FLOYD WARSHALL

Dato un grafo orientato e pesato G = (V, E) con W matrice dei pesi dove $\forall$ i, j $w_{i,j}$ =
$$\begin{cases} 0 & se\ i = j \\ peso\ arco\ (i,j) & se\ (i,j) \in E \\ \infty & se\ (i,j) \notin E \end{cases}$$

PROBLEMA: Calcolare $\forall$ (i, j) il peso di un cammino minimo da *i* a *j*.
SOLUZIONE: Algoritmo di FW che è un algoritmo di programmazione dinamica.

Di conseguenza dobbiamo definire i sotto problemi e le loro istanze.
Il sottoproblema k-esimo sarà definito come:
$\forall$ (i, j) tutti i cammini da *i* a *j* con vertici intermedi $\in$ {1, ..., k}
ATTENZIONE: ***NON*** significa con *k* vertici intermedi!

Soluzione sotto problema: $D^{(k)} = (d_{i,j}^{(k)})_{i,j \in V}$

Soluzione problema originale: $D^{(n)} = (d_{i,j}^{(n)})_{i,j \in V}$

CASO BASE
k = 0
$\forall$ (i, j) $\in V^2$ $d_{i,j}^{(0)} = w_{i,j} = \begin{cases} 0 & se\ i = j \\ peso\ arco\ (i,j) & se\ (i,j) \in E \\ \infty & se\ (i,j) \notin E \end{cases}$

Di conseguenza, $D^{(0)} = W$.

CASO PASSO
k > 0
Assumiamo di aver già calcolato i sotto problemi più piccoli.

$d_{i,j}^{(k)} = \min\{ d_{i,j}^{(k-1)},\ d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)} \}$

ATTENZIONE: Nello svolgimento degli esercizi di questo tipo spesso conviene pensare prima al caso passo, suddividendolo in due sotto casi; k $\in$ cammino minimo e k $\notin$ cammino minimo, unendoli poi alla fine in un'unica equazione ricorsiva e stabilendo poi il caso base.

ESERCIZI VISTI

LUNGHEZZA $\leq$ L

Dato un grafo G = (V, E, W) pesato, orientato e senza cappi e dato un intero L > 0, calcolare $\forall$ (i, j) $\in$ V^2 il peso di un cammino minimo da *i* a *j* di lunghezza $\leq$ L

INPUT: G = (V, E, W) L

SOTTO PROBLEMA: definito da k $\in$ {0, ..., n} e da l $\in$ {0, ..., L}

$\forall$ (i, j) $\in$ V^2 calcolare il peso di un cammino minimo da *i* a *j*

- utilizzando vertici intermedi appartenenti a {1, ..., k}
- di lunghezza $\leq$ l

DEFINIZIONE VARIABILI
Per ogni sotto problema avremo quindi una variabile $D^{(k,l)}$ = ($d_{i,j}^{(k,l)}$) dove $\forall$ (i, j) $d_{i,j}^{(k,l)}$ è il peso del cammino minimo da *i* a *j* con vertici intermedi $\in$ {1, ..., k} di lunghezza $\leq$ l.

CASO BASE (k, l) con k = 0

$d_{i,j}^{(0,l)}$ = $\begin{cases} 0 & se\ i = j \\ w_{i,j} & se\ i \neq j \wedge (i,j) \in E \\ \infty & altrimenti \end{cases}$

CASO PASSO (k, l) con k > 0 $\forall$ l $\in$ {1, ..., L}

Caso 1: k $\notin$ cammino minimo $\rightarrow$ $d_{i,j}^{(k,l)}$ = $d_{i,j}^{(k-1,l)}$

Caso 2: k $\in$ cammino minimo $\rightarrow$ Da *i* a *k* ho un cammino $\leq$ l_1, da *k* a *j* $\leq$ l_2, devo far in modo che il cammino che scelgo sia l_1 + l_2 $\leq$ l

e₁ : $d_{i,j}^{(k,l)}$ = min { $d_{i,k}^{(k-1,l_1)}$ + $d_{k,j}^{(k-1,l_2)}$ } con l_1 $\in$ {1, ..., l}, l_2 $\in$ {1, ..., l} e l_1 + l_2 $\leq$ l

Tuttavia questo vale solo per l > 1.

Se l = 1 e k $\in$ cammino minimo, $d_{i,j}^{(k,l)}$ = ∞ poiché non esiste un cammino di lunghezza 1 che abbia *k* > 0 vertici intermedi.

Quindi nel caso 2 avremo:

$$e_2 : d_{i,j}^{(k,l)} = \begin{cases} \min\limits_{(l_1,l_2) \in \{0,\ ...,\ l\}^2\ :\ l_1+l_2 \leq l} \{d_{i,k}^{(k-1,l_1)} + d_{k,j}^{(k-1,l_2)}\} & se\ l > 1 \\ \infty & se\ l = 1 \end{cases}$$

Questo è ovviamente nel caso 2, noi dobbiamo prendere il migliore tra il caso 1 e il caso 2 *(in questo caso il minimo)*.

EQUAZIONE DI RICORRENZA

$d_{i,j}^{(k,l)}$ = min { e_1, e_2 }

SOLUZIONE
La soluzione del problema originale sarà in $D^{(n,\ L)}$.

R ARCHI ROSSI

Dato un grafo G = (V, E, W, col) senza cappi dove col: E $\rightarrow$ {Red, Blue} calcolare $\forall$ (i, j) $\in$ V^2 il peso di un cammino minimo da *i* a *j* con esattamente 3 archi rossi. *(R = 3, n = |V|).*

INPUT: G = (V, E, W, col) R

SOTTOPROBLEMA: definito da k $\in$ {0, ..., n} e r $\in$ {0, ..., R}

$\forall$ (i, j) $\in$ V^2 calcolare il peso di un cammino minimo da *i* a *j* con vertici intermedi $\in$ {0, ..., k} con esattamente *r* archi rossi.

DEFINIZIONE VARIABILI: per ogni sottoproblema abbiamo $D^{(k,r)}$ = ($d_{i,j}^{(k,r)}$).

CASO BASE k = 0 $\wedge$ r $\in$ {0, ..., R}

Caso 1: r = 0

$$d_{i,j}^{0,0} = \begin{cases} 0 & se\ i = j \\ w_{i,j} & se\ i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) \neq Red \\ \infty & altrimenti \end{cases}$$

ATTENZIONE: varrà infinito anche se l'arco esiste ma è di colore rosso in questo caso.

Caso 2: r = 1

$$d_{i,j}^{0,1} = \begin{cases} \infty & se\ i = j \\ w_{i,j} & se\ i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) = Red \\ \infty & altrimenti \end{cases}$$

ATTENZIONE: Voglio un cammino che abbia 1 arco rosso; se *i* = *j* l'arco non c'è, di conseguenza non posso avere un cammino con 1 arco rosso.

Caso 3: r > 1

$d_{i,j}^{(0,r)} = \infty$

ATTENZIONE: In questo caso viene sempre infinito poiché con 0 vertici intermedi posso avere al più un arco, di conseguenza non avrò mai un cammino con r > 1 archi rossi.

CASO PASSO k > 0 $\wedge$ r $\in$ {0, ..., R}

Caso 1: k $\notin$ cammino minimo
e_1 : $d_{i,j}^{(k,r)} = d_{i,j}^{(k-1,r)}$

Caso 2: k $\in$ cammino minimo

e_2 : $d_{i,j}^{(k,r)} = \min\limits_{(r_1,\, r_2)\, \in\, \{0,\, ...,\, r\}^2\ :\ r_1+r_2=r} (d_{i,k}^{(k-1,r_1)} + d_{k,j}^{(k-1,r_2)})$

EQUAZIONE DI RICORRENZA

$d_{i,j}^{(k,r)}$ = min{ e_1, e_2 }

Un ulteriore caso base potrebbe essere se r > k + 1, in quel caso sicuramente non posso avere r archi rossi, ma possiamo anche lasciare così le equazioni.

SOLUZIONE
La soluzione del problema originale sarà in $D^{(n,\ R)}$.

ESISTE CAMMINO CON COLORI ALTERNATI

Dato un grafo orientato G = (V, E, col) senza cappi dove col: E $\rightarrow$ {Red, Blue} stabilire $\forall$ (i, j) $\in$ V^2 se $\exists$ un cammino da *i* a *j* nel quale non vi siano 2 archi consecutivi Red.

INPUT: G = (V, E, col)

SOTTOPROBLEMA: definito da k $\in$ {0, ..., n}

DEFINIZIONE VARIABILI: Per ogni sotto problema abbiamo $D^{(k)}$ = ($d_{i,j}^{(k)}$) dove $d_{i,j}^{(k)}$ vale TRUE sse $\exists$ un cammino da *i* a *j* senza 2 archi rossi consecutivi con vertici intermedi $\in$ {0, ..., k}.

Notiamo che per poter dire se possiamo unire due cammini *(nel caso in cui k $\in$ cammino minimo ad esempio)* dobbiamo sapere con che archi iniziano e finiscono i vari cammini; ci ***manca informazione***!
La soluzione è quindi introdurre un **problema ausiliario** leggermente modificato;
Dato un grafo orientato G = (V, E, col) senza cappi dove col: E $\rightarrow$ {Red, Blue} ***e data (a, b)*** $\in$ ***{Red, Blue}***^{2} stabilire $\forall$ ***(a, b)*** $\in$ ***{Red, Blue}***^{2}, $\forall$ (i, j) $\in$ V^2 se $\exists$ un cammino da *i* a *j* nel quale non vi siano 2 archi consecutivi Red ***e con colore del primo arco = a e colore dell'ultimo arco = b***.

SOTTOPROBLEMA AUSILIARIO: definito da k $\in$ {0, ..., n} e da a, b $\in$ {Red, Blue}

DEFINIZIONE VARIABILI: Per ogni sotto problema abbiamo $D^{(k,\ a,\ b)}$ = ($d_{i,j}^{(k,\ a,\ b)}$) dove $d_{i,j}^{(k,\ a,\ b)}$ vale TRUE sse $\exists$ un cammino da *i* a *j* senza 2 archi rossi consecutivi con vertici intermedi $\in$ {0, ..., k} e con colore primo arco = a e con colore ultimo arco = b.

CASO BASE: k = 0

$$\forall (a,b) \in \{R,B\}^2 \quad : \quad d_{i,j}^{(0,\ a,\ b)} =$$

$$\begin{cases} FALSE & se\ i = j \\ TRUE & se\ i \neq j \wedge\ (i,j) \in E \wedge col(i,j) = a \wedge col(i,j) = b \\ FALSE & altrimenti \end{cases}$$

CASO PASSO: k > 0 $\forall$ (a, b)

Caso 1: k $\notin$ cammino minimo

$e_1 = d_{i,j}^{(k,\ a,\ b)} = d_{i,j}^{(k-1,\ a,\ b)}$

Caso 2: k $\in$ cammino minimo

$e_2 = d_{i,j}^{(k,\ a,\ b)} = \vee_{(c,d) \in \{R,B\}^2\ :\ (c,d) \neq \{R,R\}} \left(d_{i,j}^{(k-1,\ a,\ c)} \wedge d_{i,j}^{(k-1,\ d,\ b)} \right)$

EQUAZIONE DI RICORRENZA:

$d_{i,j}^{(k,\ a,\ b)} = e_1 \vee e_2$

SOLUZIONE PB AUX: $\forall$ (a, b) la soluzione del PB AUX definito da (a, b) è $D^{(n,\ a,\ b)}$

SOLUZIONE PB DATO: $D_{i,j} = \vee_{(a,b) \in \{R,B\}^2} \left(d_{i,j}^{(n,\ a,\ b)} \right)$

ATTENZIONE: Da notare come nella soluzione ***non*** escludiamo le coppie *{R, R}* come facciamo nel caso passo; in quel caso lo facciamo perché se unissimo un cammino che finisce col rosso e uno che inizia col rosso avremmo due archi rossi consecutivi, nella soluzione finale non ci importa se il cammino minimo inizi e finisca col rosso, basta che non ce ne siano di consecutivi!

ESERCIZI HOMEWORK - NON SVOLTI A LEZIONE!

LUNGHEZZA ESATTAMENTE L

Dato un grafo G = (V, E, W) pesato, orientato e senza cappi e dato un intero L > 0, calcolare ∀ (i, j) ∈ V^2 il peso di un cammino minimo da *i* a *j* di lunghezza esattamente L

INPUT: G = (V, E, W) L

SOTTO PROBLEMA: definito da k ∈ {0, ..., n} e da l ∈ {0, ..., L}

∀ (i, j) ∈ V^2 calcolare il peso di un cammino minimo da *i* a *j*

- utilizzando vertici appartenenti a {0, ..., k}
- di lunghezza esattamente l

DEFINIZIONE VARIABILI
Per ogni sotto problema avremo quindi una variabile $D_{i,j}^{(k,l)}$ = ($d_{i,j}^{(k,l)}$) dove ∀ (i, j) $d_{i,j}^{(k,l)}$ è il peso del cammino minimo da *i* a *j* con vertici intermedi ∈ {0, ..., k} di lunghezza esattamente l.

CASO BASE: k = 0

$d_{i,j}^{(0,\ l)}$ = $\begin{cases} \infty & se\ i = j \\ w_{i,j} & se\ i \neq j \wedge (i,j) \in E\ \wedge l = 1 \\ \infty & altrimenti \end{cases}$

CASO PASSO: k > 0

Caso 1: k ∉ cammino minimo

e₁ : $d_{i,j}^{(k,\ l)}$ = $d_{i,j}^{(k-1,\ l)}$

Caso 2: k ∈ cammino minimo

e₂ : $d_{i,j}^{(k,l)}$ = $\min\limits_{l_1, l_2 \in \{0,\ ...,\ L\}\ :\ l_1+l_2=l} \{d_{i,k}^{(k-1,\ l_1)} + d_{k,j}^{(k-1,\ l_2)}\}$

In questo caso se l = 1 l'algoritmo arriverebbe al caso base con $d_{i,j}^{(0,1)}$ e sceglierebbe il peso o ∞ a seconda del fatto se *i* e *j* siano collegati da un arco o meno.

EQUAZIONE DI RICORRENZA: min { e_1, e_2 }

SOLUZIONE
La soluzione del problema originale sarà in $D^{(n,\ L)}$.

VARIANTE ESISTENZIALE

CASO BASE: k = 0

$d_{i,j}^{(0,\ l)}$ = $\begin{cases} FALSE & se\ i = j \\ TRUE & se\ i \neq j \wedge (i,j) \in E\ \wedge l = 1 \\ FALSE & altrimenti \end{cases}$

CASO PASSO: k > 0

Caso 1: k ∉ cammino minimo

e_1 : $d_{i,j}^{(k,\ l)}$ = $d_{i,j}^{(k-1,\ l)}$

Caso 2: k ∈ cammino minimo

$e_2 : d_{i,j}^{(k,l)} = \vee_{l_1, l_2 \in \{0,\ ...,\ L\}\ :\ l_1 + l_2 = l} \{ d_{i,k}^{(k-1,\ l_1)} \wedge d_{k,j}^{(k-1,\ l_2)} \}$

SOLUZIONE
La soluzione del problema originale sarà in $D^{(n,\ L)}$.

$\leq$ R ARCHI ROSSI

Dato un grafo G = (V, E, W, col) senza cappi dove col: E $\rightarrow$ {Red, Blue} calcolare $\forall$ (i, j) $\in$ V^2 il peso di un cammino minimo da *i* a *j* con un numero $\leq$ 3 archi rossi. *(R = 3, n = |V|).*

INPUT: G = (V, E, W, col) R

SOTTOPROBLEMA: definito da k $\in$ {0, ..., n} e r $\in$ {0, ..., R}

$\forall$ (i, j) $\in$ V^2 calcolare il peso di un cammino minimo da *i* a *j* con vertici intermedi $\in$ {0, ..., k} con un numero $\leq$ *r* di archi rossi.

DEFINIZIONE VARIABILI: per ogni sotto problema abbiamo $D^{(k,r)}$ = ($d_{i,j}^{(k,r)}$).

CASO BASE: k = 0

$$d_{i,j}^{(0,\ r)} = \begin{cases} 0 & se\ i = j \\ w_{i,j} & se\ i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge r > 0 \\ \infty & altrimenti \end{cases}$$

CASO PASSO: k > 0

Caso 1: k $\notin$ cammino minimo

$$d_{i,j}^{(k,\ r)} = d_{i,j}^{(k-1,\ r)}$$

Caso 2: k $\in$ cammino minimo

$$d_{i,j}^{(k,\ r)} = \min_{(r_1, r_2) \in \{0, \ldots, R\}^2\ :\ r_1 + r_2 \leq r} \{ d_{i,k}^{(k-1,\ r_1)} + d_{k,j}^{(k-1,\ r_2)} \}$$

SOLUZIONE
La soluzione del problema originale sarà in $D^{(n,\ R)}$.

VARIANTE ESISTENZIALE

CASO BASE: k = 0

$$d_{i,j}^{(0,\ r)} = \begin{cases} TRUE & se\ i = j \\ TRUE & se\ i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge r > 0 \\ FALSE & altrimenti \end{cases}$$

CASO PASSO: k > 0

Caso 1: k $\notin$ cammino minimo

$$d_{i,j}^{(k,\ r)} = d_{i,j}^{(k-1,\ r)}$$

Caso 2: k $\in$ cammino minimo

$$d_{i,j}^{(k,\ r)} = \vee_{(r_1, r_2) \in \{0, \ldots, R\}^2\ :\ r_1 + r_2 \leq r} \{ d_{i,k}^{(k-1,\ r_1)} \wedge d_{k,j}^{(k-1,\ r_2)} \}$$

SOLUZIONE
La soluzione del problema originale sarà in $D^{(n,\ R)}$.