

Fourier Analysis Chapter 3

张浩然

2025 年 4 月 18 日

题目 1. Exercise 1:

证明: d 有限时, \mathbb{R}^d 和 \mathbb{C}^d 是完备的.

解答. 证明:

只需要证明 Cauchy 列收敛, 并且此极限在空间中.

我们先研究 \mathbb{R}^d , 取一般的 2-范数 $\|\cdot\|$.

取 \mathbb{R}^d 中柯西列 $\{a_n\}$, 那么任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $m, n > N$ 时,

$$\|a_m - a_n\| < \varepsilon$$

则

$$|a_m^i - a_n^i| \leq \|a_m - a_n\| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, d$$

则 $\{a_n^i\}$ 是 \mathbb{R} 上 Cauchy 列, 则其收敛到一个实数 $a^i \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (a^1, a^2, \dots, a^d) \in \mathbb{R}^d$$

则 \mathbb{R}^d 是完备的.

将上述论证相关部分换成如下对应:

$$w \in \mathbb{R}^d, \|w\| = \sqrt{|w^1|^2 + \dots + |w^d|^2}$$

取 \mathbb{C}^d 中 Cauchy 列, 利用 \mathbb{C} 完备性同理.

题目 2. Exercise 2:

证明: $l^2(\mathbb{Z})$ 是完备的.

解答. 证明:

取 $l^2(\mathbb{Z})$ 中的 Cauchy 列 $\{a_{k,n}\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, n \in \mathbb{Z}}$

设 $A_k = a_{k,n}$, 取 l^2 范数, 则: 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $k, k' > N$ 时, 有

$$\|A_k - A_{k'}\| < \varepsilon$$

固定 n , 那么

$$|a_{k,n} - a_{k',n}| \leq \|A_k - A_{k'}\| < \varepsilon$$

那么 $a_{k,n}$ 是 \mathbb{C} 的柯西列, 则其收敛到复数 $a_n \in \mathbb{C}$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_k = B = (\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots)$$

让 $k' \rightarrow \infty$, 有:

$$\|A_k - B\| < \varepsilon, k > N$$

则存在 $M > 0$, 使得 $\|A_k - B\| \leq M, \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

那么,

$$\|B\| \leq \|A_k\| + \|A_k - B\| < +\infty$$

$B \in l^2(\mathbb{Z})$, 这就证明了 $l^2(\mathbb{Z})$ 是完备的, 进一步是 Hilbert 空间.

题目 3. Exercise 5:

已知

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = 0; \\ \log\left(\frac{1}{\theta}\right), & 0 < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

定义函数列:

$$f_n(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{1}{n}; \\ f(\theta), & \frac{1}{n} < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

证明: $\{f_n\}$ 是 \mathcal{R} (Riemann 可积函数空间) 中的 Cauchy 列, 但是 $f \notin \mathcal{R}$.

解答.

证明:

不妨设 $m > n, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 那么: $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_m(\theta) - f_n(\theta)|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \log^2\left(\frac{1}{\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\log^2(n) + 2\log(n) + 2}{n} - \frac{\log^2(m) + 2\log(m) + 2}{m} \right) \end{aligned}$$

根据

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^2(n) + 2\log(n) + 2}{n} = 0$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得任意 $m, n > N$, 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_m(\theta) - f_n(\theta)|^2 d\theta < \varepsilon$$

则 $\{f_n\}$ 是 \mathcal{R} 中的 Cauchy 列, 但是 $f \rightarrow +\infty, \theta \rightarrow 0^+$, 则 $f \notin \mathcal{R}$.

题目 4. Exercise 7

证明: 三角级数

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\log n} \sin nx$$

对任意的 x 都收敛, 但不是任何 Riemann 可积函数的 Fourier 级数.

解答.

$\frac{1}{\log n}$ 单调递减趋于 0, 并且 $\sum_{n=2}^N \sin nx$ 一致有界. 根据 Dirichlet 判别法, $x \neq 0$ 时, 此级数收敛.

$x = 0$ 时, 此级数显然也收敛.

改写此级数为:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{2i \log n} e^{inx} + \sum_{n \geq 2} \frac{-1}{2i \log n} e^{-inx}$$

我们用反证法, 假设其为 Riemann 可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 那么根据 Parseval 恒等式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2 \log^2 n}$$

等号左边应该为有限数, 而右边发散到正无穷, 矛盾! 不存在满足条件的 Riemann 可积函数.

题目 5. Exercise 8

上一章我们讨论了 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的问题. 接下来我们进一步讨论.

(1) 设 $f(\theta) = |\theta|, \theta \in [\pi, \pi]$. 利用 Parseval 恒等式计算:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

(2) 考虑以 2π 为周期的奇函数 $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$. 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

解答.

(1) 计算得到:

$$f(\theta) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n \text{ odd}} \frac{-2}{\pi n^2} e^{inx}$$

利用 Parseval 恒等式:

$$\frac{\pi^2}{4} + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 d\theta$$

整理得到:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4}$$

整理得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(2) 计算得到:

$$f(\theta) \sim \sum_{n \text{ odd}} \frac{4}{i\pi n^3} e^{inx}$$

利用 Parseval 恒等式:

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^6} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta^2(\pi-\theta)^2 d\theta$$

整理得到:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^6}$$

整理得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{64}{63} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

题目 6. Exercise 9

证明：当 $\alpha \in \mathbb{R}$ 不是整数时， $\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{i(\pi-x)\alpha}$, $x \in [0, 2\pi]$ 的 Fourier 级数为：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n + \alpha}$$

利用 Parseval 恒等式证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi \alpha)^2}$$

解答.

证明：

计算得到：

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{i(\pi-x)\alpha} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2 \sin \pi \alpha} e^{i\pi \alpha} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+\alpha)x} dx \\ &= \frac{1}{2 \sin \pi \alpha} e^{i\pi \alpha} \left. \frac{e^{-i(n+\alpha)x}}{-i(n+\alpha)} \right|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{n + \alpha} \end{aligned}$$

于是：

$$\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{i(\pi-x)\alpha} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n + \alpha}$$

根据 Parseval 恒等式：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \alpha} dx = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \alpha}$$

即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi \alpha)^2}$$

题目 7. Exercise 10

考虑上一章讨论过的弦振动问题，位移 $u(x, t)$ 满足：

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{\tau}{\rho}$$

弦振动初始条件为：

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

且 $f \in C^1, g \in C$.

我们定义此弦的总能量为：

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \tau \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

证明：总能量守恒，并且：

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \rho \int_0^L g^2(x) dx + \frac{1}{2} \tau \int_0^L f'^2(x) dx$$

解答. 证明：

对总能量求导，那么根据题设，对正则性良好诸函数可以交换积分和

求导次序:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dE}{dt} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot 2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau \cdot 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx \\
 &= \int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \int_0^L \tau \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx \\
 &= \int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^L - \int_0^L \tau \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\
 &= \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

其中用到 $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L, t)$, 以及

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

则

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \rho \int_0^L g^2(x) dx + \frac{1}{2} \tau \int_0^L f'^2(x) dx$$

题目 8. Exercise 11

Wirtinger 不等式和 Poincaré 不等式建立了函数范数和其导数范数的关系.

(1) 如果 f 周期为 T , 连续且满足分段 C^1 且 $\int_0^T f(t) dt = 0$, 证明:

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt$$

等号当且仅当 $f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ 时取得.

(2) 如果 f 同上, g 是 C^1 且周期为 T 的函数, 证明:

$$\left| \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt \right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(t)|^2 dt \int_0^T |g'(t)|^2 dt$$

(3) 对于任意紧致区间 $[a, b]$ 和任意满足 $f(a) = f(b) = 0$ 的连续可导函数 f , 证明:

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

讨论等号成立, 系数 $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ 不可改进

解答.

(1)

我们考虑一般系数的 Fourier 级数,

$$\int_0^T f(t) dt = 0$$

则 $\hat{f}(0) = 0$, 那么

$$f(t) \sim \sum_{n \neq 0} a_n e^{in \frac{2\pi}{T} t}$$

其中 $a_n = \hat{f}(n)$.

根据 f 周期为 T , 那么 $f(0) = f(T)$, 且由于分段 C_1 且连续, 除了有限个点外 f 可微, 且 f' 可积且绝对可积, 那么根据 Fourier 逐项求导定理:

$$f'(t) \sim \sum_{n \neq 0} in \frac{2\pi}{T} a_n e^{in \frac{2\pi}{T} t}$$

根据 Parseval 恒等式:

$$\begin{aligned} \int_0^T |f(t)|^2 dt &= 2\pi \sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \\ \int_0^T |f'(t)|^2 dt &= \frac{8\pi^2}{T^2} \sum_{n \neq 0} n^2 |a_n|^2 \end{aligned}$$

原命题等价于

$$\sum_{|n| \geq 2} |a_n|^2 \leq \sum_{|n| \geq 2} n^2 |a_n|^2$$

显然成立, 若取得等号, 则有:

$$a_n = 0, |n| \geq 2$$

有

$$\begin{aligned} f(t) &= a_1 e^{i\frac{2\pi}{T}t} + a_{-1} e^{-i\frac{2\pi}{T}t} \\ &= A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

其中 $A = i(a_1 - a_{-1}), B = a_1 + a_{-1}$

(2) 根据条件可以知道

$$\int_0^T \overline{f(t)} dt = 0$$

那么我们只需要研究:

$$\left| \int_0^T \overline{f(t)} \left(g(t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \right) \right|^2$$

由于

$$\int_0^T \left(g(t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \right) dt = 0$$

先用 Cauchy Schwarz 不等式, 再用 (1) 的 Wirtinger 不等式:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt \right|^2 \\ &= \left| \int_0^T \overline{f(t)} \left(g(t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \right) \right|^2 \\ &\leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \int_0^T \left| g(t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |g'(t)|^2 dt \\ &= \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(t)|^2 dt \cdot \int_0^T |g'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

可见成立.

(3) 我们做变换 $t = \frac{T}{2} \cdot \frac{x-a}{b-a}$, 其将 $[a, b]$ 映射为 $[0, T]$, 我们继续将 $f(x)$

关于 $x = a$ 奇延拓到 $[2a-b, b]$, 使得 $f(x) = -f(2a-x), x \in [2a-b, a]$.

则可设 $g(t) = f(x), g(t)$ 为满足连续可导的奇函数,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) dt = 0$$

利用 (1) 的 Wirtinger 不等式有:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2 dt &\leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g'(t)|^2 dt \\ \int_0^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2 dt &\leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^{\frac{T}{2}} |g'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

当且仅当 $g(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ 取得等号, 由于奇函数性质, 此时余弦项系数为 0.

接下来换回 $f(x)$ 有:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^2 \frac{T}{2(b-a)} dx &\leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_a^b \left| f'(x) \cdot \frac{dx}{dt} \right|^2 \frac{T}{2(b-a)} dx \\ \int_a^b |f(x)|^2 dx &\leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 \frac{4(b-a)^2}{T^2} dx \\ \int_a^b |f(x)|^2 dx &\leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

等号当且仅当 $f(x) = A \sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)$, 可见系数不能再改进.

题目 9. Exercise 12:

证明:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

解答.

证明:

我们考虑 Dirichlet 核,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} dx = 2\pi$$

那么拆开有:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin Nx \cdot \cos \frac{1}{2}x \cdot T(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos Nx \cdot \sin \frac{1}{2}x \cdot T(x) dx = 2\pi \\ & 2 \int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin Nx \cdot \cos \frac{1}{2}x \cdot T(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos Nx \cdot \sin \frac{1}{2}x \cdot T(x) dx = 2\pi \\ & 4 \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin Nx \cdot \cos \frac{1}{2}x \cdot T(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos Nx \cdot \sin \frac{1}{2}x \cdot T(x) dx = 2\pi \end{aligned}$$

其中 $T(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}x} - \frac{1}{\frac{1}{2}x}$, 而且

$$\lim_{x \rightarrow 0} T(x) = 0$$

可延拓使之连续, 于是满足 Riemann Lebesgue 引理:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin Nx \cdot \cos \frac{1}{2}x \cdot T(x) dx &= 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos Nx \cdot \sin \frac{1}{2}x \cdot T(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

则对之前等式, 令 $N \rightarrow \infty$, 有:

$$4 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2\pi$$

则

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

题目 10. Exercise 13

设 f 是周期函数而且是 C^k 的, 证明:

$$\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

解答.

证明:

首先根据 f 是周期函数且是 C^k 的, 设周期为 T 可以证明:

$$\hat{f}^{(k)}(n) = \left(in\frac{2\pi}{T}\right)^k \hat{f}(n)$$

则

$$\begin{aligned} ||n|^k \cdot \hat{f}(n)| &= \frac{|n|^k}{\left|\left(in\frac{2\pi}{T}\right)^k\right|} |\hat{f}^{(k)}(n)| \\ &= C_{\pi,T,k} |\hat{f}^{(k)}(n)| \\ &= C_{\pi,T,k} \cdot \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^T f^{(k)}(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx \right| \\ &= \tilde{C}_{\pi,T,k} \cdot \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \tilde{C}_{\pi,T,k} \cdot \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t) \cos(nt) dt \right| \\ &\quad + \tilde{C}_{\pi,T,k} \cdot \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t) \sin(nt) dt \right| \end{aligned}$$

$f^{(k)}$ 连续, 那么应用 Riemann Lebesgue 引理,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t) \sin(nt) dt &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t) \cos(nt) dt &= 0 \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n|^k \hat{f}(n) = 0$$

就是

$$\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

题目 11. Exercise 14

证明: 圆周上 C^1 函数 f 的 Fourier 级数绝对收敛.

解答.

证明: 即证明 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ 收敛.

既然 $f \in C^1$, 那么:

$$\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$$

进而

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{\hat{f}'(n)}{n} \right|$$

利用 Cauchy Schwarz 不等式:

$$\begin{aligned} & |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| \\ &= |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} \left| \hat{f}'(n) \cdot \frac{1}{n} \right| \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n \neq 0} |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\hat{f}(0)| + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\hat{f}(0)| + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

其中用到 Parseval 恒等式, 并且由于 $f \in C^1$, 推理自明.

原命题成立.

题目 12. Exercise 15

设 f 周期为 2π 且在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积.

(1) 证明:

$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx$$

则

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-inx} dx$$

(2) 假设 f 满足 α 阶的 Hölder 条件, 即对于常数 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $C > 0$, 有:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha, \forall x, h$$

利用 (1) 证明:

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$$

(3) 证明:(2) 中结果无法改进, 通过说明:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$

满足:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$$

其中 $0 < \alpha < 1$, 且

$$\hat{f}(N) = \frac{1}{N^\alpha}$$

当 $N = 2^k$ 成立.

解答.

(1) 证明:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

换元 $t + \frac{\pi}{n} = x$, 则:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) e^{-int - i\pi} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) e^{-int} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx\end{aligned}$$

接着各取一半:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-inx} dx$$

(2) 证明:

利用 (1) 及 Hölder 条件:

$$\begin{aligned}|\hat{f}(n)| &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-inx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right| dx \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C \left| \frac{\pi}{n} \right|^{\alpha} dx \\ &= \frac{C}{2} \cdot \frac{\pi^{\alpha}}{|n|^{\alpha}}\end{aligned}$$

于是我们得到:

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^{\alpha}}\right)$$

(3) 证明: 考虑直接作差

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x} \\ f(x+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k (x+h)}\end{aligned}$$

有:

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \left(e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x} \right) \right| \\
&\leq \sum_{2^k|h| \leq 1} 2^{-k\alpha} \left| e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x} \right| \\
&\quad + \sum_{2^k|h| > 1} 2^{-k\alpha} \left| e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x} \right| \\
&\leq \sum_{2^k|h| \leq 1} 2^{-k\alpha} \left| e^{i2^k h} - 1 \right| + \sum_{2^k|h| > 1} 2 \cdot 2^{-k\alpha} \\
&\leq \sum_{2^k|h| \leq 1} 2^{-k\alpha} \cdot 2^k |h| + \sum_{2^k|h| > 1} 2 \cdot 2^{-k\alpha} \\
&\leq \frac{1}{1-2^{\alpha-1}} |h|^\alpha + \frac{2}{1-2^{-\alpha}} |h|^\alpha \\
&\leq C_\alpha |h|^\alpha
\end{aligned}$$

即

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C_\alpha |h|^\alpha$$

有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| 2^{-k\alpha} e^{i2^k x} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} < +\infty$$

根据 Weierstrass 判别法,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$

一致收敛, 那么交换积分和求和次序, 可以得到 Fourier 系数为:

$$\hat{f}(N) = \frac{1}{N^\alpha}, \quad N = 2^k, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

这就说明了原估计不可以改进.

题目 13. Exercise 16

设 f 周期为 2π , 对常数 $K > 0$ 满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \forall x, y$$

下证, f 的 Fourier 级数绝对收敛且一致收敛.

(1) 对任意 $h > 0$, 我们定义:

$$g_h(x) = f(x + h) - f(x - h)$$

证明:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4|\sin nh|^2 \left| \hat{f}(n) \right|^2$$

以及:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sin nh|^2 \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq K^2 h^2$$

(2) 设 p 是一个正整数, 令 $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$, 证明:

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}$$

(3) 估计

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right|$$

并且证明: f 的 Fourier 级数绝对收敛, 进而一致收敛

(4) 修改上述过程, 可以证明 Bernstein 定理, 即若 f 满足 Hölder 条件, 且阶数 $\alpha > \frac{1}{2}$, 那么其 Fourier 级数绝对收敛.

解答.

(1) 证明:

$$\begin{aligned}
\hat{g}_h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+h) e^{-inx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-h) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} e^{inh} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} e^{-inh} dt \\
&= 2i \sin nh \cdot \hat{f}(n)
\end{aligned}$$

$f(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 则连续, 则 Riemann 可积, 根据 Parseval 恒等式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4 |\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2$$

进而,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4 |\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4K^2 h^2 dx \\
&= 4K^2 h^2
\end{aligned}$$

于是我们得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2 \leq K^2 h^2$$

(2) 我们根据 (1) 有:

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2 \leq K^2 h^2$$

取 $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$, 则

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2 \leq K^2 \frac{\pi^2}{2^{2p+2}}$$

而此时 $nh \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

则

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \frac{1}{2} \cdot \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq K^2 \frac{\pi^2}{2^{2p+2}}$$

整理得到:

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq K^2 \frac{\pi^2}{2^{2p+1}}$$

(3) 我们直接估计,

$$\begin{aligned} \sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right| &\leq \left(\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \frac{\pi}{2^{p+\frac{1}{2}}} \cdot 2^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{K\pi}{2} 2^{-\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

进一步,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(n) \right| &= \sum_{|n| \leq 1} \left| \hat{f}(n) \right| + \sum_{p \geq 1} \sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right| \\ &\leq \sum_{|n| \leq 1} \left| \hat{f}(n) \right| + \sum_{p \geq 1} \frac{K\pi}{2} 2^{-\frac{p}{2}} \\ &= \sum_{|n| \leq 1} \left| \hat{f}(n) \right| + \frac{K\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-\frac{1}{2}}} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

则其 Fourier 级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

绝对收敛, 并且一致收敛.

(4) 我们从 (1) 开始修改, 先列出条件: 存在 $M > 0$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \alpha > \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4 |\sin nh|^2 \left| \hat{f}(n) \right|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2^{2\alpha} M^2 h^{2\alpha} dx \\
&= 2^{2\alpha} M^2 h^{2\alpha}
\end{aligned}$$

于是我们得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin nh|^2 \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq 2^{2\alpha-2} M^2 h^{2\alpha}$$

继续修改有:

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |\sin nh|^2 \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin nh|^2 \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq 2^{2\alpha-2} M^2 h^{2\alpha}$$

取 $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$, 则

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |\sin nh|^2 \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq M^2 \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p+2}}$$

而此时 $nh \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$

则

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \frac{1}{2} \cdot \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq M^2 \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p+2}}$$

整理得到:

$$\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right|^2 \leq M^2 \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p+1}}$$

我们再次直接估计,

$$\begin{aligned}
\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right| &\leq \left(\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} \left| \hat{f}(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M \frac{\pi^\alpha}{2^{\alpha p + \frac{1}{2}}} \cdot 2^{\frac{p}{2} - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{M \pi^\alpha}{2} 2^{p(\frac{1}{2} - \alpha)}
\end{aligned}$$

进一步, 由于 $\frac{1}{2} - \alpha < 0$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| &= \sum_{|n| \leq 1} |\hat{f}(n)| + \sum_{p \geq 1} \sum_{2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |\hat{f}(n)| \\
 &\leq \sum_{|n| \leq 1} |\hat{f}(n)| + \sum_{p \geq 1} \frac{M\pi^\alpha}{2} 2^{p(\frac{1}{2}-\alpha)} \\
 &= \sum_{|n| \leq 1} |\hat{f}(n)| + \frac{M\pi^\alpha}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{2}-\alpha}} \\
 &< +\infty
 \end{aligned}$$

则其 Fourier 级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

绝对收敛, 并且一致收敛.

题目 14. Exercise 17

已知函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上单调有界, 证明:

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

解答.

证明: f 有界, 那么存在 $M > 0$, 使得

$$|f| \leq M$$

考虑特征函数 $\chi_{[a,b]}(x)$ 的 Fourier 系数,

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(n) = \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in}$$

则:

$$|\hat{\chi}_{[a,b]}(n)| \leq \frac{1}{\pi|n|}$$

则 $\hat{\chi}(n) = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$

现在考虑任意 $[-\pi, \pi]$ 上的分段阶梯函数

$$h(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{[a_k, a_{k+1}]}(x)$$

其中 $-\pi = a_1 < a_2 < \cdots < a_N < a_{N+1} = \pi$ 且 $-M \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_N \leq M$ 其 Fourier 系数

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \frac{e^{-ina_k} - e^{-ina_{k+1}}}{2\pi in} \\ &= \frac{1}{2\pi in} \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot (e^{-ina_k} - e^{-ina_{k+1}}) \end{aligned}$$

Abel 求和就有:

$$\begin{aligned} &\hat{h}(n) \\ &= \frac{1}{2\pi in} \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot (e^{-ina_k} - e^{-ina_{k+1}}) \\ &= \frac{1}{2\pi in} \left(\alpha_N (e^{-ina_1} - e^{-ina_{N+1}}) + \sum_{k=1}^{N-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) (e^{-ina_1} - e^{-ina_{k+1}}) \right) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} |\hat{h}(n)| &\leq \frac{1}{2\pi|n|} \left(2|\alpha_N| + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi|n|} (2|\alpha_N| + 2(\alpha_N - \alpha_1)) \\ &\leq \frac{6M}{2\pi|n|} \end{aligned}$$

则

$$\hat{h}(n) = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

且注意到这是关于 N, α_i, a_i 一致的.

f 是单调有界函数, 对任意 $\varepsilon > 0$, 则存在阶梯函数 $h'(x)$ 使得,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h'(x)| dx < \varepsilon$$

则

$$\begin{aligned}
 |\hat{f}(n)| &\leq |\hat{h}'(n)| + |\hat{f}(n) - \hat{h}'(n)| \\
 &= O\left(\frac{1}{|n|}\right) + \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - h'(x)) e^{-inx} dx\right| \\
 &\leq O\left(\frac{1}{|n|}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h'(x)| dx \\
 &= O\left(\frac{1}{|n|}\right) + \varepsilon
 \end{aligned}$$

根据 $O\left(\frac{1}{|n|}\right)$ 关于 N, α_I, a_i 的一致性和 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 我们有:

$$|\hat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

题目 15. Exercise 18

通过证明对于每个收敛到 0 的非负数列 $\{\varepsilon_n\}$, 存在连续函数 f , 使得存在可数无穷多个 n 使得:

$$|\hat{f}(n)| \geq \varepsilon_n$$

以此证明: 连续函数的 Fourier 系数级数可以以任意慢的速度收敛到 0.

解答.

证明:

已知对任意 $\{\varepsilon_n\}$, 任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $n_k \in \mathbb{N}$ 且 $n_k > n_{k-1}$, 使得:

$$|\varepsilon_{n_k}| < \frac{1}{k^2}$$

下定义:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k} e^{in_k x}$$

根据 Weierstrass 判别法:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_{n_k}| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

此函数是良定义的, 由于一致收敛, 是连续函数, 且满足:

$$\hat{f}(n_k) = \varepsilon_{n_k} \geq \varepsilon_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

原命题得证.

题目 16. Exercise 19

另一种证明 $\sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{inx}}{n}$ 关于 N 和 $x \in [-\pi, \pi]$ 一致有界的方法如下:
利用事实:

$$\frac{1}{2i} \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2} \int_0^x (D_N(t) - 1) dt$$

其中 $D_N(t)$ 是 Dirichlet 核, 并利用 Exercise 12 结论:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} < \infty$$

解答.

证明:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_0^x (D_N(t) - 1) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^x D_N(t) dt \right| + \frac{|x|}{2} \\ & \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left| \int_0^x D_N(t) dt \right| \\ & = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left| \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt \right| \\ & = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left| \int_0^x \left(\frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} - \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t} + \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t} \right) dt \right| \\ & \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left| \int_0^{|x|} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{\frac{1}{2}t} \right) dt \right| + \frac{1}{2} \left| \int_0^{|x|} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t} dt \right| \end{aligned}$$

估计第一部分, 根据

$$\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} \leq \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}, \quad \forall t > 0$$

利用上述不等式通分放缩得到:

$$0 \leq \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{\frac{1}{2}t} \right) \leq \frac{2t}{24 - t^2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left| \int_0^{|x|} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{\frac{1}{2}t} \right) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^{|x|} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{\frac{1}{2}t} \right) dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^{|x|} \frac{2t}{24 - t^2} dt \\ & = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{24}{24 - |x|^2} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|^2}{24 - |x|^2} \\ & \leq \frac{\pi^2}{48 - 2\pi^2} \end{aligned}$$

估计第二部分,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left| \int_0^{|x|} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t} dt \right| \\ & = \frac{1}{2} \left| \int_0^{|x|} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t} dt \right| \\ & = \left| \int_0^{(N+\frac{1}{2})|x|} \frac{\sin u}{u} du \right| \\ & \leq \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \\ & = C \end{aligned}$$

C 是与 N, x 无关常数.

综上所述,

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^x (D_N(t) - 1) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{48 - 2\pi^2} + C$$

原命题得证.

题目 17. Exercise 20

设 $f(x)$ 是锯齿函数 $f(x) = (\pi - x)/2, x \in (0, 2\pi)$, 且 $f(0) = 0$ 可延拓为 \mathbb{R} 上的周期函数.

其 Fourier 系数是

$$f(x) \sim \frac{1}{2i} \sum_{|n| \neq 0} \frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

f 有跳跃间断点在 $x = 0$, $f(0^+) = \frac{\pi}{2}$, $f(0^-) = -\frac{\pi}{2}$.

证明:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 < x \leq \frac{\pi}{N}} \{S_N(f)(x) - f(x)\} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \approx 0.09\pi$$

解答.

证明:

有

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (D_N(t) - 1) dt$$

则求导得:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (S_N(f)(x) - f(x)) \\ &= \frac{1}{2} D_N(x) \\ &= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

极大值点 $x = \frac{(2k+1)\pi}{N + \frac{1}{2}}$, 极小值点 $x = \frac{2k\pi}{N + \frac{1}{2}}, k \geq 1$

则代入 $\left(0, \frac{\pi}{N}\right)$ 中的极大值点和最大值点 $x_0 = \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}$ 得到:

$$\begin{aligned} & \max_{0 < x \leq \frac{\pi}{N}} \{S_N(f)(x) - f(x)\} \\ &= S_N(f)(x_0) - f(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}\right)}{k} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2N + 1} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}\right)}{k \cdot \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \frac{N}{N + \frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 < x \leq \frac{\pi}{N}} \{S_N(f)(x) - f(x)\} = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \approx 0.09\pi$$

题目 18. Problem 2

我们熟知函数族 $\{e^{inx}\}$ 是在 Riemann 可积函数空间 \mathcal{R} 中正交的且是完备的 (表现在 Fourier 级数依范数收敛到 f).

我们现在考虑具有相同性质的其他一族函数.

在 $[-1, 1]$ 上定义,

$$L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

则 L_n 是 n 次多项式, 称为 n 阶 Legendre 多项式.

(1) 证明: 如果 f 在 $[-1, 1]$ 上无穷阶可导, 有:

$$\int_{-1}^1 L_n(x) f(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n f^{(n)}(x) dx$$

特殊的, 证明: L_n 与 $x^m, m < n$ 正交, 因此 $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个正交函数族.

(2) 证明:

$$\|L_n\|^2 = \int_{-1}^1 |L_n(x)|^2 dx = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}$$

(3) 证明: 任何正交于 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 的 n 次多项式是 L_n 的常数倍.

(4) 设 $\mathcal{L}_n = \frac{L_n}{\|L_n\|}$, 即为标准化的 Legendre 多项式.

证明: $\{\mathcal{L}_n\}$ 是对 $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ Schmidt 正交化得到的, 并且每个 $[-1, 1]$ 上的 Riemann 可积函数 f 都有 Legendre 展开:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle \mathcal{L}_n$$

解答.

先定义内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

(1) 证明:

利用 Leibniz 法则, 容易验证:

$$\left. \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^n \right|_{x=-1,1} = 0$$

已知 $f \in C^\infty$, 利用分部积分直接计算:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 L_n(x) f(x) dx \\ &= \left. \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n f(x) \right|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n f'(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n f'(x) dx \\ &= (-1)^2 \int_{-1}^1 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^n f^{(2)}(x) dx \\ &= \dots \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n f^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$

当 $m < n, (x^m)^{(n)} = 0$

$$\int_{-1}^1 L_n(x) x^m dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot 0 dx = 0$$

则 L_n 与 $x^m, m < n$ 正交, 因为 $L_n(x)$ 是 n 次多项式, 则 $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个正交函数族.

(2) 证明:

$$\begin{aligned}
 \|L_n\|^2 &= \int_{-1}^1 |L_n(x)|^2 dx \\
 &= (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n dx \\
 &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \\
 &= (1)^n (2n)! 2 \cdot \int_0^1 (x^2 - 1)^n dx \\
 &= (-1)^n (2n)! 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \sin^{2n} \theta \sin \theta d\theta \\
 &= 2(2n)! \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\
 &= \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}
 \end{aligned}$$

(3) 证明: 由于次数小于等于 n 的多项式形成一个 $n+1$ 维线性空间, 而 $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ 恰好是 $n+1$ 个线性无关向量, 则为其一组正交基.

设满足对 $1, x, \dots, x^{n-1}$ 都正交的 n 次多项式为:

$$p_n(x) = a_n L_n(x) + \dots + a_1 L_1(x) + a_0 L_0(x)$$

那么 p_n 对于 $1, x, \dots, x^{n-1}$ 的线性组合 L_0, L_1, \dots, L_{n-1} 也正交.

两边做内积就有:

$$0 = \langle p_n, L_m \rangle = a_m \|L_m\|^2, m = 0, 1, \dots, n-1$$

又 $\|L_m\| \neq 0$, 则 $a_m = 0$, 于是:

$$p_n(x) = a_n L_n(x)$$

原命题成立.

(4) 证明: 只需要说明当 $\text{span}\{1, x, \dots, x^k\} = \text{span}\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k\}$ 时, 有:

$$\mathcal{E}_{k+1} = x^{k+1} - \sum_{i=0}^k \langle x^{k+1}, \mathcal{E}_i(x) \rangle \mathcal{E}_i(x)$$

则 \mathcal{E}_{k+1} 正交于 $\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k\}$, 且:

$$\text{span}\{1, x, \dots, x^k\} = \text{span}\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k\}$$

那么根据 (3) 知道:

$$\mathcal{E}_{k+1} = \lambda \mathcal{L}_{k+1}$$

且容易知道: $\lambda > 0$.

又容易知道标准化后, 则 $\{\mathcal{L}_n\}$ 是对 $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ Gram-Schmidt 标准正交化得到的一组标准正交基.

我们继续证明之前, 先约定好记号:

范数:

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

内积:

$$\langle \mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n \rangle = \delta_{mn}$$

其中 δ_{mn} 是 Kronecker 记号.

$f \in \mathcal{R}$ 时, 我们仿照一般的 Fourier 级数定义, Legendre 系数:

$$a_n = \langle f, \mathcal{L}_n \rangle, n \in \mathbb{N}$$

定义前 N 项和:

$$S_N(f)(x) = \sum_{i=0}^N a_i \mathcal{L}_i(x)$$

容易验证:

$$f = f - S_N(f)(x) + S_N(f)(x)$$

且 $f - S_N(f)(x)$ 与 $S_N(f)(x)$ 正交.

于是有:

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{i=0}^n |a_i|^2$$

我们还有最佳逼近引理:

$$\|f - S_N(f)(x)\| \leq \left\| f - \sum_{i=0}^N c_i \mathcal{L}_n(x) \right\|$$

我们继续仿照一般的均方收敛的证明:

若 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的连续函数, 根据 Weierstrass 第一逼近定理:

任意 $\varepsilon > 0$, 存在次数为 M 的多项式 $P(x)$ 使得:

$$\sup |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

则:

$$\|f(x) - S_N(f)(x)\| \leq \|f(x) - P(x)\| \lesssim \varepsilon$$

其中 $N \geq M$

若 $f(x)$ 只是 Riemann 可积, 那么存在 $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$, 满足:

$$\sup |g_n(x)| \leq \sup |f(x)|$$

且任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g_n(x)$

$$\int_{-1}^1 |f(x) - g_n(x)| dx < \varepsilon^2$$

那么计算:

$$\|f(x) - g_n(x)\| \lesssim \varepsilon$$

再用 Weierstrass 第一逼近定理:

存在多项式 $Q(x)$, 使得:

$$\|g_n(x) - Q(x)\| < \varepsilon$$

则:

$$\begin{aligned}
 & \|f(x) - S_N(f)(x)\| \\
 & \leq \|f(x) - Q(x)\| \\
 & \leq \|f(x) - g_n(x)\| + \|g_n(x) - Q(x)\| \\
 & \lesssim \varepsilon
 \end{aligned}$$

则均方收敛意义下:

$$f \xrightarrow{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle \mathcal{L}_n$$

题目 19. Problem 3

设 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

(1) 计算以 2π 为周期的函数 $f(x) = \cos \alpha x, x \in [-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数.

(2) 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}$$

对于所有 $u \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\cot u = \frac{1}{u} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

(3) 证明: 对任意 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, 有

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

(4) 对于 $0 < \alpha < 1$, 证明:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

解答.

(1) 直接计算:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x e^{-inx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x] dx \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{(-1)^n \alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2}
 \end{aligned}$$

(2) 证明: 由 (1): $\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^2}\right)$

则 Fourier 级数一致收敛, 即:

$$\cos \alpha x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2} e^{inx}$$

令 $x = \pi$, 则:

$$\cos \alpha \pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2}$$

整理得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}$$

令 $u = \alpha\pi \notin \pi\mathbb{Z}$,

代入上式整理:

$$\cot u = \frac{1}{u} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2 - n^2 \pi^2}.$$

(3)

$$\cos \alpha x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2} e^{inx}$$

令 $x = 0$, 即:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2}$$

整理得到:

$$\frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}$$

(4) 证明:

首先:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} + t^{(1-\alpha)-1}}{1+t} dt \end{aligned}$$

根据 Abel 定理:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{n+\alpha-1} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{n+\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \end{aligned}$$

上述计算中, 其中用到广义 Newton-Leibniz 公式, 以及 $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ 在 $(0, 1]$ 上的连续性, 以及

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$$

此瑕积分收敛, 因为

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} = t^{1-\alpha} \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} = 1$$

且 $0 < 1 - \alpha < 1$

$|t| < 1$ 时,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n$$

用到

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1}$$

在 $[0, x] (x < 1)$ 上绝对收敛且一致收敛, 于是可以逐项积分.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

根据 Dirichlet 判别法, 级数收敛, 则可以推出级数的 Abel 和收敛于同一值. 于是可以交换极限号和求和号.

同理可得:

$$\int_0^1 \frac{t^{(1-\alpha)-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\alpha}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} + t^{(1-\alpha)-1}}{1+t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha}{n^2 - \alpha^2} \\ &= \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \end{aligned}$$

题目 20. Problem 4

此题中, 我们发现了

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

的公式, 其中 k 是正偶数.

我们定义 Bernoulli 数 B_n :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

(1) 证明:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0$$

(2) 证明: 对于 $n \geq 1$, 有:

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k$$

(3) 改写得到:

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

证明: 当 $n > 1$ 且是奇数时, $B_n = 0$, 并且:

$$z \cot z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

(4) Zeta 函数定义为:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$$

通过之前结论说明:

$$x \cot x = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} x^{2m}$$

(5) 综上得到:

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{2^{2m-1} \pi^{2m}}{(2m)!} B_{2m}$$

解答.

(1) 证明: 直接计算:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{e^z - 1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \end{aligned}$$

根据 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ 绝对收敛且 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ 收敛,
那么 Cauchy 乘积收敛:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{(i+1)!} \cdot \frac{B_{k-i}}{(k-i)!} \right) z^k$$

对比系数即可, 有:

$$\begin{aligned} 1 &= B_0 \\ 0 &= B_1 + \frac{B_0}{2!} \\ 0 &= \frac{B_2}{2!} + \frac{B_1}{2!} + \frac{B_0}{3!} \\ 0 &= \frac{B_3}{3!} + \frac{B_2}{(2!)^2} + \frac{B_1}{3!} + \frac{B_0}{4!} \\ 0 &= \frac{B_4}{4!} + \frac{B_3}{2! \cdot 3!} + \frac{B_2}{3! \cdot 2!} + \frac{B_1}{4!} + \frac{B_0}{5!} \\ 0 &= \frac{B_5}{5!} + \frac{B_4}{2! \cdot 4!} + \frac{B_3}{3! \cdot 3!} + \frac{B_2}{4! \cdot 2!} + \frac{B_1}{5!} + \frac{B_0}{6!} \end{aligned}$$

解得:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0$$

(2) 证明: 由 (1) 对比系数知道: $n \geq 1$ 时,

$$\sum_{i=0}^n \frac{B_{n-i}}{(i+1)!(n-i)!} = 0$$

整理得到:

$$\begin{aligned}
 B_n &= - \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(i+1)!(n-i)!} B_{n-i} \\
 &= - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} B_k \\
 &= - \frac{1}{n+1} C_{n+1}^k B_k
 \end{aligned}$$

(3) 证明:

有

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

由于 $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}$ 是偶函数.

则 $n > 1$ 且 n 为奇数时, $B_n = 0$.

则我们继续推导:

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{2} \cot \frac{z}{2} &= \frac{z \cos \frac{z}{2}}{2 \sin \frac{z}{2}} \\
 &= \frac{iz e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}}{2 e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (iz)^{2n} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}
 \end{aligned}$$

则

$$z \cot z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

(4) 证明: 我们引 Problem 3 中 (2) 的结论:

$$\cot u = \frac{1}{u} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2 - n^2 \pi^2}, \quad u \notin \mathbb{C} \setminus \pi \mathbb{Z}$$

取 $|x| < \pi$

$$\begin{aligned}
 x \cot x &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2 \pi^2} \\
 &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2 \pi^2} \\
 &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{x^2}{n^2 \pi^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}} \\
 &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{2j}}{n^{2j} \pi^{2j}}
 \end{aligned}$$

由于存在 $|x| < \delta < \pi$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{x^{2j}}{n^{2j} \pi^{2j}} \right| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^{2j}}{n^{2j} \pi^{2j}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{n^2 \pi^2 - \delta^2} \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

可以交换求和次序,

$$\begin{aligned}
 x \cot x &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{2j}}{n^{2j} \pi^{2j}} \\
 &= 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2j}}{n^{2j} \pi^{2j}} \\
 &= 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(2j) \frac{x^{2j}}{\pi^{2j}}
 \end{aligned}$$

(5) 证明: 引用 (3) 和 (4) 的结论:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}$$

对比系数得到:

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n}$$

题目 21. Problem 5

定义 Bernoulli 多项式如下:

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

(1) 函数 $B_n(x)$ 是关于 x 的多项式, 且证明:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k x^{n-k}$$

以及:

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

(2) 证明:

$n \geq 1$, 则:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

若 $n \geq 2$, 则;

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n$$

(3) 定义: $S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$.

证明:

$$(m+1)S_m(n) = B_{m+1}(n) - B_{m+1}$$

(4) 证明: Bernoulli 多项式是唯一满足下列性质的多项式:

$$(i) B_0(x) = 1$$

$$(ii) B'_n(x) = nB_{n-1}(x), n \geq 1$$

$$(iii) \int_0^1 B_n(x) dx = 0, n \geq 1$$

证明: 由 (2) 可得:

$$\int_x^{x+1} B_n(t) dt = x^n$$

(5) 计算 $B_1(x)$ 的 Fourier 级数, 得到 $0 < x < 1$ 时,

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}$$

积分可得:

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n}}$$

$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}}$$

最后证明: 当 $0 < x < 1$ 时,

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i kx}}{k^n}$$

解答.

(1) 证明: 利用 Cauchy 乘积:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k)!} x^{n-k} z^n \end{aligned}$$

对比系数:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n! B_k}{k!(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k x^{n-k}$$

于是计算:

$$B_0(x) = B_0 = 1.$$

$$B_1(x) = B_0x - B_1x = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = B_0x^2 + 2B_1x + B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = B_0x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

(2) 证明: 有:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} z^n &= \frac{ze^{(x+1)z}}{e^z - 1} \\ &= \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} + ze^{xz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} z^n \end{aligned}$$

对比系数:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \geq 1$$

在上式和 (1) 结果中, 令 $x = 0$, 则:

$$B_n(1) - B_n(0) = B_n, \quad n \geq 2$$

(3) 证明: 引 (2), 令 $n = m + 1$, 从 $x = 1$ 求和道 $n - 1$ 计算有:

$$\begin{aligned} (m+1)S_m(n) &= \sum_{x=1}^{n-1} (B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x)) \\ &= B_{m+1}(n) - B_{m+1}(1) \\ &= B_{m+1}(n) - B_{m+1} \end{aligned}$$

(4) 证明:

我们先说明 Bernoulli 多项式满足三条性质:

(i) 是显而易见的计算.

(ii) 求导:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}B_n(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n C_n^k B_k x^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k B_k x^{n-1-k} \\ &= n B_{n-1}(x)\end{aligned}$$

(iii) 根据 (ii), 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 计算:

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_n(x) dx &= \int_0^1 \frac{B'_{n+1}}{n+1} dx \\ &= \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} \\ &= \frac{B_{n+1} - B_{n+1}}{n+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

于是 Bernoulli 多项式满足这三条性质.

我们采用反证法, 假设还有不同的多项式 $\{P_n(x)\}$ 满足三条性质:

那么我们设 $Q_n(x) = B_n(x) - P_n(x)$, 有:

$$Q_0 = B_0(x) - P_0(x) = 1 - 1 = 0$$

并且:

$$\begin{aligned}Q'_n(x) &= B'_n(x) - P'_n(x) \\ &= n(B_{n-1}(x) - Q_{n-1}(x)) \\ &= nQ_{n-1}(x), \quad n \geq 1\end{aligned}$$

那么

$$Q_1(x) = C$$

其中 C 为常数.

又容易知道:

$$\int_0^1 Q_n(x) dx, \quad n \geq 1$$

得到:

$$C = 0$$

则可以归纳法知道: 若 $Q_k(x) = 0$, 仿照上述过程, $Q_{k+1}(x) = 0$.

于是对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(x) - P_n(x) = Q_n(x) = 0$$

于是与假设矛盾, Bernoulli 多项式是唯一满足下列性质的多项式.

对于:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \geq 1$$

我们继续计算:

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} B_n(x) dx &= \int_x^{x+1} \frac{B'_{n+1}(x)}{n+1} dx \\ &= \frac{B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)x^n}{n+1} \\ &= x^n \end{aligned}$$

故所有命题成立.

(5) 证明: 计算 $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ 的 Fourier 系数:

$$\begin{aligned} \widehat{B_1}(n) &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-in2\pi x} dx \\ &= -\frac{1}{in2\pi} \end{aligned}$$

则:

$$B_1(x) \sim -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad 0 < x < 1$$

根据 Dirichlet 判别法:

$$B_1(x) = x - \frac{x}{2} = -\frac{2 \cdot 1!}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad 0 < x < 1$$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ 在 $[0, 1]$ 上可积且绝对可积, 那么可以逐项积分:

$$\int_0^x B_2'(x) dx = \int_0^x 2B_1(x) dx = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin(2\pi kx)}{k} dx$$

则:

$$B_2(x) = \frac{2 \cdot 2!}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}$$

其中化简时积分相消用到 $n > 1$ 时:

$$B_i = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}, & i = 2n \\ 0, & i = 2n + 1 \end{cases}$$

以此用归纳法, 假设有:

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n}}$$

$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}}$$

则我们计算:

$$\begin{aligned} & \int_0^x B_{2n+2}'(x) dx \\ &= \int_0^x (2n+2) B_{2n+1}(x) dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2(2n+2)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}} dx \end{aligned}$$

则:

$$B_{2n+2}(x) = (-1)^{n+2} \frac{2 \cdot (2n+2)!}{(2\pi)^{2n+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n+2}}$$

继续计算有:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x B'_{2n+3}(x) dx \\
 &= \int_0^x (2n+3) B_{2n+2}(x) dx \\
 &= (-1)^{n+2} \frac{2 \cdot (2n+3)!}{(2\pi)^{2n+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n+2}}
 \end{aligned}$$

于是,

$$B_{2n+3} = (-1)^{n+2} \frac{2 \cdot (2n+3)!}{(2\pi)^{2n+3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+3}}$$

归纳结束. 命题成立.

结合之前的结论:

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{2\pi i kx}}{k^2}, \quad 0 < x < 1$$