## Esercizio 6

Funzione di densita della popolazione:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta}{x^{\theta+1}} & x>1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}\qquad \forall\theta\in\mathbb{R}:\theta>0$$

Nel caso x>1 si utilizza il metodo della massima verosomiglianza:

$$L(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i^{\theta+1}}$$

Si pone tutto come argomento del logaritmo naturale:

$$\ln(L(\theta))=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i^{\theta+1}}\right)$$

$$\ln(L(\theta))=\ln\left(\frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta+1}}\right)$$

$$\ln(L(\theta))=\ln\left(\frac{\theta^n}{(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta+1}}\right)$$

Da cui si ottiene la likelihood:

$$\ln(L(\theta))=n\cdot\ln(\theta)-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot(\theta+1)$$

Si deriva la likelihood in modo da trovare quel valore per cui la derivata rispetto a $\theta$ risulti 0:

$$\frac{dL}{d\theta}(\ln(L(\theta)))=\frac{n}{\theta}-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$

$$\frac{n}{\theta}-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$

$$\frac{n}{\theta}=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$\frac{\theta}{n}=\frac{1}{\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)}$$

$$\boxed{\theta=\frac{n}{\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)}}\quad\vee\quad\boxed{\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}}$$

Adesso prendendo in considerazione i valori assunti dalla $v.a.$ X:

$$X=[12,11.2,13.5,12.3,13.8,11.9]$$

Applicando una delle due formule ricavate:

$$\boxed{\theta=0,39697}$$