

# Fourier Analysis Chapter 4

张浩然

2025 年 9 月 4 日

## 题目 1. Exercise 1

设  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  是闭曲线  $\Gamma$  的一个参数化.

(1) 证明:  $\gamma$  是弧长参数化当且仅当曲线从  $\gamma(a)$  到  $\gamma(s)$  的长度恰好是  $s - a$ , 即

$$\int_a^s |\gamma'| dt = s - a$$

(2) 证明: 任何正则参数曲线都可以弧长参数化.

解答.

(1) 必要性:

若  $\gamma$  是弧长参数化, 则  $|\gamma'| = 1$ , 那么:

$$\int_a^s |\gamma'| dt = \int_a^s 1 dt = s - a$$

充分性:

由于  $\gamma \in C^1$ , 则  $|\gamma'| - 1 \in C$ .

那么由于:

$$\int_a^s (|\gamma'| - 1) dt = 0$$

那么,  $|\gamma'| = 1$ ,  $\gamma$  是弧长参数化.

(2) 我们考虑:  $\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  是  $\Gamma$  任意一个参数化, 记

$$h(s) = \int_a^s |\eta'(t)| dt$$

由正则曲线条件,  $\eta'(t) \neq 0$ , 则  $h(s)$  单调递增,  $h'(s) = |\eta'(s)|$ , 存在反函数  $h^{-1}$ .

令  $\gamma(s) = \eta \circ h^{-1}(s)$ , 求导有:

$$\gamma'(s) = \eta'(u) \cdot \frac{dh^{-1}(s)}{ds} = \frac{\eta'(u)}{|\eta'(u)|}$$

那么

$$|\gamma'| = 1$$

任意正则参数曲线一定可以弧长参数化.

## 题目 2. Exercise 2

设  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  是闭曲线  $\Gamma$  的参数化, 有:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

(1) 证明:

$$\frac{1}{2} \int_a^b [x(s)y'(s) - x'(s)y(s)] ds = \int_a^b x(s)y'(s) ds = - \int_a^b x'(s)y(s) ds$$

(2) 定义反向参数化为:  $\gamma^-: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , 有:

$$\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$$

证明:

$$\int_{\gamma} (x dy - y dx) = - \int_{\gamma^-} (x dy - y dx)$$

解答.

(1) 证明:

考虑:

$$(x(s)y(s))' = x'(s)y(s) + x(s)y'(s)$$

由于闭曲线性质:  $x(a) = x(b), y(a) = y(b)$ ,

$$\int_a^b (x(s)y(s))' ds = x(s)y(s) \Big|_a^b = 0$$

则:

$$\int_a^b x(s)y'(s) ds = - \int_a^b y(s)x'(s) ds$$

各取一半, 有:

$$\frac{1}{2} \int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds = \int_a^b x(s)y'(s) ds = - \int_a^b y(s)x'(s) ds$$

(2) 证明:

令  $s = a + b - t$

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} (x dy - y dx) \\ &= \int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds \\ &= \int_b^a [x(b+a-t)y'(b+a-t) - y(b+a-t)x'(b+a-t)] \cdot (-1) dt \\ &= - \int_{\gamma^-} (x dy - y dx) \end{aligned}$$

### 题目 3. Exercise 4

等周不等式对于非简单闭曲线也成立.

证明: 更强版本的等周不等式等价于 Wirtinger 不等式

Wirtinger 不等式即  $f \in C^1$  且周期  $2\pi$ , 满足  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ , 则:

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$$

等号成立当且仅当  $f(t) = A \sin t + B \cos t$ .

解答.

从 Wirtinger 不等式推导等周不等式:

设曲线  $\Gamma$  长度为  $2\pi$ , 弧长参数化  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ ,  $[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1, s \in [0, 2\pi]$ .

只需要证明:  $\mathcal{A} \leq \pi$

注意到恒等式:

$$2\pi - 2\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} [x'(s) + y(s)]^2 ds + \int_0^{2\pi} (y'(s)^2 - y(s)^2) ds \geq 0$$

其中总可以平移坐标使得  $y(s) = y(s) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(s) ds$ , 利用 Wirtinger 不等式放缩第二项即可.

于是等周不等式

$$\mathcal{A} \leq \pi$$

成立.

从等周不等式推导 Wirtinger 不等式:

设  $f(x)$  满足等周不等式条件.  $f \in C^1$ , 存在周期  $2\pi$  的连续可微函数  $g(x) = \int_0^x [-f(t)] dt$ , 使得  $g'(x) = -f(x)$ , 那么  $\gamma(x) = (g(x), f(x))$  确定了一条闭曲线  $\Gamma$ , 长度为  $l$ .

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (|f'(x)|^2 - |f(x)|^2) dx \\ &= \int_0^{2\pi} [g'(x) + f(x)]^2 dx + \int_0^{2\pi} (f'(x)^2 - f(x)^2) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (g'(x)^2 + f'(x)^2) dx - 2\mathcal{A} \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{f'(x)^2 + g'(x)^2} dx \right)^2 - 2\mathcal{A} \\ &= \frac{l^2}{2\pi} - 2\mathcal{A} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

其中倒数第二个大于等于号用到 Cauchy 不等式:

$$\left( \int \sqrt{f'(x)^2 + g'(x)^2} \right)^2 \leq 2\pi \cdot \int (f'(x)^2 + g'(x)^2)$$

最后一个大于等于号用到等周不等式:

$$\mathcal{A} \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

综上所述, 原命题成立.

#### 题目 4. Exercise 5

证明: 序列  $\{\gamma_n\}$  在  $[0, 1]$  中不是等分布的, 其中  $\gamma_n$  是

$$\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

的小数部分.

解答. 考虑

$$U_{r+1} = U_r + U_{r-1}$$

的特征方程:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

带入初值知道:

$$U_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

根据递推方程和归纳法知道  $U_n$  是正整数.

$$\text{又 } \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$$

那么考虑

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = U_n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

当  $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\} = 1$$

当  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\} = 0$$

这是因为  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ , 考虑正负.

考虑区间  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ , 当  $N$  充分大,  $\gamma_n = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}$  分布集中在  $[0, 1]$  两个端点处,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \chi_{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)}(\gamma_n) = 0$$

则其在  $[0, 1]$  中不是等分布.

#### 题目 5. Exercise 7

证明 Weyl 准则的第二部分:

如果一个序列  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \in [0, 1)$  是等分布的, 那么对于所有  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  有:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \xi_n} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

解答.

证明: 已知  $\{\xi_n\}$  是等分布序列, 那么对于  $(a, b) \subset [0, 1)$  有:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n) = b - a$$

对于阶梯函数  $f$ , 其是特征函数的线性组合, 那么有:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) = \int_0^1 f(x) dx$$

对于连续函数的情况, 我们断言: 任何闭区间上的连续函数可以被阶梯函数一致逼近.

则对于  $[0, 1]$  上连续函数  $f(x)$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $h$  使得:

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

那么, 当  $N$  充分大时:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) - \int_0^1 f(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(\xi_n) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(\xi_n) - \int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 h(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(\xi_n) - h(\xi_n)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(\xi_n) - \int_0^1 h(x) dx \right| + \int_0^1 |h(x) - f(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

其中用到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(\xi_n) = \int_0^1 h(x) dx$$

当  $N$  充分大时,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(\xi_n) - \int_0^1 h(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是连续函数  $f$  满足:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) = \int_0^1 f(x) dx$$

取  $f(x) = e^{2\pi kix}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$  计算即可.

### 题目 5 的注记.

解答两个问题:

为什么有界闭区间上的连续函数可以被阶梯函数一致逼近?

考虑  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则一致连续.

对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $|x - y| < \delta$  时,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

将区间划分为  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n'} = b$ , 存在  $N, n' > N$  时,  
 $\frac{b-a}{n'} < \delta$ .

在  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $0 \leq i \leq n$  上取函数  $h_{n'}(x) = f(x_i)$ , 则在此区间上

$$|f(x) - h_{n'}(x)| < \varepsilon$$

进而定义了阶梯函数  $h_{n'}(x)$ , 对上述  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0, n' > N$  时, 有

$$|f(x) - h_{n'}(x)| < \varepsilon$$

取  $n'$  充分大, 那么对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $h(x) = h_{n'}(x)$ , 满足:

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

为什么最后一步的计算合理?

对于实变复值函数  $f(x) = e^{2\pi kix}$ , 最后的计算需要用到 Euler 公式拆开  
 算再合并.

$$e^{2\pi kix} = \cos(2\pi kx) + i \sin(2\pi kx)$$



**题目 6.** Exercise 8

证明: 对于任意  $a \neq 0$ , 和  $0 < \sigma < 1$ , 序列  $\{an^\sigma \bmod 1\}$  在  $[0, 1)$  上等分布.

**解答.**

证明: 考虑  $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ , 直接估计

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_1^N e^{2\pi i a x^\sigma} dx \right| \\
 &= \left| \frac{x^{1-\sigma}}{2\pi k i a \sigma} e^{2\pi k i a x^\sigma} \Big|_1^N - \int_1^N e^{2\pi k i a x^\sigma} \frac{1-\sigma}{2\pi k i a \sigma} x^{-\sigma} dx \right| \\
 &\leq \left| \frac{N^{1-\sigma} e^{2\pi k i a N^\sigma} - e^{2\pi k i a}}{2\pi k i a \sigma} \right| + \frac{1-\sigma}{2\pi k |a| \sigma} \int_1^N x^{-\sigma} dx \\
 &\leq \frac{N^{1-\sigma}}{\pi k |a| \sigma}
 \end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{N} \int_1^N e^{2\pi i a x^\sigma} dx = O(N^{-\sigma})$$

对于

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^N e^{2k\pi i a n^\sigma} - \int_1^N e^{2k\pi i a x^\sigma} dx \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^N \left( e^{2k\pi i a n^\sigma} - \int_n^{n+1} e^{2k\pi i a x^\sigma} dx \right) + \int_N^{N+1} e^{2k\pi i a x^\sigma} dx \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} |e^{2k\pi i a n^\sigma} - e^{2k\pi i a x^\sigma}| dx + 1 \\
&\leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} |\cos 2k\pi a n^\sigma - \cos 2k\pi a x^\sigma| dx + \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} |\sin 2k\pi a n^\sigma - \sin 2k\pi a x^\sigma| dx + 1 \\
&= \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} 2k\pi |a| \sigma |n-x| (\xi_1^{\sigma-1} |\sin 2k\pi a \xi_1^\sigma| + \sigma \xi_2^{\sigma-1} |\cos 2k\pi a \xi_2^\sigma|) dx + 1
\end{aligned}$$

其中用到微分中值定理,  $\xi_1, \xi_2 \in (n, x) \subset (n, n+1)$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^N 4k\pi |a| \sigma (n+1)^{\sigma-1} + 1 \\
&\leq CN^\sigma
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2k\pi i a n^\sigma} - \frac{1}{N} \int_1^N e^{2k\pi i a x^\sigma} dx = O(N^{\sigma-1})$$

有估计如下

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2k\pi i a n^\sigma} \\
&= \sum_{n=1}^N e^{2k\pi i a n^\sigma} - \frac{1}{N} \int_1^N e^{2k\pi i a x^\sigma} dx + \frac{1}{N} \int_1^N e^{2k\pi i a x^\sigma} dx \\
&= O(N^{\sigma-1}) + O(N^{-\sigma}) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

利用 Weyl 准则, 可知  $\{an^\sigma \bmod 1\}$  在  $[0, 1)$  上等分布.

**题目 7. Exercise 9**

证明: 对于任意  $a \in \mathbb{R}, \{a \log n \bmod 1\}$  在  $[0, 1)$  上不是等分布的.

**解答.** 证明: 对于  $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^N e^{2k\pi i a \log n} - \int_1^N e^{2k\pi i a \log x} dx \right| \\
 & \leq \left| \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} (e^{2k\pi i a \log n} - e^{2k\pi i a \log x}) dx \right| + \left| \int_N^{N+1} e^{2k\pi i a \log x} dx \right| \\
 & \leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} 2k\pi |a| |\log n - \log x| dx + 1 \\
 & = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} 2k\pi |a| |n - x| \frac{1}{x^2} dx + 1
 \end{aligned}$$

其中用到微分中值定理,  $\xi_1 \in (n, x) \subset (n, n+1)$

$$\begin{aligned}
 & \leq \sum_{n=1}^N 2k\pi |a| \frac{1}{n} + 1 \\
 & \leq C \log N
 \end{aligned}$$

那么有:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2k\pi i a \log n} - \frac{1}{N} \int_1^N e^{2k\pi i a \log x} dx = O\left(\frac{\log N}{N}\right) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

又有

$$\frac{1}{N} \int_1^N e^{2k\pi i a \log x} dx = \frac{1}{N} \frac{e^{(2k\pi i a + 1) \log N} - 1}{2k\pi i a + 1} = \frac{N^{2k\pi i a} - \frac{1}{N}}{2k\pi i a + 1} \not\rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

则

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2k\pi i a \log n} \not\rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

利用 Weyl 准则,  $\{a \log n \bmod 1\}$  不在  $[0, 1)$  上等分布.

题目 7 的注记.

最后极限不存在的说明.

存在  $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{1+4k^2\pi^2a^2}}$ , 任意  $N_0 \in \mathbb{N}$ , 存在  $N > N_1$ , 使得:

$$\left| \frac{N^{2k\pi ia} - \frac{1}{N}}{2k\pi ia + 1} - 0 \right| \geq \frac{1 - \frac{1}{N}}{\sqrt{1+4k^2\pi^2a^2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{1+4k^2\pi^2a^2}} = \varepsilon$$

题目 8. Exercise 11

$u(x, t) = (f * H_t)(x)$ , 其中  $H_t(x)$  是 heat kernel, 证明: 若  $f$  是 Riemann 可积的, 有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 |u(x, t) - f(x)|^2 dx = 0$$

解答. 证明:

设  $a_n$  是  $f$  的 Fourier 系数, 而且  $(f * H_t)(x) = a_n e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}$

则改写为  $u(x, t) - f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1) e^{2\pi i n x}$

根据 Parseval 恒等式:

$$\int_0^1 |u(x, t) - f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 |e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1|^2$$

因为  $f$  是 Riemann 可积的, 那么  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$

且注意到

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 |e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1|^2 \leq 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$$

那么根据 Weierstrass 判别法  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 |e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1|^2$  关于  $t > 0$  一致收敛.

那么, 可交换极限和求和次序:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 |u(x, t) - f(x)|^2 dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 |e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1|^2 \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{t \rightarrow 0} |a_n|^2 |e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1|^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

### 题目 9. Problem 4

通过堆积奇点, 我们可以得到一种构造处处连续但是无处可微函数的基本方法.

考虑函数:

$$\varphi(x) = |x|, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

使其周期为 2, 将  $\varphi(x)$  延拓至  $\mathbb{R}$ .

显然,  $\varphi(x)$  处处连续且恒有  $|\varphi(x)| \leq 1$ .

接着, 我们定义函数:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

显然,  $f(x)$  是良定义的, 且在  $\mathbb{R}$  上处处连续.

(1) 固定  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 对每个  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , 设  $\delta_m = \pm \frac{1}{2} 4^{-m}$ . 正负号的选取应使得  $4^m x_0$  和  $4^m(x_0 + \delta_m)$  中没有整数.

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x_0 + \delta_m)) - \varphi(4^n x_0)}{\delta_m}$$

证明: 若  $n > m$ , 则  $\gamma_n = 0$ ; 若  $0 \leq n \leq m$ ,  $|\gamma_n| \leq 4^n$ , 且  $|\gamma_m| = 4^m$

(2) 通过上面观察, 证明估计:

$$\left| \frac{f(x_0 + \delta_m) - f(x_0)}{\delta_m} \right| \geq \frac{1}{2}(3^m + 1)$$

并说明  $f$  在  $x_0$  处不可微, 且说明此构造满足要求.

解答.

(1) 证明:

若  $n > m$ , 则  $4^n \delta_m$  是 2 的倍数, 那么  $\varphi(4^n(x_0 + \delta_m)) = \varphi(4^n x_0)$ , 则  $\gamma_n = 0$ .

若  $0 \leq n \leq m$ , 特殊的  $n = m$  时, 根据线性,  $4^m(x_0 + \delta_m)$  和  $4^m x_0$  差值绝对值为  $\frac{1}{2}$ , 那么:

$$|\gamma_m| = \frac{|\varphi(4^m(x_0 + \delta_m)) - \varphi(4^m x_0)|}{\frac{1}{2}4^{-m}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}4^{-m}} = 4^m$$

$0 \leq n < m$ , 根据线性,  $4^n(x_0 + \delta_m)$  和  $4^n x_0$  差值绝对值为  $\frac{1}{2}4^{n-m}$ , 那么:

$$|\gamma_n| = \frac{|\varphi(4^n(x_0 + \delta_m)) - \varphi(4^n x_0)|}{\frac{1}{2}4^{-m}} \leq \frac{\frac{1}{2}4^{n-m}}{\frac{1}{2}4^{-m}} = 4^n$$

(2) 证明:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x_0 + \delta_m) - f(x_0)}{\delta_m} \right| \\
&= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n \frac{\varphi(4^n(x_0 + \delta_m)) - \varphi(4^n x_0)}{\delta_m} \right| \\
&= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n \gamma_n \right| \\
&= \left| \sum_{n=0}^m \left( \frac{3}{4} \right)^n \gamma_n \right| \\
&\geq \frac{3^m}{4^m} \cdot |\gamma_m| - \sum_{n=0}^{m-1} \left( \frac{3}{4} \right)^n |\gamma_n| \\
&\geq \frac{3^m}{4^m} \cdot 4^m - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{3^n}{4^n} \cdot 4^n \\
&= 3^m - \frac{3^m - 1}{2} \\
&= \frac{3^m + 1}{2} \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

$f$  在  $x_0$  处不可微, 根据  $x_0$  的任意性,  $f$  处处连续但处处不可微.