Fourier Analysis Chapter 1

张浩然

2025 年 1 月 24 日

题目 1. Exercise 6:

若 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶连续可导，且为微分方程

$$f''(t)+c^2f(t)=0$$

的一个解，$c\neq 0$, 证明：存在 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得，$f(t)=a\cos ct+b\sin ct$

解答.

学过 ODE 的基本理论的都是知道这是一个二阶线性齐次常系数微分方程，基础解系很明显，不过我们这里给一个构造性的直接法.

令

$$\begin{cases} g(t)=f(t)\cos ct-c^{-1}f'(t)\sin ct \\ h(t)=f(t)\sin ct+c^{-1}f'(t)\cos ct \end{cases}$$

对 t 求导，

$$\begin{cases} g'(t)=-cf(t)\sin ct-c^{-1}f''(t)\sin ct=cf(t)\sin ct-cf(t)\sin ct=0 \\ h'(t)=cf(t)\cos ct+c^{-1}f''(t)\cos ct=cf(t)\cos ct-cf(t)\cos ct=0 \end{cases}$$

于是两个函数为常数 a, b

$$\begin{cases} f(t)\cos ct - c^{-1}f'(t)\sin ct = a \\ f(t)\sin ct + c^{-1}f'(t)\cos ct = b \end{cases}$$

利用 Cramer 法则，得到 $f(t) = a\cos t + b\sin t$.

题目 2. Exercise 9：

对于拨弦问题，即

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

其中，如果初始形状 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xh}{p}, & 0 \leqslant x \leqslant p \\ \dfrac{h(\pi - x)}{\pi - p}, & p \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

证明：f 的正弦 Fourier 系数是 $A_m = \dfrac{2h}{m^2}\dfrac{\sin mp}{p(\pi - p)}$.

并找出第 $2, 4, ..., 2n$ ... 谐波消失的位置以及第 $3, 6, ..., 3n, ...$ 谐波消失的位置.

解答.

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin mx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^p \frac{xh}{p}\sin mx\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_p^\pi \frac{h(\pi - x)}{\pi - p}\sin mx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2h}{\pi p}\left(-p\frac{\cos mp}{m} + \frac{\sin mp}{m^2}\right) + \frac{2h}{\pi(\pi - p)}\left((\pi - p)\frac{\cos mp}{n} + \frac{\sin mp}{m^2}\right) \\ &= \frac{2h}{m^2}\frac{\sin mp}{p(\pi - p)}. \end{aligned}$$

对于 $2n$, 谐波消失位置只可能为满足 $\sin 2np = 0$, 即 $p = \dfrac{k\pi}{2n}, 1 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \dfrac{k\pi}{2n} \right\} = \left\{ \dfrac{\pi}{2} \right\}$

对于 $3n$, 谐波消失位置只可能为满足 $\sin 3np = 0$, 即 $p = \dfrac{k\pi}{3n}, 1 \leqslant k \leqslant 3n-1$.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \dfrac{k\pi}{3n} \right\} = \left\{ \dfrac{\pi}{3} \right\} \cup \left\{ \dfrac{2\pi}{3} \right\}$

题目 3. Exercise 10:

给出 Laplace 算子：

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

的极坐标表达式.

并证明：

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2$$

解答.

这是一道简单的《数学分析三》练习题

$r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

复合求导公式：

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

于是，

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2+\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2$$

进一步，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}$$

加起来就是，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

题目 3 的注记.

我们用分离变量的方法解热稳态方程就是直角坐标 Laplace 算子变成极坐标下 Laplace 算子，最后解一个二阶常系数线性齐次微分方程和一个二阶欧拉方程.

题目 4. Exercise 11:

证明当 $n\in\mathbb{Z}$ 时，二阶微分方程：

$$r^2F''(r)+rF'(r)-n^2F(r)=0$$

的解必定为 r^n 和 r^{-n} 的线性组合 $(n\neq 0)$.

或 1 和 $\log r$ 的线性组合 $(n=0)$

解答.

教材上给了一种降阶的方法，最后归结为一阶非齐次变系数微分方程，这里直接用解欧拉方程的方法迅速给出解系.

令 $r=\mathrm{e}^t, t=\log r$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}-n^2F=0$$

有：

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}$$

最后原方程变成二阶常系数齐次微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2} - n^2F = 0$$

$n = 0$, 有基础解系 $1, t$, 即 $1, \log r$.

$n \neq 0$, 有基础解系 $\mathrm{e}^{-n}, \mathrm{e}^{n}$ 即 r^n, r^{-n}。

题目 5. Problem 1

考虑 Dirichlet 问题，在矩形区域 $R = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 中有

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = f_0(x) \\ u(x, 1) = f_1(x) \\ u(0, y) = 0 \\ u(\pi, y) = 0 \end{cases}$$

其中 f_0, f_1 是确定解的初值.

如果有 Fourier 展开为 $f_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx$,$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx$, 利用分离变量法证明：

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} A_k + \frac{\sinh ky}{\sinh k} B_k \right) \sin kx$$

解答.

分离变量法，就设 $u(x, y) = F(x)G(y)$, 代入

$$\Delta u = 0$$

即

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \lambda$$

这是因为左右变量独立，求导可以看出会等于常数 λ. 则

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ G''(y) + \lambda G(y) = 0 \end{cases}$$

接下来讨论我们需要的解的 λ 范围, 我们不考虑任何平凡解：

(1)$\lambda = 0$

解得 $F(x) = C_1 + C_2 x$.

由 $u(0,y) = 0, u(\pi,y) = 0$, 得到：$F(0)G(y) = 0, F(\pi)G(y) = 0$，由于不考虑平凡解，$F(0) = 0, F(\pi) = 0$.

$C_1 = C_2 = 0$, 进而 $u(x,y) = 0$, 不考虑.

(2)$\lambda > 0$

解得 $F(x) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$

由 $u(0,y) = 0, u(\pi,y) = 0$, 得到：$F(0)G(y) = 0, F(\pi)G(y) = 0$，由于不考虑平凡解，$F(0) = 0, F(\pi) = 0$.

同样的方法，$C_1 = C_2 = 0$, 进而 $u(x,y) = 0$, 不考虑.

(3)$\lambda < 0$

设 $\lambda = -k^2, k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

解得:

$$F(x) = C_{1,k}\cos kx + C_{2,k}\sin kx$$
$$G(y) = C_{3,k}\mathrm{e}^{ky} + C_{4,k}\mathrm{e}^{-ky}$$

又有：$u(0,y) = 0, u(\pi,y) = 0$, 可以解出 $C_{1,k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(C_{3,k}\mathrm{e}^{ky} + C_{4,k}\mathrm{e}^{-ky}\right) C_{2,k} \sin kx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_{1,k}\mathrm{e}^{ky} + \mu_{2,k}\mathrm{e}^{-ky}\right) \sin kx
\end{aligned}
$$

根据

$$
u(x,0) = f_0(x), \quad u(x,1) = f_1(x)
$$

$$
\begin{cases}
\mu_{1,k} + \mu_{2,k} = A_k \\
\mu_{1,k}\mathrm{e}^{k} + \mu_{2,k}\mathrm{e}^{-k} = B_k
\end{cases}
$$

解得：

$$
\begin{cases}
\mu_{1,k} = \dfrac{A_k\mathrm{e}^{k} - B_k}{\mathrm{e}^{k} - \mathrm{e}^{-k}} \\
\mu_{2,k} = \dfrac{-A_k\mathrm{e}^{-k} + B_k}{\mathrm{e}^{k} - \mathrm{e}^{-k}}
\end{cases}
$$

于是，

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_{1,k}\mathrm{e}^{ky} + \mu_{2,k}\mathrm{e}^{-ky}\right) \sin kx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k \dfrac{\mathrm{e}^{k(1-y)} - \mathrm{e}^{-k(1-y)}}{2} + B_k \dfrac{\mathrm{e}^{ky} - \mathrm{e}^{-ky}}{2}}{\dfrac{\mathrm{e}^{k} - \mathrm{e}^{-\mathrm{k}}}{2}} \right) \sin kx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} A_k + \frac{\sinh ky}{\sinh k} B_k \right) \sin kx
\end{aligned}
$$