Fourier Analysis Chapter 3

张浩然

2025 年 4 月 17 日

题目 1. Exercise 1:

证明: d 有限时，$\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{C}^d$ 是完备的.

解答. 证明:

只需要证明 Cauchy 列收敛，并且此极限在空间中.

我们先研究 $\mathbb{R}^d$, 取一般的 2− 范数 $\|\cdot\|$.

取 $\mathbb{R}^d$ 中柯西列 $\{a_n\}$, 那么任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $m, n > N$ 时,

$$\|a_m - a_n\| < \varepsilon$$

则

$$|a_m^i - a_n^i| \leqslant \|a_m - a_n\| < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, d$$

则 $\{a_n^i\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上 Cauchy 列，则其收敛到一个实数 $a^i \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (a^1, a^2, \cdots, a^d) \in \mathbb{R}^d$$

则 $\mathbb{R}^d$ 是完备的.

将上述论证相关部分换成如下对应:

$w \in \mathbb{R}^d$, $\|w\| = \sqrt{|w^1|^2 + \cdots + |w^d|^2}$

取 $\mathbb{C}^d$ 中 Cauchy 列，利用 $\mathbb{C}$ 完备性同理.

题目 2. Exercise 2:

证明: $l^2(\mathbb{Z})$ 是完备的.

解答. 证明:

取 $l^2(\mathbb{Z})$ 中的 Cauchy 列 $\{a_{k,n}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1},n\in\mathbb{Z}}$

设 $A_k = a_{k,n}$, 取 l^2 范数, 则：任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $k, k' > N$ 时, 有

$$\|A_k - A_{k'}\| < \varepsilon$$

固定 n, 那么

$$|a_{k,n} - a_{k',n}| \leqslant \|A_k - A_{k'}\| < \varepsilon$$

那么 $a_{k,n}$ 是 $\mathbb{C}$ 的柯西列，则其收敛到复数 $a_n \in \mathbb{C}$

则

$$\lim_{n\to\infty} A_k = B = (\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots)$$

让 $k' \to \infty$, 有:

$$\|A_k - B\| < \varepsilon, k > N$$

则存在 $M > 0$, 使得 $\|A_k - B\| \leqslant M, \forall k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

那么，

$$\|B\| \leqslant \|A_k\| + \|A_k - B\| < +\infty$$

$B \in l^2(\mathbb{Z})$, 这就证明了 $l^2(\mathbb{Z})$ 是完备的，进一步是 Hilbert 空间.

题目 3. Exercise 5:

已知

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = 0; \\ \log\left(\dfrac{1}{\theta}\right), & 0 < \theta \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

定义函数列:

$$f_n(\theta)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{1}{n};\\ f(\theta), & \dfrac{1}{n}<\theta\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

证明：$\{f_n\}$ 是 $\mathcal{R}$(Riemann 可积函数空间) 中的 Cauchy 列, 但是 $f\notin\mathcal{R}$.

解答.

证明：

不妨设 $m>n, m,n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, 那么：$\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{m}$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_m(\theta)-f_n(\theta)|^2\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}\log^2\left(\frac{1}{\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\log^2(n)+2\log(n)+2}{n}-\frac{\log^2(m)+2\log(m)+2}{m}\right)\end{aligned}$$

根据

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log^2(n)+2\log(n)+2}{n}=0$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$，使得任意 $m,n>N$, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_m(\theta)-f_n(\theta)|^2\mathrm{d}\theta<\varepsilon$$

则 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{R}$ 中的 Cauchy 列, 但是 $f\to+\infty,\theta\to 0^+$, 则 $f\notin\mathcal{R}$.

题目 4. Exercise 7

证明: 三角级数

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\log n}\sin nx$$

对任意的 x 都收敛，但不是任何 Riemann 可积函数的 Fourier 级数.

解答.

$\dfrac{1}{\log n}$ 单调递减趋于 0, 并且 $\sum_{n=2}^{N} \sin nx$ 一致有界. 根据 Dirichlet 判别法，$x \neq 0$ 时，此级数收敛.

$x = 0$ 时，此级数显然也收敛.

改写此级数为:

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{2i \log n} \mathrm{e}^{inx} + \sum_{n \geqslant 2} \frac{-1}{2i \log n} \mathrm{e}^{-inx}$$

我们用反证法，假设其为 Riemann 可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数，那么根据 Parseval 恒等式：

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2 \log^2 n}$$

等号左边应该为有限数，而右边发散到正无穷，矛盾！不存在满足条件的 Riemann 可积函数.

题目 5. Exercise 8

上一章我们讨论了 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的问题. 接下来我们进一步讨论.

(1) 设 $f(\theta) = |\theta|, \theta \in [\pi, \pi]$. 利用 Parseval 恒等式计算：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

(2) 考虑以 2π 为周期的奇函数 $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$. 证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

解答.

(1) 计算得到：

$$f(\theta) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n \text{ odd}} \frac{-2}{\pi n^2} \mathrm{e}^{inx}$$

利用 Parseval 恒等式:

$$\frac{\pi^2}{4}+2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n+1)^4}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta^2\mathrm{d}\theta$$

整理得到:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}$$

整理得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

(2) 计算得到：

$$f(\theta)\sim\sum_{n\ \mathrm{odd}}\frac{4}{i\pi n^3}\mathrm{e}^{inx}$$

利用 Parseval 恒等式:

$$2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^6}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\theta^2(\pi-\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

整理得到:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^6}$$

整理得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{64}{63}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

题目 6. Exercise 9

证明：当 $\alpha \in \mathbb{R}$ 不是整数时，$\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha} \mathrm{e}^{i(\pi-x)\alpha}, x \in [0, 2\pi]$ 的 Fourier 级数为:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n+\alpha}$$

利用 Parseval 恒等式证明:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}$$

解答.

证明：

计算得到：

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \mathrm{e}^{i(\pi-x)\alpha} \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2 \sin \pi\alpha} \mathrm{e}^{i\pi\alpha} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i(n+\alpha)x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2 \sin \pi\alpha} \mathrm{e}^{i\pi\alpha} \left. \frac{\mathrm{e}^{-i(n+\alpha)x}}{-i(n+\alpha)} \right|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{n+\alpha}
\end{aligned}$$

于是：

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \mathrm{e}^{i(\pi-x)\alpha} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n+\alpha}$$

根据 Parseval 恒等式:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha}$$

即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}$$

题目 7. Exercise 10

考虑上一章讨论过的弦振动问题，位移 $u(x,t)$ 满足：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad c^2=\frac{\tau}{\rho}$$

弦振动初始条件为:

$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$$

且 $f\in C^1, g\in C$.

我们定义此弦的总能量为：

$$E(t)=\frac{1}{2}\rho\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\tau\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$$

证明: 总能量守恒，并且:

$$E(t)=E(0)=\frac{1}{2}\rho\int_0^L g^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\tau\int_0^L f'^2(x)\mathrm{d}x$$

解答. 证明:

对总能量求导，那么根据题设，对正则性良好诸函数可以交换积分和

求导次序:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\\
=&\frac{1}{2}\int_0^L \rho\cdot 2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^L \tau\cdot 2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^L \rho\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x+\int_0^L \tau\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^L \rho\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x+\tau\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_0^L-\int_0^L \tau\frac{\partial u}{t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\\
=&0
\end{aligned}
$$

其中用到 $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t)=\dfrac{\partial u}{\partial t}(L,t)$, 以及

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

则

$$E(t)=E(0)=\frac{1}{2}\rho\int_0^L g^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\tau\int_0^L f'^2(x)\mathrm{d}x$$

题目 8. Exercise 11

Wirtinger 不等式和 Poincaré 不等式建立了函数范数和其导数范数的关系.

(1) 如果 f 周期为 T, 连续且满足分段 C^1 且 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$, 证明:

$$\int_0^T |f(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f'(t)|^2\mathrm{d}t$$

等号当且仅当 $f(t)=A\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)+B\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$ 时取得.

(2) 如果 f 同上，g 是 C^1 且周期为 T 的函数, 证明:

$$\left|\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t\right|^2\leqslant\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(t)|^2\mathrm{d}t\int_0^T |g'(t)|^2\mathrm{d}t$$

(3) 对于任意紧致区间 $[a,b]$ 和任意满足 $f(a)=f(b)=0$ 的连续可导函数 f，证明:

$$\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t$$

讨论等号成立，系数 $\dfrac{(b-a)^2}{\pi^2}$ 不可改进

解答.

(1)

我们考虑一般系数的 Fourier 级数,

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$$

则 $\hat{f}(0)=0$, 那么

$$f(t) \sim \sum_{n\neq 0} a_n \mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

其中 $a_n = \hat{f}(n)$.

根据 f 周期为 T, 那么 $f(0)=f(T)$, 且由于分段 C_1 且连续，除了有限个点外 f 可微, 且 f' 可积且绝对可积, 那么根据 Fourier 逐项求导定理:

$$f'(t) \sim \sum_{n\neq 0} in\frac{2\pi}{T} a_n \mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

根据 Parseval 恒等式:

$$\int_0^T |f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\pi\sum_{n\neq 0}|a_n|^2$$

$$\int_0^T |f'(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{8\pi^2}{T^2}\sum_{n\neq 0}n^2|a_n|^2$$

原命题等价于

$$\sum_{|n|\geqslant 2}|a_n|^2 \leqslant \sum_{|n|\geqslant 2}n^2|a_n|^2$$

显然成立，若取得等号, 则有：

$$a_n = 0, |n| \geqslant 2$$

有

$$\begin{aligned} f(t) =& a_1 \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}t} + a_{-1}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{T}t} \\ =& A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

其中 $A = i(a_1 - a_{-1}), B = a_1 + a_{-1}$

(2) 根据条件可以知道

$$\int_0^T \overline{f(t)}\mathrm{d}t = 0$$

那么我们只需要研究:

$$\left|\int_0^T \overline{f(t)}\left(g(t) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\right)\right|^2$$

由于

$$\int_0^T \left(g(t) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = 0$$

先用 Cauchy Schwarz 不等式, 再用 (1) 的 Wirtinger 不等式:

$$\begin{aligned} & \left|\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t\right|^2 \\ =& \left|\int_0^T \overline{f(t)}\left(g(t) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\right)\right|^2 \\ \leqslant& \int_0^T |f(t)|^2\mathrm{d}t \int_0^T \left|g(t) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\right|^2 \mathrm{d}t \\ \leqslant& \int_0^T |f(t)|^2\mathrm{d}t \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |g'(t)|^2\mathrm{d}t \\ =& \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(t)|^2\mathrm{d}t \cdot \int_0^T |g'(t)|^2\mathrm{d}t \end{aligned}$$

可见成立.

(3) 我们做变换 $t = \dfrac{T}{2}\cdot\dfrac{x-a}{b-a}$, 其将 $[a,b]$ 映射为 $[0,T]$, 我们继续将 $f(x)$ 关于 $x = a$ 奇延拓到 $[2a-b, b]$, 使得 $f(x) = -f(2a-x), x \in [2a-b, a]$.

则可设 $g(t)=f(x)$,$g(t)$ 为满足连续可导的奇函数,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)\mathrm{d}t = 0$$

利用 (1) 的 Wirtinger 不等式有:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g'(t)|^2\mathrm{d}t$$
$$\int_{0}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_{0}^{\frac{T}{2}} |g'(t)|^2\mathrm{d}t$$

当且仅当 $g(t)=A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ 取得等号, 由于奇函数性质, 此时余弦项系数为 0.

接下来换回 $f(x)$ 有:

$$\int_a^b |f(x)|^2\frac{T}{2(b-a)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_a^b \left|f'(x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|^2\frac{T}{2(b-a)}\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\frac{4(b-a)^2}{T^2}\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

等号当且仅当 $f(x)=A\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)$, 可见系数不能再改进.

题目 9. Exercise 12:

证明:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

解答.

证明:

我们考虑 Dirichlet 核,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\mathrm{d}x = 1$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x=2\pi$$

那么拆开有:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sin Nx\cdot\cos\frac{1}{2}x\cdot T(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\cos Nx\cdot\sin\frac{1}{2}x\cdot T(x)\mathrm{d}x=2\pi$$
$$2\int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}\sin Nx\cdot\cos\frac{1}{2}x\cdot T(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\cos Nx\cdot\sin\frac{1}{2}x\cdot T(x)\mathrm{d}x=2\pi$$
$$4\int_{0}^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}\sin Nx\cdot\cos\frac{1}{2}x\cdot T(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\cos Nx\cdot\sin\frac{1}{2}x\cdot T(x)\mathrm{d}x=2\pi$$

其中 $T(x)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}x}-\dfrac{1}{\frac{1}{2}x}$, 而且

$$\lim_{x\to0}T(x)=0$$

可延拓使之连续, 于是满足 Riemann Lebesgue 引理:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sin Nx\cdot\cos\frac{1}{2}x\cdot T(x)\mathrm{d}x=0$$
$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\cos Nx\cdot\sin\frac{1}{2}x\cdot T(x)\mathrm{d}x=0$$

则对之前等式, 令 $N\to\infty$, 有:

$$4\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=2\pi$$

则

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

题目 10. Exercise 13

设 f 是周期函数而且是 C^k 的，证明:

$$\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

解答.

证明:

首先根据 f 是周期函数且是 C^k 的，设周期为 T 可以证明:

$$\hat{f}^{(k)}(n)=\left(in\frac{2\pi}{T}\right)^k\hat{f}(n)$$

则

$$\begin{aligned}
||n|^k\cdot\hat{f}(n)| =&\frac{|n|^k}{\left|\left(in\dfrac{2\pi}{T}\right)^k\right|}|\hat{f}^{(k)}(n)|\\
=&C_{\pi,T,k}|\hat{f}^{(k)}(n)|\\
=&C_{\pi,T,k}\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^T f^{(k)}(x)\mathrm{e}^{-in\frac{2\pi}{T}x}\mathrm{d}x\right|\\
=&\widetilde{C}_{\pi,T,k}\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant&\widetilde{C}_{\pi,T,k}\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)\cos(nt)\mathrm{d}t\right|\\
+&\widetilde{C}_{\pi,T,k}\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

$f^{(k)}$ 连续，那么应用 Riemann Lebesgue 引理,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)\sin(nt)\mathrm{d}t=0\\
\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)\cos(nt)\mathrm{d}t=0
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}|n|^k\hat{f}(n)=0$$

就是

$$\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

题目 11. Exercise 14

证明: 圆周上 C^1 函数 f 的 Fourier 级数绝对收敛.

解答.

证明: 即证明 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|$ 收敛.

既然 $f\in C^1$, 那么:

$$\hat{f'}(n)=in\hat{f}(n)$$

进而

$$\left|\hat{f}(n)\right|=\left|\frac{\hat{f'}(n)}{n}\right|$$

利用 Cauchy Schwarz 不等式:

$$\begin{aligned}
&\left|\hat{f}(0)\right|+\sum_{n\neq0}\left|\hat{f}(n)\right|\\
=&\left|\hat{f}(0)\right|+\sum_{n\neq0}\left|\hat{f'}(n)\cdot\frac{1}{n}\right|\\
\leqslant&\left|\hat{f}(0)\right|+\left(\sum_{n\neq0}\left|\hat{f'}(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n\neq0}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leqslant&\left|\hat{f}(0)\right|+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f'}(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n\neq0}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
=&\left|\hat{f}(0)\right|+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n\neq0}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
=&\left|\hat{f}(0)\right|+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
<&\infty
\end{aligned}$$

其中用到 Parseval 恒等式，并且由于 $f\in C^1$, 推理自明.

原命题成立.

题目 12. Exercise 15

设 f 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积.

(1) 证明：

$$\hat{f}(n)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x$$

则

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x$$

(2) 假设 f 满足 α 阶的 Hölder 条件, 即对于常数 $0<\alpha\leqslant 1$ 和 $C>0$, 有:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant C|h|^{\alpha},\forall x,h$$

利用 (1) 证明:

$$\hat{f}(n)=O\left(\frac{1}{|n|^{\alpha}}\right)$$

(3) 证明:(2) 中结果无法改进，通过说明:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}\mathrm{e}^{i2^{k}x}$$

满足:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant C|h|^{\alpha}$$

其中 $0<\alpha<1$, 且

$$\hat{f}(N)=\frac{1}{N^{\alpha}}$$

当 $N=2^{k}$ 成立.

解答.

(1) 证明:

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x$$

换元 $t+\dfrac{\pi}{n}=x$, 则:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{-int-i\pi}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

接着各取一半:

$$
\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x
$$

(2) 证明:

利用 (1) 及 Hölder 条件:

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{f}(n)\right| =& \frac{1}{4\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant& \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\mathrm{d}x \\
\leqslant& \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\left|\frac{\pi}{n}\right|^{\alpha}\mathrm{d}x \\
=& \frac{C}{2}\cdot\frac{\pi^{\alpha}}{|n|^{\alpha}}
\end{aligned}
$$

于是我们得到:

$$
\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^{\alpha}}\right)
$$

(3) 证明: 考虑直接作差

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}\mathrm{e}^{i2^k x}
$$

$$
f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}\mathrm{e}^{i2^k (x+h)}
$$

有:

$$\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| =&\left|\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}\left(\mathrm{e}^{i2^k(x+h)}-\mathrm{e}^{i2^k x}\right)\right| \\
\leqslant &\sum_{2^k|h|\leqslant 1} 2^{-k\alpha}\left|\mathrm{e}^{i2^k(x+h)}-\mathrm{e}^{i2^k x}\right| \\
&+\sum_{2^k|h|>1} 2^{-k\alpha}\left|\mathrm{e}^{i2^k(x+h)}-\mathrm{e}^{i2^k x}\right| \\
\leqslant &\sum_{2^k|h|\leqslant 1} 2^{-k\alpha}\left|\mathrm{e}^{i2^k h}-1\right|+\sum_{2^k|h|>1} 2\cdot 2^{-k\alpha} \\
\leqslant &\sum_{2^k|h|\leqslant 1} 2^{-k\alpha}\cdot 2^k|h|+\sum_{2^k|h|>1} 2\cdot 2^{-k\alpha} \\
\leqslant &\frac{1}{1-2^{\alpha-1}}h|^{\alpha}+\frac{2}{1-2^{-\alpha}}|h|^{\alpha} \\
\leqslant &C_\alpha|h|^{\alpha}
\end{aligned}$$

即

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant C_\alpha|h|^{\alpha}$$

有:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|2^{-k\alpha}\mathrm{e}^{i2^k x}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-k\alpha}<+\infty$$

根据 Weierstrass 判别法,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-k\alpha}\mathrm{e}^{i2^k x}$$

一致收敛，那么交换积分和求和次序, 可以得到 Fourier 系数为:

$$\hat{f}(N)=\frac{1}{N^{\alpha}},\quad N=2^k,k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$

这就说明了原估计不可以改进.

题目 13. Exercise 16

设 f 周期为 2π, 对常数 $K>0$ 满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|,\forall x,y$$

下证, f 的 Fourier 级数绝对收敛且一致收敛.

(1) 对任意 $h>0$, 我们定义:

$$g_h(x)=f(x+h)-f(x-h)$$

证明:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_h(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}4|\sin nh|^2\left|\hat{f}(n)\right|^2$$

以及:

$$\sum_{n-\infty}^{\infty}|\sin nh|^2\left|\hat{f}(n)\right|^2\leqslant K^2h^2$$

(2) 设 p 是一个正整数, 令 $h=\dfrac{\pi}{2^{p+1}}$, 证明:

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\hat{f}(n)\right|^2\leqslant\frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}$$

(3) 估计

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\hat{f}(n)\right|$$

并且证明: f 的 Fourier 级数绝对收敛, 进而一致收敛

(4) 修改上述过程, 可以证明 Bernstein 定理, 即若 f 满足 Hölder 条件, 且阶数 $\alpha>\dfrac{1}{2}$, 那么其 Fourier 级数绝对收敛.

解答.

(1) 证明:

$$
\begin{aligned}
\hat{g}_h(n) =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+h)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-h)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{e}^{inh} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{e}^{-inh}\mathrm{d}t \\
=&2i\sin nh\cdot\hat{f}(n)
\end{aligned}
$$

$f(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 则连续, 则 Riemann 可积, 根据 Parseval 恒等式:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4\,|\sin nh|^2 \left|\hat{f}(n)\right|^2$$

进而,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4\,|\sin nh|^2 \left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
\leqslant&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 4K^2h^2\mathrm{d}x \\
=&4K^2h^2
\end{aligned}
$$

于是我们得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin nh|^2 \left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant K^2h^2$$

(2) 我们根据 (1) 有:

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p} |\sin nh|^2 \left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin nh|^2 \left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant K^2h^2$$

取 $h=\dfrac{\pi}{2^{p+1}}$, 则

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p} |\sin nh|^2 \left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant K^2\frac{\pi^2}{2^{2p+2}}$$

而此时 $nh\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$

则

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p} \frac{1}{2}\cdot\left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant K^2\frac{\pi^2}{2^{2p+2}}$$

整理得到:

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p} \left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant K^2\frac{\pi^2}{2^{2p+1}}$$

(3) 我们直接估计,

$$\begin{aligned}
\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p} \left|\hat{f}(n)\right| \leqslant &\left(\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p} \left|\hat{f}(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leqslant &K\frac{\pi}{2^{p+\frac{1}{2}}}\cdot 2^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}} \\
= &\frac{K\pi}{2}2^{-\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

进一步,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(n)\right| &= \sum_{|n|\leqslant 1}\left|\hat{f}(n)\right| + \sum_{p\geqslant 1}\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\hat{f}(n)\right| \\
&\leqslant \sum_{|n|\leqslant 1}\left|\hat{f}(n)\right| + \sum_{p\geqslant 1}\frac{K\pi}{2}2^{-\frac{p}{2}} \\
&= \sum_{|n|\leqslant 1}\left|\hat{f}(n)\right| + \frac{K\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-2^{-\frac{1}{2}}} \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

则其 Fourier 级数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{inx}$$

绝对收敛，并且一致收敛.

(4) 我们从 (1) 开始修改, 先列出条件: 存在 $M>0$,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha}, \alpha>\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4\left|\sin nh\right|^2\left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|g_h(x)\right|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2^{2\alpha}M^2h^{2\alpha}\mathrm{d}x\\
= & 2^{2\alpha}M^2h^{2\alpha}
\end{aligned}$$

于是我们得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\sin nh\right|^2\left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant 2^{2\alpha-2}M^2h^{2\alpha}$$

继续修改有:

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\sin nh\right|^2\left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\sin nh\right|^2\left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant 2^{2\alpha-2}M^2h^{2\alpha}$$

取 $h=\dfrac{\pi}{2^{p+1}}$, 则

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\sin nh\right|^2\left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant M^2\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p+2}}$$

而此时 $nh\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$

则

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\frac{1}{2}\cdot\left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant M^2\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p+2}}$$

整理得到:

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\hat{f}(n)\right|^2 \leqslant M^2\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p+1}}$$

我们再次直接估计,

$$\begin{aligned}
\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\hat{f}(n)\right| \leqslant & \left(\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\hat{f}(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}1^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leqslant & M\frac{\pi^{\alpha}}{2^{\alpha p+\frac{1}{2}}}\cdot 2^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}\\
= & \frac{M\pi^{\alpha}}{2}2^{p\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}
\end{aligned}$$

进一步, 由于 $\dfrac{1}{2}-\alpha<0$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(n)\right| &= \sum_{|n|\leqslant 1}\left|\hat{f}(n)\right| + \sum_{p\geqslant 1}\sum_{2^{p-1}<|n|\leqslant 2^p}\left|\hat{f}(n)\right| \\ &\leqslant \sum_{|n|\leqslant 1}\left|\hat{f}(n)\right| + \sum_{p\geqslant 1}\frac{M\pi^\alpha}{2}2^{p(\frac{1}{2}-\alpha)} \\ &= \sum_{|n|\leqslant 1}\left|\hat{f}(n)\right| + \frac{M\pi^\alpha}{2}\cdot\frac{1}{1-2^{\frac{1}{2}-\alpha}} \\ &< +\infty\end{aligned}$$

则其 Fourier 级数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{inx}$$

绝对收敛，并且一致收敛.

题目 14. Exercise 17

已知函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上单调有界, 证明:

$$\hat{f}(n)=O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

解答.

证明: f 有界, 那么存在 $M>0$, 使得

$$|f|\leqslant M$$

考虑特征函数 $\chi_{[a,b]}(x)$ 的 Fourier 系数,

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(n)=\frac{\mathrm{e}^{-ina}-\mathrm{e}^{-inb}}{2\pi in}$$

则:

$$\left|\hat{\chi}_{[a,b]}(n)\right|\leqslant\frac{1}{\pi|n|}$$

则 $\hat{\chi}(n)=O\left(\frac{1}{|n|}\right)$

现在考虑任意 $[-\pi,\pi]$ 上的分段阶梯函数

$$h(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\chi_{[a_k,a_{k+1}]}(x)$$

其中 $-\pi=a_1<a_2<\cdots<a_N<a_{N+1}=\pi$ 且 $-M\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_N\leqslant M$ 其 Fourier 系数

$$\begin{aligned}\hat{h}(n)=&\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\cdot\frac{\mathrm{e}^{-ina_k}-\mathrm{e}^{-ina_{k+1}}}{2\pi in}\\=&\frac{1}{2\pi in}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\cdot(\mathrm{e}^{-ina_k}-\mathrm{e}^{-ina_{k+1}})\end{aligned}$$

Abel 求和就有:

$$\begin{aligned}&\hat{h}(n)\\=&\frac{1}{2\pi in}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\cdot(\mathrm{e}^{-ina_k}-\mathrm{e}^{-ina_{k+1}})\\=&\frac{1}{2\pi in}\left(\alpha_N\left(\mathrm{e}^{-ina_1}-\mathrm{e}^{-ina_{N+1}}\right)+\sum_{k=1}^{N-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})\left(\mathrm{e}^{-ina_1}-\mathrm{e}^{-ina_{k+1}}\right)\right)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\left|\hat{h}(n)\right|\leqslant&\frac{1}{2\pi|n|}\left(2|\alpha_N|+2\sum_{k=1}^{N-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\right)\\=&\frac{1}{2\pi|n|}\left(2|\alpha_N|+2(\alpha_N-\alpha_1)\right)\\\leqslant&\frac{6M}{2\pi|n|}\end{aligned}$$

则

$$\hat{h}(n)=O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

且注意到这是关于 N,α_i,a_i 一致的.

f 是单调有界函数, 对任意 $\varepsilon>0$, 则存在阶梯函数 $h'(x)$ 使得,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-h'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

则

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(n)\right| &\leqslant \left|\hat{h}'(n)\right| + \left|\hat{f}(n) - \hat{h}'(n)\right| \\ &= O\left(\frac{1}{|n|}\right) + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - h'(x)\right)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant O\left(\frac{1}{|n|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - h'(x)\right|\mathrm{d}x \\ &= O\left(\frac{1}{|n|}\right) + \varepsilon\end{aligned}$$

根据 $O\left(\frac{1}{|n|}\right)$ 关于 N, α_I, a_i 的一致性和 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 我们有:

$$\left|\hat{f}(n)\right| = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

题目 15. Exercise 18

通过证明对于每个收敛到 0 的非负数列 $\{\varepsilon_n\}$, 存在连续函数 f, 使得存在可数无穷多个 n 使得:

$$\left|\hat{f}(n)\right| \geqslant \varepsilon_n$$

以此证明: 连续函数的 Fourier 系数级数可以以任意慢的速度收敛到 0.

解答.

证明:

已知对任意 $\{\varepsilon_n\}$, 任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $n_k \in \mathbb{N}$ 且 $n_k > n_{k-1}$, 使得:

$$|\varepsilon_{n_k}| < \frac{1}{k^2}$$

下定义:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k} \mathrm{e}^{in_k x}$$

根据 Weierstrass 判别法:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_n| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

此函数是良定义的, 由于一致收敛, 是连续函数, 且满足:

$$\hat{f}(n_k) = \varepsilon_{n_k} \geqslant \varepsilon_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

原命题得证.

题目 16. Exercise 19

另一种证明 $\sum_{0<|n|\leqslant N} \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ 关于 N 和 $x \in [-\pi, \pi]$ 一致有界的方法如下: 利用事实:

$$\frac{1}{2i} \sum_{0<|n|\leqslant N} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(D_N(t) - 1\right) \mathrm{d}t$$

其中 $D_N(t)$ 是 Dirichlet 核, 并利用 Exercise 12 结论:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} < \infty$$

解答.

证明:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\int_0^x (D_N(t) - 1)\mathrm{d}t\right| \\
\leqslant &\frac{1}{2}\left|\int_0^x D_N(t)\mathrm{d}t\right| + \frac{|x|}{2} \\
\leqslant &\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left|\int_0^x D_N(t)\mathrm{d}t\right| \\
= &\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t\right| \\
= &\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \left(\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} - \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t} + \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}\right)\mathrm{d}t\right| \\
\leqslant &\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left|\int_0^{|x|} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{\frac{1}{2}t}\right)\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{2}\left|\int_0^{|x|} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

估计第一部分, 根据

$$\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}\leqslant\sin\frac{t}{2}\leqslant\frac{t}{2},\quad\forall t>0$$

利用上述不等式通分放缩得到:

$$0\leqslant\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{\frac{1}{2}t}\right)\leqslant\frac{2t}{24-t^2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\int_0^{|x|}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{\frac{1}{2}t}\right)\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant&\frac{1}{2}\int_0^{|x|}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{\frac{1}{2}t}\right)\mathrm{d}t\\
\leqslant&\frac{1}{2}\int_0^{|x|}\frac{2t}{24-t^2}\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{2}\ln\left(\frac{24}{24-|x|^2}\right)\\
\leqslant&\frac{1}{2}\cdot\frac{|x|^2}{24-|x|^2}\\
\leqslant&\frac{\pi^2}{48-2\pi^2}
\end{aligned}$$

估计第二部分,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\int_0^{|x|}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t\right|\\
=&\frac{1}{2}\left|\int_0^{|x|}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t\right|\\
=&\left|\int_0^{(N+\frac{1}{2})|x|}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|\\
\leqslant&\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\\
=&C
\end{aligned}$$

C 是与 N,x 无关常数.

综上所述,

$$\left|\frac{1}{2}\int_0^x(D_N(t)-1)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{48-2\pi^2}+C$$

原命题得证.

题目 17. Exercise 20

设 $f(x)$ 是锯齿函数 $f(x)=(\pi-x)/2, x\in(0,2\pi)$, 且 $f(0)=0$ 可延拓为 $\mathbb{R}$ 上的周期函数.

其 Fourier 系数是

$$f(x)\sim\frac{1}{2i}\sum_{|n|\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

f 有跳跃间断点在 $x=0$, $f(0^+)=\frac{\pi}{2}$, $f(0^-)=-\frac{\pi}{2}$.

证明:

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0<x\leqslant\frac{\pi}{N}}\{S_N(f)(x)-f(x)\}=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\approx 0.09\pi$$

解答.

证明:

有

$$S_N(f)(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(D_N(t)-1)\mathrm{d}t$$

则求导得:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(S_N(f)(x)-f(x)\right)\\=&\frac{1}{2}D_N(x)\\=&\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

极大值点 $x=\dfrac{(2k+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}$, 极小值点 $x=\dfrac{2k\pi}{N+\frac{1}{2}}$, $k\geqslant 1$

则代入 $\left(0,\dfrac{\pi}{N}\right)$ 中的极大值点和最大值点 $x_0=\dfrac{\pi}{N+\frac{1}{2}}$ 得到:

$$\begin{aligned}
&\max_{0<x\leqslant\frac{\pi}{N}}\{S_N(f)(x)-f(x)\}\\
=&S_N(f)(x_0)-f(x_0)\\
=&\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin\left(k\cdot\dfrac{\pi}{N+\frac{1}{2}}\right)}{k}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2N+1}\\
=&\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin\left(k\cdot\dfrac{\pi}{N+\frac{1}{2}}\right)}{k\cdot\dfrac{\pi}{N+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\pi}{N}\cdot\frac{N}{N+\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0<x\leqslant\frac{\pi}{N}}\{S_N(f)(x)-f(x)\}=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\approx 0.09\pi$$

题目 18. Problem 2

我们熟知函数族 $\{\mathrm{e}^{inx}\}$ 是在 Riemann 可积函数空间 $\mathcal{R}$ 中正交的且是完备的 (表现在 Fourier 级数依范数收敛到 f).

我们现在考虑具有相同性质的其他一族函数.

在 $[-1,1]$ 上定义,

$$L_n(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

则 L_n 是 n 次多项式, 称为 n 阶 Legendre 多项式.

(1) 证明: 如果 f 在 $[-1,1]$ 上无穷阶可导, 有:

$$\int_{-1}^{1}L_n(x)f(x)\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^nf^{(n)}(x)\mathrm{d}x$$

特殊的, 证明:L_n 与 $x^m,m<n$ 正交, 因此 $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个正交函数族.

(2) 证明:

$$\|L_n\|^2=\int_{-1}^{1}|L_n(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}$$

(3) 证明: 任何正交于 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 的 n 次多项式是 L_n 的常数倍.

(4) 设 $\mathcal{L}_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|}$, 即为标准化的 Legendre 多项式.

证明:$\{\mathcal{L}_n\}$ 是对 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$Schmidt 正交化得到的, 并且每个 $[-1, 1]$ 上的 Riemann 可积函数 f 都有 Legendre 展开:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle \mathcal{L}_n$$

解答.

先定义内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

(1) 证明:

利用 Leibniz 法则, 容易验证:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^n\bigg|_{x=-1,1} = 0$$

已知 $f \in C^{\infty}$, 利用分部积分直接计算:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} L_n(x)f(x)\mathrm{d}x \\
=&\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n f(x)\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n f'(x)\mathrm{d}x \\
=&-\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n f'(x)\mathrm{d}x \\
=&(-1)^2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}(x^2-1)^n f^{(2)}(x)\mathrm{d}x \\
=&\cdots \\
=&(-1)^n\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n f^{(n)}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

当 $m < n,(x^m)^{(n)} = 0$

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)x^m\mathrm{d}x = (-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \cdot 0\mathrm{d}x = 0$$

则 L_n 与 $x^m, m < n$ 正交, 因为 $L_n(x)$ 是 n 次多项式, 则 $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个正交函数族.

(2) 证明:

$$\begin{aligned}
\|L_n\|^2 =& \int_{-1}^{1} |L_n(x)|^2 \mathrm{d}x \\
=&(-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}} (x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
=&(-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
=&(1)^n (2n)! 2 \cdot \int_{0}^{1} (x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
=&(-1)^n (2n)! 2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \sin^{2n}\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \\
=&2(2n)! \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\
=&\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

(3) 证明: 由于次数小于等于 n 的多项式形成一个 $n+1$ 维线性空间, 而 $\{L_0, L_1, \cdots, L_n\}$ 恰好是 $n+1$ 个线性无关向量, 则为其一组正交基.

设满足对 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 都正交的 n 次多项式为:

$$p_n(x) = a_n L_n(x) + \cdots + a_1 L_1(x) + a_0 L_0(x)$$

那么 p_n 对于 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 的线性组合 $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$ 也正交.

两边做内积就有:

$$0 = \langle p_n, L_m \rangle = a_m \|L_m\|^2, m = 0, 1, \cdots, n-1$$

又 $\|L_m\| \neq 0$, 则 $a_m = 0$, 于是:

$$p_n(x) = a_n L_n(x)$$

原命题成立.

(4) 证明: 只需要说明当 $span\{1, x, \cdots, x^k\} = span\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k\}$ 时, 有:

$$\mathcal{E}_{k+1} = x^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \left\langle x^{k+1}, \mathcal{E}_i(x) \right\rangle \mathcal{E}_i(x)$$

则 $\mathcal{E}_{k+1}$ 正交于 $\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k\}$, 且:

$$span\{1, x, \cdots, x^k\} = span\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k\}$$

那么根据 (3) 知道:

$$\mathcal{E}_{k+1} = \lambda \mathcal{L}_{k+1}$$

且容易知道:$\lambda > 0$.

又容易知道标准化后, 则 $\{\mathcal{L}_n\}$ 是对 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ Gram-Schmidt 标准正交化得到的一组标准正交基.

我们继续证明之前, 先约定好记号:

范数:

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

内积:

$$\langle \mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n \rangle = \delta_{mn}$$

其中 δ_{mn} 是 Kronecker 记号.

$f \in \mathcal{R}$ 时, 我们仿照一般的 Fourier 级数定义, Legendre 系数:

$$a_n = \langle f, \mathcal{L}_n \rangle, n \in \mathbb{N}$$

定义前 N 项和:

$$S_N(f)(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i \mathcal{L}_i(x)$$

容易验证:

$$f = f - S_N(f)(x) + S_N(f)(x)$$

且 $f - S_N(f)(x)$ 与 $S_N(f)(x)$ 正交.

于是有:

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2$$

我们还有最佳逼近引理:

$$\|f - S_N(f)(x)\| \leqslant \left\| f - \sum_{i=0}^{N} c_i \mathcal{L}_n(x) \right\|$$

我们继续仿照一般的均方收敛的证明:

若 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续函数, 根据 Weierstrass 第一逼近定理:

任意 $\varepsilon > 0$, 存在次数为 M 的多项式 $P(x)$ 使得:

$$\sup |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

则:

$$\|f(x) - S_N(f)(x)\| \leqslant \|f(x) - P(x)\| \lesssim \varepsilon$$

其中 $N \geqslant M$

若 $f(x)$ 只是 Riemann 可积, 那么存在 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 满足:

$$\sup |g_n(x)| \leqslant \sup |f(x)|$$

且任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g_n(x)$

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g_n(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon^2$$

那么计算:

$$\|f(x) - g_n(x)\| \lesssim \varepsilon$$

再用 Werierstrass 第一逼近定理:

存在多项式 $Q(x)$, 使得:

$$\|g_n(x) - Q(x)\| < \varepsilon$$

则:

$$\begin{aligned}&\|f(x)-S_N(f)(x)\|\\ \leqslant&\|f(x)-Q(x)\|\\ \leqslant&\|f(x)-g_n(x)\|+\|g_n(x)-Q(x)\|\\ \lesssim&\varepsilon\end{aligned}$$

则均方收敛意义下:

$$f\xrightarrow{L^2}\sum_{n=0}^{\infty}\langle f,\mathcal{L}_n\rangle\mathcal{L}_n$$

题目 19. Problem 3

设 $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

(1) 计算以 2π 为周期的函数 $f(x)=\cos\alpha x, x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数.

(2) 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{\pi}{2\alpha\tan(\alpha\pi)}$$

对于所有 $u\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$,

$$\cot u=\frac{1}{u}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u}{u^2-n^2\pi^2.}$$

(3) 证明: 对任意 $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, 有

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}=1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}.$$

(4) 对于 $0<\alpha<1$, 证明:

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

解答.

(1) 直接计算:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(n) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x \mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(\alpha+n)x+\cos(\alpha+n)x]\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}+\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
=& \frac{(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}
$$

(2) 证明: 由 (1): $\hat{f}(n)=O\left(\frac{1}{|n|^2}\right)$

则 Fourier 级数一致收敛, 即:

$$\cos\alpha x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2}\mathrm{e}^{inx}$$

令 $x=\pi$, 则:

$$\cos\alpha\pi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2}$$

整理得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{\pi}{2\alpha\tan(\alpha\pi)}$$

令 $u=\alpha\pi\notin\pi\mathbb{Z}$,

代入上式整理:

$$\cot u=\frac{1}{u}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u}{u^2-n^2\pi^2.}$$

(3)

$$\cos\alpha x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2}\mathrm{e}^{inx}$$

令 $x=0$, 即:

$$1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2}$$

整理得到:

$$\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}$$

(4) 证明:

首先:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t + \int_1^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} + t^{(1-\alpha)-1}}{1+t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

根据 Abel 定理:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t \\ =& \lim_{x\to1^-} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t \\ =& \lim_{x\to1^-} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\mathrm{d}t \\ =& \lim_{x\to1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{n+\alpha-1}\mathrm{d}t \\ =& \lim_{x\to1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{n+\alpha} \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}\end{aligned}$$

上述计算中, 其中用到广义 Newton-Leibniz 公式, 以及 $\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ 在 $(0,1]$ 上的连续性, 以及

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

此瑕积分收敛, 因为

$$\lim_{t\to0^+} = t^{1-\alpha} \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} = 1$$

且 $0 < 1-\alpha < 1$

$|t| < 1$ 时,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n$$

用到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{n+\alpha-1}$$

在 $[0,x](x<1)$ 上绝对收敛且一致收敛, 于是可以逐项积分.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

根据 Dirichlet 判别法, 级数收敛, 则可以推出级数的 Abel 和收敛于同一值. 于是可以交换极限号和求和号.

同理可得:

$$\int_0^1 \frac{t^{(1-\alpha)-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-\alpha}$$

于是,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t =& \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}+t^{(1-\alpha)-1}}{1+t}\mathrm{d}t\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-\alpha}\\ =&\frac{1}{\alpha} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha}{n^2-\alpha^2}\\ =&\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\end{aligned}$$

题目 20. Problem 4

此题中, 我们发现了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

的公式, 其中 k 是正偶数.

我们定义 Bernoulli 数 B_n:

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

(1) 证明:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0$$

(2) 证明: 对于 $n \geqslant 1$, 有:

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k$$

(3) 改写得到:

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

证明: 当 $n > 1$ 且是奇数时, $B_n = 0$, 并且:

$$z\cot z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

(4)Zeta 函数定义为:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$$

通过之前结论说明:

$$x\cot x = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2\pi}} x^{2m}$$

(5) 综上得到:

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!} B_{2m}$$

解答.

(1) 证明: 直接计算:

$$\begin{aligned}1 =& \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \\ =& \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right)\end{aligned}$$

根据 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n+1)!}$ 绝对收敛且 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} z^n$ 收敛,
那么 Cauchy 乘积收敛:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{(i+1)!} \cdot \frac{B_{k-i}}{(k-i)!}\right) z^k$$

对比系数即可, 有:

$$\begin{aligned}1 &= B_0 \\ 0 &= B_1 + \frac{B_0}{2!} \\ 0 &= \frac{B_2}{2!} + \frac{B_1}{2!} + \frac{B_0}{3!} \\ 0 &= \frac{B_3}{3!} + \frac{B_2}{(2!)^2} + \frac{B_1}{3!} + \frac{B_0}{4!} \\ 0 &= \frac{B_4}{4!} + \frac{B_3}{2! \cdot 3!} + \frac{B_2}{3! \cdot 2!} + \frac{B_1}{4!} + \frac{B_0}{5!} \\ 0 &= \frac{B_5}{5!} + \frac{B_4}{2! \cdot 4!} + \frac{B_3}{3! \cdot 3!} + \frac{B_2}{4! \cdot 2!} + \frac{B_1}{5!} + \frac{B_0}{6!}\end{aligned}$$

解得:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0$$

(2) 证明: 由 (1) 对比系数知道: $n \geqslant 1$ 时,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{B_{n-i}}{(i+1)!(n-i)!} = 0$$

整理得到:

$$\begin{aligned} B_n &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i+1)!(n-i)!} B_{n-i} \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} B_k \\ &= -\frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k} B_k \end{aligned}$$

(3) 证明:

有

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

由于 $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{z}{2} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}}$ 是偶函数.
则 $n > 1$ 且 n 为奇数时,$B_n = 0$.

则我们继续推导:

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} \cot \frac{z}{2} &= \frac{z}{2} \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \\ &= \frac{iz}{2} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{z}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{z}{2}}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (iz)^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \end{aligned}$$

则

$$z \cot z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

(4) 证明: 我们引 Problem 3 中 (2) 的结论:

$$\cot u = \frac{1}{u} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2 - n^2 \pi^2}, \quad u \notin \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

取 $|x|<\pi$

$$\begin{aligned}
x\cot x =&1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2\pi^2}\\
=&1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2\pi^2}\\
=&1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{x^2}{n^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}}\\
=&1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{2j}}{n^{2j}\pi^{2j}}
\end{aligned}$$

由于存在 $|x|<\delta<\pi$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{x^{2j}}{n^{2j}\pi^{2k}}\right|\\
\leqslant&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\delta^{2j}}{n^{2j}\pi^{2j}}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta^2}{n^2\pi^2-\delta^2}\\
<&\infty
\end{aligned}$$

可以交换求和次序,

$$\begin{aligned}
x\cot x =&1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{2j}}{n^{2j}\pi^{2j}}\\
=&1-2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2j}}{n^{2j}\pi^{2j}}\\
=&1-2\sum_{j=1}^{\infty}\zeta(2j)\frac{x^{2j}}{\pi^{2j}}
\end{aligned}$$

(5) 证明: 引用 (3) 和 (4) 的结论:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}$$

对比系数得到:

$$\zeta(2n)=(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}B_{2n}$$

题目 21. Problem 5

定义 Bernoulli 多项式如下:

$$\frac{z\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^{z}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n$$

(1) 函数 $B_n(x)$ 是关于 x 的多项式, 且证明:

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_kx^{n-k}$$

以及:

$$\begin{aligned}&B_0(x)=1,B_1(x)=x-\frac{1}{2},\\&B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\end{aligned}$$

(2) 证明:

$n\geqslant 1$, 则:

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$$

若 $n\geqslant 2$, 则;

$$B_n(0)=B_n(1)=B_n$$

(3) 定义:$S_m(n)=1^m+2^m+\cdots+(n-1)^m$.

证明:

$$(m+1)S_m(n)=B_{m+1}(n)-B_{m+1}$$

(4) 证明: Bernoulli 多项式是唯一满足下列性质的多项式:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{i})B_0(x)=1\\&(\mathrm{ii})B_n'(x)=nB_{n-1}(x),n\geqslant 1\\&(\mathrm{iii})\int_0^1B_n(x)\mathrm{d}x=0,n\geqslant 1\end{aligned}$$

证明: 由 (2) 可得:

$$\int_x^{x+1}B_n(t)\mathrm{d}t=x^n$$

(5) 计算 $B_1(x)$ 的 Fourier 级数, 得到 $0<x<1$ 时,

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi kx)}{k}$$

积分可得:

$$B_{2n}(x)=(-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n}}$$
$$B_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}}$$

最后证明: 当 $0<x<1$ 时,

$$B_n(x)=-\frac{n!}{(2\pi i)^n}\sum_{n\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{2\pi ikx}}{k^n}$$

解答.

(1) 证明: 利用 Cauchy 乘积:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nz^n}{n!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^{n-k}z^n\end{aligned}$$

对比系数:

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!B_k}{k!(n-k)!}x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_kx^{n-k}$$

于是计算:

$$
\begin{aligned}
&B_0(x) = B_0 = 1. \\
&B_1(x) = B_0 x - B_1 x = x - \frac{1}{2} \\
&B_2(x) = B_0 x^2 + 2B_1 x + B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6} \\
&B_3(x) = B_0 x^3 + 3B_1 x^2 + 3B_2 x + B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x
\end{aligned}
$$

(2) 证明: 有:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} z^n =& \frac{z\mathrm{e}^{(x+1)z}}{\mathrm{e}^z - 1} \\
=& \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{xz}}}{\mathrm{e}^z - 1} + z\mathrm{e}^{xz} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^{n+1} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} z^n
\end{aligned}
$$

对比系数:

$$
B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \geqslant 1
$$

在上式和 (1) 结果中, 令 $x = 0$, 则:

$$
B_n(1) = B_n(0) = B_n, \quad n \geqslant 2
$$

(3) 证明: 引 (2), 令 $n = m + 1$, 从 $x = 1$ 求和道 $n - 1$
计算有:

$$
\begin{aligned}
(m+1)S_m(n) &= \sum_{x=1}^{n-1} \left(B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x)\right) \\
&= B_{m+1}(n) - B_{m+1}(1) \\
&= B_{m+1}(n) - B_{m+1}
\end{aligned}
$$

(4) 证明:

我们先说明 Bernoulli 多项式满足三条性质:

(i) 是显而易见的计算.

(ii) 求导:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_n(x) =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_kx^{n-k}\\ =&n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^kB_kx^{n-1-k}\\ =&nB_{n-1}(x)\end{aligned}$$

(iii) 根据 (ii), 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 计算:

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x =& \int_0^1 \frac{B'_{n+1}}{n+1}\mathrm{d}x\\ =&\frac{B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0)}{n+1}\\ =&\frac{B_{n+1}-B_{n+1}}{n+1}\\ =&0\end{aligned}$$

于是 Bernoulli 多项式满足这三条性质.

我们采用反证法, 假设还有不同的多项式 $\{P_n(x)\}$ 满足三条性质:

那么我们设 $Q_n(x)=B_n(x)-P_n(x)$, 有:

$$Q_0=B_0(x)-P_0(x)=1-1=0$$

并且:

$$\begin{aligned}Q'_n(x)&=B'_n(x)-Q'_n(x)\\ &=n(B_{n-1}(x)-Q_{n-1}(x))\\ &=nQ_{n-1}(x),\quad n\geqslant 1\end{aligned}$$

那么

$$Q_1(x)=C$$

其中 C 为常数.

又容易知道:

$$\int_0^1 Q_n(x)\mathrm{d}x, \quad n \geqslant 1$$

得到:

$$C = 0$$

则可以归纳法知道: 若 $Q_k(x) = 0$, 仿照上述过程,$Q_{k+1}(x) = 0$.
于是对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(x) - P_n(x) = Q_n(x) = 0$$

于是与假设矛盾,Bernoulli 多项式是唯一满足下列性质的多项式.
对于:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

我们继续计算:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} B_n(x)\mathrm{d}x = &\int_x^{x+1} \frac{B'_{n+1}(x)}{n+1}\mathrm{d}x \\ =&\frac{B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)}{n+1} \\ =&\frac{(n+1)x^n}{n+1} \\ =&x^n\end{aligned}$$

故所有命题成立.
(5) 证明: 计算 $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ 的 Fourier 系数:

$$\begin{aligned}\widehat{B_1}(n) &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-in2\pi x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{in2\pi}\end{aligned}$$

则:

$$B_1(x) \sim -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad 0 < x < 1$$

根据 Dirichlet 判别法:

$$B_1(x) = x - \frac{x}{2} = -\frac{2 \cdot 1!}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad 0 < x < 1$$

$B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ 在 $[0,1]$ 上可积且绝对可积, 那么可以逐项积分:

$$\int_0^x B_2'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x 2B_1(x)\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin(2\pi kx)}{k}\mathrm{d}x$$

则:

$$B_2(x) = \frac{2 \cdot 2!}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}$$

其中化简时积分相消用到 $n > 1$ 时:

$$B_i = \begin{cases} (-1)^{n+1} \dfrac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}, & i = 2n \\ 0, & i = 2n+1 \end{cases}$$

以此用归纳法, 假设有:

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n}}$$

$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}}$$

则我们计算:

$$\begin{aligned} &\int_0^x B_{2n+2}'(x)\mathrm{d}x \\ =&\int_0^x (2n+2)B_{2n+1}(x)\mathrm{d}x \\ =&(-1)^{n+1} \frac{2(2n+2)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

则:

$$B_{2n+2}(x) = (-1)^{n+2} \frac{2 \cdot (2n+2)!}{(2\pi)^{2n+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n+2}}$$

继续计算有:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x B'_{2n+3}(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^x (2n+3)B_{2n+2}(x)\mathrm{d}x\\
=&(-1)^{n+2}\frac{2\cdot(2n+3)!}{(2\pi)^{2n+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n+2}}
\end{aligned}
$$

于是,

$$
B_{2n+3}=(-1)^{n+2}\frac{2\cdot(2n+3)!}{(2\pi)^{2n+3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+3}}
$$

归纳结束. 命题成立.

结合之前的结论:

$$
B_n(x)=-\frac{n!}{(2\pi i)^n}\sum_{k\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{2\pi ikx}}{k^2},\quad 0<x<1
$$