Fourier Analysis Appendix 2

张浩然

2025 年 2 月 18 日

题目 1. 经典的核函数问题

已知函数 f 在 $[0,1]$ 上黎曼可积，在 $x=0$ 处连续，证明：

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$$

解答.

首先，我们为了更好地估计，我们只要处理：

$$\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}f(0)\right|$$

为了让绝对值内对象有相同的形式，我们注意到：

$$\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\arctan\left(\frac{1}{h}\right)$$

我们通过 Taylor 展开有：

$$\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\arctan\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{\pi}{2}+O(h)$$

当然，我们可以计算：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\arctan\left(\frac{1}{h}\right)-\frac{\pi}{2}}{h}=-1$$

这就证明了结论.

接下来，我们做替换：

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} f(0)\right| \\
=&\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} (f(x)-f(0))\mathrm{d}x + O(h)\right| \\
\leqslant&\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} |f(x)-f(0)|\mathrm{d}x + |O(h)|
\end{aligned}
$$

根据 f 在 $x=0$ 处连续, 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,1)$, 使得 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} f(0)\right| \\
<&\varepsilon\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 \frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x + |O(h)| \\
\leqslant&\varepsilon\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x + 2\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\int_\delta^1 \frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x + |O(h)| \\
=&\varepsilon\arctan\left(\frac{\delta}{h}\right) + 2\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\left(\arctan\left(\frac{1}{h}\right) - \arctan\left(\frac{\delta}{h}\right)\right) + |O(h)|
\end{aligned}
$$

其中，由微分中值定理:

$$
\arctan\left(\frac{1}{h}\right) - \arctan\left(\frac{\delta}{h}\right) = \frac{1}{1+\xi^2}, \xi\in\left(\frac{\delta}{h},\frac{1}{h}\right)
$$

有极限：

$$
\lim_{h\to0^+}\arctan\left(\frac{1}{h}\right) - \arctan\left(\frac{\delta}{h}\right) = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{1+\xi^2} = 0
$$

并且：

$$
|O(h)|\leqslant C|h|, C>0
$$

有极限：

$$
\lim_{h\to0^+}|O(h)| = 0
$$

于是，任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_o > 0$, 使得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} f(0)\right| \\
<&\varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} + \varepsilon + \varepsilon \\
=&\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

综上所述，

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0)$$

题目 2. 我们现在考虑定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的一族可积函数 $\{f_n(x)\}$:

若满足以下三条性质：

(1) 对所有 $n \geqslant 1$ 有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$$

(2) 存在 $M > 0$, 使得对所有 $n \geqslant 1$ 有：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant M$$

(3) 对任意 $\delta > 0$, 有:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} |f_n(x)|\mathrm{d}x = 0$$

我们称 $\{f_n\}$ 为好核 (Good Kernel), 或者渐近单位元 (Approximation to the identity)

容易修改 $\dfrac{h}{h^2+x^2}$ 的系数，并且用连续指标 h 替代离散指标 n, 相应积分区间也替换后，那么我们会得到一个好核, 和上述定义唯一差别为指标的不同.

如果我们引入卷积：

$$(g*f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

并且 g 在相应区间可积，在 x_0 处连续，$\{f_n\}$ 是一个好核，那么卷积满足：

$$\lim_{n\to\infty}(g*f_n)(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x_0-y)f_n(y)\mathrm{d}y=g(x_0)$$

此定理证明不难，留作练习.

进一步的，如果 f 正则性更好，若处处连续，那么

$$\lim_{n\to\infty}(g*f_n)(x)=g(x),\forall x\in[-\pi,\pi]$$

并且该极限是一致的.

题目 3. Weierstrass 第二逼近定理

证明：圆周上的连续函数可以被三角多项式一致逼近.

解答. 对于圆周上的连续函数 f,S_N 是其傅里叶级数的前 N 项，可以定义：

$$\sigma_N f(x)=\frac{S_0f(x)+\cdots+S_{N-1}f(x)}{N}=(f*F_N)(x)$$

其中 $\{F_N\}$ 是 Fejér 核，是一个好核，那么根据上述定理，

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N f(x)=f(x)$$

此极限是关于 x 一致的，并且 $\sigma_N(f)(x)$ 是一个三角多项式，于是我们证明了结论.