

完美数：数论宝库中的“钻石”

■文 / 曹向东（美国布朗大学博士后）

2016年1月7日，美国数学家库珀通过参与一个名为“互联网梅森素数大搜索”（GIMPS）项目，发现了一个超大的完美数—— $2^{74207280}(2^{74207281}-1)$ 。该数长达44677235位，如果用普通字号将它连续打印下来，其长度可达200公里！澳大利亚数学家帕克指出，这是一个巨大的科学成就。美国《纽约

时报》、英国广播公司（BBC）等国际主流媒体都对这一科学成就作了报道，并给予了高度评价。

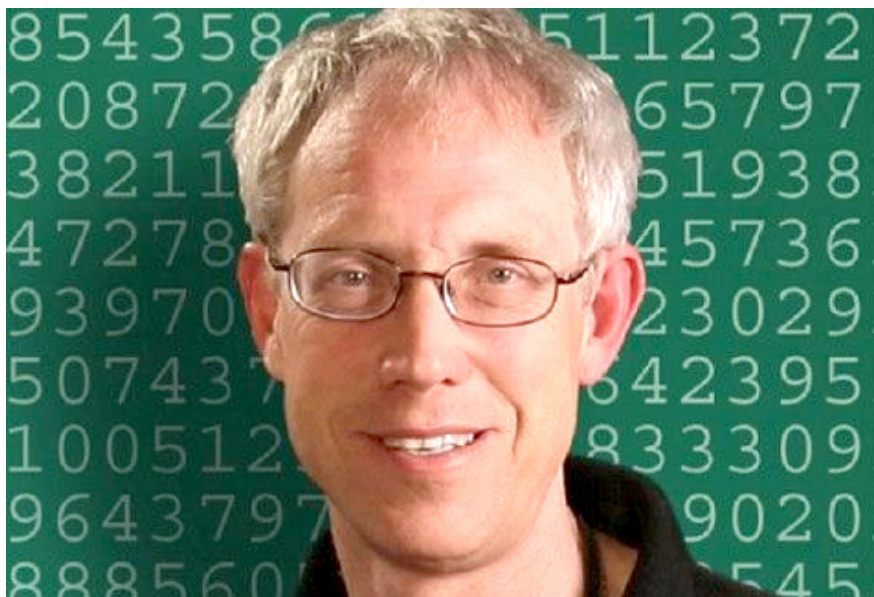
“完美数”（Perfect Number）又称“完全数”或“完满数”，指的是具有如下特征的自然数：所有的真因子（即除了自身以外的约数）的和（即因子函数），恰好等于它本身（如最小的完美数 $6=1+2+3$ ）。正如古希腊

数学家、哲学家毕达哥拉斯及其学派认为的那样：数本身就是完美的，而完美数就是这美的代表。

公元前3世纪，古希腊数学家欧几里得在其名著《几何原本》中证明了素数有无穷多个，如2、3、5、7、11等等。该书第九章最后一个命题首次给出了寻找完美数的方法，被誉为欧几里得定理：如果 2^p-1 是素数（其中指数 p 也是素数），则 $2^{p-1}(2^p-1)$ 是完美数。

公元1世纪，毕达哥拉斯学派成员、古希腊数学家尼可马修斯在其数论专著《算术入门》中，正确地给出了6、28、496和8128这四个完美数，并通俗地复述了欧几里得寻找完美数的定理及其证明。他还自然数划分为三类：富裕数、不足数和完美数，其意义分别是小于、大于和等于所有真因数之和。

完美数在古希腊诞生后，吸引着人们像淘金般去寻找。虽然一代又一代人付出了无数的心血和汗水，但第5个完全数还是没人找到。后来，由于欧洲不断进行战争，希腊科学逐渐



美国数学家库珀



法国数学家费马

衰退，一些优秀的科学家带着他们的成果和智慧纷纷逃往阿拉伯、印度、意大利等国；从此，希腊文明一蹶不振。

到了13世纪，完美数的研究才出现一线曙光。意大利数学家斐波那契经过推算宣布找到了一个寻找完美数的有效法则，可惜没有人共鸣，成为过眼烟云。光阴似箭，1456年，还当人们迷惘之际，有人偶然发现在一位无名氏的手稿中，竟神秘地给出了第5个完美数33550336。这比起第4个完美数8128大了4000多倍。跨度如此之大，在计算落后的年代可想而知发现者之艰辛了，但是手稿里没有说明他是用什么方法得到的，又没有公布自己的姓名，这更使人迷惑不解了。

意大利数学家克特迪历尽艰辛，终于在1588年发现了第6个和第7个完美数 $2^{16}(2^{17}-1)$ 和 $2^{18}(2^{19}-1)$ ，但他又错误地认为 $2^{22}(2^{23}-1)$ 、 $2^{28}(2^{29}-1)$ 和 $2^{36}(2^{37}-1)$ 也是完美数。这三个数后来被法国数学家费马和瑞士数学家欧拉否定了。1644年法国数学家梅森在其所

著的《物理数学随感》一书中声称：当 $P=2、3、5、7、13、17、19、31、67、127$ 和 257 时， $2^{(P-1)}(2^P-1)$ 是完美数。这就是著名的“梅森猜想”（Mersenne Conjecture）。

1730年，被称为“世界四大数学家雄狮”之一的欧拉，时年23岁，正值风华茂盛。他出手不凡，给出了一个出色的定理：每一个偶完美数都是形如 $2^{(P-1)}(2^P-1)$ 的自然数，其中 P 是素数， 2^P-1 也是素数。这是欧几里得定理的逆定理。有了欧几里得和欧拉两个互逆定理，公式 $2^{(P-1)}(2^P-1)$ 就成为判断一个偶数是不是完美数的充要条件了。

欧拉研究梅森猜想后指出：“我冒险断言：每一个小于50的素数，甚至小于100的素数使 $2^{(P-1)}(2^P-1)$ 是完美数的仅有 P 取2、3、5、7、13、17、19、31、41和47，我从一个优美的定理出发得到了这些结果，我自信它们具有真实性。”1772年欧拉因过度拼命工作造成双目失明，但他仍未停止探究；他用心算证明了当 $P=31$ 时， $2^{30}(2^{31}-1)$ 是第8个完美数（即2305843008139952128），该数有19位，堪称当时世界上已知的最大完美数。同时，他还发现自己过去认为 $P=41$ 和 $P=47$ 时是完美数是错误的。

其实梅森猜想中有错漏，数学家发现猜想中 $P=67$ 和 $P=257$ 时 $2^{(P-1)}(2^P-1)$ 并不是完美数， $P \leq 257$ 范围内还漏掉了 $P=61$ 、 $P=89$ 和 $P=107$ 时的3个完美数。但由于梅森在17世纪的欧洲起了一个极不平常的思想通道作用，在学人心目中有极其崇高的地位；为了纪念他，数学界将 2^P-1 型的素数命名为“梅森素数”（Mersenne Prime）。可以说，只要

找到梅森素数，就可以找到与其对应的完美数了。

手算时代，人们历尽艰辛，仅找到12个完美数，即 $P=2、3、5、7、13、17、19、31、61、89、107$ 和 127 时， $2^{(P-1)}(2^P-1)$ 是完美数。17世纪，法国数学家、哲学家、物理学家笛卡尔曾经公开预言：“能找出完美数是不会多的，好比人类一样，要找一个完美人亦非易事。”历史也证实了他的预言。完美数稀少而优美，所以被人们称为“数论宝库中的‘钻石’”。

电子计算机的出现，大大加快了探究完美数的步伐。例如，1952年美国数学家鲁滨逊使用SWAC型计算机在几个月内，就找到了5个梅森素数： $2^{521}-1$ 、 $2^{607}-1$ 、 $2^{1279}-1$ 、 $2^{2203}-1$ 和 $2^{2281}-1$ ；也可以说，他发现了5个完美数。探究完美数不仅极富挑战性，而且对探究者来说有一种巨大的自豪感。例如，1963年6月2日晚上8点，当第23个梅森素数 $2^{11213}-1$ 通过大型计算机被找到时，美国广播公司（ABC）中断了正常的节目播放，在第一时间发布了这一重要消息。而发现这个素数的美国伊利诺伊大学数学系全体师生感到无比骄傲，为了让全世界都分享这一重大成果，以至把所有从系里发出的信封都盖上了“ $2^{11213}-1$ 是个素数”的邮戳。由此可知，第23个完美数是 $2^{11212}(2^{11213}-1)$ 。

随着指数 P 值的增大，每一个完美数的产生都艰辛无比；而数学家和数学爱好者仍乐此不疲，激烈竞争。例如，在1979年2月23日，当美国克雷公司的计算机专家史洛温斯基和纳尔逊宣布他们找到第26个梅森素数 $2^{23209}-1$ 时，有人告诉他们：在两星期前美国加州的高中生诺尔就



法国数学家梅森

已经给出了同样结果。为此他们潜心发奋，又花了一个半月的时间，使用Cray-1型计算机找到了新的梅森素数 $2^{44497}-1$ 。这件事成了当时不少主流报纸的头版新闻。后来史洛温斯基还独自发现了6个梅森素数，因而被人们誉为“素数大王”；也可以说，他是“完美数大王”。

分布式计算技术的出现使完美数的探究如虎添翼。1996年初，美国计算机专家沃特曼编制了一个梅森素数计算程序，并把它放在网上供数学家和数学爱好者免费使用。这就是举世闻名的“互联网梅森素数大搜索”(GIMPS)项目，也是全世界第一个基于互联网的分布式计算项目；该项目主要利用大量普通计算机的闲置处理能力来获得相当于超级计算机的运算能力。美国计算机专家库尔沃斯基于1997年建立了“素数网”(PrimeNet)，使分配搜索区间和向GIMPS发送报告自动化。人们只

要从该项目下载开放源代码的Prime95或MPrime软件，就可以通过寻找梅森素数来发现完美数了。

2008年8月23日，美国计算机专家史密斯通过参与GIMPS项目，找到了第47个梅森素数—— $2^{43112609}-1$ ，该数超过1000万位；也可以说，他发现了第47个完美数—— $2^{43112609}-1$ ($2^{43112609}-1$)。这一成果被著名的《时代》周刊评为“2008年度50项最佳发明”之一。2016年1月7日，库珀找到了第49个梅森素数—— $2^{74207281}-1$ ，从而发现了第49个完美数—— $2^{74207280}$ ($2^{74207281}-1$)；他早在1997年就参加了GIMPS项目，一共发现了4个完美数。

尤其值得一提的是，在梅森素数的基础研究方面，法国数学家卢卡斯和美国数学家莱默都做出了重要贡献；以他们的姓氏命名的“卢卡斯-莱默检验法”是目前已知的检测梅森素数素性的最佳方法，该方法基于循环数列的计算。另外，中国数学家、语言学家周海中在研究梅森素数的重要性质——分布规律方面取得了重大突破；以他的姓氏命名的“周氏猜测”叙述了梅森素数的分布状况，并给出了精确表达式。这些科研成果为人们探究完美数提供了方便。

由于完美数具有奇特的性质、无穷的魅力和极大的挑战性，千百年来一直吸引着众多数学家和无数数学爱

好者对它进行探究。也许有人会问：完美数有什么用？尽管我们现在还看不到完美数的实际用处，但它反映了自然数的某些基本规律，并推动了“数学皇后”——数论的研究。而构成完美数的关键部分——梅森素数在当代却具有重要的实用价值，通过对它的寻找可以发现计算机芯片存在的问题。例如，德国一名GIMPS项目参与者最近发现：当美国英特尔公司的第六代微处理器架构Intel Skylak在执行Prime95应用来寻找梅森素数时，运算到指数 $P=14942209$ 就出现了触发系统死机的漏洞；英特尔公司此后承认存在该漏洞并做了修复。

最后值得一提的是，已被发现的49个完美数，统统都是偶数，其中个位数不是6就是8，于是数学家提出疑问：存不存在奇数的完美数？虽然目前谁也不知道奇完美数是否存在，但经过一代又一代数学家研究计算，有一点是明确的，那就是如果存在一个奇完美数的话，那么它一定是非常大的。有多大呢？远的不说，上世纪中期挪威数学家奥尔检查过 10^{18} 以下自然数，没有一个奇完美数；1967年美国数学家塔克曼宣布，如果奇完美数存在，它必须大于 10^{36} ，这是一个37位数；2012年，法国数学家奥辰和拉奥证明它必须大于 10^{1500} 。这种难于捉摸的奇完美数也许可能有，但它实在太大了，以至超出了人们能够用计算机计算的范围了。对奇完美数是否存在，产生如此多的估计，也是数学界的一大奇闻！另外，完美数是否有无穷多个？这也是一个著名的数学难题，它与其他数学难题一样，有待人们去攻克；而揭开这些未知之谜，正是科学追求的目标。**科技**