Fourier Analysis Appendix 3

张浩然

2025 年 4 月 20 日

题目 1. 2025 年丘成桐领军计划四月考试:

已知:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(nx)$$

求:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$$

解答.

显然此题是要考虑 Fourier 分析:

由于 $2^{-n}|\cos(nx)| \leqslant 2^{-n}$, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$$

根据 Weierstrass 判别法, 其一致收敛且每项连续, 则 f 在 $[0, 2\pi]$ 上连续.

又计算有:

$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{e}^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{e}^{-inx}$$

根据 Paseval 恒等式:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}$$

则:

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{7\pi}{3}$$

题目 2.

$$\int_0^{2\pi}(x^2 - a\cos x - b\sin x)^2\mathrm{d}x$$

取得最小值时,a 的值为?

解答.

我们考虑 $[0,2\pi]$ 上的函数空间内积:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

范数:

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

显然，我们在此内积空间上有最佳逼近引理:

$$\|f(x) - \langle f, \cos x\rangle\cos x - \langle f, \sin x\rangle\sin x\| \leqslant \|f(x) - a\cos x - b\sin x\|$$

取等时，我们有:

$$a = \langle f, \cos x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x = 4$$