一个微分中值定理的妙用

张浩然

2024 年 11 月 18 日

题目 1.

设 $a_i, b_i \geq M > 0$，且 $|a_i - b_i| \leq \varepsilon$，其中 $i = 1, 2, \ldots, n$. 证明：

$$\left|\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} - \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}\right| \leqslant \frac{n\varepsilon}{M^{n+1}}$$

解答.

我们考虑一个多元函数，

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i},$$

其中，

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t, x_i \geqslant M, 1 \leqslant i \leqslant n$$

考虑多元函数微分中值定理：

$$f(a) - f(b) = \nabla f(\xi) \cdot (a - b)$$

展开为:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} - \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{a_i - b_i}{\xi_i^2} \cdot \prod_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} \frac{1}{\xi_k}$$

其中，

$$\xi_i = b_i + \theta(a_i - b_i), \theta \in (0,1), \xi_i \geqslant M, |a_i - b_i| \leqslant \varepsilon$$

于是：

$$\begin{aligned}\left|\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} - \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\right| &= \sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i - b_i|}{\xi_i^2}\cdot\prod_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq i}\frac{1}{|\xi_k|} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{M^{n+1}} \\ &= \frac{n\varepsilon}{M^{n+1}}\end{aligned}$$