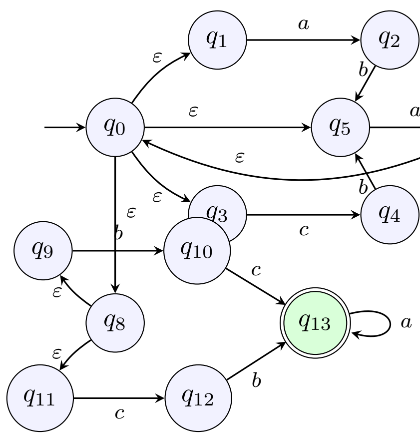
Решение задачи для регулярного выражения: $(abc|cba)^*a + (bc|cb)a^*$

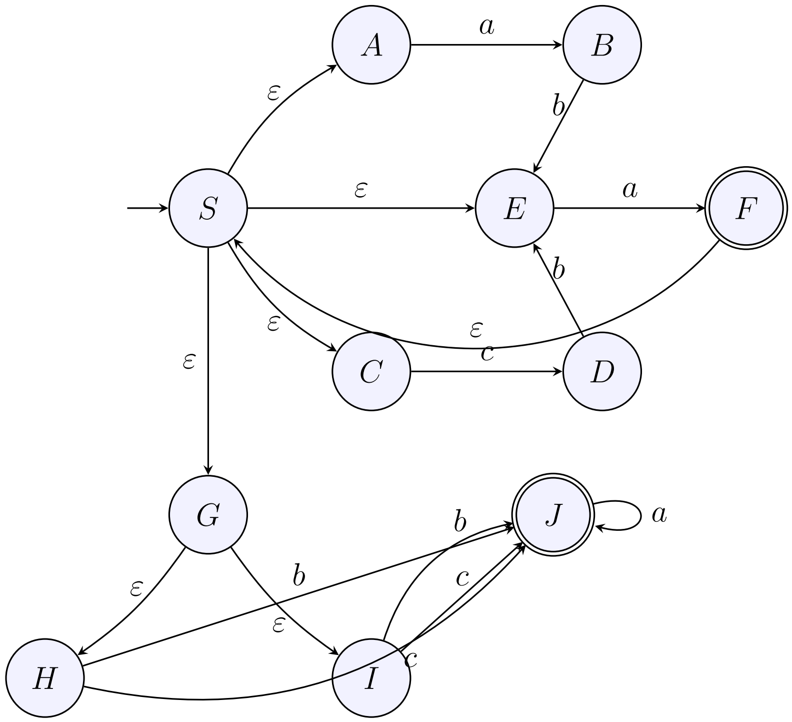
1. Построение диаграммы переходов НКА

Исходное выражение: $R = (abc|cba)^*a + (bc|cb)a^*$.

Интерпретация: Имеем дизъюнкцию двух больших частей. Построим НКА $\mathcal{A}$, используя конструкцию Томпсона.



Упрощённая диаграмма НКА (объединим состояния q_5, q_6 и q_{13} для наглядности дальнейшего анализа):



2. Таблица состояний построенного НКА

Состояние	a	b	c	ε
S	–	–	–	A, C, E, G
A	B	–	–	–
B	–	E	–	–
C	–	–	D	–
D	–	E	–	–
E	F	–	–	–
F	–	–	–	S
G	–	–	–	H, I
H	–	J	J	–
I	–	J	J	–
J	J	–	–	–

Допускающие состояния: F, J.

3. Проверка на недетерминированность

Построенный конечный автомат **является недетерминированным (НКА)**. Объяснение:

1. Из начального состояния S есть **несколько ε-переходов** ($S \to A$, $S \to C$, $S \to E$, $S \to G$).
2. Из состояния H есть **несколько переходов по одному символу** b: $H \to J$ и (в исходной конструкции) через состояние I, что даёт неоднозначность. В таблице из H по b и c ведёт в J.
3. Из состояния I аналогично есть несколько переходов по c (и по b) в J.

Наличие хотя бы одного из этих условий (множественные переходы по одному символу или ε-переходы) делает автомат недетерминированным.

4. Преобразование НКА в ДКА (алгоритм построения подмножеств)

Найдём ε-замыкания (εCL) и построим таблицу ДКА.

- $\varepsilon\mathrm{CL}(S) = \{S, A, C, E, G, H, I\}$. Назовём это состояние $[S]$.
- $\varepsilon\mathrm{CL}(A) = \{A\}$.
- $\varepsilon\mathrm{CL}(F) = \{F, S, A, C, E, G, H, I\} = [S]$ (т.к. F имеет ε-переход в S).

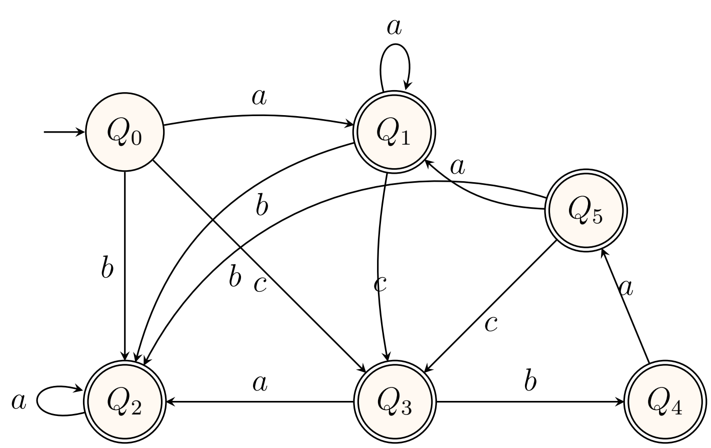
  Вычисляем переходы из стартового состояния ДКА $Q_0 = [S]$:

$$\begin{aligned}
&\delta([S], a) : \text{Из } A \to B, \text{ из } E \to F. \\
&\quad \varepsilon\mathrm{CL}(\{B, F\}) = \{B, F, S, A, C, E, G, H, I\} = [B, F]. \\
&\delta([S], b) : \text{Из } H \to J, \text{ из } I \to J. \\
&\quad \varepsilon\mathrm{CL}(\{J\}) = \{J\} = [J]. \\
&\delta([S], c) : \text{Из } C \to D, \text{ из } H \to J, \text{ из } I \to J. \\
&\quad \varepsilon\mathrm{CL}(\{D, J\}) = \{D, J\} = [D, J].
\end{aligned}$$

  Продолжаем для новых состояний...

Состояние ДКА c	Состояния НКА	a	b
Q_0 Q_3	$\{S, A, C, E, G, H, I\}$	Q_1	Q_2
Q_1 Q_3	$\{B, F, S, A, C, E, G, H, I\}$	Q_1	Q_2
Q_2 –	$\{J\}$	Q_2	–
Q_3 –	$\{D, J\}$	Q_2	Q_4
Q_4 –	$\{E, J\}$	Q_5	–
Q_5 Q_3	$\{F, J, S, A, C, E, G, H, I\}$	Q_1	Q_2

Допускающие состояния ДКА: Те, которые содержат хотя бы одно допускающее состояние НКА (F или J).
Значит: Q_1 (содержит F), Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 – все допускающие, кроме Q_0.



5. Проверка ДКА на минимальность и минимизация

Проверим, является ли построенный ДКА минимальным, используя **алгоритм минимизации (разбиения на классы эквивалентности)**.

Шаг 1. Разделим состояния на два класса: $F = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$ (допускающие) и $N = \{Q_0\}$ (недопускающие).

Шаг 2. Проверим класс F. Для каждого символа алфавита:

- Для Q_1: $\delta(Q_1, a) = Q_1 \in F$, $\delta(Q_1, b) = Q_2 \in F$, $\delta(Q_1, c) = Q_3 \in F$.
- Для Q_2: $\delta(Q_2, a) = Q_2 \in F$, $\delta(Q_2, b) =\text{–}$ (можно считать переход в мёртвое состояние $T \in N$), $\delta(Q_2, c) =\text{–} \in N$.
- Для Q_3: $\delta(Q_3, a) = Q_2 \in F$, $\delta(Q_3, b) = Q_4 \in F$, $\delta(Q_3, c) =\text{–} \in N$.
- Для Q_4: $\delta(Q_4, a) = Q_5 \in F$, $\delta(Q_4, b) =\text{–} \in N$, $\delta(Q_4, c) =\text{–} \in N$.
- Для Q_5: $\delta(Q_5, a) = Q_1 \in F$, $\delta(Q_5, b) = Q_2 \in F$, $\delta(Q_5, c) = Q_3 \in F$.

Видно, что Q_1 и Q_5 ведут себя одинаково (все переходы ведут в F). Q_2, Q_3, Q_4 имеют переходы в N по некоторым символам. Разобьём F на подклассы:

- $F_1 = \{Q_1, Q_5\}$ (переходы только в F).
- $F_2 = \{Q_2\}$ (по a в F_2, по b/c в N).
- $F_3 = \{Q_3\}$ (по a в F_2, по b в F_4, по c в N).
- $F_4 = \{Q_4\}$ (по a в F_1, по b/c в N).

Шаг 3. Проверим класс $F_1 = \{Q_1, Q_5\}$: $\delta(Q_1, a) = Q_1 \in F_1$, $\delta(Q_5, a) = Q_1 \in F_1$. По b: $Q_1 \to Q_2 \in F_2$, $Q_5 \to Q_2 \in F_2$. По c: $Q_1 \to Q_3 \in F_3$, $Q_5 \to Q_3 \in F_3$. Поведение одинаково, F_1 не разбивается.

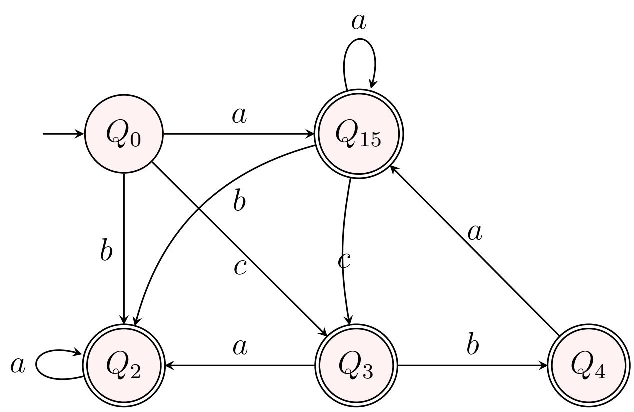
Шаг 4. Классы после разбиения: $\{Q_0\}, \{Q_1, Q_5\}, \{Q_2\}, \{Q_3\}, \{Q_4\}$. Все переходы из состояний внутри одного класса по одинаковым символам ведут в один и тот же класс. Разбиение завершено.

Вывод: Исходный ДКА **не является минимальным**, так как нашлись эквивалентные состояния (Q_1 и Q_5).

6. Минимизация ДКА

Объединим эквивалентные состояния Q_1 и Q_5 в один класс, назовём его Q_{15}. Перестроим таблицу переходов.

Состояние	a	b	c
Q_0	Q_{15}	Q_2	Q_3
Q_{15}	Q_{15}	Q_2	Q_3
Q_2	Q_2	–	–
Q_3	Q_2	Q_4	–
Q_4	Q_{15}	–	–



Этот ДКА является **минимальным**.

7. Построение регулярного выражения для минимального ДКА

Восстановим регулярное выражение из минимального ДКА. Воспользуемся методом исключения состояний.

Пусть X, Y, Z, U, V – регулярные выражения для путей между состояниями. Обозначим уравнения:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= aQ_{15} + bQ_2 + cQ_3 \\
Q_{15} &= aQ_{15} + bQ_2 + cQ_3 + \varepsilon \quad \text{(т.к. допускающее)} \\
Q_2 &= aQ_2 + \varepsilon \quad \text{(допускающее)} \\
Q_3 &= aQ_2 + bQ_4 \\
Q_4 &= aQ_{15}
\end{aligned}$$

Решаем:

- Из $Q_2 = aQ_2 + \varepsilon$ по лемме Ардена: $Q_2 = a^*$.
- Подставляем Q_2 в Q_4 и Q_3: $Q_4 = aQ_{15}$. $Q_3 = aa^* + baQ_{15} = a^+ + baQ_{15}$.
- Подставляем Q_2 и Q_3 в Q_{15}: $Q_{15} = aQ_{15} + ba^* + c(a^+ + baQ_{15}) + \varepsilon = (a + cba)Q_{15} + (ba^* + ca^+) + \varepsilon$.
- По лемме Ардена: $Q_{15} = (a + cba)^*(ba^* + ca^+ + \varepsilon)$.
- Теперь $Q_0 = aQ_{15} + ba^* + c(a^+ + baQ_{15}) = (a + cba)Q_{15} + ba^* + ca^+$.

- Подставляем Q_{15}: $Q_0 = (a+cba)(a+cba)^*(ba^* + ca^+ + \varepsilon) + ba^* + ca^+$.

Упрощая, получаем:

$$Q_0 = (a + cba)^+(ba^* + ca^+ + \varepsilon) + ba^* + ca^+$$

Или, что эквивалентно исходному:

$$\boxed{(abc|cba)^*a + (bc|cb)a^*}$$

Таким образом, мы прошли полный цикл преобразований и вернулись к исходному регулярному выражению, что подтверждает корректность выполненных построений.