Fourier Analysis Chapter 2

张浩然

2025 年 3 月 14 日

题目 1. Exercise 3:

我们重返第一章的“拨动的弦”问题，证明：初始函数 f 等于它的 Fourier 正弦级数即：

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx, A_m = \frac{2h}{m^2} \frac{\sin mp}{p(\pi - p)}$$

其中：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xh}{p} & , 0 \leqslant x \leqslant p; \\ \dfrac{h(\pi - x)}{\pi - p} & , p \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

解答. 证明：

存在常数 $C > 0$, 使得 $|A_m| \leqslant \dfrac{C}{m^2}$, 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 成立.

又 $\sum \frac{C}{m^2}$ 收敛, 于是 $\sum A_m$ 绝对收敛, 即 f 的 Fourier 系数级数 $\sum \hat{f}(n)$ 绝对收敛，又容易验证 f 在 $[0, \pi]$ 上连续，则 f 的 Fourier 级数绝对收敛，并一致收敛到 f, 即

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$$

题目 2. Exercise 6:

$f(\theta)=|\theta|$ 定义在 $[-\pi,\pi]$ 上，则

(1) 画出 $f(\theta)$ 的图像；

(2) 计算 $\hat{f}(n)$;

(3) 改写 Fourier 级数为 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 的组合;

(4) 取 $\theta=0$, 计算：

$$\sum_{n\geq 1, n \text{ odd}} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

解答.

(1)(2) 我们舍去平凡计算，有

$$\hat{f}(n)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & ,n=0;\\ \dfrac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & ,n\neq 0.\end{cases}$$

(3) 改写为：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{inx}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

(4) 既然是数学专业学生，就不应该乱代入一些值，凭什么可以计算？这是因为对任意 $k\geqslant 1$ 有：

$$\left|\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ 收敛，则 Fourier 级数绝对收敛且一致收敛，又因为 $f(\theta)$ 是连续函数, 则 Fourier 级数一致收敛到 f, 即

$$f(\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

代入 $\theta = 0$, 有：

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

即

$$\sum_{n\geqslant 1, n \text{ odd}}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

又

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \sum_{n\geqslant 1, n \text{ odd}}\frac{1}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1, n \text{ even}}\frac{1}{n^2}$$

这是因为右边两个级数都收敛，且对第二个级数观察发现为左边的 $\frac{1}{4}$ 倍，

$$\frac{3}{4}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

则

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

题目 3. Exercise 8:

验证:

$\dfrac{1}{2i}\sum_{n\neq 0}\dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ 是周期为 2π 的锯齿函数的 Fourier 级数，其中 $f(0) = 0$, $f(x)$ 定义为：

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} & , -\pi < x < 0; \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} & , 0 < x < \pi. \end{cases}$$

显然，f 并不连续. 进一步证明:

$\dfrac{1}{2i}\sum_{n\neq 0}\dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$, 对所有 x 都收敛, 并且此级数在 $x = 0$ 处的值等于 $\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$

解答.

先验证之，$n=0$ 时，$\hat{f}(0)=0$. $n\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(-i\sin nx)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)(-i\sin nx)\mathrm{d}x\\&=-\frac{i}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi\sin nx-x\sin nx)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2ni}\end{aligned}$$

验证完成, 下证收敛性：$x\neq 0$ 时，对任意 $N\in\mathbb{N}^*$ 有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2i}\sum_{n=-N,n\neq 0}^{N}\mathrm{e}^{inx}\right|&\leqslant\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-iNx}\frac{1-\mathrm{e}^{iNx}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\right|+\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{ix}\frac{1-\mathrm{e}^{iNx}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\right|\\&\leqslant\frac{2}{|1-\mathrm{e}^{ix}|}\end{aligned}$$

可得部分和在 $x\neq 0$ 关于 N 一致有界，并且实数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调收敛到 0.

于是，$\frac{1}{2i}\sum_{n\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ 在 $x\neq 0$ 处收敛.

当 $x=0$, $S_Nf=0$, 进而 $\frac{1}{2i}\sum_{n\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ 在 $x=0$ 处为 $0=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$.

题目 3 的注记.

此处改造了一下 Dirichlet 判别法的复数版本，对双边数列，只需要分而治之，化两个两个即可，并且对单调性要求也不必单减，只要在需要的范围内单调即可.

题目 4. Exercise 9:

令 $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)$ 为区间 $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$ 的特征函数，即：

$$\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1, x\in[a,b];\\ 0, x\notin[a,b].\end{cases}$$

(1) 证明：f 的 Fourier 级数是：

$$f(x)\sim\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{n\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{-ina}-\mathrm{e}^{-inb}}{2\pi in}\mathrm{e}^{inx}$$

(2) 证明：若 $a\neq-\pi$ 或 $b\neq\pi$, 并且 $a\neq b$, 则 (1) 中的 Fourier 级数对任何 x 都不绝对收敛.

(3) 然而，再证明：此 Fourier 级数对任何 x 都收敛, 并说明 $a=-\pi$ 且 $b=\pi$ 时发生了什么.

解答.

(1) $n=0$ 时，

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2\pi}$$

$n\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[a,b]}(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x\\&=\frac{\mathrm{e}^{-ina}-\mathrm{e}^{-inb}}{2\pi in}\end{aligned}$$

于是确实有：

$$f(x)\sim\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{n\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{-ina}-\mathrm{e}^{-inb}}{2\pi in}\mathrm{e}^{inx}$$

(2)

第二题的提示是很典型的错误，从调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 中选无数项并不一定发散，比如 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛.

所以此题不能按提示那样做，我下面展示一种做法.

我们不关心常数项，则：

$$\begin{aligned}&\sum_{n\neq 0}\left|\frac{\mathrm{e}^{-ina}-\mathrm{e}^{-inb}}{2\pi in}\mathrm{e}^{inx}\right|\\=&\sum_{n\neq 0}\left|\frac{\mathrm{e}^{in\frac{(b-a)}{2}}-\mathrm{e}^{-in\frac{(b-a)}{2}}}{2\pi in}\mathrm{e}^{-\frac{a+b}{2}}\mathrm{e}^{inx}\right|\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{|\sin(\theta)|}{n}\end{aligned}$$

其中 $\theta=\dfrac{b-a}{2}\neq 0$, 只用研究:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(\theta)|}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\theta)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\theta}{2n}$$

根据经典方法，最右边第一个级数发散，第二个收敛，因为 Dirichlet 判别法, 于是最左边级数发散，此题得证.

还有一种估计方法，利用柯西收敛准则，我就不写了，因为太长了.

(3)

根据推广的 Dirichlet 判别法和特殊点单独处理，Fourier 级数处处收敛. 是容易仿照 Exercise 8 证明的.

当 $a=-\pi, b=\pi$ 时，其 Fourier 级数为 1.

题目 5. Exercise 10:

设 f 是周期为 2π 的函数且 $f\in C^k$, 证明：

$$\hat{f}(n)=O\left(\frac{1}{|n|^k}\right), n\to\infty$$

解答.

熟知：

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$$

而 $f \in C^k$, 则存在 $C > 0$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|\widehat{f^{(k)}}(n)| \leqslant C$

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{C}{|n|^k}$$

即

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

题目 6. Exercise 11:

设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个在 $[0,1]$ 上黎曼可积的函数列，使得

$$\int_0^1 |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x \to 0, k \to \infty$$

证明：

$$\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n), n \to \infty$$

并且关于 n 是一致的.

解答.

我们直接做差估计：

$$\begin{aligned}
&|\hat{f}_k(n) - \hat{f}(n)| \\
=&\left|\int_0^1 f_k(x)\mathrm{e}^{-i2\pi nx}\mathrm{d}x - \int_0^1 f_k(x)\mathrm{e}^{-i2\pi nx}\mathrm{d}x\right| \\
=&\int_0^1 |f_k(x) - f(x)| \to 0, k \to \infty
\end{aligned}$$

并且此极限至多依赖 x, 关于 n 是一致的.

题目 7. Exercise 12:

证明：

如果复级数 $\sum c_n$ 收敛到 s, 则 $\sum c_n$ 的 $Cesàro$ 和收敛到 s.

解答.

这是我们《数学分析》中常见的 Cauchy 命题的复版本，证明方法一模一样，所以有些人要强调《数学分析》的重要性，其实不如用比较高级的教材一次扫尽.

设 $S_n = \sum_{i=1}^{n} c_n$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n > N_1$,

$$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} - s\right| \\
=&\left|\frac{(S_1 - s) + (S_2 - s) + \cdots + (S_n - s)}{n}\right| \\
\leqslant&\frac{|S_1 - s| + |S_2 - s| + \cdots + |S_{N_1} - s|}{n} + \frac{n - N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
<&\varepsilon
\end{aligned}$$

取 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{|S_1 - s| + |S_2 - s| + \cdots + |S_{N_1} - s|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

对上述的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 使得 $n > N$，时

$$\left|\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} - s\right| < \varepsilon$$

于是命题得证.

题目 8. Exercise 13:

接下来，我们打算证明：*Cesàro* 可和的条件强于 *Abel* 可和的条件.

(1) 证明：若复级数 $\sum c_n$ 收敛到 s, 其 *Abel* 和收敛到 s.

(2) 证明：存在复级数 *Abel* 可和，但是不收敛.

(3) 证明：若复级数 *Cesàro* 可和收敛到 σ, 其 *Abel* 和收敛到 σ

(4) 证明：存在复级数 *Abel* 可以和，但是不 *Cesàro* 可和.

解答. (1)

证明：利用 *Abel* 求和公式：记 $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} c_n r^n &= r^N s_N + \sum_{n=1}^{N-1} (r^n - r^{n+1}) s_n \\ &= r^{N+1} s_N + (1-r) \sum_{n=1}^{N} s_n r^n\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $n > N_1$ 时，$|s_n - s| < \varepsilon$.

存在 $M > 0$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|s_n| \leqslant M, |s| \leqslant M$.

于是，$r^{N+1} s_N$ 和 $(1-r)\sum_{n=1}^{N} s_n r^n$ 的极限都存在.

令 $N \to \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n$$

下面只需要证明：

$$(1-r) \sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n = s, r \to 1^-$$

我们直接做差估计：

$$
\begin{aligned}
&\left|(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n - s\right| \\
=&\left|(1-r)\sum_{n=1}^{\infty}(s_n-s)r^n + s(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^n - s\right| \\
=&\left|(1-r)\sum_{n=1}^{\infty}(s_n-s)r^n + (r-1)s\right| \\
\leqslant&\left|(1-r)\sum_{n=1}^{N_1}(s_n-s)r^n\right| + \left|(1-r)\sum_{n=N_1+1}^{\infty}(s_n-s)r^n\right| + (1-r)|s| \\
\leqslant&(1-r)\sum_{n=1}^{N_1}|s_n-s|r^n + (1-r)\varepsilon\sum_{n=N_1+1}^{\infty} r^n + (1-r)|s| \\
\leqslant&(1-r)\sum_{n=1}^{N_1}2Mr^n + (1-r)\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty} r^n + (1-r)|s| \\
\leqslant&2MN_1(1-r) + \varepsilon + (1-r)|s|
\end{aligned}
$$

由 $1-r\to 0, r\to 1^-$, 对上述 ε, 存在 $\delta>0$, 使得任意 $1-\delta<r<1$, 有：

$$
\left|(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n - s\right| \lesssim \varepsilon
$$

结论成立.

此处用了调和分析符号 $\lesssim$.

$f(x)\lesssim g(x)$ 即存在 $C>0$，使得 $f(x)\leqslant Cg(x)$, 对充分大的 x 成立.

(2)

考虑 $c_n=(-1)^n$,$s_n=\sum_{i=1}^{n} c_n$.

其 $Abel$ 和为

$$
A_r=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n=\frac{-r}{1+r}
$$

$$
\lim_{r\to 1^-} A_r=-\frac{1}{2}
$$

但是显然 s_n 不收敛，即 $\sum c_n$ 不收敛.

(3)

证明：

设 $\sigma_n = \dfrac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$. 利用 $Abel$ 求和公式：记 $s_n = \sum_{i=1}^n c_i$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} c_n r^n \\
=&r^{N+1} s_N + (1-r)\sum_{n=1}^{N} s_n r^n \\
=&r^{N+1} s_N + (1-r)\left(r^N N\sigma_N + (1-r)\sum_{n=1}^{N-1} n r^n \sigma_n\right) \\
=&r^{N+1} s_N + r^N N\sigma_N - r^{N+1} N\sigma_N + (1-r)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n\sigma_n r^n \\
=&r^{N+1}(N\sigma_N - (N-1)\sigma_{N-1}) + r^N N\sigma_N - r^{N+1} N\sigma_N + (1-r)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n\sigma_n r^n \\
=&r^N N\sigma_N - r^{N+1}(N-1)\sigma_{N-1} + (1-r)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n\sigma_n r^n
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, 使得任意 $n > N_2$, 有

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon$$

存在 $L > 0$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 有，

$$|\sigma_n| \leqslant L, |\sigma| \leqslant L$$

$r^N N\sigma_N$ 和 $r^{N+1}(N-1)\sigma_{N-1}$ 以及 $(1-r)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n\sigma_n r^n$ 的极限都存在，这是因为根值判别法.

令 $N\to\infty$, 有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_nr^n=(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nr^n$$

接下来只需要证明：

$$(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nr^n=\sigma,r\to1^-$$

我们继续作差：

$$\begin{aligned}
&\left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nr^n-\sigma\right|\\
=&\left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty}n(\sigma_n-\sigma)r^n+\sigma(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty}nr^n-\sigma\right|\\
=&\left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty}n(\sigma_n-\sigma)r^n+\sigma(r-1)\right|\\
\leqslant&(1-r)^2\sum_{n=1}^{N_2}n|\sigma_n-\sigma|r^n+(1-r)^2\sum_{n=N_2+1}^{\infty}n|\sigma_n-\sigma|r^n+(1-r)|\sigma|\\
\leqslant&(1-r)^2\cdot2LN_1^2+\varepsilon+(1-r)|\sigma|
\end{aligned}$$

由于 $(1-r)^2\to0,(1-r)\to0,r\to1^-$,

对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_0>0$, 使得任意 $1-\delta_0<r<1$ 有：

$$\left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nr^n-\sigma\right|\lesssim\varepsilon$$

得证!

(4)

考虑 $c_n=(-1)^nn$, 则其 $Abel$ 和为：

$$A_r=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnr^n=\frac{r}{(1+r)^2}$$

$$\lim_{r\to1^-}A_r=\frac{1}{4}$$

而对于 *Cesàro* 可和级数 $\sum c_n$, 有 $\dfrac{c_n}{n} \to 0, n \to \infty$
这是因为

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} \to \sigma, n \to \infty$$

而

$$\frac{c_n}{n} = \frac{s_n - s_{n-1}}{n} = \frac{n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}}{n} \to \sigma - \sigma = 0, n \to \infty$$

但是 $\dfrac{c_n}{n} = (-1)^n$ 不收敛, 那么我们完成了反例.

题目 9. Exercise 14: 小 o Tauber 型定理.

(1) 如果级数 $\sum c_n$ 满足 *Cesàro* 可和收敛到 σ, 且 $c_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sigma$$

(2) 如果级数 $\sum c_n$ 满足 *Abel* 可和收敛到 s, 且 $c_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s$$

解答.

(1) 证明：

$$s_n - \sigma_n = \frac{(n-1)c_n + (n-2)c_{n-1} + \cdots + c_2}{n}$$

又 $c_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 则 $(n-1)c_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot nc_n \to 0, n \to \infty$
则根据复版本 Cauchy 命题，

$$s_n - \sigma_n \to 0, n \to \infty$$

那么 $s_n = s_n - \sigma_n + \sigma_n \to 0 + \sigma = \sigma, n \to \infty$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sigma$$

(2) 证明：

根据 $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 即 $nc_n \to 0, n \to \infty$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得任意 $n > N_0$, 有 $|c_n| < \frac{\varepsilon}{n}$

当 $N > N_0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N} c_n - s\right| \\
=&\left|\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{n=1}^{N} c_n r^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n r^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s\right| \\
=&\left|\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{n=1}^{N} c_n r^n\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n r^n\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s\right| \\
=&\left|\sum_{n=1}^{N} c_n(1-r^n)\right| + \frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} n|c_n|r^n + + \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s\right| \\
\leqslant&\left|\sum_{n=1}^{N} c_n(1-r)(1+r+\cdots+r^{n-1})\right| + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n + \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s\right| \\
\leqslant&\sum_{n=1}^{N} |c_n|(1-r)(1+r+\cdots+r^{n-1}) + \frac{\varepsilon}{N}\frac{1}{1-r} + \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s\right| \\
\leqslant&\sum_{n=1}^{N} |nc_n|(1-r) + \frac{\varepsilon}{N}\frac{1}{1-r} + \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s\right|
\end{aligned}$$

令 $r = 1 - \frac{1}{N}$, 继续有：

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{n=1}^{N} c_n r^n\right| \\
\leqslant&\frac{\sum_{n=1}^{N}|nc_n|}{N} \to 0, N \to \infty
\end{aligned}$$

这是因为复版本 Cauchy 命题和 $nc_n \to 0, |nc_n| \to 0, n \to \infty$

还有，

$$\frac{\varepsilon}{N}\frac{1}{1-r}=\varepsilon$$

由于

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}c_n r^n=s$$

,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n=s$$

对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 使得任意 $N>N_1$, 有：

$$\left|\sum_{n=1}^{N}c_n-s\right|\lesssim\varepsilon$$

那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n r^n=s$$

题目 9 的注记.

注意此题和 $Abel$ 定理的联系.

此题条件可以继续减弱，得到大 O Tauber 型定理.

题目 10. Exercise 16: Weierstrass 第一定理

证明：

若 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$ 满足：

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

解答.

固定正数 l, 延拓 $f(x)$ 到 $[a-l,b+l]$, 使得 $f(a-l)=f(b+l)$, 再延拓为 $\mathbb{R}$ 上的周期为 $2l+b-a$ 的连续函数.

改造之前的证明，我们知道其相当于圆周 $\mathbb{R}/(2l+b-a)\mathbb{Z}$ 上的连续函数，存在三角多项式 $Q(x)$, 使得

$$\sup_{x\in[a-l,b+l]}|f(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又 e^z 在紧集上被多项式一致逼近，则存在多项式 $P(x)$，使得

$$\sup_{x\in[a-l,b+l]}|Q(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

则

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[a-l,b+l]}|f(x)-P(x)|\\
\leqslant&\sup_{x\in[a-l,b+l]}(|f(x)-Q(x)|+|Q(x)-P(x)|)\\
\leqslant&\sup_{x\in[a-l,b+l]}|f(x)-Q(x)|+\sup_{x\in[a-l,b+l]}|Q(x)-P(x)|\\
<&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
=&\varepsilon
\end{aligned}$$

那么我们证明了：

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

题目 11. Exercise 17:

我们开始研究 *Abel* 均值和 *Cesàro* 均值在不连续点的行为.

我们称可积函数 f 在 θ 处有跳跃间断点，即

$$\lim_{h\to0,h>0}f(\theta+h)=f(\theta^+),\quad \lim_{h\to0,h>0}f(\theta-h)=f(\theta^-)$$

极限都存在且不相等.

(1) 证明：

若可积函数 f 有一个在 θ 处的跳跃间断点，则

$$\lim_{r\to1^-}A_r(f)(\theta)=\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2},0\leqslant r<1$$

(2) 证明：

若可积函数 f 有一个在 θ 处的跳跃间断点，则

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f)(\theta)=\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}$$

提示：考虑 Good kernel 的性质.

解答.

(1) 证明：

我们考虑 Good kernel 的性质：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}P_r(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}P_r(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}$$

这是因为 $Poisson$ 核是 Good kernel, 并且是偶函数.

可积函数必定有界, 设

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|\leqslant B$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得任意 $-\delta<x<0$, 有 $|f(x)-f(\theta^-)|<\varepsilon$;

对任意 $0<x<\delta$, 有 $|f(x)-f(\theta^+)|<\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
&\left|A_r(f)(\theta)-\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}\right|\\
\leqslant&\left|P_r*f(\theta)-\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}\right|\\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-t)P_r(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta^+)P_r(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta^-)P_r(t)\mathrm{d}t\right|\\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(\theta-t)-f(\theta^-))P_r(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta^+)P_r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(\theta-t)P_r(t)\mathrm{d}t\right|\\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(\theta-t)-f(\theta^-))P_r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(\theta+t)-f(\theta^+))P_r(t)\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}|f(\theta-t)-f(\theta^-)|P_r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}|f(\theta+t)-f(\theta^+)|P_r(t)\mathrm{d}t\\
+&\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(\theta+t)-f(\theta^+)|P_r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(\theta+t)-f(\theta^+)|P_r(t)\mathrm{d}t\\
\leqslant&2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon P_r(t)\mathrm{d}t+2B\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|P_r(t)|\mathrm{d}t\\
=&\varepsilon+2B\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|P_r(t)|\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

又

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|P_r(t)|\mathrm{d}t\to 0, r\to 1^-$$

对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_0>0$, 使得任意 $1-\delta_0<r<1$, 有

$$\left|A_r(f)(\theta)-\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}\right|\lesssim\varepsilon$$

命题成立.

(2) 证明：

我们考虑 Good kernel 的性质：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}F_N(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2},\quad\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}F_N(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}$$

这是因为 $Fej\acute{e}r$ 核是 Good kernel, 并且是偶函数.

可积函数必定有界, 设

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|\leqslant B$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得任意 $-\delta<x<0$, 有 $|f(x)-f(\theta^-)|<\varepsilon$;

对任意 $0<x<\delta$, 有 $|f(x)-f(\theta^+)|<\varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_N(f)(\theta)-\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}\right|\\
\leqslant&\left|F_N*f(\theta)-\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}\right|\\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-t)F_N(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta^+)F_N(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta^-)F_N(t)\mathrm{d}t\right|\\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(\theta-t)-f(\theta^-))F_N(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta^+)F_N(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(\theta-t)F_N(t)\mathrm{d}t\right|\\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(\theta-t)-f(\theta^-))F_N(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(\theta+t)-f(\theta^+))F_N(t)\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}|f(\theta-t)-f(\theta^-)|F_N(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}|f(\theta+t)-f(\theta^+)|F_N(t)\mathrm{d}t\\
+&\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(\theta+t)-f(\theta^+)|F_N(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(\theta+t)-f(\theta^+)|F_N(t)\mathrm{d}t\\
\leqslant&2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon F_N(t)\mathrm{d}t+2B\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|F_N(t)|\mathrm{d}t\\
=&\varepsilon+2B\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|F_N(t)|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

又

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|F_N(t)|\mathrm{d}t\to 0,N\to\infty$$

对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $N_0>0$, 使得任意 $N>N_0$, 有

$$\left|\sigma_N(f)(\theta)-\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}\right|\lesssim\varepsilon$$

命题成立.

题目 12. Exercise 18:

$P_r(\theta)$ 表示 *Poisson* 核，证明：函数

$$u(r,\theta)=\frac{\partial P_r}{\partial\theta}$$

定义在 $0\leqslant r<1$ 和 $\theta\in\mathbb{R}$ 上, 满足

(1)

$$\Delta u=0$$

在圆盘上成立;

(2)

$$\lim_{r\to 1^-}u(r,\theta)=0$$

对所有 $\theta\in\mathbb{R}$ 成立.

解答.

(1)

$$\begin{aligned}u(r,\theta)=&\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}\\=&\sum_{n=-\infty}^{\infty}inr^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}\end{aligned}$$

不断计算有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\theta}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n^2)r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}\\\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-in^3)r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}\\\frac{\partial u}{\partial r}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}in|n|r^{|n|-1}\mathrm{e}^{in\theta}\\\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}in(n^2-|n|)r^{|n|-2}\mathrm{e}^{in\theta}\end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

满足

$$\Delta u=0$$

在圆盘中成立.

(2) 我们有:

$$u(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)=\frac{2r(r^2-1)\sin\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$$

当 $\theta=2k\pi$ 时, $u(r,\theta)=\dfrac{2r(r-1)(r+1)\cdot 0}{(r-1)^4}=0$

$$\lim_{r\to 1^-}u(r,\theta)=0$$

当 $\theta\neq 2k\pi$ 时, $u(r,\theta)=\dfrac{2r(r^2-1)\sin\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$

$$\lim_{r\to 1^-}u(r,\theta)=\frac{0}{2-2\cos\theta}=0.$$

命题得证.

题目 13. Problem 2:

D_N 是 N 阶 Dirichlet 核,

$$D_N(\theta)=\sum_{k=-N}^{N}\mathrm{e}^{ik\theta}=\frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\theta/2)}$$

定义:

$$L_N=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(\theta)|\mathrm{d}\theta$$

(1) 证明:存在 $c>0$, 使得:

$$L_N\geqslant\frac{4}{\pi^2}\log N+O(1)$$

(2) 证明:对每一个 $n\geqslant 1$, 存在一个连续函数 f_n, 使得 $|f_n|\leqslant 1$ 和 $|S_n(f_n)(0)|\geqslant c\log n$.

解答.

(1) 证明：首先熟知不等式 $\sin x \leqslant x, x \geqslant 0$, 当且仅当 $x=0$ 时取等.

$$
\begin{aligned}
L_N =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)|\mathrm{d}\theta \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})\theta)|}{|\sin(\theta/2)|}\mathrm{d}\theta \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})\theta)|}{\sin(\theta/2)}\mathrm{d}\theta \\
\geqslant& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})\theta)|}{\theta}\mathrm{d}\theta \\
=& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \\
=& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t + O(1) \\
=& \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t + O(1) \\
\geqslant& \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi}\mathrm{d}t + O(1) \\
\geqslant& \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + O(1) \\
\geqslant& \frac{4}{\pi^2}\int_{1}^{N}\frac{1}{x}\mathrm{d}x + O(1) \\
=& \frac{4}{\pi^2}\log N + O(1)
\end{aligned}
$$

其中,

$$
\frac{2}{\pi}\int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\log\left(1+\frac{1}{2N}\right) \leqslant \frac{2\log 2}{\pi}
$$

则

$$
\frac{2}{\pi}\int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = O(1)
$$

命题得证.

(2) 证明：设

$$g_n(\theta)=\begin{cases}1, & D_n(\theta)>0;\\ -1, & D_n(\theta)<0.\end{cases}$$

可见不连续点为 $D_n(\theta)$ 改变正负的点.

根据

$$D_n(\theta)=\frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\theta/2)}$$

的正负变化，可以知道 $g_n(\theta)$ 不连续点只有有限多个, 根据 Riemann-Lebesgue 引理:

$g_n(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积.

又 $|g_n(\theta)|\leqslant 1$,

根据可积函数可以被连续函数 L^1 逼近的引理:

对任意固定的 $n\geqslant 1$，存在连续函数列 $\{f_k^{(n)}\}$, 使得 $|f_k^{(n)}|\leqslant 1$, 且

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g_n(\theta)-f_k^{(n)}(\theta)|\mathrm{d}\theta\to 0, k\to\infty$$

对于 $\varepsilon=\dfrac{4}{\pi\sup D_n(\theta)}$, 存在 k_n 使得：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_n(\theta)-f_{k_n}^{(n)}(\theta)|\mathrm{d}\theta<\frac{2}{\pi^2\sup D_n(\theta)}$$

根据上一问中推导过程, 其中 $O(1)$ 部分为正数, 还有 $D_n(\theta)$ 是偶函数:

$$\begin{aligned}S_n(g_n(0))=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_n(\theta)*D_n(-\theta)\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_n(\theta)*D_n(\theta)\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(\theta)|\mathrm{d}\theta\\\geqslant&\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\end{aligned}$$

我们完成最后一步：

$$
\begin{aligned}
&S_n\left(f_{k_n}^{(n)}(0)\right)\\
\geqslant&S_n(g_n(0))-\left|S_n(g_n(0))-S_n(f_{k_n}^{(n)}(0))\right|\\
=&S_n(g_n(0))-\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g_n(\theta)-f_{k_n}^{(n)}(\theta))D_n(\theta)\mathrm{d}\theta\right|\\
\geqslant&\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\frac{2}{\pi^2}\\
\geqslant&\frac{2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\\
\geqslant&\frac{2}{\pi^2}\log n
\end{aligned}
$$

我们记

$$f_n=f_{k_n}^{(n)},n\geqslant 1,c=\frac{2}{\pi^2}$$

于是我们完成了命题.