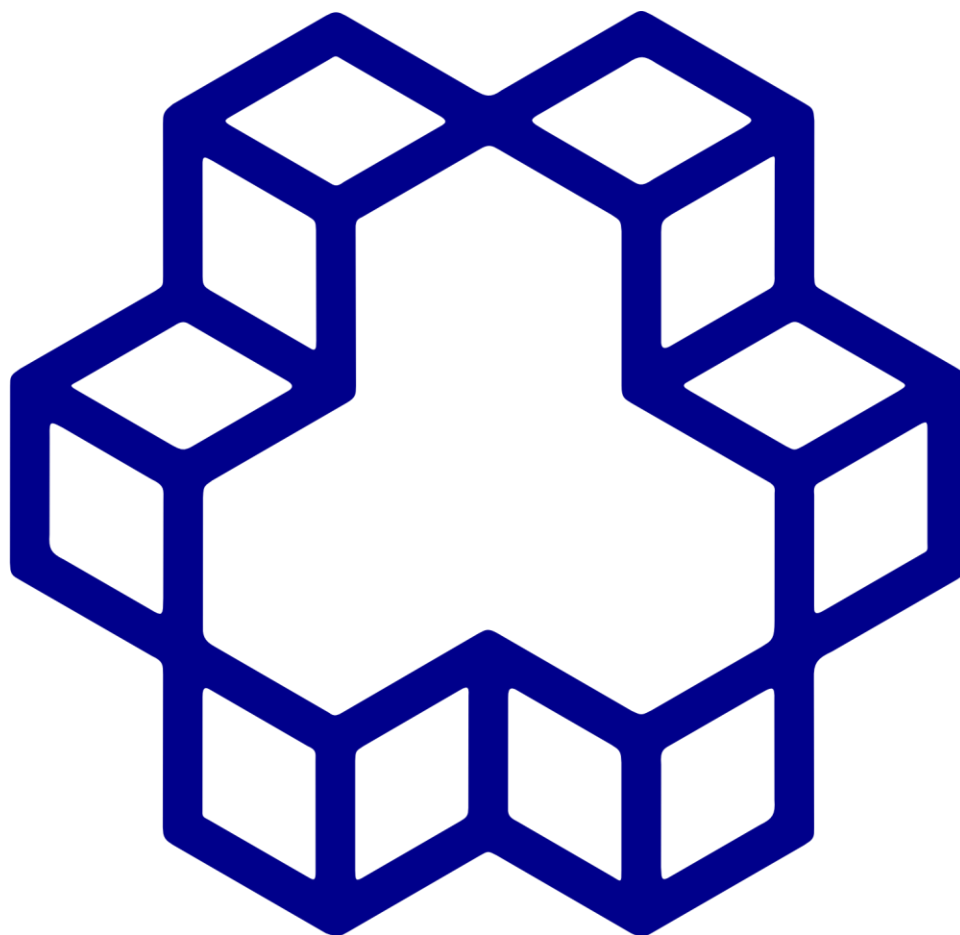


بناام خدا



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تحقیق: فضای زمانی و فرکانسی

محسن کریمی 40121913

استاد : دکتر تقی راد

برای درک نحوه نمایش سیستم‌ها در **حوزه فرکانس** و چگونگی تفاوت آن با **حوزه زمان**، لازم است که از **تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه** استفاده کنیم. هر دو این ابزارهای ریاضی به طور گسترده‌ای در سیستم‌های کنترل، پردازش سیگنال و حوزه‌های مختلف مهندسی استفاده می‌شوند.

۱. حوزه زمان در مقابل حوزه فرکانس

• حوزه زمان:

- در حوزه زمان، رفتار یک سیستم با توجه به چگونگی تغییرات متغیرها (مثل ورودی یا خروجی) در **طول زمان** توصیف می‌شود.

- در سیستم‌های کنترلی، این رفتار معمولاً با **حل معادلات دیفرانسیل** توصیف می‌شود که نحوه پاسخ‌دهی سیستم به ورودی‌های مختلف (مانند ورودی پله یا ضربه) را مشخص می‌کنند.

- تحلیل در حوزه زمان به ما کمک می‌کند تا رفتار **گذرا** و همچنین رفتار **حالت دائمی** سیستم را بررسی کنیم؛ مثل اینکه سیستم چقدر سریع به پایداری می‌رسد و چگونه با شرایط اولیه برخورد می‌کند.

• حوزه فرکانس:

- در حوزه فرکانس، تمرکز روی این است که یک سیستم چگونه به ورودی‌های مختلف با **فرکانس‌های متفاوت** پاسخ می‌دهد، به جای تمرکز روی تغییرات در طول زمان.

- این رویکرد قدرتمند است چون بسیاری از سیستم‌ها نسبت به فرکانس‌های مختلف ورودی رفتار متفاوتی دارند (برای مثال، ممکن است فرکانس‌های پایین را عبور دهد و فرکانس‌های بالا را تضعیف کند).

- در سیستم‌های کنترلی، تحلیل تابع انتقال یک سیستم در حوزه فرکانس به ما کمک می‌کند تا عملکرد سیستم در مواجهه با اجزای فرکانسی مختلف ورودی را به خوبی درک کنیم.

- بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه فرکانس:

- تحلیل حالت پایدار و پایداری:

- در حوزه فرکانس و به ویژه با استفاده از تبدیل لاپلاس، می‌توان مستقیماً قطب‌ها و صفرهای تابع انتقال سیستم را مطالعه کرد. مکان قطب‌ها اطلاعاتی درباره پایداری سیستم می‌دهد: اگر قطب‌ها بخش حقیقی منفی داشته باشند (نیم‌صفحه چپ صفحه مختلط)، سیستم پایدار است.

- پاسخ فرکانسی (با استفاده از تبدیل فوریه یا نمودار بود) دیدگاهی درباره چگونگی رفتار سیستم در ورودی‌های با فرکانس‌های مختلف ارائه می‌دهد، که به ما کمک می‌کند بررسی کنیم سیستم چقدر خوب نویزها را دفع می‌کند یا به سیگنال‌های سینوسی پاسخ می‌دهد.

- محاسبات ساده‌تر:

- در حوزه زمان، تحلیل شامل حل معادلات دیفرانسیل است. اما در حوزه فرکانس، این معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل می‌شوند که حل آن‌ها آسان‌تر است.

- برای مثال، به جای حل انتگرال‌های پیچیده کانولوشن در حوزه زمان، می‌توان با ضرب توابع انتقال در حوزه فرکانس پاسخ سیستم به ورودی را به سادگی محاسبه کرد.

- نمودارهای بود، نایکویست و نیکولز:

- این‌ها روش‌های گرافیکی در حوزه فرکانس هستند که برای بررسی بهره و فاز سیستم در بازه‌ای از فرکانس‌ها استفاده می‌شوند. این نمودارها به تجسم رفتار سیستم مانند پهنای باند، حاشیه بهره و حاشیه فاز کمک می‌کنند.

- عملکرد سیستم در حوزه فرکانس:

- معیارهای عملکردی مانند پهنای باند، فرکانس تشدید و تأخیر فاز به‌طور طبیعی در حوزه فرکانس بیان می‌شوند. این معیارها به ویژه در طراحی فیلترها، سیستم‌های کنترل و درک پدیده‌های تشدید کاربرد دارند.

۲. تفاوت‌های کلیدی بین حوزه زمان و حوزه فرکانس

ویژگی	حوزه زمان	حوزه فرکانس
تمرکز	رفتار سیستم در طول زمان	پاسخ سیستم به فرکانس‌های مختلف
ابزارهای اصلی	معادلات دیفرانسیل	تبدیل لاپلاس (برای سیستم‌های عمومی)، تبدیل فوریه (برای سیستم‌های دوره‌ای یا حالت پایدار)
بینش	رفتار گذرا و پاسخ حالت دائمی	پاسخ فرکانسی، رزونانس، بهره و تغییر فاز
پیچیدگی	حل مستقیم سیستم‌های مرتبه بالا پیچیده است	تحلیل سیستم‌های مرتبه بالا در حوزه فرکانس ساده‌تر است
طراحی کنترل‌کننده	کنترل PID، ریشه مکان (ترکیبی از زمان و فرکانس)	روش‌های مبتنی بر حوزه فرکانس مانند نمودار بود و نمودار نایکوئیست

۳. تبدیل لاپلاس در مقابل تبدیل فوریه

در حالی که هر دو تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه برای تبدیل یک سیستم از حوزه زمان به حوزه فرکانس استفاده می‌شوند، هر کدام هدف‌ها و ویژگی‌های متفاوتی دارند. در ادامه توضیح این دو تبدیل به تفصیل آمده است:

الف) تبدیل لاپلاس:

تبدیل لاپلاس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

که در آن:

- $f(t)$ سیگنال در حوزه زمان است.

- $F(s)$ تبدیل لاپلاس سیگنال به حوزه فرکانس است.

$s = \sigma + j\omega$ - یک متغیر مختلط است که (σ) قسمت حقیقی و $(j\omega)$ قسمت موهومی آن است.

ویژگی‌های کلیدی تبدیل لاپلاس:

- تبدیل لاپلاس ابزاری قدرتمند است زیرا می‌تواند هم رفتار گذرا و هم رفتار حالت دائمی سیستم را نشان دهد.

- این تبدیل به طور کامل رفتار سیستم را از زمان اولیه تا بی‌نهایت توصیف می‌کند.

- تبدیل لاپلاس به مهندسان اجازه می‌دهد شرایط اولیه سیستم را نیز در نظر بگیرند، مثل اینکه سیستم از کجا و چگونه شروع به کار می‌کند (آیا سیستم در ابتدا در حالت سکون است یا در حال حرکت).

- این تبدیل می‌تواند با سیستم‌هایی که ناپایدار هستند یا سیگنال‌هایی که به صورت نمایی رشد یا کاهش می‌کنند، کار کند.

(ب) تبدیل فوریه:

تبدیل فوریه به این صورت تعریف می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt = F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

که در آن:

- $(f(t))$ سیگنال در حوزه زمان است.

- $(F(j\omega))$ تبدیل فوریه و نشان‌دهنده طیف فرکانسی سیگنال است.

- (ω) فرکانس زاویه‌ای و (j) واحد موهومی است.

ویژگی‌های کلیدی تبدیل فوریه:

- تبدیل فوریه فرض می‌کند که سیستم به **حالت پایدار** رسیده است و بیشتر برای تحلیل سیگنال‌های **دوره‌ای** استفاده می‌شود.
- برخلاف لاپلاس، فوریه فقط از قسمت موهومی ($s = j\omega$) استفاده می‌کند، به این معنا که فقط اطلاعات مربوط به رفتار **حالت دائمی** سیستم را ارائه می‌دهد و نمی‌تواند رفتار گذرا را توصیف کند.
- فوریه برای **پردازش سیگنال** و تحلیل نحوه حضور اجزای فرکانسی مختلف در یک سیگنال ایده‌آل است، اما برای سیستم‌های ناپایدار یا سیگنال‌های غیر دوره‌ای کاربرد محدودی دارد.
- تبدیل فوریه معمولاً برای سیستم‌هایی که رزونانس یا سیگنال‌های دوره‌ای دارند استفاده می‌شود و در سیستم‌های ناپایدار که رشد یا کاهش دارند مفید نیست.

۴. چرا از حوزه فرکانس استفاده کنیم؟

نمایش در حوزه فرکانس به دلیل مزایای متعدد، ابزار بسیار قدرتمندی است:

الف) تحلیل ساده‌تر سیستم‌های پیچیده:

- در حوزه زمان، مهندسان معمولاً مجبور به حل **معادلات دیفرانسیل** هستند که به خصوص برای سیستم‌های مرتبه بالا می‌تواند دشوار باشد.
- در حوزه فرکانس، این معادلات دیفرانسیل از طریق تبدیل‌های لاپلاس یا فوریه به **معادلات جبری** تبدیل می‌شوند. برای مثال، عملگر مشتق‌گیری در حوزه زمان به یک **ضرب ساده** در (S) در حوزه لاپلاس تبدیل می‌شود.
- این باعث می‌شود که تحلیل و بررسی سیستم‌های پیچیده راحت‌تر و ساده‌تر باشد.

ب) درک پاسخ فرکانسی:

- بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی، به ویژه در کنترل و پردازش سیگنال، در فرکانس‌های مختلف رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهند.
- با تحلیل پاسخ فرکانسی (اینکه سیستم چگونه به ورودی‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف پاسخ می‌دهد)، مهندسان می‌توانند فیلترها، جبران‌سازها یا کنترل‌کننده‌ها را برای تغییر رفتار سیستم طراحی کنند (مثلاً نویز را تضعیف کنند یا عملکرد سیستم را بهبود دهند).
- به عنوان مثال، یک نمودار بود نشان می‌دهد که بهره و فاز سیستم چگونه با فرکانس تغییر می‌کند، که برای اطمینان از پایداری و عملکرد سیستم حیاتی است.

ج) تحلیل پایداری:

- پایداری یک سیستم عامل بسیار مهم در تئوری کنترل است. در حوزه فرکانس، پایداری را می‌توان با بررسی مکان قطب‌های تابع انتقال تعیین کرد.
- برای اینکه یک سیستم پایدار باشد، تمام قطب‌های سیستم باید در نیم صفحه چپ صفحه s قرار گیرند (برای لاپلاس) یا قسمت حقیقی آنها منفی باشد.
- نمودارهای نایکویست و بود روش‌های گرافیکی ارائه می‌دهند تا پایداری سیستم و حاشیه‌های عملکردی آن (مانند حاشیه بهره و حاشیه فاز) را ارزیابی کنیم.

د) ساده‌تر شدن اتصال سیستم‌ها:

- در سیستم‌های کنترلی، معمولاً نیاز است که چندین سیستم را با یکدیگر ترکیب کنیم (برای مثال، گیاه، کنترل‌کننده و حلقه بازخورد). در حوزه زمان، ترکیب سیستم‌ها شامل کانولوشن و حل معادلات دیفرانسیل است.
- اما در حوزه فرکانس، ترکیب سیستم‌ها تنها به ضرب توابع انتقال تبدیل می‌شود که بسیار ساده‌تر است.

۵. مقایسه شهودی بین لاپلاس و فوریه

از دیدگاه مهندسی، در اینجا تفاوت‌های کلیدی بین تبدیل لاپلاس و فوریه توضیح داده شده است:

شهود در مورد تبدیل لاپلاس:

- ابزار همه‌کاره: لاپلاس کاربرد گسترده‌تری دارد زیرا هم رفتار گذرا (نحوه رفتار سیستم در کوتاه‌مدت) و هم حالت دائمی را در بر می‌گیرد.

- شرایط اولیه: می‌تواند شرایط اولیه سیستم را در نظر بگیرد و برای تحلیل سیستم‌های واقعی که از حالت سکون شروع نمی‌شوند ضروری است.

- پایداری و کنترل: لاپلاس در طراحی حلقه‌های بازخورد و اطمینان از اینکه سیستم حتی در شرایط متغیر پایدار است، استفاده می‌شود.

- پاسخ گذرا: اگر به این علاقه دارید که چگونه یک سیستم بلافاصله پس از روشن شدن رفتار می‌کند (مثلاً آیا نوسان شدید دارد یا به سرعت پایدار می‌شود)، لاپلاس ابزاری ضروری است.

- قطب‌ها: قطب‌های یک سیستم در حوزه لاپلاس نشان‌دهنده پایداری، زمان پاسخ‌دهی و رفتار نوسانی سیستم هستند. قطب‌های در نیم‌صفحه چپ صفحه S به معنای پایداری سیستم است.

شهود در مورد تبدیل فوریه:

- تمرکز روی حالت دائمی: فوریه ایده‌آل است وقتی که تنها به رفتار حالت دائمی سیستم در طولانی‌مدت علاقه‌مند هستید.

- بدون شرایط اولیه: فوریه فرض می‌کند که سیستم از قبل فعال بوده و نیازی به شرایط اولیه یا رفتار گذرا ندارد.

- تجزیه سیگنال: فوریه ابزاری مناسب برای شکستن سیگنال به اجزای فرکانسی است و به همین دلیل در پردازش سیگنال و ارتباطات بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

- سیگنال‌های دوره‌ای: اگر در حال تحلیل سیستم‌هایی هستید که با سیگنال‌های دوره‌ای سروکار دارند (مثل سیگنال‌های صوتی یا امواج الکترومغناطیسی)، فوریه انتخاب مناسبی است چون فقط روی فرکانس‌ها متمرکز است.

۶. مزایای تحلیل در حوزه فرکانس نسبت به حوزه زمان

در اینجا مزایای اصلی استفاده از حوزه فرکانس آورده شده است:

الف) تحلیل آسان‌تر پایداری و عملکرد:

- در حوزه زمان، تحلیل پایداری و عملکرد ممکن است شامل محاسبات پیچیده یا شبیه‌سازی‌های زمانی باشد. در مقابل، حوزه فرکانس روش‌های گرافیکی (مانند نمودار بود و نمودار نایکویست) ارائه می‌دهد که به طور شهودی امکان بررسی پایداری و عملکرد سیستم در مقابل ورودی‌های مختلف را فراهم می‌کند.

ب) مدیریت سیستم‌های پیچیده:

- سیستم‌های مرتبه بالاتر که شامل چندین معادله دیفرانسیل هستند، در حوزه فرکانس ساده‌تر می‌شوند زیرا این معادلات به معادلات جبری تبدیل می‌شوند و تحلیل رفتار آنها راحت‌تر است.

ج) طراحی کنترل‌کننده:

- روش‌های مبتنی بر حوزه فرکانس روشی مستقیم برای طراحی کنترل‌کننده‌ها ارائه می‌دهند که به معیارهای خاص عملکردی (مثل بهره، فاز، دمپینگ) پاسخ دهند. تنظیمات سیستم را می‌توان به راحتی در نمودارهای بود یا ریشه مکان مشاهده و تحلیل کرد.

د) درک رزونانس و فیلترها:

- حوزه فرکانس در تحلیل سیستم‌هایی که دارای **رزونانس** هستند (یعنی جایی که سیستم فرکانس‌های خاصی را تقویت می‌کند) یا در طراحی **فیلترها** برای عبور یا تضعیف فرکانس‌های خاص، بسیار مهم است.

خلاصه

به طور خلاصه، **تبدیل‌های لاپلاس** و **فوریه** پایه‌های تبدیل سیستم‌ها از حوزه زمان به حوزه فرکانس هستند. در حالی که **لاپلاس** ابزار گسترده‌تری است که شامل رفتار گذرا و حالت دائمی سیستم‌ها می‌شود، **فوریه** بیشتر برای تحلیل پاسخ‌های حالت دائمی و سیگنال‌های دوره‌ای استفاده می‌شود. تحلیل در حوزه فرکانس، مزایای زیادی مانند ساده‌تر کردن سیستم‌های پیچیده، تحلیل پایداری و طراحی سیستم‌های کنترل به ویژه در سیستم‌های مرتبه بالا یا متصل به یکدیگر دارد.