นาย วรายุ สมุทรเพรียา ลำดับที่ 63

จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดต่อไปนี้แผ่ทั่ว R^3

7.5 $\{(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)\}$

วิธีทำ ให้ $\underline{v}=(x,y,z)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน R_3

พิจารณา $\underline{v}=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3$

$(x,y,z)=a_1(2,-1,3)a_2(4,1,2),a_3(8,-1,8)\}$

$=(2a_1+4a_2+8a_3,\ -a_1+a_2-a_3,\ 3a_1+2a_2+8a_3)$

$2a_1+4a_2+8a_3=x$

$-a_1+a_2-a_3=y$

$3a_1+2a_2+8a_3=z$

$$[A|B]=\begin{bmatrix}2&4&8&x\\-1&1&-1&y\\3&2&8&z\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_1\leftrightarrow R_2}=\begin{bmatrix}-1&1&-1&y\\2&4&8&x\\3&2&8&z\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-R_1}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-y\\2&4&8&x\\3&2&8&z\end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-y\\0&6&6&x+2y\\0&5&5&z+3y\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\frac{R_2}{6}}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-y\\0&1&1&\frac{x+2y}{6}\\0&5&5&z+3y\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_3-5R_2}\begin{bmatrix}1&-1&1&-y\\0&1&1&\frac{x+2y}{6}\\0&0&0&\frac{-5x+8y+6z}{6}\end{bmatrix}$$

$0\quad 5\quad 5\quad z+3y$

$0\quad 5\quad 5\quad 5\frac{(x+2y)}{6}$ —

$0\quad 0\quad 0\quad \frac{-55x-8y+6z}{6}$

$\rightarrow 6\frac{(z+3y)}{6}-\frac{5(x+2y)}{6}$

$\frac{6z+18y-5x+10y}{6}$

$\frac{-5x+8y+6z}{6}$

rank A = 2

rank $[A|B]$ = 3

$\therefore$ ระบบสมการไม่มีผลเฉลย หา a_1, a_2, a_3 ไม่ได้

$\therefore$ S ไม่แผ่ทั่ว R_3

7.9 $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$

ให้ $\underline{V} = (x,y,z)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน R^3

พิจารณา $\underline{V} = a_1\underline{V}_1 + a_2\underline{V}_2 + a_3\underline{V}_3$

$(x,y,z) = a_1(4,2,1)\, a_2(2,6,-5),\, a_3(1,-2,3)\}$

$= (4a_1 + 2a_2 + a_3,\ 2a_1 + 6a_2 - 2a_3,\ a_1 - 5a_2 + 3a_3)$

$4a_1 + 2a_2 + a_3 = x$

$2a_1 + 6a_2 - 2a_3 = y$

$a_1 - 5a_2 + 3a_3 = z$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & x \\ 2 & 6 & -2 & y \\ 1 & -5 & 3 & z \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & z \\ 2 & 6 & -2 & y \\ 4 & 2 & 1 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ \sim \\ R_3 - 4R_1 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & z \\ 0 & 16 & -8 & y-2z \\ 0 & 22 & -11 & x-4z \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 6 & -2 & y \\ 2 & -10 & 6 & 2z \\ \hline 0 & 16 & -8 & y-2z \end{array} -$$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 1 & x \\ 4 & -20 & 12 & 4z \\ \hline 0 & -22 & -11 & x-4z \end{array} -$$

$$\begin{array}{c} \frac{R_2}{8} \\ \sim \\ \frac{R_3}{11} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & z \\ 0 & 2 & -1 & \frac{y-2z}{8} \\ 0 & 2 & -1 & \frac{x-4z}{11} \end{bmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & z \\ 0 & 2 & -1 & \frac{y-2z}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x-4z}{11} \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_2}{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & z \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{y-2z}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x-4z}{11} \end{bmatrix}$$

rank A : 2

rank [A|B] : 3

∴ ระบบสมการไม่มีผลเฉลย

S ไม่แผ่ทั่ว R_3

8. จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดต่อไปนี้แผ่ทั่ว P_2

8.3 $\{2 + 3x - 4x^2, -8 - 12x + 16x^2\}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\underline{v} = a + bx + cx^2$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน P_2

พิจารณา $\underline{v} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2$

$$a + bx + cx^2 = a_1(2 + 3x - 4x^2)\ a_2(-8 - 12x + 16x^2\}$$

$$= 2a_1 + 3a_1x - 4a_1x^2 + -8a_2 - 12a_2x + 16a_2x^2$$

$$= (-4a_1 + 16a_2)x^2 + (3a_1 - 12a_2)x + (2a_1 - 8a_2)$$

เทียบ ส.ปส. x^2, x

$$-4a_1 + 16a_2 = c$$
$$3a_1 - 12a_2 = b$$
$$2a_1 - 8a_2 = a$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} -4 & 16 & c \\ 3 & -12 & b \\ 2 & -8 & a \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_3} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & a \\ 3 & -12 & b \\ -4 & 16 & c \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\frac{R_1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & \frac{a}{2} \\ 3 & -12 & b \\ -4 & 16 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \\ \sim \\ R_3 + 4R_1 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & b - \frac{3a}{2} \\ 0 & 0 & c + 2a \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & -12 & b \\ 3 & -12 & 3a \\ \hline 0 & 0 & b - 3a \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} -4 & 16 & c \\ 4 & -16 & 4(\frac{a}{2}) \\ \hline 0 & 0 & c + 2a \end{array}$$

$c + 4(\frac{a}{2})$

$4 \times \frac{a}{2} = \frac{4a}{2}$

$= \frac{\cancel{4}^{2}a}{\cancel{2}_{1}} = 2a$

$c + 2a$

rank $A = 1$

rank $[A|B] = 3$

$\therefore$ ระบบสมการไม่มีผลเฉลย

$\therefore$ S ไม่แผ่ทั่ว P_2 ※

10. จงพิจารณาว่า เซตของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

10.5 $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(3,6,6)\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 + a_4\underline{v}_4 = \underline{0}$

$$a_1(1,1,0)\ a_2(0,2,3)\ a_3(1,2,3)\ a_4(3,6,6) = (0,0,0)$$

$$(a_1 + a_3 + 3a_4,\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 6a_4,\ 3a_2 + 3a_3 + 6a_4 = (0,0,0)$$

$$a_1 + a_3 + 3a_4 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 6a_4 = 0$$

$$3a_2 + 3a_3 + 6a_4 = 0$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{matrix}$$

$$\overset{R_2 - R_1}{\sim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{R_3}{3}}{\sim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$\overset{R_3 - 2R_2}{\sim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-R_3}{\sim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

rank A : 3

rank $[A|B]$: 3

$n = 4$

$\therefore$ ระบบสมการมีผลเฉลยมากมายนับไม่ถ้วน

ดังนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ※

12. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน P_2 ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

12.7 $\{3t^2+t-5,\ 2t^2+t+1,\ t+13\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3=\underline{0}$

$$a_1(3t^2+t-5)\,a_2(2t^2+t+1)\,a_3(t+13) = 0+0t+0t^2$$

$$3a_1t^2+a_1t-5a_1+2a_2t^2+a_2t+a_2+a_3t+13a_3 = 0+0t+0t^2$$

$$(3a_1+2a_2)t^2+(a_1+a_2+a_3)t+(-5a_1+a_2+13a_3) = 0+0t+0t^2$$

เทียบ ส.ป.ส x^2 ; $3a_1+2a_2=0$

" x ; $a_1+a_2+a_3=0$

" ค่าคงที่ ; $-5a_1+a_2+13a_3=0$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \;- \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{matrix} R_2-3R_1 \\ \sim \\ R_3+5R_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} -5 & 1 & 13 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \;+ \\ 0 & 6 & 18 & 0 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{-R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_3-6R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} 0 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \;- \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

rank A = 2

rank [A|B] = 2

n = 3

∴ ระบบสมการมีผลเฉลยมากมายนับไม่ถ้วน

ดังนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ##

13. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน P_3 ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

13.1 $\{t^3-4t^2+2t+3,\ t^3+2t^2+4t-1,\ 2t^3-t^2-3t+5\}$

พิจารณา $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3=\underline{0}$

$a_1(t^3-4t^2+2t+3)\,a_2(t^3+2t^2+4t-1)\,a_3(2t^3-t^2-3t+5)=0+0t+0t^2+0t^3$

$a_1t^3-4a_1t^2+2a_1t+3a_1+a_2t^3+2a_2t^2+4a_2t-a_2+2a_3t^3-a_3t^2-3a_3t+5a_3=0+0t+0t^2+0t^3$

$(a_1+a_2+2a_3)t^3+(-4a_1+2a_2-a_3)t^2+(2a_1+4a_2-3a_3)t+(3a_1-a_2+5a_3)=0+0t+0t^2+0t^3$

เทียบ ส.ปส. t^3; $a_1+a_2+2a_3=0$

" t^2; $-4+2a_2-a_3=0$

" t; $2a_1+4a_2-3a_3=0$

" ค่าคงที่; $3a_1-a_2+5a_3=0$

$$[A|B]=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\-4&2&-1&0\\2&4&-3&0\\3&-1&5&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}-4&2&-1&0\\4&4&8&0\\\hline 0&6&7&0\end{array}\ + \qquad \begin{array}{cccc}2&4&-3&0\\2&2&4&0\\\hline 0&2&-7&0\end{array}\ -$$

$$\begin{array}{cccc}3&-1&5&0\\3&3&6&0\\\hline 0&-4&-1&0\end{array}\ -$$

$$\begin{matrix}R_2+4R_1\\R_3-2R_1\\\sim\\R_4-3R_1\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&6&7&0\\0&2&-7&0\\0&-4&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_2\leftrightarrow R_3\\\sim\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&2&-7&0\\0&6&7&0\\0&-4&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_3-3R_2\\\sim\\R_4+2R_2\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&2&-7&0\\0&0&28&0\\0&0&-15&0\end{bmatrix}$$

$6-3(2)=0$

$7-3(-7)=28$

$-4+2(2)=0$

$-1+2(-7)=$

$-1+-14=-15$

$$\begin{matrix}\frac{R_2}{2}\\\sim\\\frac{R_3}{28}\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&-\frac{7}{2}&0\\0&0&1&0\\0&0&-15&0\end{bmatrix}$$

$$R_4+15R_3\ \begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&-\frac{7}{2}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

rank $A=3$

rank $[A|B]=3$

$n=3$

$\therefore$ ระบบมีสมการผลเฉลยเดียวคือ $a_1=0, a_2=0, a_3=0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น ※