Fourier Analysis Appendix 1

张浩然

2025 年 1 月 29 日

题目 1. Fourier 级数定义

解古典方程的半幅 Fourier 展开: $f \in \mathcal{R}[0,\pi]$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x \mathrm{d}x$$

一般的 Fourier 展开：

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$$

题目 2. ODE 参数为什么这么取值：

考虑 Dirichlet 问题，在矩形区域 $R = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 中有

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f_0(x) \\ u(x,1) = f_1(x) \\ u(0,y) = 0 \\ u(\pi,y) = 0 \end{cases}$$

其中 f_0, f_1 是确定解的初值.

解答.

分离变量法，就设 $u(x,y)=F(x)G(y)$, 代入

$$\Delta u = 0$$

即

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \lambda$$

这是因为左右变量独立，求导可以看出会等于常数 λ. 则

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ G''(y) + \lambda G(y) = 0 \end{cases}$$

接下来讨论我们需要的解的 λ 范围, 我们不考虑任何平凡解：容易排除掉其他情况, 得到 $\lambda < 0$

解得:

$$F(x) = C_{1,k}\cos\sqrt{-\lambda}x + C_{2,k}\sin\sqrt{-\lambda}x$$
$$G(y) = C_{3,k}\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}y} + C_{4,k}\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}y}$$

又根据边值条件：$u(0,y)=0, u(\pi,y)=0$

$$\begin{cases} C_{1,k} = 0 \\ C_{1,k}\cos\sqrt{-\lambda}\pi + C_{2,k}\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \end{cases}$$

那么，$C_{2,k}\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$, 我们想要非平凡解，肯定不能让 $C_{2,k}=0$，于是只能 $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$ 即 $\sqrt{-\lambda}\pi = k\pi, \lambda = -k^2, k \in \mathbb{Z}$.

题目 3. 中科大 2012 年 PDE 试题

$\varphi \in C_c^\infty(0,1)$, 即在 $(0,1)$ 上光滑，且具有紧支集，求下列初边值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, x \in (0,1), t \in (0,+\infty) \\ u(x,0) = \varphi \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

讨论 u 何时满足：

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = 0, \forall x \in (0,1)$$

解答.

分离变量法，设

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

有

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$
$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

同前讨论，$\lambda < 0$, 解两个 ODE：

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x) \\ T(t) = C_3 \mathrm{e}^{\lambda t} \end{cases}$$

$$X_x(x) = -C_1 \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda} x) + C_2 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda} x)$$

则

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ -C_1\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}) + C_2\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases}$$

于是，$\lambda = -n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}$.

特解

$$u_n = C_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)$$

通解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)$$

且

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\pi x)$$

于是，

$$|C_n| = \left|2\int_0^1 \varphi(x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M, M > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

对无穷时间渐近：

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)\right| \\ &\leqslant M\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \\ &\leqslant M\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi^2 t x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{M}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \to 0, t \to +\infty \end{aligned}$$

于是，我们证明了

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$$

并且这个极限是一致的.