Esercizio 5

Funzione di densita della distribuzione di probabilità esponenziale su una variabile aleatoria X, $X \simeq EXP(\lambda)$:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Adesso si applica il metodo della massima verosomiglianza:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i}$$

Si pone tutto come argomento del logaritmo naturale:

$$\ln(L(\lambda)) = \ln(\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i})$$

$$\ln(L(\lambda)) = \ln(\lambda^n e^{-\lambda \sum_{1=1}^{n} x_i})$$

Da cui la likelihood:

$$\ln(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} (n \cdot \ln(\lambda) - \lambda x_i)$$

Si deriva la likelihood in modo da trovare quel valore per cui la derivata rispetto a λ risulti 0:

$$\frac{dL}{d\lambda}(\ln(L(\lambda))) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

Adesso prendendo in considerazione i valori assunti dalla $v.a.$ X:

$$X = [14, 17, 27, 18, 12, 8, 22, 13, 19, 12]$$

Applicando la formula ricavata:

$$\lambda = 0,0617$$

Essendo $\lambda = \frac{1}{\beta}$ e $\beta = \mu$ cioè la media:

$$\lambda = \frac{1}{\beta} \longrightarrow \beta = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Quindi:

$$\boxed{\beta = 16,2}$$