

Fourier Analysis Chapter 2

张浩然

2025 年 4 月 28 日

题目 1. Exercise 3:

我们重返第一章的“拨动的弦”问题，证明：初始函数 f 等于它的 Fourier 正弦级数即：

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx, A_m = \frac{2h}{m^2} \frac{\sin mp}{p(\pi - p)}$$

其中：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{p}, & 0 \leq x \leq p; \\ \frac{h(\pi - x)}{\pi - p}, & p \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解答. 证明：

存在常数 $C > 0$, 使得 $|A_m| \leq \frac{C}{m^2}$, 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 成立.

又 $\sum \frac{C}{m^2}$ 收敛, 于是 $\sum A_m$ 绝对收敛, 即 f 的 Fourier 系数级数 $\sum \hat{f}(n)$ 绝对收敛, 又容易验证 f 在 $[0, \pi]$ 上连续, 则 f 的 Fourier 级数绝对收敛, 并一致收敛到 f , 即

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$$

题目 2. Exercise 6:

$f(\theta) = |\theta|$ 定义在 $[-\pi, \pi]$ 上, 则

- (1) 画出 $f(\theta)$ 的图像;
- (2) 计算 $\hat{f}(n)$;
- (3) 改写 Fourier 级数为 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 的组合;
- (4) 取 $\theta = 0$, 计算:

$$\sum_{n \geq 1, n \text{ odd}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

解答.

- (1)(2) 我们舍去平凡计算, 有

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , n = 0; \\ \frac{-1 + (-1)^n}{\pi n^2} & , n \neq 0. \end{cases}$$

- (3) 改写为:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

- (4) 既然是数学专业学生, 就不应该乱代入一些值, 凭什么可以计算?
这是因为对任意 $k \geq 1$ 有:

$$\left| \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ 收敛, 则 Fourier 级数绝对收敛且一致收敛, 又因为 $f(\theta)$ 是连续函数, 则 Fourier 级数一致收敛到 f , 即

$$f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

代入 $\theta = 0$, 有:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

即

$$\sum_{n \geq 1, n \text{ odd}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

又

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \geq 1, n \text{ odd}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \geq 1, n \text{ even}} \frac{1}{n^2}$$

这是因为右边两个级数都收敛, 且对第二个级数观察发现为左边的 $\frac{1}{4}$ 倍,

$$\frac{3}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

则

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

题目 3. Exercise 8:

验证:

$\frac{1}{2i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n}$ 是周期为 2π 的锯齿函数的 Fourier 级数, 其中 $f(0) = 0$, $f(x)$ 定义为:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & , -\pi < x < 0; \\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & , 0 < x < \pi. \end{cases}$$

显然, f 并不连续. 进一步证明:

$\frac{1}{2i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n}$, 对所有 x 都收敛, 并且此级数在 $x = 0$ 处的值等于 $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$

解答.

先验证之, $n = 0$ 时, $\hat{f}(0) = 0$. $n \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-i \sin nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) (-i \sin nx) dx \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi \sin nx - x \sin nx) dx \\ &= \frac{1}{2ni}\end{aligned}$$

验证完成, 下证收敛性: $x \neq 0$ 时, 对任意 $N \in \mathbb{N}^*$ 有:

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2i} \sum_{n=-N, n \neq 0}^N e^{inx} \right| &\leq \frac{1}{2} \left| e^{-iNx} \frac{1 - e^{iNx}}{1 - e^{ix}} \right| + \frac{1}{2} \left| e^{ix} \frac{1 - e^{iNx}}{1 - e^{ix}} \right| \\ &\leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|}\end{aligned}$$

可得部分和在 $x \neq 0$ 关于 N 一致有界, 并且实数列 $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ 单调收敛到 0.

于是, $\frac{1}{2i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n}$ 在 $x \neq 0$ 处收敛.

当 $x = 0$, $S_N f = 0$, 进而 $\frac{1}{2i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n}$ 在 $x = 0$ 处为 $0 = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$.

题目 3 的注记.

此处改造了一下 Dirichlet 判别法的复数版本, 对双边数列, 只需要分而治之, 化两个两个即可, 并且对单调性要求也不必单减, 只要在需要的范围内单调即可.

题目 4. Exercise 9:

令 $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ 为区间 $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ 的特征函数, 即:

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

(1) 证明: f 的 Fourier 级数是:

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx}$$

(2) 证明: 若 $a \neq -\pi$ 或 $b \neq \pi$, 并且 $a \neq b$, 则 (1) 中的 Fourier 级数对任何 x 都不绝对收敛.

(3) 然而, 再证明: 此 Fourier 级数对任何 x 都收敛, 并说明 $a = -\pi$ 且 $b = \pi$ 时发生了什么.

解答.

(1) $n = 0$ 时,

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b]}(x) dx = \frac{b-a}{2\pi}$$

$n \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b]}(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-inx} dx \\ &= \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} \end{aligned}$$

于是确实有:

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx}$$

(2)

第二题的提示是很典型的错误, 从调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 中选无数项并不一定发散, 比如 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛.

所以此题不能按提示那样做, 我下面展示一种做法.

我们不关心常数项, 则:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \neq 0} \left| \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx} \right| \\ &= \sum_{n \neq 0} \left| \frac{e^{in\frac{(b-a)}{2}} - e^{-in\frac{(b-a)}{2}}}{2\pi in} e^{-\frac{a+b}{2}inx} e^{inx} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{|\sin(n\theta)|}{n} \end{aligned}$$

其中 $\theta = \frac{b-a}{2} \neq 0$, 只用研究:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n\theta)|}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n}$$

根据经典方法, 最右边第一个级数发散, 第二个收敛, 因为 Dirichlet 判别法, 于是最左边级数发散, 此题得证.

还有一种估计方法, 利用柯西收敛准则, 我就不写了, 因为太长了.

(3)

根据推广的 Dirichlet 判别法和特殊点单独处理, Fourier 级数处处收敛. 是容易仿照 Exercise 8 证明的.

当 $a = -\pi, b = \pi$ 时, 其 Fourier 级数为 1.

题目 5. Exercise 10:

设 f 是周期为 2π 的函数且 $f \in C^k$, 证明:

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right), n \rightarrow \infty$$

解答.

熟知:

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$$

而 $f \in C^k$, 则存在 $C > 0$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|\widehat{f^{(k)}}(n)| \leq C$

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k}$$

即

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

题目 6. Exercise 11:

设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是一个在 $[0, 1]$ 上黎曼可积的函数列, 使得

$$\int_0^1 |f_k(x) - f(x)| dx \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

证明:

$$\hat{f}_k(n) \rightarrow \hat{f}(n), n \rightarrow \infty$$

并且关于 n 是一致的.

解答.

我们直接做差估计:

$$\begin{aligned} & |\hat{f}_k(n) - \hat{f}(n)| \\ &= \left| \int_0^1 f_k(x) e^{-i2\pi nx} dx - \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi nx} dx \right| \\ &= \int_0^1 |f_k(x) - f(x)| dx \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

并且此极限至多依赖 x , 关于 n 是一致的.

题目 7. Exercise 12:

证明:

如果复级数 $\sum c_n$ 收敛到 s , 则 $\sum c_n$ 的 *Cesàro* 和收敛到 s .

解答.

这是我们《数学分析》中常见的 Cauchy 命题的复版本, 证明方法一模一样, 所以有些人要强调《数学分析》的重要性, 其实不如用比较高级的教材一次扫尽.

设 $S_n = \sum_{i=1}^n c_i$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n > N_1$,

$$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} - s \right| \\ &= \left| \frac{(S_1 - s) + (S_2 - s) + \cdots + (S_n - s)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|S_1 - s| + |S_2 - s| + \cdots + |S_{N_1} - s|}{n} + \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

取 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{|S_1 - s| + |S_2 - s| + \cdots + |S_{N_1} - s|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

对上述的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 使得 $n > N$, 时

$$\left| \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} - s \right| < \varepsilon$$

于是命题得证.

题目 8. Exercise 13:

接下来, 我们打算证明: *Cesàro* 可和的条件强于 *Abel* 可和的条件.

- (1) 证明: 若复级数 $\sum c_n$ 收敛到 s , 其 *Abel* 和收敛到 s .
- (2) 证明: 存在复级数 *Abel* 可和, 但是不收敛.
- (3) 证明: 若复级数 *Cesàro* 可和收敛到 σ , 其 *Abel* 和收敛到 σ
- (4) 证明: 存在复级数 *Abel* 可以可和, 但是不 *Cesàro* 可和.

解答. (1)

证明: 利用 *Abel* 求和公式: 记 $s_n = \sum_{i=1}^n c_i$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N c_n r^n &= r^N s_N + \sum_{n=1}^{N-1} (r^n - r^{n+1}) s_n \\ &= r^{N+1} s_N + (1-r) \sum_{n=1}^N s_n r^n\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $n > N_1$ 时, $|s_n - s| < \varepsilon$.

存在 $M > 0$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|s_n| \leq M, |s| \leq M$.

于是, $r^{N+1} s_N$ 和 $(1-r) \sum_{n=1}^N s_n r^n$ 的极限都存在.

令 $N \rightarrow \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n$$

下面只需要证明:

$$(1-r) \sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n = s, r \rightarrow 1^-$$

我们直接做差估计：

$$\begin{aligned}
& \left| (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n - s \right| \\
&= \left| (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s) r^n + s(1-r) \sum_{n=1}^{\infty} r^n - s \right| \\
&= \left| (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s) r^n + (r-1)s \right| \\
&\leq \left| (1-r) \sum_{n=1}^{N_1} (s_n - s) r^n \right| + \left| (1-r) \sum_{n=N_1+1}^{\infty} (s_n - s) r^n \right| + (1-r)|s| \\
&\leq (1-r) \sum_{n=1}^{N_1} |s_n - s| r^n + (1-r)\varepsilon \sum_{n=N_1+1}^{\infty} r^n + (1-r)|s| \\
&\leq (1-r) \sum_{n=1}^{N_1} 2M r^n + (1-r)\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} r^n + (1-r)|s| \\
&\leq 2MN_1(1-r) + \varepsilon + (1-r)|s|
\end{aligned}$$

由 $1-r \rightarrow 0, r \rightarrow 1^-$, 对上述 ε , 存在 $\delta > 0$, 使得任意 $1-\delta < r < 1$,

有：

$$\left| (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n - s \right| \lesssim \varepsilon$$

结论成立.

此处用了调和分析符号 \lesssim .

$f(x) \lesssim g(x)$ 即存在 $C > 0$, 使得 $f(x) \leq Cg(x)$, 对充分大的 x 成立.

(2)

考虑 $c_n = (-1)^n, s_n = \sum_{i=1}^n c_n$.

其 Abel 和为

$$A_r = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n = \frac{-r}{1+r}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} A_r = -\frac{1}{2}$$

但是显然 s_n 不收敛, 即 $\sum c_n$ 不收敛.

(3)

证明:

设 $\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$. 利用 Abel 求和公式: 记 $s_n = \sum_{i=1}^n c_i$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N c_n r^n \\
&= r^{N+1} s_N + (1-r) \sum_{n=1}^N s_n r^n \\
&= r^{N+1} s_N + (1-r) \left(r^N N \sigma_N + (1-r) \sum_{n=1}^{N-1} n r^n \sigma_n \right) \\
&= r^{N+1} s_N + r^N N \sigma_N - r^{N+1} N \sigma_N + (1-r)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n \sigma_n r^n \\
&= r^{N+1} (N \sigma_N - (N-1) \sigma_{N-1}) + r^N N \sigma_N - r^{N+1} N \sigma_N + (1-r)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n \sigma_n r^n \\
&= r^N N \sigma_N - r^{N+1} (N-1) \sigma_{N-1} + (1-r)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n \sigma_n r^n
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, 使得任意 $n > N_2$, 有

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon$$

存在 $L > 0$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 有,

$$|\sigma_n| \leq L, |\sigma| \leq L$$

$r^N N \sigma_N$ 和 $r^{N+1} (N-1) \sigma_{N-1}$ 以及 $(1-r)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n \sigma_n r^n$ 的极限都存在, 这是因为根值判别法.

令 $N \rightarrow \infty$, 有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n r^n$$

接下来只需要证明:

$$(1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n r^n = \sigma, r \rightarrow 1^-$$

我们继续作差:

$$\begin{aligned} & \left| (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n r^n - \sigma \right| \\ &= \left| (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(\sigma_n - \sigma) r^n + \sigma(1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n r^n - \sigma \right| \\ &= \left| (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(\sigma_n - \sigma) r^n + \sigma(r-1) \right| \\ &\leq (1-r)^2 \sum_{n=1}^{N_2} n |\sigma_n - \sigma| r^n + (1-r)^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} n |\sigma_n - \sigma| r^n + (1-r) |\sigma| \\ &\leq (1-r)^2 \cdot 2LN_1^2 + \varepsilon + (1-r) |\sigma| \end{aligned}$$

由于 $(1-r)^2 \rightarrow 0, (1-r) \rightarrow 0, r \rightarrow 1^-$,

对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得任意 $1 - \delta_0 < r < 1$ 有:

$$\left| (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n r^n - \sigma \right| \lesssim \varepsilon$$

得证!

(4)

考虑 $c_n = (-1)^n n$, 则其 *Abel* 和为:

$$A_r = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n r^n = \frac{r}{(1+r)^2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} A_r = \frac{1}{4}$$

而对于 Cesàro 可和级数 $\sum c_n$, 有 $\frac{c_n}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

这是因为

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} \rightarrow \sigma, n \rightarrow \infty$$

而

$$\frac{c_n}{n} = \frac{s_n - s_{n-1}}{n} = \frac{n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}}{n} \rightarrow \sigma - \sigma = 0, n \rightarrow \infty$$

但是 $\frac{c_n}{n} = (-1)^n$ 不收敛, 那么我们完成了反例.

题目 9. Exercise 14: 小 o Tauber 型定理.

(1) 如果级数 $\sum c_n$ 满足 Cesàro 可和收敛到 σ , 且 $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sigma$$

(2) 如果级数 $\sum c_n$ 满足 Abel 可和收敛到 s , 且 $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s$$

解答.

(1) 证明:

$$s_n - \sigma_n = \frac{(n-1)c_n + (n-2)c_{n-1} + \cdots + c_2}{n}$$

又 $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 则 $(n-1)c_n = \frac{n-1}{n} \cdot nc_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

则根据复版本 Cauchy 命题,

$$s_n - \sigma_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

那么 $s_n = s_n - \sigma_n + \sigma_n \rightarrow 0 + \sigma = \sigma, n \rightarrow \infty$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sigma$$

(2) 证明:

根据 $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 即 $nc_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得任意 $n > N_0$, 有 $|c_n| < \frac{\varepsilon}{n}$

当 $N > N_0$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^N c_n - s \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^N c_n - \sum_{n=1}^N c_n r^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n r^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^N c_n - \sum_{n=1}^N c_n r^n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n r^n \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^N c_n (1 - r^n) \right| + \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{\infty} n |c_n| r^n + \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^N c_n (1 - r)(1 + r + \cdots + r^{n-1}) \right| + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n + \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^N |c_n| (1 - r)(1 + r + \cdots + r^{n-1}) + \frac{\varepsilon}{N} \frac{1}{1 - r} + \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^N |nc_n| (1 - r) + \frac{\varepsilon}{N} \frac{1}{1 - r} + \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n - s \right| \end{aligned}$$

令 $r = 1 - \frac{1}{N}$, 继续有:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^N c_n - \sum_{n=1}^N c_n r^n \right| \\ &\leq \frac{\sum_{n=1}^N |nc_n|}{N} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

这是因为复版本 Cauchy 命题和 $nc_n \rightarrow 0, |nc_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

还有,

$$\frac{\varepsilon}{N} \frac{1}{1-r} = \varepsilon$$

由于

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = s$$

,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = s$$

对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得任意 $N > N_1$, 有:

$$\left| \sum_{n=1}^N c_n - s \right| \lesssim \varepsilon$$

那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = s$$

题目 9 的注记.

注意此题和 *Abel* 定理的联系.

此题条件可以继续减弱, 得到大 *O* Tauber 型定理.

题目 10. Exercise 16: Weierstrass 第一定理

证明:

若 f 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$ 满足:

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

解答.

固定正数 l , 延拓 $f(x)$ 到 $[a-l, b+l]$, 使得 $f(a-l) = f(b+l)$, 再延拓为 \mathbb{R} 上的周期为 $2l+b-a$ 的连续函数.

改造之前的证明, 我们知道其相当于圆周 $\mathbb{R}/(2l+b-a)\mathbb{Z}$ 上的连续函数, 存在三角多项式 $Q(x)$, 使得

$$\sup_{x \in [a-l, b+l]} |f(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又 e^z 在紧集上被多项式一致逼近, 则存在多项式 $P(x)$, 使得

$$\sup_{x \in [a-l, b+l]} |Q(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

则

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [a-l, b+l]} |f(x) - P(x)| \\ & \leq \sup_{x \in [a-l, b+l]} (|f(x) - Q(x)| + |Q(x) - P(x)|) \\ & \leq \sup_{x \in [a-l, b+l]} |f(x) - Q(x)| + \sup_{x \in [a-l, b+l]} |Q(x) - P(x)| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & = \varepsilon \end{aligned}$$

那么我们证明了:

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

题目 11. Exercise 17:

我们开始研究 *Abel* 均值和 *Cesàro* 均值在不连续点的行为.

我们称可积函数 f 在 θ 处有跳跃间断点, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(\theta + h) = f(\theta^+), \quad \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(\theta - h) = f(\theta^-)$$

极限都存在且不相等.

(1) 证明:

若可积函数 f 有一个在 θ 处的跳跃间断点, 则

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} A_r(f)(\theta) = \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2}, \quad 0 \leq r < 1$$

(2) 证明:

若可积函数 f 有一个在 θ 处的跳跃间断点, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(\theta) = \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2}$$

提示: 考虑 Good kernel 的性质.

解答.

(1) 证明:

我们考虑 Good kernel 的性质:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi P_r(\theta) d\theta = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 P_r(\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

这是因为 *Poisson* 核是 Good kernel, 并且是偶函数.

可积函数必定有界, 设

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)| \leq B$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得任意 $-\delta < x < 0$, 有 $|f(x) - f(\theta^-)| < \varepsilon$;

对任意 $0 < x < \delta$, 有 $|f(x) - f(\theta^+)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
& \left| A_r(f)(\theta) - \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \right| \\
& \leq \left| P_r * f(\theta) - \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \right| \\
& = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) P_r(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta^+) P_r(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta^-) P_r(t) dt \right| \\
& = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(\theta - t) - f(\theta^-)) P_r(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta^+) P_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(\theta - t) P_r(t) dt \right| \\
& = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(\theta - t) - f(\theta^-)) P_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(\theta + t) - f(\theta^+)) P_r(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} |f(\theta - t) - f(\theta^-)| P_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} |f(\theta + t) - f(\theta^+)| P_r(t) dt \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(\theta + t) - f(\theta^+)| P_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(\theta - t) - f(\theta^-)| P_r(t) dt \\
& \leq 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon P_r(t) dt + 2B \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |P_r(t)| dt \\
& = \varepsilon + 2B \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |P_r(t)| dt
\end{aligned}$$

又

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |P_r(t)| dt \rightarrow 0, r \rightarrow 1^-$$

对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得任意 $1 - \delta_0 < r < 1$, 有

$$\left| A_r(f)(\theta) - \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \right| \lesssim \varepsilon$$

命题成立.

(2) 证明:

我们考虑 Good kernel 的性质:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 F_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

这是因为 Fejér 核是 Good kernel, 并且是偶函数.

可积函数必定有界, 设

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)| \leq B$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得任意 $-\delta < x < 0$, 有 $|f(x) - f(\theta^-)| < \varepsilon$;

对任意 $0 < x < \delta$, 有 $|f(x) - f(\theta^+)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} & \left| \sigma_N(f)(\theta) - \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \right| \\ & \leq \left| F_N * f(\theta) - \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \right| \\ & = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) F_N(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta^+) F_N(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta^-) F_N(t) dt \right| \\ & = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(\theta - t) - f(\theta^-)) F_N(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta^+) F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(\theta - t) F_N(t) dt \right| \\ & = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(\theta - t) - f(\theta^-)) F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(\theta + t) - f(\theta^+)) F_N(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} |f(\theta - t) - f(\theta^-)| F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} |f(\theta + t) - f(\theta^+)| F_N(t) dt \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(\theta + t) - f(\theta^+)| F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(\theta + t) - f(\theta^+)| F_N(t) dt \\ & \leq 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon F_N(t) dt + 2B \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |F_N(t)| dt \\ & = \varepsilon + 2B \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |F_N(t)| dt \end{aligned}$$

又

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |F_N(t)| dt \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 > 0$, 使得任意 $N > N_0$, 有

$$\left| \sigma_N(f)(\theta) - \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \right| \lesssim \varepsilon$$

命题成立.

题目 12. Exercise 18:

$P_r(\theta)$ 表示 *Poisson* 核, 证明: 函数

$$u(r, \theta) = \frac{\partial P_r}{\partial \theta}$$

定义在 $0 \leq r < 1$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$ 上, 满足

(1)

$$\Delta u = 0$$

在圆盘上成立;

(2)

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r, \theta) = 0$$

对所有 $\theta \in \mathbb{R}$ 成立.

解答.

(1)

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} in r^{|n|} e^{in\theta} \end{aligned}$$

不断计算有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n^2) r^{|n|} e^{in\theta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-in^3) r^{|n|} e^{in\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} in |n| r^{|n|-1} e^{in\theta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} in (n^2 - |n|) r^{|n|-2} e^{in\theta} \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

满足

$$\Delta u = 0$$

在圆盘中成立.

(2) 我们有:

$$u(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right) = \frac{2r(r^2 - 1) \sin \theta}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^2}$$

$$\text{当 } \theta = 2k\pi \text{ 时, } u(r, \theta) = \frac{2r(r-1)(r+1) \cdot 0}{(r-1)^4} = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r, \theta) = 0$$

$$\text{当 } \theta \neq 2k\pi \text{ 时, } u(r, \theta) = \frac{2r(r^2 - 1) \sin \theta}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r, \theta) = \frac{0}{2 - 2 \cos \theta} = 0.$$

命题得证.

题目 13. Problem 2:

D_N 是 N 阶 Dirichlet 核,

$$D_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N e^{ik\theta} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\theta/2)}$$

定义:

$$L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta$$

(1) 证明: 存在 $c > 0$, 使得:

$$L_N \geq \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)$$

(2) 证明: 对每一个 $n \geq 1$, 存在一个连续函数 f_n , 使得 $|f_n| \leq 1$ 和 $|S_n(f_n)(0)| \geq c \log n$.

解答.

(1) 证明: 首先熟知不等式 $\sin x \leq x, x \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等.

$$\begin{aligned}
 L_N &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})\theta)|}{|\sin(\theta/2)|} d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})\theta)|}{\sin(\theta/2)} d\theta \\
 &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})\theta)|}{\theta} d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + O(1) \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + O(1) \\
 &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} dt + O(1) \\
 &\geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} + O(1) \\
 &\geq \frac{4}{\pi^2} \int_1^N \frac{1}{x} dx + O(1) \\
 &= \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\frac{2}{\pi} \int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \frac{2}{\pi} \int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{t} dt = \frac{2}{\pi} \log \left(1 + \frac{1}{2N} \right) \leq \frac{2 \log 2}{\pi}$$

则

$$\frac{2}{\pi} \int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = O(1)$$

命题得证.

(2) 证明: 设

$$g_n(\theta) = \begin{cases} 1, & D_n(\theta) > 0; \\ -1, & D_n(\theta) < 0. \end{cases}$$

可见不连续点为 $D_n(\theta)$ 改变正负的点.

根据

$$D_n(\theta) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\theta/2)}$$

的正负变化, 可以知道 $g_n(\theta)$ 不连续点只有有限多个, 根据 Riemann-Lebesgue 引理:

$g_n(\theta)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积.

又 $|g_n(\theta)| \leq 1$,

根据可积函数可以被连续函数 L^1 逼近的引理:

对任意固定的 $n \geq 1$, 存在连续函数列 $\{f_k^{(n)}\}$, 使得 $|f_k^{(n)}| \leq 1$, 且

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(\theta) - f_k^{(n)}(\theta)| d\theta \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

对于 $\varepsilon = \frac{4}{\pi \sup D_n(\theta)}$, 存在 k_n 使得:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(\theta) - f_{k_n}^{(n)}(\theta)| d\theta < \frac{2}{\pi^2 \sup D_n(\theta)}$$

根据上一问中推导过程, 其中 $O(1)$ 部分为正数, 还有 $D_n(\theta)$ 是偶函数:

$$\begin{aligned} S_n(g_n(0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta) * D_n(-\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta) * D_n(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\theta)| d\theta \\ &\geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \end{aligned}$$

我们完成最后一步：

$$\begin{aligned}
 & S_n \left(f_{k_n}^{(n)}(0) \right) \\
 & \geq S_n(g_n(0)) - \left| S_n(g_n(0)) - S_n(f_{k_n}^{(n)}(0)) \right| \\
 & = S_n(g_n(0)) - \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g_n(\theta) - f_{k_n}^{(n)}(\theta)) D_n(\theta) d\theta \right| \\
 & \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{2}{\pi^2} \\
 & \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \\
 & \geq \frac{2}{\pi^2} \log n
 \end{aligned}$$

我们记

$$f_n = f_{k_n}^{(n)}, n \geq 1, c = \frac{2}{\pi^2}$$

于是我们完成了命题.