DEFINIZIONI

VERTICE RAGGIUNGIBILE
Dati due vertici *u* e *v* $\in$ V, il vertice *v* è raggiungibile dal vertice *u* *(v* $\sim$ *u)* SSE $\exists$ un ***cammino*** dal vertice *u* al vertice *v*.
Nel caso di grafi non orientati $\sim$ è una relazione d'equivalenza *(simmetrica, riflessiva e transitiva)*.

CAMMINO
Un cammino da *u* a *v* è una sequenza *(finita)* di vertici $\mathbf{u_0, u_1, \ldots, u_k}$ dove $u_0 = u$ e $u_k = v$ tale per cui $\forall$ i $\in$ {0, ..., k - 1} $(u_i, u_{i+1}) \in E$.
Ovviamente un cammino può anche avere lunghezza zero.

DISTANZA FRA VERTICI
La distanza di un vertice *v* da un vertice *u* è il numero di archi su un cammino minimo da *u* a *v*.
La distanza tra *u* e *u* stesso vale 0.

GRAFO CONNESSO
Un grafo non orientato G è connesso SSE $\forall$ u, v $\in$ V, v è ***raggiungibile*** da u.
Formalmente G = (V, E) | $\forall$ u, v $\in$ V, v è raggiungibile da u.

COMPONENTE CONNESSA
Una componente connessa è un sotto insieme di vertici CC $\subseteq$ V tale che $\forall$ u, v $\in$ CC, v è ***raggiungibile*** da u.
Formalmente: CC $\subseteq$ V | $\forall$ u, v $\in$ CC : v è raggiungibile da u
e ogni altro sottoinsieme che contiene CC è esattamente uguale a CC.

Compattamente: Una CC è un elemento di V / $\sim$ *(insieme quoziente della relazione di raggiungibilità)*.
Dove $\sim$ è la relazione di raggiungibilità.

ALBERO
Un grafo G = (V, E) non orientato è un albero SSE

- è connesso e aciclico *(privo di cicli)*.
- è connesso e |E| = |V| - 1.
- è aciclico e |E| = |V| - 1.

FORESTA
Un grafo G = (V, E) non orientato è una foresta se due suoi vertici qualsiasi sono connessi da **al più** un cammino *(aciclico)*. Una foresta risulta quindi essere un'unione disgiunta di alberi.

GRAFO COMPLETO
Un grafo è completo quando ogni suo vertice è collegato ad ogni altro suo vertice.
Formalmente:

- PER GRAFI NON ORIENTATI: $\forall$ v $\in$ V, $\forall$ u $\in$ V - {v} (u, v) $\in$ E
- PER GRAFI ORIENTATI: $\forall$ v $\in$ V, $\forall$ u $\in$ V (u, v) $\in$ E

ALBERO BFS
Denotiamo l'albero BFS con **G_π = (V_π, E_π)** tale che:
V_π contiene tutti i vertici raggiungibili dalla sorgente *s*.
Possiamo quindi definire V_π in 3 modi equivalenti, ovvero:

- V_π = { v $\in$ V | v.col $\neq$ WHITE } *(oppure v.col = BLACK)*
- V_π = { v $\in$ V | v.d $\neq \infty$ }
- V_π = { v $\in$ V | v.$\pi \neq$ NIL } $\cup$ {*s*}

E_π sono gli archi dell'albero.
Definiamo E_π come

- E_π = { (v.π, v) | v $\in$ V_π - {*s*} }
- E_π = { (u, v) | u, v $\in$ V_π - {s} : v.π = u} $\cup$ { (*s*, w) | w $\in$ Adj[*s*] } *(non sono sicuro della correttezza di questa)*

FORESTA DFS
Denotiamo la foresta DFS con **G_π = (V, E_π)** tale che:
V è l'insieme dei vertici del grafo originario, poiché DFS visita tutti i nodi.
E_π rappresenta gli archi della foresta e lo definiamo come:
E_π = { (v.π, v) | v $\in$ V $\wedge$ v.$\pi \neq$ NIL }

MST
Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e connesso.
Un albero di copertura di G è un grafo (V, T) con $T \subseteq E$ ***aciclico***.

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, connesso e pesato mediante la funzione $w : E \to \mathbb{R}$.
Un albero di copertura minimo di G è un albero di copertura (V, T) tale che
$w(T) = \min\{w(A) \mid A \subseteq E \wedge (V, A) \; albero \; di \; copertura \; di \; G\}$.

MATROIDI
Un matroide è una coppia $< E, F >$ tale che

- E sia un insieme finito ed F una famiglia di sottoinsiemi di E tale per cui $\forall A \in F$ e $B \subseteq A \implies B \in F$, ovvero che sia un sistema di indipendenza
- E tale che $\forall A, B \in F$, con $|B| = |A| + 1$, $\exists b \in B - A$ tale che $A \cup \{b\} \in F$.

Il teorema di Rado ci dice inoltre che se $< E, F >$ è un matroide, allora qualsiasi funzione peso utilizziamo, l'algoritmo greedy standard ci darà la soluzione ottima.