General Topology Chapter 1

张浩然

2025 年 3 月 5 日

题目 1. Exercise 1:

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $f(0)=f(1)=0$.

考虑由函数 f 在 $[0,1]$ 之间的图像、x 轴上从 $x=0$ 到 $x=1$ 的线段组成的简单闭曲线 C .

证明: 总可以在这条平面简单闭曲线 C 上找到四个点，使得它们为一个正方形的顶点.

提示: 考虑 $g(x)=f(x)-f(x+f(x)),h(x)=x+f(x)$.

解答.

由于 C 是简单闭曲线，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上没有零点且连续，则恒正或者恒负.

不妨设 $f(x)$ 恒正，否则考虑 $-f(x)$ 即可. 根据 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)>0$ 为最大值.

考虑 $h(x)=x+f(x)$, 在 $[0,1]$ 上连续, 则有 $g(0)=0+f(0)=0,g(1)=1+f(1)=1$, 根据介值定理,存在 $x_1\in(0,1)$, 使得 $g(x_1)=x_0$, 即 $x_1+f(x_1)=x_0$.

此时，我们延拓 $f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,1];\\ 0, & x\in(1+\infty) \end{cases}$$

延拓后，考虑 $g(x)=f(x)-f(x+f(x))$, 在 $[0,1]$ 上连续.

$$g(x_0)=f(x_0)-f(x_0+f(x_0))\geqslant 0$$
$$g(x_1)=f(x_1)-f(x_1+f(x_1))=f(x_1)-f(x_0)\leqslant 0$$

根据介值定理，存在 x_2 可能介于 x_0 和 x_1 之间, 可能等于 x_0 或 x_1, 使得

$$g(x_2)=0, f(x_2)=f(x_2+f(x_2))$$

简单闭曲线 C 上 $(x_2,0),(x_2+f(x_2),0),(x_2,f(x_2)),(x_2+f(x_2),f(x_2+f(x_2)))$ 为一个正方形的顶点.

题目 2. Exercise 2：

一个足球可以只用六边形组成吗？

解答.

答案是否定的.

假设成立，有 n 个六边形，我们考虑 Euler 公式：

几何体每个顶点由三个六边形贡献：$V=\dfrac{6n}{3}=2n$

几何体每条棱由两个六边形贡献：$E=\dfrac{6n}{2}=3n$

几何体每个面只由一个六边形贡献：$F=\dfrac{n}{1}=n$

则

$$V-E+F=2n-3n+n=0\neq 2$$

显然不能组成足球.

题目 3. Exercise 3:

Weierstrasss 在 1870 年对 Dirichlet 原理的反例

对任意函数 $u \in \mathcal{A} = \{C^1[-1,1] : u(-1)=0, u(1)=1\}$, 定义:

$$F(u) = \int_{-1}^{1} |xu'(x)|^2 \mathrm{d}x$$

(1) 证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 函数

$$u_n(x) := \left(\sin \frac{n\pi x}{2}\right)^2 \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) + \chi_{(\frac{1}{n},1]}(x)$$

是 $\mathcal{A}$ 的元素, 其中 $\chi_A(x)$ 是集合 A 的示性函数.

(2) 证明:

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = 0.$$

(3) 证明: 不存在函数 $u \in \mathcal{A}$ 可以取得 F 的最小值.

解答.

(1) 证明：

$$u_n(x) = \begin{cases} \left(\sin \dfrac{n\pi x}{2}\right)^2, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \\ 0, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$$u_n'(x) = \begin{cases} n\pi \sin \dfrac{n\pi x}{2} \cos \dfrac{n\pi x}{2}, & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right) \\ 0, & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

容易验证：

$$u_n'(0) = 0 = \lim_{x\to 0} u_n'(x), u_n'\left(\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{x\to\frac{1}{n}} u_n'(x),$$

于是 $u_n \in C^1[-1,1]$ 且 $u(-1)=0, u(1)=1$.

则 $u_n(x) \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) 证明：

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \int_{-1}^{1} |x u_n'(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{n}} \left(n\pi x \sin\frac{n\pi x}{2} \cos\frac{n\pi x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{1}{n}} n^2\pi^2 x^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{12n} \end{aligned}$$

于是，

$$0 \leqslant F(u_n) \leqslant \frac{\pi^2}{12n} \to 0, n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = 0.$$

(3) 证明：

我们用反证法, 假设存在函数 u 满足条件 $F(u) = 0$, 则

$$\int_{-1}^{1} |x u'(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$$

根据 $u(x) \in C^1[-1,1]$, 则 $|xu'(x)|^2 \in C^0[-1,1]$, 则

$$|xu'(x)|^2 = 0, \forall x \in [-1,1]$$

则 $u'(x) = 0, \forall x \in [-1,1]$, $u(x)$ 为常数，但与 $u(-1) = 0, u(1) = 1$ 矛盾！

于是不存在函数 u 取得 F 的下确界.