Fourier Analysis Appendix 4

张浩然

2025 年 4 月 28 日

题目 1. 2025 年中科院数学所推免笔试

(1) 证明: 三角级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上均收敛, 但它不可能是任何平方 Riemann 可积函数 $f\in\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数;

(2) 讨论三角级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(kx)}{k}$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上的收敛性和一致收敛性.

解答.

(1) 当 $x\neq 2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ 时，根据复指数方法：

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\sin(kx)\right| = \frac{\left|\cos(\frac{1}{2}x)-\cos(N+\frac{1}{2})\right|}{2|\sin\frac{1}{2}x|} \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

其一致有界，且 $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ 单调递减收敛于 0.

根据 Dirichlet 判别法，其收敛.

又 $x=2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ 时，显然收敛，则此级数 $x\in\mathbb{R}$ 均收敛.

反证法，假设其为某平方 Riemann 可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数. 则:

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2i\sqrt{k}}\mathrm{e}^{ikx}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{2i\sqrt{k}}\mathrm{e}^{-ikx}$$

根据 Parseval 恒等式:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$$

根据右侧级数发散，而左侧积分有限知道矛盾!

不存在任何平方 Riemann 可积函数满足条件.

(2) 此级数的收敛性方法同上, 但要注意 $x=2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ 时，$\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ 级数发散，$x\neq 2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ 时，级数收敛.

下说明 $x\neq 2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ 时，条件收敛.

用反证法，假设其绝对收敛, 那么:

$$\frac{|\cos(kx)|}{\sqrt{k}}\geqslant\frac{|\cos(kx)|^2}{\sqrt{k}}=\frac{\cos(2kx)}{2\sqrt{k}}+\frac{1}{2\sqrt{k}}$$

(1) 当 $x\neq n\pi, n\in\mathbb{Z}$ 因为 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2kx)}{2\sqrt{k}}$ 收敛，但 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{k}}=+\infty$ 矛盾!

(2) 当 $x=n\pi, n\in\mathbb{Z}$, $2\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{k}}=+\infty$, 矛盾!

则此级数条件收敛.

下证其不是一致收敛的. 存在 $\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, 存在 $n, 2n, x_0=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4n}$ 使得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\cos(n+1)x_0}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{\cos(2n)x_0}{\sqrt{2n}}\right|\\
=&\frac{\cos\frac{(n-1)\pi}{4n}}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{\cos 0}{\sqrt{2n}}\\
\geqslant&\cos\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\\
\geqslant&\cos\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
\geqslant&\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{2n}\\
=&\frac{\sqrt{2}}{4}=\varepsilon_0
\end{aligned}$$

则其非一致收敛.

但取不包含 $2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ 的任何闭区间，其上一致收敛的，这可以根据一致收敛的 Dirichlet 判别法得到, 因为 $|\sum_{k=1}^{N}\cos kx|\leqslant C$,$C>0$ 且与 x, N 无关, 且 $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ 关于 x 一致单调收敛到 0.

综上所述，$x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 时，此三角级数发散.

$x \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 时, 此三角级数条件收敛, 且不一致收敛，但是内闭一致收敛.