Metodi Matematici e Statistici per il corso di Laurea in Informatica - A.A. 2021/2022

Esercizi sulle distribuzioni

Distribuzione Binomiale

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},\ \mu = np,\ \sigma^2 = npq$$

Esercizio 1
La probabilità che un determinato componente resista a una prova d'urto è di 3/4. Calcolare la probabilità che esattamente 2 dei 4 componenti sottoposti alla prova, la superino con successo.

Esercizio 2
La probabilità che un paziente guarisca da una rara malattia del sangue è 0.4. Se si conosce che 15 persone sono affette da questa malattia, qual è la probabilità che
A. almeno 10 sopravvivano
B. da 3 a 8 sopravvivano
C. esattamente 5 sopravvivano?

Calcolare la media e la varianza

Esercizio 3
Un grande rivenditore acquista un determinato tipo di apparecchio elettronico da un produttore. Il produttore avverte che il tasso di prodotti difettosi è del 3%.
A. L'addetto al controllo qualità seleziona casualmente 20 apparecchi da un ordine di questi prodotti. Qual è la probabilità che tra di essi ci sia almeno un apparecchio difettoso?
B. Si supponga che il rivenditore riceva 10 ordini in un mese e che l'addetto al controllo qualità riceva 20 di questi apparecchi per ogni ordine. Qual è la probabilità che ci siano 3 ordini ciascuno contenente almeno un apparecchio difettoso?

Esercizio 4
Si suppone che sia presente un agente contaminante nel 30% di tutti gli acquedotti potabili di una determinata comunità rurale. Al fine di scoprire se sia vero o meno, si ritiene necessario condurre dei test, tuttavia, poiché è troppo costoso condurre dei test su tutti gli acquedotti presenti nell'area, si decide di selezionarne 10 a caso e di condurre dei test su di essi.
A. Qual è la probabilità che esattamente 3 acquedotti siano contaminati?
B. Qual è la probabilità che più di 3 acquedotti siano contaminati?

Esercizio 4a
L'informazione che il 30% degli acquedotti sono contaminati è solo una congettura sostenuta dai gestori degli stessi acquedotti. Si supponga di selezionare a caso 10 acquedotti e di scoprire che 6 sono contaminati. Che cosa implica questa informazione rispetto alla congettura? Si utilizzi una descrizione in termini probabilistici.

Esercizio 5
Un importante medico sostiene che il 70% degli individui con tumore ai polmoni siano forti fumatori. Se la sua affermazione fosse vera,

A. Calcolare la probabilità che, su 10 pazienti con tumore al polmone, meno della metà siano forti fumatori;
B. Calcolare la probabilità che, su 20 pazienti con tumore al polmone, meno della metà siano forti fumatori.

Distribuzione Geometrica

$$g(x;p) = pq^{x-1},\ \mu = \frac{1}{p},\ \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Esercizio 1
Di un certo processo manifatturiero si conosce che, in media, 1 prodotto ogni 100 è difettoso. Qual è la probabilità che il quinto prodotto controllato sia il primo che è stato identificato come difettoso?

Esercizio 2
A un centralino telefonico tutte le linee sono così impegnate che i clienti hanno difficoltà a trovare una linea libera, per cui si vuole conoscere il numero di tentativi necessari a ottenere una linea libera. Si supponga che p=0.05 sia la probabilità di ottenere una linea libera durante un momento di massima affluenza delle e si vuole calcolare la probabilità che siano necessari 5 tentativi prima di trovare una linea libera.

Distribuzione di Poisson

$$p(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!},\ \mu = \lambda t,\ \sigma^2 = \lambda t$$

Esercizio 1
Durante un esperimento di laboratorio, il numero medio di particelle radioattive che vengono individuate da un contatore in 1 millisecondo è 4. Qual è la probabilità che 6 particelle vengano identificate da un contatore in un qualsiasi millisecondo?

Esercizio 2
Il numero medio di navi che attraccano ogni giorno in uno specifico porto è 10. La struttura del porto è tale che può gestire al massimo 15 navi al giorno. Qual è la probabilità che in un determinato giorno le navi non possano attraccare al porto?

Distribuzione Normale

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Esercizio 1
Data una distribuzione normale standardizzata, determinare il valore di k tale che:
A. $P(Z > k) = 0.3015$
B. $P(k < Z < -0.18) = 0.4167$

Esercizio 2
Si consideri una variabile casuale X con distribuzione normale, media $\mu = 50$ e deviazione standard $\sigma = 10$. Calcolare la probabilità che X assuma un valore compreso tra 45 e 62.

Esercizio 3
Sia X una variabile casuale con distribuzione normale, media $\mu = 300$ e deviazione standard $\sigma = 50$. Calcolare la probabilità che X assuma un valore maggiore di 362.

Esercizio 4
Si consideri una distribuzione normale con $\mu = 40$ e $\sigma = 6$, e si determini il valore di x per cui

A. Il 45% dell'area è a sinistra di x;

B. Il 14% dell'area è a destra di x.

Esercizio 5
La durata media di una batteria è di 3.0 anni e ha una deviazione standard di 0.5 anni. Assumendo che la durata si distribuisca come una normale, calcolare la probabilità che una determinata batteria duri meno di 2.3 anni.

Esercizio 6
Un'azienda produce lampadine la cui durata si distribuisce come una normale con media di 800 ore e deviazione standard di 40 ore. Calcolare la probabilità che una lampadina duri dalle 778 alle 834 ore.

Esercizio 7
In un'azienda metalmeccanica, il diametro di un cuscinetto a sfera è considerato una variabile importante. Le specifiche di fabbricazione per il diametro sono 3.00 ± 0.01 cm e i cuscinetti non le rispettano non saranno accettati. La distribuzione del diametro dei cuscinetti prodotti è nota ed è una normale con media $\mu = 3.0$ e deviazione standard $\sigma = 0.005$. In media, quanti cuscinetti saranno scartati?

Esercizio 8
Alcune misure sono effettuate al fine di scartare tutti i componenti che non rispettano la seguente specifica: $1.50 \pm d$. Si sa che le misure si distribuiscono come una normale con. Media 1.50 e deviazione standard 0.2. Determinare il valore di d in modo tale che le specifiche "coprano" il 95% delle misure.

Esercizio 9
Una macchina produce resistori elettrici che devono avere una resistenza media di 40 ohm e una deviazione standard di 2 ohm. Assumendo che la resistenza si distribuisca come una normale e possa essere misurata a qualunque grado di precisione, qual è la percentuale di resistori che avranno una resistenza che supera i 43 ohm?

Distribuzione Esponenziale

$f(x;\beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$ per $x > 0$ e 0 altrove
$\mu = \beta$ e $\sigma^2 = \beta^2$

Esercizio 1
Si supponga che un sistema contenga un determinato tipo di componente il cui tempo, in anni, al verificarsi di un guasto è T. La variabile casuale T è descritta accuratamente da una distribuzione esponenziale con un tempo medio al verificarsi di un guasto $\beta = 5$. Se 5 di questi componenti sono installati in differenti sistemi, qual è la probabilità che almeno 2 siano ancora funzionanti alla fine di 8 anni?

Esercizio 2
È stato determinato, dopo molti test, che il tempo Y in anni prima che una determinata lavatrice necessiti di una riparazione è caratterizzato dalla funzione densità

$$f(y) = \frac{1}{4} e^{-\frac{y}{4}}, y \geq 0.$$

Si noti che Y è una variabile casuale esponenziale con $\mu = 4$ anni. Il prodotto è considerato vantaggioso se è poco probabile che richieda una riparazione prima del sesto anno. Qual è la probabilità $P(Y > 6)$? Qual è la probabilità che una riparazione sia necessaria nel primo anno?

Distribuzione Chi-quadrato

$f(x;\nu) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0$ con $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, per $\alpha > 0$
$\mu = \nu$ e $\sigma^2 = 2\nu$

Distribuzione di Weibull

$f(x;\alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{\alpha x^\beta}$ per $x > 0$ e con $\alpha > 0, \beta > 0$

$\mu = \alpha^{-1/\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \quad \sigma^2 = \alpha^{-2/\beta}\left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$

La funzione di ripartizione è $F(x) = 1 - e^{-\alpha x^\beta}$ per $x \geq 0$.

Esercizio 1
Il tempo di vita X, in ore, di una macchina utensile in un'officina meccanica ha una distribuzione di Weibull con $\alpha = 0.01$ e $\beta = 2$. Qual è la probabilità che si guasti prima di 8 ore di funzionamento?

Nota

Tasso di guasto per la distribuzione di Weibull

Affidabilità di un qualche componente al tempo t:

$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - F(t)$

La probabilità condizionata che un componente si guasti nell'intervallo compreso tra $T = t$ e $T = t + \Delta t$, dato che ha funzionato fino al tempo t, è

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}.$$

Il **tasso di guasto** è

$$Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

quindi $Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$.