§ 11.11. Интерполяция сплайнами

1. Определение сплайна. Проведенное выше обсуждение интерполяции показывает, что повышение точности приближения гладкой функции благодаря увеличению степени интерполяционного многочлена возможно (см. теорему 11.8), но связано с существенным повышением сложности вычислений. К тому же использование многочленов высокой степени требует специальных мер предосторожности уже при выборе формы их записи, и вычисления сопровождаются накоплением погрешностей округления. Поэтому на практике предпочитают кусочно-полиномиальную интерполяцию с использованием многочленов невысокой степени. Однако этот способ приближения имеет недостаток: в точках «стыка» двух соседних многочленов производная, как правило, имеет разрыв (см. пример 11.12). Часто это обстоятельство не играет существенной роли. Вместе с тем нередко требуется, чтобы аппроксимирующая функция была гладкой и тогда простейшая кусочно-полиномиальная интерполяция становится неприемлемой.

Естественная потребность в наличии аппроксимирующих функций, которые сочетали бы в себе локальную простоту многочлена невысокой степени и глобальную на всем отрезке $[a, b]$ гладкость, привела к появлению в 1946 г. так называемых *сплайн-функций* или *сплайнов* — специальным образом построенных гладких кусочно-многочленных функций. Получив в 60-х годах XX в. распространение как средство интерполяции сложных кривых, сплайны к настоящему времени стали важной составной частью самых различных вычислительных методов и нашли широчайшее применение в решении разнообразных научно-технических и инженерных задач.

Дадим строгое определение сплайна. Пусть отрезок $[a, b]$ разбит точками, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. *Сплайном степени m* называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) функция $S_m(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со всеми своими производными $S_m^{(1)}(x), S_m^{(2)}(x), \ldots, S_m^{(p)}(x)$ до некоторого порядка p;

2) на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S_m(x)$ совпадает с некоторым алгебраическим многочленом $P_{m,i}(x)$ степени m.

Разность $m - p$ между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке $[a, b]$ производной называется *дефектом сплайна*.

Простейший пример сплайна дает непрерывная кусочно-линейная функция (рис. 11.8), являющаяся сплайном первой степени (*линейным сплайном*) с дефектом, равным 1. Действительно, на отрезке $[a, b]$ сама функция $S_1(x)$ (нулевая производная) непрерывна. В то же время на каждом частичном отрезке $S_1(x)$ совпадает с некоторым многочленом первой степени.

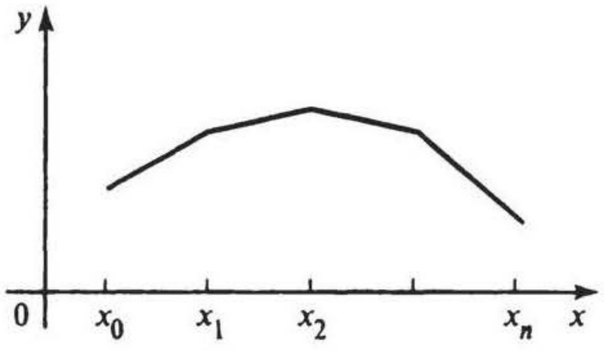

Рис. 11.8

Наиболее широкое распространение на практике получили сплайны $S_3(x)$ третьей степени (*кубические сплайны*) с дефектом, равным 1 или 2. Такие сплайны на каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ совпадают с кубическим многочленом:

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \qquad (11.63)$$

и имеют на отрезке $[a, b]$ по крайней мере одну непрерывную производную $S_3'(x)$.

Термин «сплайн» происходит от английского слова «spline» (гибкая линейка, стержень) — названия приспособления, использовавшегося чертежниками для проведения гладких кривых через заданные точки. Если гибкую стальную линейку поставить на ребро и, изогнув, зафиксировать ее положение в узловых точках (рис. 11.9), то получится механи-

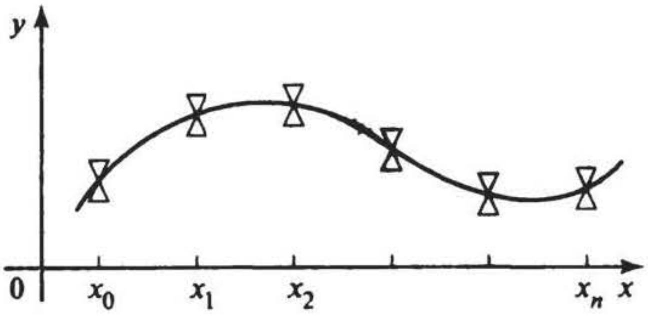

Рис. 11.9

ческий аналог кубического сплайна. Из курса сопротивления материалов известно, что уравнение свободного равновесия профиля $S(x)$ линейки таково: $S^{(4)}(x) = 0$. Следовательно, в промежутке между двумя соседними узлами $S(x)$ представляет собой многочлен третьей степени. В то же время отсутствие у линейки изломов свидетельствует о непрерывности касательной к графику функции $S(x)$ и кривизны, т.е. непрерывности производных $S'(x)$ и $S''(x)$.

1. Построение интерполяционного сплайна $S_{1,0}$ (*линейный* сплайн) :

Пусть задана таблица значений функции в узлах интерполирования:

Табл. 1

x	0	2	3
$f(x)$	1	3	2

Построим интерполяционный сплайн вида:

$$S_{1,0}(x) = \begin{cases} l_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ l_2(x), & x \in [x_2, x_3] \end{cases},$$

$$l_1(x) = a_{11}x + a_{10},$$

$$l_2(x) = a_{21}x + a_{20}.$$

Для этого необходимо найти коэффициенты $a_{11}, a_{10}, a_{21}, a_{20}$.

Из основного условия интерполяции: $S_{1,0}(x_j) = y_j,\ j = \overline{1,3}$ – получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} l_1(x_1) = y_1 \\ l_1(x_2) = y_2 \\ l_2(x_2) = y_2 \\ l_2(x_3) = y_3 \end{cases} <=> \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{10} = y_1 \\ a_{11}x_2 + a_{10} = y_2 \\ a_{21}x_2 + a_{20} = y_2 \\ a_{21}x_3 + a_{20} = y_3 \end{cases}$$

Запишем ее в матричном виде: $\tilde{X}a = \tilde{y}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 1 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{10} \\ a_{21} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Как видим, данную систему можно разбить на две независимые друг от друга подсистемы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{10} = y_1 \\ a_{11}x_2 + a_{10} = y_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_{21}x_2 + a_{20} = y_2 \\ a_{21}x_3 + a_{20} = y_3 \end{cases},$$

решив которые по отдельности, получаем искомые коэффициенты $a_{11}, a_{10}, a_{21}, a_{20}$.

$$\begin{cases} a_{11} * 0 + a_{10} = 1 \\ a_{11} * 2 + a_{10} = 3 \end{cases} => \; a_{10} = 1, a_{11} = 1.$$

$$\begin{cases} a_{21} * 2 + a_{20} = 3 \\ a_{21} * 3 + a_{20} = 2 \end{cases} => \; a_{21} = -1, a_{20} = 5.$$

Итоговый линейный сплайн:

$$S_{1,0}(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [0, 2] \\ 5 - x, & x \in [2, 3] \end{cases}.$$

Замечание 1.
В общем случае, при увеличении количества узлов, очевидно, система для нахождения коэффициентов сплайна $S_{1,0}(x)$ сохранит свою структуру:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{10} \\ a_{21} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2. Построение интерполяционного сплайна $S_{2,1}$ (*квадратичный* сплайн) :

Пусть задана таблица значений функции в узлах интерполирования (см. Табл. 1) .

Построим интерполяционный сплайн вида:

$$S_{2,1}(x) = \begin{cases} q_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ q_2(x), & x \in [x_2, x_3] \end{cases},$$

$$q_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10},$$

$$q_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20}.$$

Для этого необходимо найти коэффициенты $a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_{22}, a_{21}, a_{20}$.

Из условия непрерывности сплайна, а так же выполнения основного условия интерполяции: $S_{2,1}(x_j) = y_j, \; j = \overline{1,3}$ – получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} q_1(x_1) = y_1 \\ q_1(x_2) = y_2 \\ q_2(x_2) = y_2 \\ q_2(x_3) = y_3 \end{cases} <=> \begin{cases} a_{12}x_1^2 + a_{11}\,x_1 + a_{10} \ = y_1 \\ a_{12}x_2^2 + a_{11}\,x_2 + a_{10} \ = y_2 \\ a_{22}x_2^2 + a_{21}\,x_2 + a_{20} \ = y_2 \\ a_{22}x_3^2 + a_{21}\,x_3 + a_{20} \ = y_3 \end{cases}$$

Кроме того, для обеспечения дифференцируемости в промежуточных узлах должно выполняться условие:

$$q_1'(x_2) = \ q_2'(x_2).$$

Дополнительно задаются граничные условия: $q_1'(x_1) = const\ d$ или $q_2'(x_3) = const\ d$. (При $d = 0$ сплайн называется *естественным*).

Получаем итоговую систему:

$$\begin{cases} q_1(x_1) = y_1 \\ q_1(x_2) = y_2 \\ q_1'(x_2) = \ q_2'(x_2) \\ q_2(x_2) = y_2 \\ q_2(x_3) = y_3 \\ q_2'(x_3) = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} a_{12}x_1^2 + a_{11}\,x_1 + a_{10} \ = y_1 \\ a_{12}x_2^2 + a_{11}\,x_2 + a_{10} \ = y_2 \\ 2a_{12}x_2 + a_{11} - \ 2a_{22}x_2 - a_{21} \ = 0 \\ a_{22}x_2^2 + a_{21}\,x_2 + a_{20} \ = y_2 \\ a_{22}x_3^2 + a_{21}\,x_3 + a_{20} \ = y_3 \\ 2a_{22}x_3 + a_{21} \ = 0 \end{cases}$$

Запишем ее в матричном виде: $\tilde{X}a = \tilde{y}$:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 1 & 0 & -2x_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_{22} \\ a_{21} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Такую систему уже нельзя разбить на независимые подсистемы. Находим ее решение методом Гаусса, определив тем самым коэффициенты: $a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_{22}, a_{21}, a_{20}$.

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad yy := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad => \quad a := \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Итоговый квадратичный сплайн:

$$S_{2,1}(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x^2 + 4x + 1, & x \in [0, 2] \\ x^2 - 6x + 11, & x \in [2, 3] \end{cases}.$$

Замечание 2.

Этот подход легко распространяется на произвольное число узлов. Пусть задано n узлов. Тогда система для нахождения коэффициентов сплайна $S_{2,1}(x)$ имеет следующую структуру:

$$\begin{bmatrix}
x_1^2 & x_1 & 1 & & & & & & & & \\
x_2^2 & x_2 & 1 & & & & & & & & \\
& & & x_2^2 & x_2 & 1 & & & & & \\
& & & x_3^2 & x_3 & 1 & & & & & \\
& & & & & & \cdots & & & & \\
& & & & & & & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 & \\
& & & & & & & x_n^2 & x_n & 1 & \\
2x_2 & 1 & 0 & -2x_2 & -1 & & & & & & \\
& & & 2x_3 & 1 & 0 & -2x_3 & -1 & & & \\
& & & & & & \cdots & & & & \\
& & & & & & 2x_{n-1} & 1 & 0 & -2x_{n-1} & -1 \quad 0 \\
2x_1 & 1 & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_{22} \\ a_{21} \\ a_{20} \\ \cdots \\ \\ \\ \\ a_{n-1,2} \\ a_{n-1,1} \\ a_{n-1,0} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

3. Построение интерполяционного сплайна $S_{3,2}$ (*кубический* сплайн) :

Построим интерполяционный сплайн вида:

$$S_{3,2}(x) = \begin{cases} C_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ C_2(x), & x \in [x_2, x_3], \\ & \dots \\ C_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$$C_i(x) = a_{i3}x^3 + a_{i2}x^2 + a_{i1}x + a_{i0}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \ \ i = 1, \dots, n-1.$$

Обозначим:

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 1, \dots, n - 1$$

$$y_i = C_i(x_i) = C_{i-1}(x_i) = f(x_i)$$
$$y_i' = C_i'(x_i) = C_{i-1}'(x_i)$$
$$y_i'' = C_i''(x_i) = C_{i-1}''(x_i)$$

Решив систему $Hy = \gamma$, где

$$H = \begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots & h_{n-2} \\ 0 & 0 & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix},$$

H − трехдиагональная матрица, размерности $(n-2) \times (n-2)$.

$$\gamma = (\gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})^T,$$

$$\gamma_i = 6\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right], \; i = 2, \dots, n-1$$
$$y = (y_2'', \dots, y_{n-1}'')^T - ?$$

найдем значения $y_2'', \dots, y_{n-1}''$.

Далее, используя значения y_i и y_i'' (и дополнительные граничные условия $y_1'' = y_n'' = 0$) вычисляем:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - y_i''_{+1}\frac{h_i}{6} - y_i''\frac{h_i}{3}, \; i = 1, \dots, n-1.$$

В итоге i-й полином сплайна строится по формуле:

$$C_i(x) = y_i + y_i'(x - x_i) + y_i''\frac{(x - x_i)^2}{2} + (y_{i+1}'' - y_i'')\frac{(x - x_i)^3}{6h_i}, \; i = 1, \dots, n-1.$$

Примечание: пример построения кубического сплайна см. в файле «Кубический сплайн. Пример»