

曾看到智能车制作论坛里很多人询问曲率的计算，今天在整理一个 PPT 的时候，刚好又用到了曲率计算，我就解释下东北大学和上海大学摄像头组计算曲率的方法（请参看第二届东北大学技术报告和第三届上海大学技术报告）。

曲率问题可以归结为已知三角形的三点坐标 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，求解三角形外接圆曲率。

学过高数的都应该知道向量的叉乘，定义为：两个向量进行叉乘得到的是一个向量，方向垂直于这两个向量构成的平面（三个向量符合右手坐标系），大小等于这两个向量组成的平行四边形的面积。

设两个向量为 $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ 、 $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ ，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} \quad (1)$$

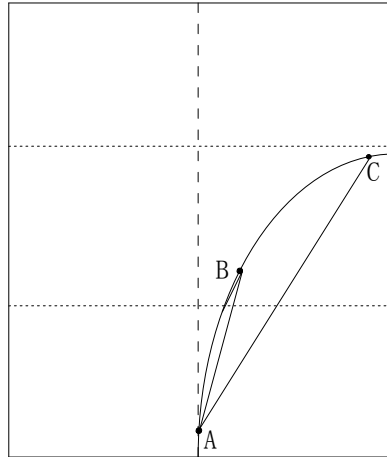
由叉乘的定义可知，求 $\triangle ABC$ 的面积，可以通过求解 $\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$ 来获得，将上述叉乘公式应用于二维情况，即取 $z=0$ ，可得

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))\vec{k} \quad (2)$$

所以

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))}{2} \quad (3)$$

上式中，如果 ABC 三点是顺时针方向分布，则三角形面积为负值，逆时针分布为正值（如果不需要符号，取下绝对值即可）。



面积的符号对于智能车其实还是挺有用的。如上图，如果曲线向右拐，算出的面积是负的，如果曲线向左拐，算出的面积是正的，上述面积的正负反映了曲线的方向。相比于海伦公式，用上述公式计算面积既可以减轻计算量，又可以反映曲线的方向，一举两得。

有了上述公式，曲率可以表现为三角形外接圆半径的倒数，从而可得曲率计算公式：

$$K = \frac{4S_{\triangle ABC}}{AB \times BC \times AC} \quad (4)$$

上式中要求出三边长，会用到求根公式，在单片机中开根号，那是很要命的。如果精度要求不高，可以自己写一个简单的求根函数，东北大学给出的函数是

```
unsigned int m_sqrt(unsigned int x)
{
    uchar ans=0,p=0x80;
    while(p!=0)
    {
        ans+=p;
        if(ans*ans>x)
        {
            ans-=p;
        }
        p=(uchar)(p/2);
    }
    return(ans);
}
```

还有类似的求根算法可以看一下如下链接：

http://hi.baidu.com/ssmsky_2006/blog/item/1e0e72fb40ade46d034f562f.html

注意：计算曲率的方法如果要提高精度，最好是能够将采到的畸形图像做一下校正，以反映实际坐标。