$$

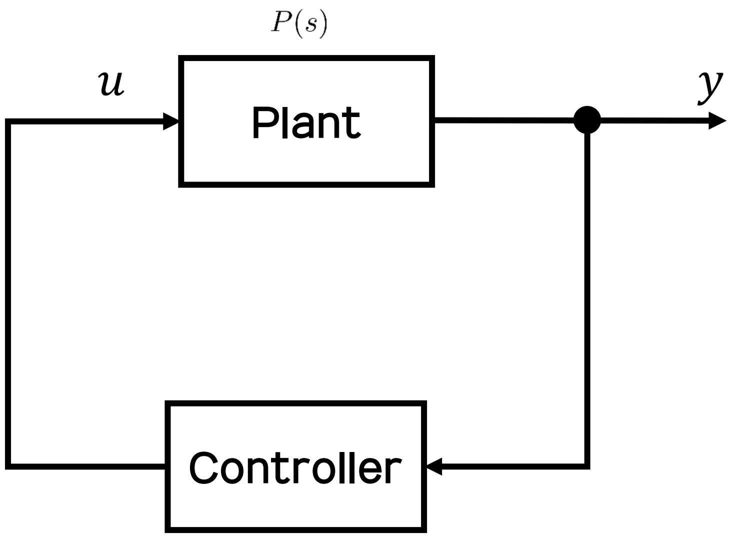
2.2. Controller Design on Time Domain – LQR Control

[Optimal Control]

제어 성능을 나타내는 적당한 평가량을 정하여, 그것을 최대 또는 최소로 하는 것과 같은 제어 입력을 정하는 방식

[LQR (Linear Quadratic Regulator)]

아래와 같은 State Feedback System에서, 입력 u와 출력 y에 관한 cost function을 두고, 이를 최소화 하는 gain K를 구하는 제어 방식!



[Plant]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

[Controller]

$$u = -Kx$$

$$\text{Cost Function} : J = \int_0^\infty [y^T y + u^T R u]\, dt$$

Cost Function : $J = \int_0^{\infty} [y^T y + u^T R u]\, dt = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u]\, dt \quad (Q = C^T C)$

J를 최소화 하기 위한 u를 구하는 과정 :

$$x^T(\infty) P x(\infty) - x_0^T P x_0 = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}[x^T P x]\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} [\frac{dx}{dt}^T P x + x^T P \frac{dx}{dt}]\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} [(Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)]\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} [x^T (A^T P + PA) x + u^T B^T P x + x^T P B u]\, dt$$

여기서 Riccati Equation을 통해 P를 구한다.

$A^T P + PA = PBR^{-1}B^T P - Q$

(P is positive definite)

System은 stable 하기 때문에 $x(\infty) = 0$

$\therefore \; 0 = x_0^T P x_0 + \int_0^{\infty} [x^T (PBR^{-1}B^T P - Q) x + u^T B^T P x + x^T P B u]\, dt$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty [x^T PBR^{-1}B^T Px + u^T B^T Px + x^T PBu + u^T Ru]\, dt$$

$$= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty [(R^{-1}B^T Px + u)^T R(R^{-1}B^T Px + u)]\, dt$$

[Riccati Equation]

$$A^T P + PA = PBR^{-1}B^T P - Q$$

(P is positive definite)

따라서, J를 최소화하는 u를 구하면,

$$u = -K_{LQ}x = -R^{-1}B^T Px$$

세미나 과제 2 (개인)

1. Linear Quadratic Regulator (LQR) Control

2. Computed Torque Method (CTM)

3. Luenberger Observer

4. Kalman Filter

각 Controller 혹은 Estimator의 구체적인 원리 보다는 그 것의 간단한 원리와 더불어 어떻게 활용되고 장점과 단점이 무엇인지 이해하는 방식으로 준비해주시면 좋을 것 같습니다.

Thank you