Turbo Compressed Sensing with

Partial DFT Sensing Matrix

算法复现与结果分析

Author: Junchen Liu (MooreMorriso) morriso@stu.zzu.edu.cn

1 摘要

本文主要研究了 Turbo Compressed Sensing with Partial DFT Sensing Matrix 中提出的 Turbo 压缩感知算法，并对其进行了 MATLAB 下的复现和分析，通过仿真验证了其在部分离散傅里叶变换(Partial DFT)感知矩阵下的性能，并与高斯近似消息传递(GAMP)算法进行了对比。

2 算法解释

2.1 算法概述

压缩感知（Compressed Sensing）是一种在欠采样条件下实现稀疏信号恢复的理论与方法。传统压缩感知算法如 OMP、LASSO 等往往在大规模场景中计算复杂度较高，因此更高效的重构算法被广泛研究。

论文提出了一种基于部分 DFT 感知矩阵的 Turbo 压缩算法，算法主要通过两个模块（模块 A 和模块 B）多次迭代，从而实现信号的恢复。其中，模块 A 主要负责线性最小均方误差（LMMSE）的处理与部分 DFT 感知矩阵的处理，模块 B 主要疏松信号的混合处理。

2.2 系统模型

我们考虑以下模型线性系统，其中 $\boldsymbol{y}$ 是接收到的测量向量， $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^{N\times 1}$ 为需要恢复的稀疏信号向量 $\boldsymbol{F}_{partial}$ 是需要恢复的稀疏信号向量， $\boldsymbol{n}$ 是加性高斯白噪声向量。

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}_{partial}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n} \tag{1}$$

$\boldsymbol{F} \in \mathbb{C}^{NxN}$ 为完整 DFT 矩阵，其第(m,n)个元素 $\frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi j(m-1)(n-1)/N}$ ，需要恢复的稀疏信号向量 $\boldsymbol{F}_{partial}$，随机选择 M 行构成的，对于随机选择的 M 行，构成选择矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是一个 M×N 的矩阵，由此系统模型可表示为：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Sz}+\boldsymbol{n} \tag{2}$$

稀松信号 $\boldsymbol{x}$ 假设为独立同分布，且服从 Bernoulli-Gaussian 分布，对于每个元素 x_j 有，且其方差归一化为 1：

$$x_j \sim \begin{cases} 0 & P = 1-\lambda \\ CN(0,\ 1/\lambda) & P = \lambda \end{cases} \tag{3}$$

2.3　算法结构

论文提出了一种基于部分 DFT 感知矩阵的 Turbo 压缩感知算法，算法主要通过两个模块（模块 A 和模块 B）多次迭代，从而实现信号的恢复，如图 2.1 所示。其中，模块 A 主要负责线性最小均方误差（LMMSE）的处理与部分 DFT 感知矩阵的处理，模块 B 主要疏松信号的混合处理。

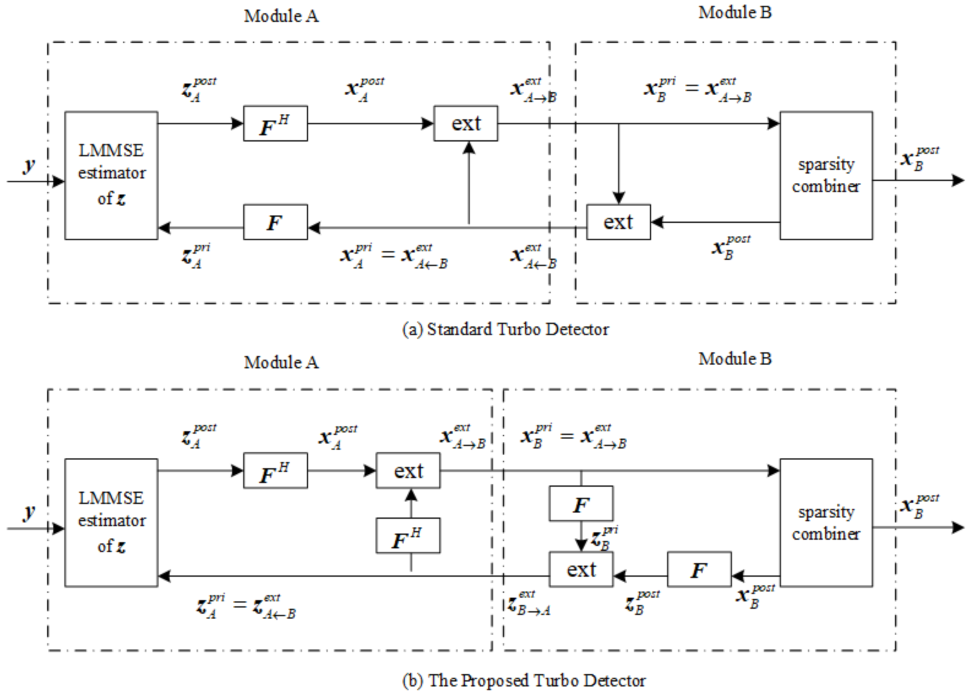

图 2.1　标准 Turbo 算法和论文提出的 Turbo 算法图

2.4 模块 A：LMMSE 估计器

随着输入信号和噪声的变化，MMSE 算法需要不断进行矩阵求逆运算（包含两个矩阵求逆），计算量较大，对 MMSE 算法做一次平滑得到 LMMSE，在 Turbo 压缩感知算法中，模块 A 的 LMMSE 估计器被用来在给定接收信号 $\boldsymbol{y}$ 和关于 $\boldsymbol{z}$ 的先验信息的情况下，提供对 $\boldsymbol{z}$ 的最佳线性估计。

$\boldsymbol{z}$ 的后验均值和协方差表示为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_A^{post} &= \boldsymbol{z}_A^{pri} + \left(v_A^{pri} / (v_A^{pri} + \sigma^2)\right) \cdot \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{partial}}^{H} \cdot \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{F}_{partial} \cdot \boldsymbol{z}_A^{pri}\right) \\
\boldsymbol{V}_A^{post} &= v_A^{pri} \cdot \boldsymbol{I}_N - \left(v_A^{pri^2} / (v_A^{pri} + \sigma^2)\right) \cdot \boldsymbol{F}^H \cdot \boldsymbol{F}
\end{aligned} \tag{4}$$

$\boldsymbol{x}$ 的外在均值和方差表示为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_A^{ext} &= v_A^{ext} \cdot \left(\boldsymbol{x}_A^{post} / v_A^{post} - \boldsymbol{x}_A^{pri} / v_A^{pri}\right) \\
v_A^{ext} &= \left(1 / v_A^{post} - 1 / v_A^{pri}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

2.5 模块 B：疏松信号组合

疏松信号为 0 时，$x_{\boldsymbol{pri}}$ 服从均值为 0、方差为 v_{pri} 的高斯分布，所以似然值为：

$$likelihood_0 = \frac{1}{\pi v_{\boldsymbol{pri}}} \exp\left(-\frac{|x_{\boldsymbol{pri}}|^2}{v_{\boldsymbol{pri}}}\right) \tag{6}$$

疏松信号非 0 时，$x_{\boldsymbol{pri}}$ 服从均值为 $\sigma_{\boldsymbol{x}}^2$ 、方差为 $v_{pri} + \sigma_{\boldsymbol{x}}^2$ 的高斯分布，似然值为：

$$likelihood_1 = \frac{1}{\pi(v_{\boldsymbol{pri}} + \sigma_{\boldsymbol{x}}^2)} \exp\left(-\frac{|x_{\boldsymbol{pri}}|^2}{v_{\boldsymbol{pri}} + \sigma_{\boldsymbol{x}}^2}\right) \tag{7}$$

后验激活概率 Pr 为：

$$Pr = \frac{1}{1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{likelihood_0}{likelihood_1}} \tag{8}$$

后验均值为：

$$x_{post_B} = Pr \cdot \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + v_{pri}} \cdot x_{\boldsymbol{pri}} \tag{9}$$

后验方差：

$$v_{j,B}^{post}=Pr\cdot\left(\frac{\sigma_X^2\cdot v_{pri_B}}{\sigma_X^2+v_{pri_B}}\right)+Pr\cdot(1-Pr)\cdot\left|\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2+v_{pri_B}}\cdot x_{pri_B}\right|^2$$

$$v_B^{post}=(\frac{1}{N})\cdot\Sigma_{j=1}^{N}v_{j,B}^{post} \tag{10}$$

基于这个高斯假设，模块 B 可以计算出 $\boldsymbol{z}$ 的外在估计，并将其反馈给模块 A，用于下一次迭代.

3　仿真验证

3.1　实验设置

为复现原论文结果，此处将参数设置为：信号长度 N=8192，测量长度 M=5374，非零概率 λ=0.4，信噪比 SNR=50 dB。在 MATLAB R2021a 下进行仿真实验。

3.2　实验结果

基于参考论文的设定，我们得到了 Proposed Turbo Algorithm 仿真结果，参考其他文献，我们尝试得到部分 DFT 结合 AMP 的结果。

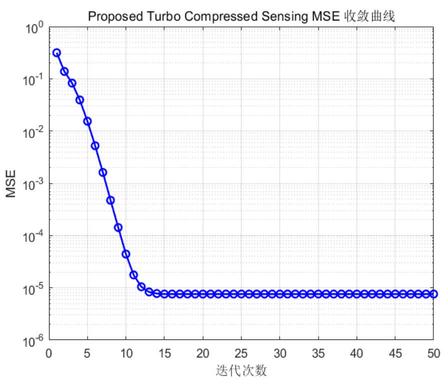

图 3.1　论文提出的 Turbo 算法仿真

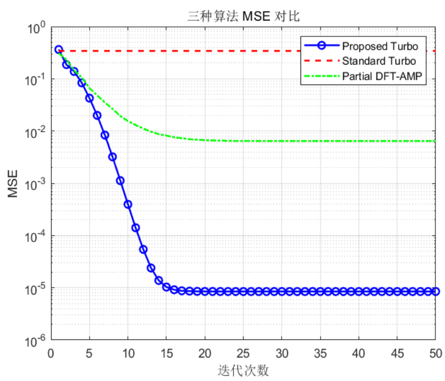

图 3.2　与部分 DFT-AMP 对比图

在仿真设定的参数条件下，Proposed Turbo 算法在 10~20 次迭代后迅速收敛，MSE 下降明显，Partial DFT-AMP 收敛速度与 Proposed Turbo 相近，但 MSE

下降效果较差，标准 Turbo 按照论文假设条件，在 1 次迭代后保持不变。

3.3 讨论

3.2 节中，我们得到了在“信号长度 N=8192，测量长度 M=5374，非零概率 λ=0.4，信噪比 SNR=50 dB”下的仿真结果，在后续的测试中，通过改变 M/N 的值发现，Proposed Turbo Algorithm 的收敛情况仅于该比值有关，当 M/N 小于 0.54 时收敛情况急剧变差，M/N 值不断增加，Partial DFT-AMP 与 Proposed Turbo Algorithm 的收敛时 MSE 趋同，且收敛迭代次数趋同，在高测量率下，两类算法本质上都接近贝叶斯最优推断，差异主要体现在结构设计与计算路径。