Fourier Analysis Appendix 5

张浩然

2025 年 5 月 12 日

题目 1. 2020 年丘成桐大学生数学竞赛分析与方程 Q2

在去年的丘成桐大学生数学竞赛中, Tintin, Haddock, Dupont 和 Dupond 挺进决赛分析口试.

丘先生让他们计算一个周期为 2π 的函数 (定义在 $\mathbb{R}$ 上) 的 Foruier 系数:

$$F:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto F(x)=\arctan\left(\frac{x}{2\pi}\mathrm{e}^{\sin x}+x^{2019}(x-2\pi)+2019\sin x\right)$$

以下是他们各自的解, $k\neq 0$:

Tintin: $\widehat{F}(k)=\dfrac{\cos k\pi}{|k|^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a}{|k|}+\dfrac{b}{|k|^3}$

Haddock: $\widehat{F}(k)=\dfrac{c}{k^2}+\dfrac{d}{k^4}+\dfrac{e}{k^6}$

Dupont: $\widehat{F}(k)=\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{f}{k^3}+\dfrac{g}{k^5}$

Dupond: $\widehat{F}(k)=\dfrac{2019\sqrt{-1}}{k}+\dfrac{h_k}{k}$

其中 $a,b,c,d,e,f,g,h_k(k\in\mathbb{Z})$ 是常数, 并且:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|h_k|^2<\infty$$

试问谁的解是正确的?

解答.

我们先研究函数性态:

显然 $F \in C^{\infty}(0, 2\pi)$.

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to 2\pi^-} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

F 有界，则 $F \in L^2$.

对于 Tintin 的答案, 若正确, 我们利用 Parseval 恒等式有:

$$\widehat{F}(k) \in l^2$$

但是 $\left|\widehat{F}(k)\right|^2 \sim \frac{1}{|k|}$, 那么 $\widehat{F}(k) \notin l^2$, 此答案错误.

对于 Haddock 的答案，若正确，我们有:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\widehat{F}(k)\right| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c|}{k^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|d|}{k^4} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|e|}{k^6} < +\infty$$

那么 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{F}(k) \mathrm{e}^{\sqrt{-1}kx}$ 一致收敛, 收敛到一个连续函数 $G(x)$, 其 Fourier 系数与 $F(x)$ 相同.

引理:

若函数 F, G 的 Fourier 系数相同, 那么在连续点 $x = x_0$ 处,$F(x_0) = G(x_0)$.

存在 $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{16}$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (2\pi - \delta, 2\pi + \delta)$ 时,

$$|G(x_1) - G(x_2)| < \frac{\pi}{16}$$

接下来取两点 $x_1 \in (2\pi - \delta, 2\pi), x_2 \in (2\pi, 2\pi + \delta)$, 使之充分靠近 2π, 则有:

$$|F(x_1) - F(x_2)| \geqslant \frac{\pi}{16}$$

又除了 $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 外处处连续, 于是 $F(x_1) = G(x_1), F(x_2) = G(x_2)$, 那么此答案错误.

对于 Dupont 的答案, 其不满足实值函数的 Fourier 系数的性质:

$$\overline{\widehat{F}(k)} = \widehat{F}(-k)$$

故此答案错误.

对于 Dupond 的答案，若正确，则:

$$\begin{aligned}\frac{2019\sqrt{-1}}{k} + \frac{h_k}{k} =& \widehat{F}(k)\\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}kx}\mathrm{d}x\\ =& \frac{\sqrt{-1}}{8k} + \frac{\widehat{F'}(k)}{k}\end{aligned}$$

其中由 $F'(x) \in L^2$, 则 $h_k, \widehat{F'}(k) \in l^2$, 但是 $2019\sqrt{-1} - \dfrac{1}{8}\sqrt{-1} \notin l^2$
故其答案错误.

综上所述，没一个正确，如此成绩，令人汗颜!