长文警告。

本文对于 Polya 定理中使用到的绝大部分引理都进行了~~伪证~~ 较为成分的证明。

在阅读这篇文章的时候，您可以选择性的跳过您所知道的知识，下面将从 “群” 这一个充满魔法的东西开始谈起。

群

群的定义

定义集合 G 和作用与集合 G 的二元运算 $\times$

若其满足以下 4 个性质，则称其为一个群(Group)，记为 $(\ G,\times\ )$：

$1.$ 封闭性 (Closure)

> 若存在 a 和 b 满足 $a\in G,b\in G$，则有 $a\times b\in G$

$2.$ 结合律 (Associativity)

> 对于任意 a,b,c 有 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

$3.$ 单位元 (Identity)

> 存在 $e\in G$，满足对于任意 $a\in G$ 有： $a\times e=e\times a=a$
>
> 这样的 e 被称为单位元。容易证明单位元唯一（你假设有多个可以马上推出矛盾）
>
> $\mathrm{e.g}$: 实数的乘法运算就是一个群，模意义下的乘法运算（不包括0）同样是一个群。这些例子中的单位元均为 1

$4.$ 逆元 (Inverse)

> 对于任意 $a\in G$ 存在 $a'\in G$ 满足 $a\times a'=a'\times a=e$
>
> 值得注意的是这个 a' 是唯一的。读者可以尝试自行证明。

性质的实际应用：

$1-$ question : 为什么不能使用传统的树状数组实现区间最值查询。

$1-$ answer : 树状数组在于运算上存在一个差分的过程，换而言之需要"逆元"的存在，然而最值函数与数集S不构成群。~~（好像在扯淡）~~

子群：

如果 H 为 G 的一个子集，且有 ($H, \times$) 构成一个群，那么称 $(H, \times)$ 为 $(G, \times)$ 的一个子群。简记为 $H \le G$。

如果 G 是一个群，H 为其一个子群，且有 $g \in G$，那么：

> $gH = g \times h, h \in H$，称其为 H 在 G 内的关于 g 的左陪集。

> $Hg = h \times g, h \in H$，称其为 H 在 G 内的关于 g 的右陪集。

陪集的一些性质：

下面只讨论右陪集：（左陪集同理）

> 1. $\forall g \in G$，$|H| = |Hg|$

证明：注意到 “群的性质”： 逆元唯一，所以有对于任意的 $g \times h_1$ 与 $g \times h_2$ 其必然不同。

> 2. $\forall g \in G$，$g \in Hg$

证明：注意到 H 是一个群，所以 H 必然包括了单位元e，所以 $e \times g \in Hg \iff g \in Hg$

> 3. $Hg = H \iff g \in H$

证明显然，由于封闭性可以得到。

> 4. $Ha = Hb \iff a \times b^{-1} \in H$

证明：

首先你发现陪集像极了运算，所以有：$Ha = Hb \implies Ha \times b^{-1} = H$ 由于性质3 得到： $a \times b^{-1} \in H$

由于 $a \times b^{-1} \in H$ 所以 $Ha = Hb$ ...这个显然，配合性质 3 食用。

> 5. $Ha \cap Hb \ne \varnothing \to Ha = Hb$

这个性质非常有用，其意味着一个子群 H 的陪集的交集要么是空要么两个相等。

证明：假设 $c \in Ha, c \in Hb$ ，于是有 $\exists\, h_1, h_2 \in H$，$h_1 \times a = c, h_2 \times b = c$ 所以我们得到：$ab^{-1} = h_2 h_1^{-1} \in H$ 由于 性质4 得到 $Ha = Hb$。

> 6. H 的全体右陪集的并为 G

证明：因为 H 存在单位元，g 取遍 G 中每一个元素。

较为常见的表述：

若 $H \le G$，则 G/H 代表 G 中所有的 H 的左陪集即$\{gH, g \in G\}$

若 $H \le G$，则 $[G : H]$ 表示 G 中 H 的不同的陪集的数量。

拉格朗日定理：

对于有限群 G 与有限群 H ，若 H 为 G 的子群，那么有：

$$|H|\text{整除}|G|$$

即 H 的阶整除 G 的阶。

更具体点：

$$|H| \times [G : H] = |G|$$

证明：

由于陪集的性质$1,5,6$，所有本质不同的陪集互不相交且大小均为 $|H|$ 且并的大小为$|G|$，可以得到不同的陪集数量乘以陪集大小($|H|$)为 G 。你会发现有了陪集的性质之后这些都特别自然了。

置换

> 备注：一个充满魔法的科技。

一些定义：

$\text{Two} - \text{linenotation}$

双行表示法，大概就是用两个括号括起来，然后令 “元素/置换” 表示一个从【上列】 到 【下列】 的置换。

比如：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

其表示的置换为将排列 $1\ 2\ 3\ 4\ 5$ 变为 $2\ 5\ 4\ 3\ 1$ 的一个置换，可以理解为用原本第二个元素代替第一个元素，用原本的第 5 个元素代替第 2 个元素...依次类推。

不过我更喜欢强行规定第一列是 $(1, 2, ...n)$

然后第二列就是：

$\sigma = (a_1, a_2...a_n)$ 表示一个置换。

每个置换都是一个这样的排列，一个长度为 n 的不同的置换的数量为 $n!$

运算：

可以写为 $\sigma \times a$ 不过更习惯被表示为 $\sigma(a)$

其运算规则为：$\sigma(a) = (a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}...a_{\sigma_n})$

没错，这是一个运算，通常可以称呼其为置换的「魔法」/「乘法」，如上例可以用文字描述为：σ 和 a「魔法」起来。（这里是我个人认为它非常神奇而称呼其为「魔法」诸位笑笑便好）

更正式的，我们称呼其为置换的「合成」

置换群：

不妨令集合 $N = \{1, 2, 3...n\}$，令集合 M 为 N 的若干个排列构成的集合，我们令群 $G = (M, \times)$，其中 $\times$ 这个运算为「魔法」/「合成」，若再此基础上，其满足群的性质。则我们称 G 是一个置换群。

我们现在来验证一个例子，N 的所有可能的排列与运算「魔法」构成的 "二元组?"（这里不太清楚如何称呼） 是一个合法的置换群：

1. 封闭性，显然，注意上面定义的是所有可能的排列。

2. 单位元 : $e = (1, 2, ...n)$

> 容易发现 σ「魔法」$e = e$「魔法」$\sigma = \sigma$

3. 结合律：容易验证「魔法」满足结合律。

4. 逆元：容易验证「魔法」运算存在逆元。

「群作用」

分为 左群作用 和 右群作用。具体不太记得了…下面描述的是左群作用的定义，下文出于方便，将同一称为「群作用」，并使用此处的定义。

定义：

对于一个集合 M 和群 G 。

若给定了一个二元函数 $\varphi(v,k)$ 其中 v 为群中的元素，k 为集合元素，且有：

$$\varphi(e,k)=k \quad (e\text{ 是单位元})$$

$$\varphi(g,\varphi(s,k))=\varphi(g\times s,k)$$

则称呼群 G 作用于集合 M。

轨道-稳定子定理：

轨道

考虑一个作用在 X 上的群 G 。 X 中的一个元素 x 的「轨道」则是 x 通过 G 中的元素可以转移到的元素的集合。x 的轨道被记为 $G(x)$，方便起见，我们用 $g(x)$ 表示群 G 元素 g 作用于 x 的群作用的返回值，即 $g(x)=\varphi(g,x)$。

稳定子

稳定子被定义为：$G^x=\{g|g\in G,g(x)=x\}$

使用语言描述，便是群 G 中满足 $g(x)=x$ 的所有元素 g 所构成的集合。

e.g :

给定一个 2×2 的矩形，每个点可以使用黑白染色，这样得到的所有矩形构成的集合为 M

给定一个群 G ，其成员为 $1.$ 顺时针旋转$90°$，$2.$ 顺时针旋转$180°$，$3.$ 顺时针旋转$270°$，$4.$ 顺时针旋转0°。其运算为模360意义下的加法（大概，想必诸位理解我的意思）

那么对于一个 M 内的一个元素（0表示白，1表示黑）

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

而言，其稳定子 G^x 为 $\{\text{顺时针旋转}0°\}$

其轨道为：

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$$

似乎有一个巧合，轨道大小与稳定子的大小乘积为 4 刚好是群 G 的大小！

- 诸位可以去举其他例子来类比，总是可以发现这个规律。

这个东西有一个名字，叫做轨道-稳定子定理：

轨道-稳定子定理：

$$|G^x| \times |G(x)| = |G|$$

首先可以证明：G^x 是 G 的一个子群。

首先根据群作用的定义，我们得知：$e \in G^x$

结合律显然满足，我们接下来考虑证明逆元和封闭性。

封闭性：$f \in G^x, g \in G^x$ 则 $f(x) = x, g(x) = x$ 根据群作用的定义，此时有：$(f \times g)(x) = x$，所以 $f \times g \in G^x$

逆元：若 $g \in G^x$ 则 $g(x) = x$ 又因为 $(g \times g^{-1})(x) = e(x) = x$ 所以 $g^{-1}(x) = x$ 所以 $g^{-1} \in G^x$

所以按照拉格朗日定理有： $|G^x| \times [G : G^x] = |G|$

于是只需要证明 $[G : G^x] = |G(x)|$

然后这个东西直观感受挺对的…但是还是丢一个严谨的证明：

我们只需要证明，每一个 $g(x)$ 都能对应 $[G : G^x]$ 中的一个左陪集/右陪集即可。

不妨这样构造一个一一对应的关系：

若 $f(x) = g(x)$ 则可得：$f \times g^{-1} = x = e(x) \in G^x$，由于陪集的性质$f \times G^x = g \times G^x$ ，这意味着我们证明了相同的 $f(x)$ 都可以对应相同的陪集。

反之亦然 $fG^x = gG^x \iff f(x) = g(x)$

于是每一个 $g(x)$ 我们令 gG^x 表示它对应的陪集即可，正确性由上述性质保证不会重复，相同的 $g(x)$ 总是对应着相同的陪集。

Burnside 定理

公式：

定义 G 为一个置换群，定义其作用于 X，如果 $x,y\in X$ 在 G 作用下可以相等即存在 $f\in G$ 使得 $f(x)=y$ 则定义x,y 属于一个等价类，则不同的等价类的数量为：

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}X^g$$

其中， X^g 为 X 在 g 作用下的不动点的数量。即满足 $g(x)=x$ 这样的 x 的数量。

文字描述：X 在群 G 作用下的等价类总数等于每一个 g 作用于 X 的不动点的算数平均值。

证明：

由于每个元素属于仅属于一个轨道，轨道内部在群 G 作用下互达，(陪集性质) 所以我们可以得到：

$$|X/G|=\sum_{x\in X}\frac{1}{[G:G^x]}$$

根据轨道-稳定子定理，得到：

$$[G:G^x]=\frac{G}{|G^x|}$$

$$|X/G|=\sum_{x\in X}\frac{G^x}{G}$$

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}G^x$$

后面那一坨，反过来，就是对于每一个群作用 g ，其作用下不动点的数量。

综上，我们得到 Burnside 定理。

回到本题，下面的关于本题的做法在一定程度上算对于 $\mathrm{Pólya}$ 定理的推导。

首先观察本题与 Burnside 定理的关系。

容易发现，本质不同的 n 个点的环可以看作，在群 G 为$\{$ 旋转0 个，旋转 1 个…旋转$n-1$个 $\}$ 这些置换作用下得到的等价类的数量。

同时我们定义集合 M 为 $\{1\to n\}$ 的所有可能排列表示初始的环。

于是由于 Burnside 定理，得到：

$$Ans = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} M^g$$

我们依次考虑每个置换对于答案的贡献，显然旋转 0 个的不动点的数量为：n^n 即所有集合都合法。

对于旋转 k 个而言，我们知道一个元素是不动点等价于其存在一个长度为 a 的循环节满足 $a|k$ ，又因为对于循环节 a 而言，必然存在 $a|n$ ，所以我们可以改写判定条件为存在一个长度为 $\gcd(k,n)$ 的循环节。

于是对于旋转 k 个而言，每个子串的前 $\gcd(k,n)$ 都是任意取的，所以得到其贡献为 $n^{\gcd(k,n)}$

于是答案为：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n^{\gcd(k,n)}$$

剩下的就是莫比乌斯反演那一套的套路工作了，下面简单推导：

枚举 $\gcd$ 变为：

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} n^d \times \sum_{k=1}^{\frac{n}{d}}[\gcd(k,\frac{n}{d}) == 1]$$

后面那个式子是欧拉函数，直接带入即可：

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} n^d \varphi(\frac{n}{d})$$

然后本题暴力计算欧拉函数是可以通过的，复杂度为$O(Tn^{\frac{3}{4}})$

$Code$:

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std ;
#define rep( i, s, t ) for( register int i = s; i <= t; ++ i )
#define re register
#define int long long
int gi() {
	char cc = getchar() ; int cn = 0, flus = 1 ;
	while( cc < '0' || cc > '9' ) {  if( cc == '-' ) flus = - flus ; cc = getchar() ; }
	while( cc >= '0' && cc <= '9' )  cn = cn * 10 + cc - '0', cc = getchar() ;
	return cn * flus ;
}
const int P = 1e9 + 7 ;
int T, n ;
int fpow( int x, int k ) {
	int ans = 1, base = x ;
	while( k ) {
		if( k & 1 ) ans = 1ll * ans * base % P ;
		base = base * base % P, k >>= 1 ;
	} return ans ;
}
int phi( int x ) {
	int ans = x ;
	for( re int i = 2; i <= sqrt(x); ++ i ) {
		if( x % i ) continue ;
		ans = ans - ans / i ;
		while( x % i == 0 ) x /= i ;
	}
	if( x != 1 ) ans = ans - ans / x ;
	return ans ;
}
void inc( int &x, int y ) {
	( ( x += y ) >= P ) && ( x -= P ) ;
}
signed main()
{
	int T = gi() ;
	while( T-- ) {
		int n = gi(), cnt = sqrt(n), Ans = 0 ;
		for( re int i = 1; i <= cnt; ++ i ) {
			if( n % i ) continue ;
			int p1 = phi(i), f1 = fpow( n, n / i ) ;
			f1 = f1 * p1 % P, inc( Ans, f1 ) ;
			if( i * i != n ) {
				int p2 = phi( n / i ), f2 = fpow( n, i ) ;
				f2 = f2 * p2 % P, inc( Ans, f2 ) ;
			}
		}
		cout << Ans * fpow( n, P - 2 ) % P << endl ;
	}
	return 0 ;
}
```

这样，这道题做完了，但是这篇文章还没完，接下来要介绍 Pólya 定理。（其实也差不多）

Pólya 定理

考虑如何快速的使用 Burnside 定理进行计算。

我们可以注意到在一般的染色问题/类似的问题求本质不同的 xxx 的问题当中（即 Burnside 派上用场的时候）我们一般都是要求不动点的数量。

对于一个置换 $(a_1, a_2 ... a_n)$ 按照前文，我们规定上列为 $(1, 2 ... n)$ 则其描述的是第一个位置变成 a_1 ... 诸如此类的轮换。

在使用 Burnside 解决染色问题的时候，我们需要求的是不动点的数量，而对于上述的置换，假设我们令每个 i 向 a_i 连一条边容易发现会得到若干个环，仔细思考，每个环的颜色应当相同。

我们定义这个环的数量为 $c(g)$ 即置换 g 的轮换(环)数。

那么我们现在可以改写 Burnside 定理为：

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m^{c(g)}$$

m 表示可用的颜色数。

这就是 Pólya 定理辣！

- 如果你认真的读完了前文的内容，那么这一步应该是相当显然的（

完结撒花！

参考资料：

https://www.cnblogs.com/cyx0406/p/burnside_and_polya.html

https://www.cnblogs.com/yyf0309/p/Burnside.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Burnside's_lemma

https://en.wikipedia.org/wiki/Group_action https://en.wikipedia.org/wiki/Coset

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange's_theorem_(group_theory)

感谢 tiger 对于本文的改正意见以及指导。