# Fourier Analysis Chapter 4

张浩然

2025 年 9 月 3 日

**题目 1.** Exercise 1

设 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 是闭曲线 $\Gamma$ 的一个参数化.

(1) 证明:$\gamma$ 是弧长参数化当且仅当曲线从 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(s)$ 的长度恰好是 $s - a$, 即

$$\int_a^s |\gamma'| \mathrm{d}t = s - a$$

(2) 证明: 任何正则参数曲线都可以弧长参数化.

**解答.**

(1) 必要性:

若 $\gamma$ 是弧长参数化, 则 $|\gamma'| = 1$, 那么:

$$\int_a^s |\gamma'| \mathrm{d}t = \int_a^s 1 \mathrm{d}t = s - a$$

充分性:

由于 $\gamma \in C^1$, 则 $|\gamma'| - 1 \in C$.

那么由于:

$$\int_a^s (|\gamma'| - 1) \mathrm{d}t = 0$$

那么, $|\gamma'| = 1$,$\gamma$ 是弧长参数化.

(2) 我们考虑:$\eta:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是 $\Gamma$ 任意一个参数化, 记

$$h(s)=\int_a^s|\eta'(t)|\mathrm{d}t$$

由正则曲线条件,$\eta'(t)\neq 0$, 则 $h(s)$ 单调递增, $h'(s)=|\eta'(s)|$ , 存在反函数 $h^{-1}$.

令 $\gamma(s)=\eta\circ h^{-1}(s)$, 求导有:

$$\gamma'(s)=\eta'(u)\cdot\frac{\mathrm{d}h^{-1}(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\eta'(u)}{|\eta'(u)|}$$

那么

$$|\gamma'|=1$$

任意正则参数曲线一定可以弧长参数化.

**题目 2.** Exercise 2

设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是闭曲线 $\Gamma$ 的参数化，有：

$$\gamma(t)=(x(t),y(t))$$

(1) 证明:

$$\frac{1}{2}\int_a^b[x(s)y'(s)-x'(s)y(s)]\mathrm{d}s=\int_a^b x(s)y'(s)\mathrm{d}s=-\int_a^b x'(s)y(s)\mathrm{d}s$$

(2) 定义反向参数化为:$\gamma^-:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, 有：

$$\gamma^-(t)=\gamma(b+a-t)$$

证明:

$$\int_\gamma(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=-\int_{\gamma^-}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$$

**解答.**

(1) 证明:

考虑:

$$(x(s)y(s))' = x'(s)y(s) + x(s)y'(s)$$

由于闭曲线性质:$x(a) = x(b), y(a) = y(b)$,

$$\int_a^b (x(s)y(s))'\mathrm{d}s = x(s)y(s)\Big|_a^b = 0$$

则:

$$\int_a^b x(s)y'(s)\mathrm{d}s = -\int_a^b y(s)x'(s)\mathrm{d}s$$

各取一半, 有:

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\mathrm{d}s = \int_a^b x(s)y'(s)\mathrm{d}s = -\int_a^b y(s)x'(s)\mathrm{d}s$$

(2) 证明:

令 $s = a + b - t$

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) \\
=&\int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\mathrm{d}s \\
=&\int_b^a [x(b+a-t)y'(b+a-t) - y(b+a-t)x'(b+a-t)]\cdot(-1)\mathrm{d}t \\
=&-\int_{\gamma^-} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

**题目 3.** Exercise 4

等周不等式对于非简单闭曲线也成立.

证明: 更强版本的等周不等式等价于 Wirtinger 不等式

Wirtinger 不等式即 $f \in C^1$ 且周期 $2\pi$, 满足 $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$, 则:

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\mathrm{d}t$$

等号成立当且仅当 $f(t) = A\sin t + B\cos t$.

**解答.**

从 Wirtinger 不等式推导等周不等式:

设曲线 $\Gamma$ 长度为 $2\pi$, 弧长参数化 $\gamma(s)=(x(s),y(s))$, $[x'(s)]^2+[y(s)']^2=1, s\in[0,2\pi]$.

只需要证明:$\mathcal{A}\leqslant\pi$

注意到恒等式:

$$2\pi-2\mathcal{A}=\int_0^{2\pi}[x'(s)+y(s)]^2\mathrm{d}s+\int_0^{2\pi}(y'(s)^2-y(s)^2)\mathrm{d}s\geqslant 0$$

其中总可以平移坐标使得 $y(s)=y(s)-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}y(s)\mathrm{d}s$, 利用 Wirtinger 不等式放缩第二项即可.

于是等周不等式

$$\mathcal{A}\leqslant\pi$$

成立.

从等周不等式推导 Wirtinger 不等式:

设 $f(x)$ 满足等周不等式条件.$f\in C^1$, 存在周期 $2\pi$ 的连续可微函数 $g(x)=\displaystyle\int_0^x[-f(t)]\mathrm{d}t$, 使得 $g'(x)=-f(x)$, 那么 $\gamma(x)=(g(x),f(x))$ 确定了一条闭曲线 $\Gamma$，长度为 $l$.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}(|f'(x)|^2-|f(x)|^2)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{2\pi}[g'(x)+f(x)]^2\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}(f'(x)^2-f(x)^2)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{2\pi}(g'(x)^2+f'(x)^2)\mathrm{d}x-2\mathcal{A}\\
\geqslant&\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{f'(x)^2+g'(x)^2}\mathrm{d}x\right)^2-2\mathcal{A}\\
=&\frac{l^2}{2\pi}-2\mathcal{A}\\
\geqslant&0
\end{aligned}$$

其中倒数第二个大于等于号用到 Cauchy 不等式:

$$\left(\int \sqrt{f'(x)^2 + g'(x)^2}\right)^2 \leqslant 2\pi \cdot \int (f'(x)^2 + g'(x)^2)$$

最后一个大于等于号用到等周不等式:

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{l^2}{4\pi}$$

综上所述，原命题成立.

**题目 4.** Exercise 5

证明: 序列 $\{\gamma_n\}$ 在 $[0,1]$ 中不是等分布的, 其中 $\gamma_n$ 是

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

的小数部分.

**解答.** 考虑

$$U_{r+1} = U_r + U_{r-1}$$

的特征方程:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

带入初值知道:

$$U_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

根据递推方程和归纳法知道 $U_n$ 是正整数.
又 $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0$$

那么考虑

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = U_n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

当 $n=2k, k\in\mathbb{Z}$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} = 1$$

当 $n=2k+1, k\in\mathbb{Z}$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} = 0$$

这是因为 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$, 考虑正负.

考虑区间 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$, 当 $N$ 充分大, $\gamma_n = \left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ 分布集中在 $[0,1]$ 两个端点处,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\chi_{\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)}(\gamma_n) = 0$$

则其在 $[0,1]$ 中不是等分布.

**题目 5.** Exercise 7

证明 Weyl 准则的第二部分:

如果一个序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\in[0,1)$ 是等分布的, 那么对于所有 $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 有:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi ik\xi_n}\to 0,\quad N\to\infty$$

**解答.**

证明: 已知 $\{\xi_n\}$ 是等分布序列, 那么对于 $(a,b)\subset[0,1)$ 有:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(\xi_n) = b-a$$

对于阶梯函数 $f$, 其是特征函数的线性组合, 那么有:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\xi_n)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

对于连续函数的情况, 我们断言: 任何闭区间上的连续函数可以被阶梯函数一致逼近.

则对于 $[0,1]$ 上连续函数 $f(x)$ , 对任意 $\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 $h$ 使得:

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-h(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

那么, 当 $N$ 充分大时:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\xi_n)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\xi_n)-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}h(\xi_n)+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}h(\xi_n)-\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f(\xi_n)-h(\xi_n)|+\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}h(\xi_n)-\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x\right|+\int_0^1|h(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\
=&\varepsilon
\end{aligned}$$

其中用到

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}h(\xi_n)=\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$$

当 $N$ 充分大时,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}h(\xi_n)-\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是连续函数 $f$ 满足:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\xi_n)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

取 $f(x)=\mathrm{e}^{2\pi kix}, k\in\mathbb{Z}_{\neq 0}$ 计算即可.

**题目 5 的注记.**

解答两个问题:

**为什么有界闭区间上的连续函数可以被阶梯函数一致逼近?**

考虑 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则一致连续.

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|x-y|<\delta$ 时，

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

将区间划分为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n'}=b$, 存在 $N$,$n'>N$ 时，$\dfrac{b-a}{n'}<\delta$.

在 $[x_i,x_{i+1}], 0\leqslant i\leqslant n$ 上取函数 $h_{n'}(x)=f(x_i)$, 则在此区间上

$$|f(x)-h_{n'}(x)|<\varepsilon$$

进而定义了阶梯函数 $h_{n'}(x)$, 对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$,$n'>N$ 时，有

$$|f(x)-h_{n'}(x)|<\varepsilon$$

取 $n'$ 充分大，那么对任意 $\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 $h(x)=h_{n'}(x)$, 满足:

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

**为什么最后一步的计算合理?**

对于实变复值函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2\pi kix}$, 最后的计算需要用到 Euler 公式拆开算再合并.

$$\mathrm{e}^{2\pi kix}=\cos(2\pi kx)+i\sin(2\pi kx)$$

**题目 6.** Exercise 8

证明: 对于任意 $a \neq 0$, 和 $0 < \sigma < 1$, 序列 $\{an^\sigma \mod 1\}$ 在 $[0,1)$ 上等分布.

**解答.**

证明: 考虑 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, 直接估计

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_1^N \mathrm{e}^{2k\pi iax^\sigma}\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\frac{x^{1-\sigma}}{2\pi kia\sigma}\mathrm{e}^{2\pi kiax^\sigma}\right|_1^N - \int_1^N \mathrm{e}^{2\pi kiax^\sigma}\frac{1-\sigma}{2\pi kia\sigma}x^{-\sigma}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\left|\frac{N^{1-\sigma}\mathrm{e}^{2\pi kiaN^\sigma}-\mathrm{e}^{2\pi kia}}{2\pi kia\sigma}\right| + \frac{1-\sigma}{2\pi k|a|\sigma}\int_1^N x^{-\sigma}\mathrm{d}x \\
\leqslant&\frac{N^{1-\sigma}}{\pi k|a|\sigma}
\end{aligned}
$$

则

$$
\frac{1}{N}\int_1^N \mathrm{e}^{2k\pi iax^\sigma}\mathrm{d}x = O(N^{-\sigma})
$$

对于

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi ian^{\sigma}}-\int_{1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi iax^{\sigma}}\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\sum_{n=1}^{N}\left(\mathrm{e}^{2k\pi ian^{\sigma}}-\int_{n}^{n+1}\mathrm{e}^{2k\pi iax^{\sigma}}\mathrm{d}x\right)+\int_{N}^{N+1}\mathrm{e}^{2k\pi iax^{\sigma}}\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\sum_{n=1}^{N}\int_{n}^{n+1}\left|\mathrm{e}^{2k\pi ian^{\sigma}}-\mathrm{e}^{2k\pi iax^{\sigma}}\right|\mathrm{d}x+1\\
\leqslant&\sum_{n=1}^{N}\int_{n}^{n+1}|\cos 2k\pi an^{\sigma}-\cos 2k\pi ax^{\sigma}|\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{N}\int_{n}^{n+1}|\sin 2k\pi an^{\sigma}-\sin 2k\pi ax^{\sigma}|\mathrm{d}x+1\\
=&\sum_{n=1}^{N}\int_{n}^{n+1}2k\pi|a|\sigma|n-x|\left(\xi_1^{\sigma-1}|\sin 2k\pi a\xi_1^{\sigma}|+\sigma\xi_2^{\sigma-1}|\cos 2k\pi a\xi_2^{\sigma}|\right)\mathrm{d}x+1
\end{aligned}
$$

其中用到微分中值定理,$\xi_1,\xi_2\in(n,x)\subset(n,n+1)$

$$
\begin{aligned}
\leqslant&\sum_{n=1}^{N}4k\pi|a|\sigma(n+1)^{\sigma-1}+1\\
\leqslant&CN^{\sigma}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi ian^{\sigma}}-\frac{1}{N}\int_{1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi iax^{\sigma}}\mathrm{d}x=O(N^{\sigma-1})
$$

有估计如下

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi ian^{\sigma}}\\
=&\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi ian^{\sigma}}-\frac{1}{N}\int_{1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi iax^{\sigma}}\mathrm{d}x+\frac{1}{N}\int_{1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi iax^{\sigma}}\mathrm{d}x\\
=&O(N^{\sigma-1})+O(N^{-\sigma})\to 0, N\to\infty
\end{aligned}
$$

利用 Weyl 准则, 可知 $\{an^{\sigma}\mod 1\}$ 在 $[0,1)$ 上等分布.

**题目 7.** Exercise 9

证明: 对于任意 $a \in \mathbb{R}$,$\{a \log n \mod 1\}$ 在 $[0,1)$ 上不是等分布的.

**解答.** 证明: 对于 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{2k\pi ia\log n} - \int_1^N \mathrm{e}^{2k\pi ia\log x}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\left|\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}(\mathrm{e}^{2k\pi ia\log n} - \mathrm{e}^{2k\pi ia\log x})\mathrm{d}x\right| + \left|\int_N^{N+1}\mathrm{e}^{2k\pi ia\log x}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1} 2k\pi|a||\log n - \log x|\mathrm{d}x + 1 \\
=&\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1} 2k\pi|a||n-x|\frac{1}{\xi_1}\mathrm{d}x + 1 \\
&\text{其中用到微分中值定理}, \xi_1 \in (n,x) \subset (n,n+1) \\
\leqslant&\sum_{n=1}^{N} 2k\pi|a|\frac{1}{n} + 1 \\
\leqslant&C\log N
\end{aligned}
$$

那么有:

$$
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi ia\log n} - \frac{1}{N}\int_1^N \mathrm{e}^{2k\pi ia\log x}\mathrm{d}x = O\left(\frac{\log N}{N}\right) \to 0, N \to \infty
$$

又有

$$
\frac{1}{N}\int_1^N \mathrm{e}^{2k\pi ia\log x}\mathrm{d}x = \frac{1}{N}\frac{\mathrm{e}^{(2k\pi ia+1)\log N} - 1}{2k\pi ia+1} = \frac{N^{2k\pi ia} - \frac{1}{N}}{2k\pi ia+1} \not\to 0, N \to \infty
$$

则

$$
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2k\pi ia\log n} \not\to 0, N \to \infty
$$

利用 Weyl 准则, $\{a \log n \mod 1\}$ 不在 $[0,1)$ 上等分布.

**题目 7 的注记.**

**最后极限不存在的说明.**

存在 $\varepsilon=\dfrac{1}{2\sqrt{1+4k^2\pi^2a^2}}$, 任意 $N_0\in\mathbb{N}$, 存在 $N>N_1$, 使得:

$$\left|\frac{N^{2k\pi ia}-\dfrac{1}{N}}{2k\pi ia+1}-0\right|\geqslant\frac{1-\dfrac{1}{N}}{\sqrt{1+4k^2\pi^2a^2}}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{1+4k^2\pi^2a^2}}=\varepsilon$$

**题目 8.** Exercise 11

$u(x,t)=(f*H_t)(x)$, 其中 $H_t(x)$ 是 heat kernel, 证明: 若 $f$ 是 Riemann 可积的, 有

$$\lim_{t\to0}\int_0^1|u(x,t)-f(x)|^2\mathrm{d}x=0$$

**解答.** 证明:

设 $a_n$ 是 $f$ 的 Fourier 系数, 而且 $(f*H_t)(x)=a_n\mathrm{e}^{-4\pi^2n^2t}\mathrm{e}^{2\pi inx}$

则改写为 $u(x,t)-f(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}a_n(\mathrm{e}^{-4\pi^2n^2t}-1)\mathrm{e}^{2\pi inx}$

根据 Paseval 恒等式:

$$\int_0^1|u(x,t)-f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2|\mathrm{e}^{-4\pi^2n^2t}-1|^2$$

因为 $f$ 是 Riemann 可积的, 那么 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2<\infty$

且注意到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2|\mathrm{e}^{-4\pi^2n^2t}-1|^2\leqslant4\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2$$

那么根据 Weierstrass 判别法 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2|\mathrm{e}^{-4\pi^2n^2t}-1|^2$ 关于 $t>0$ 一致收敛.

那么, 可交换极限和求和次序:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\int_0^1 |u(x,t)-f(x)|^2\mathrm{d}x\\=&\lim_{t\to 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2|\mathrm{e}^{-4\pi^2n^2t}-1|^2\\=&\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lim_{t\to 0}|a_n|^2|\mathrm{e}^{-4\pi^2n^2t}-1|^2\\=&0\end{aligned}$$

**题目 9.** Problem 4

通过堆积奇点, 我们可以得到一种构造处处连续但是无处可微函数的基本方法.

考虑函数:

$$\varphi(x)=|x|,\quad \forall x\in[-1,1]$$

使其周期为 2, 将 $\varphi(x)$ 延拓至 $\mathbb{R}$.

显然, $\varphi(x)$ 处处连续且恒有 $|\varphi(x)|\leqslant 1$.

接着, 我们定义函数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^nx)$$

显然, $f(x)$ 是良定义的, 且在 $\mathbb{R}$ 上处处连续.

(1) 固定 $x_0\in\mathbb{R}$, 对每个 $m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, 设 $\delta_m=\pm\frac{1}{2}4^{-m}$ . 正负号的选取应使得 $4^mx_0$ 和 $4^m(x_0+\delta_m)$ 中没有整数.

$$\gamma_n=\frac{\varphi(4^n(x_0+\delta_m))-\varphi(4^nx_0)}{\delta_m}$$

证明: 若 $n>m$, 则 $\gamma_n=0$; 若 $0\leqslant n\leqslant m$, $|\gamma_n|\leqslant 4^n$, 且 $|\gamma_m|=4^m$

(2) 通过上面观察, 证明估计:

$$\left|\frac{f(x_0+\delta_m)-f(x_0)}{\delta_m}\right|\geqslant\frac{1}{2}(3^m+1)$$

并说明 $f$ 在 $x_0$ 处不可微, 且说明此构造满足要求.

**解答.**

(1) 证明:

若 $n > m$, 则 $4^n\delta_m$ 是 2 的倍数, 那么 $\varphi(4^n(x_0+\delta_m)) = \varphi(4^n x_0)$, 则 $\gamma_n = 0$.

若 $0 \leqslant n \leqslant m$, 特殊的 $n = m$ 时, 根据线性,$4^m(x_0+\delta_m)$ 和 $4^m x_0$ 差值绝对值为 $\dfrac{1}{2}$, 那么:

$$|\gamma_m| = \frac{|\varphi(4^m(x_0+\delta_m)) - \varphi(4^m x_0)|}{\dfrac{1}{2}4^{-m}} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}4^{-m}} = 4^m$$

$0 \leqslant n < m$, 根据线性,$4^n(x_0+\delta_m)$ 和 $4^n x_0$ 差值绝对值为 $\dfrac{1}{2}4^{n-m}$, 那么:

$$|\gamma_n| = \frac{|\varphi(4^n(x_0+\delta_m)) - \varphi(4^n x_0)|}{\dfrac{1}{2}4^{-m}} \leqslant \frac{\dfrac{1}{2}4^{n-m}}{\dfrac{1}{2}4^{-m}} = 4^n$$

(2) 证明:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x_0+\delta_m)-f(x_0)}{\delta_m}\right| \\
=&\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{\varphi(4^n(x_0+\delta_m))-\varphi(4^nx_0)}{\delta_m}\right| \\
=&\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right| \\
=&\left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right| \\
\geqslant&\frac{3^m}{4^m}\cdot|\gamma_m|-\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n|\gamma_n| \\
\geqslant&\frac{3^m}{4^m}\cdot 4^m-\sum_{n=0}^{m-1}\frac{3^n}{4^n}\cdot 4^n \\
=&3^m-\frac{3^m-1}{2} \\
=&\frac{3^m+1}{2}\to\infty, m\to\infty
\end{aligned}
$$

$f$ 在 $x_0$ 处不可微, 根据 $x_0$ 的任意性,$f$ 处处连续但处处不可微.