

MULTIMEDIALITÀ E MULTIMODALITÀ

MEDIA: strumento atto al trasporto di informazioni.

MULTI-MEDIA: insieme di più strumenti per il trasporto di informazione.

Dunque, **multimedialità** significa la copresenza di **diversi media** (*testo, audio, immagini, video, ecc...*) che concorrono **insieme**, solitamente in **maniera iterativa** attraverso lo stesso **supporto o contesto informativo**.

Esempio: lezione con registrazione audio, video a corredo di slide con contenuti testuali.

MULTI-MODALITÀ: diversi **modi** alternativi (*e in generale equivalenti*) di accedere ad uno stesso contenuto. Questi *modi* non interagiscono tra di loro.

Esempio: slide, capitolo del libro, video tutorial con lo stesso argomento. Sono modi scorrelati.

PROCESSAMENTO DI SEGNALI

Per definire dei sistemi multimediali e multimodali è necessario processare e gestire dei **segnali** di natura differente che in generale nascono come **segnali analogici** e che devono essere integrati in un sistema **digitale**.

In particolare, le scelte fatte per il trattamento di questi segnali sono basate su come il nostro **sistema percettivo** reagisce a tali segnali, poiché l'utilizzatore finale di questi segnali spesso è l'essere umano.

In generale, il nostro sistema elimina più dati possibili e processa solamente ciò che è assolutamente necessario per interpretare il segnale; la stessa cosa faremo noi con la compressione, a volte cambiando anche il dominio del segnale, poiché osservare il segnale da un dominio diverso potrebbe comportare un risparmio di dati.

COS'È UN SEGNALE

Un segnale è una **funzione** che descrive un **fenomeno fisico** e il suo comportamento in base ad una o più **variabili indipendenti** (*che può essere il tempo, la frequenza, la quantità, ecc...*).

Esempio: un segnale audio rappresenta la pressione p (*variabile dipendente*) in un certo punto dello spazio rispetto al tempo t (*variabile indipendente*).

Ovviamente segnali di questo tipo sono **continui**, quindi non possiamo analizzarlo così com'è con un calcolatore (*perché così facendo avrei bisogno di risorse infinite*).

CLASSIFICAZIONE SEGNALI

I segnali possono essere classificati in base al loro **dominio** e **codominio**.

DOMINIO: Insieme dei valori assunti dalla variabile indipendente. Valori sui quali è definita la funzione.

- $D = \mathbb{R}$: segnale a spazio continuo. Significa che i vari valori hanno una distanza fra loro che è infinitesima.
- $D = \mathbb{K}$: segnale a spazio discreto. Con \mathbb{K} numerabile (*tipicamente infinito numerabile, ovvero con cardinalità \mathbb{N}*). Significa praticamente che i vari valori non sono separati da una distanza infinitesima, ma da una distanza finita, ovvero da un **passo**.

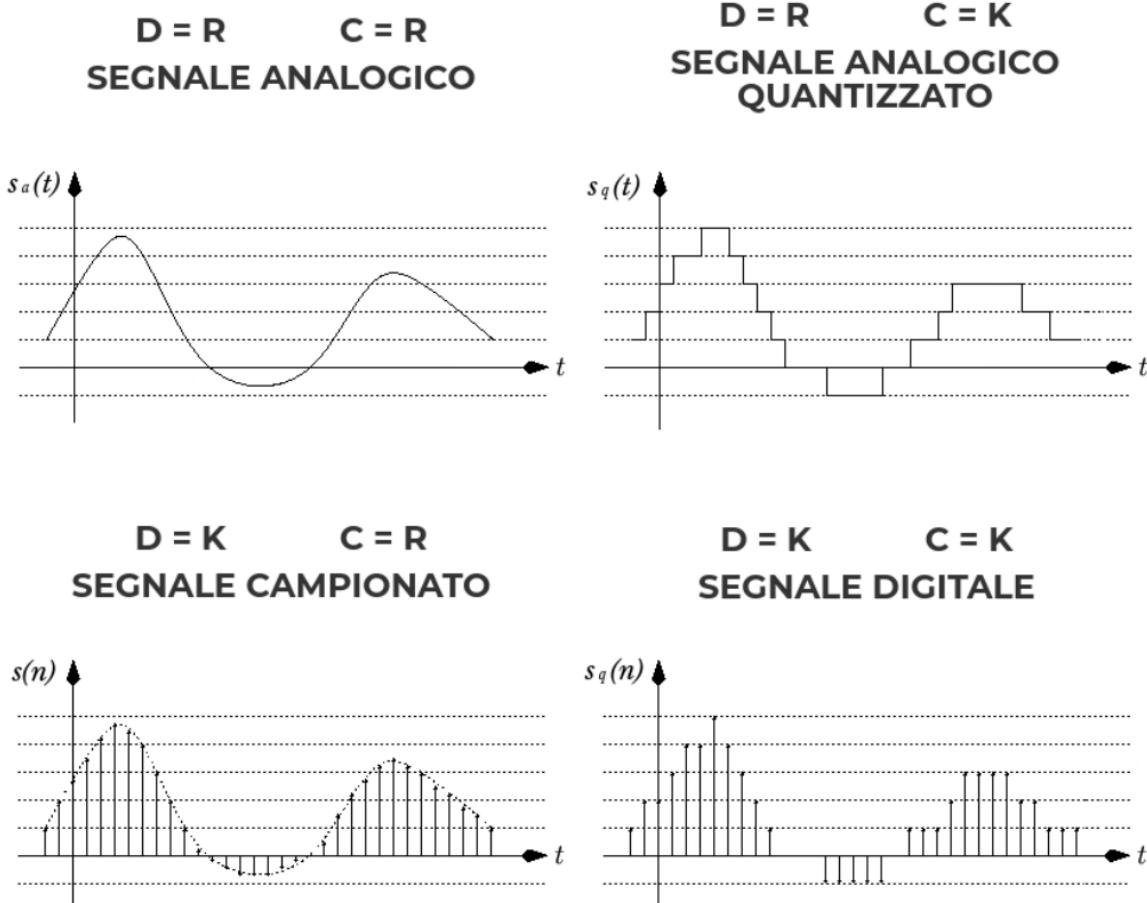
CODOMINIO: Insieme dei valori assunti dalla variabile dipendente. Valori assunti dalla funzione.

- $C = \mathbb{R}$: segnale continuo nelle ampiezze.
- $C = \mathbb{K}$: segnale discreto nelle ampiezze.

Possiamo classificare i segnali anche in:

- **REALI:** Segnali che assumono solo valori reali.
- **COMPLESSI:** Segnali che assumono valori complessi (*parte reale + parte immaginaria oppure modulo + fase*).

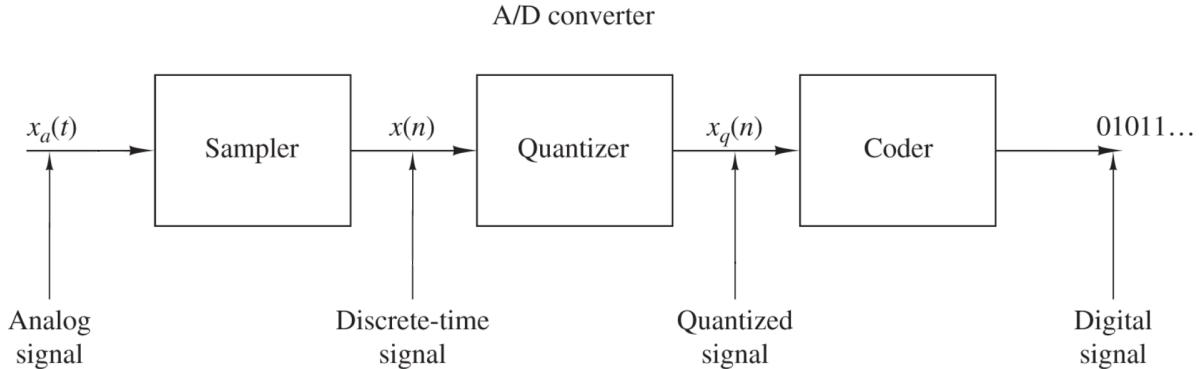
OSSERVIAMO UN ESEMPIO



ATTENZIONE: Quando vado a discretizzare la variabile indipendente, parliamo di **campioni**, mentre quando discretizziamo la variabile dipendente (*l'ampiezza*), parliamo di **livelli** (*di quantizzazione*).

Per passare da un segnale analogico ad uno digitale, dobbiamo **campionare** tale segnale, **quantizzarlo** e successivamente **codificarlo**; la seconda e la terza immagine di sopra rappresentano quindi degli step intermedi di questo passaggio.

Visualizziamo quanto appena detto:



Notiamo in particolare le **variabili**:

- Il segnale analogico viene indicato come $x_a(t)$, dove t è la variabile temporale, a ricordarci che a questo punto siamo nel modo **continuo** e dove il pedice a sta ad indicare *analogico*, per rinforzare quanto appena detto.
- Una volta che il segnale passa attraverso il campionatore, che discretizza la variabile indipendente e quindi il dominio, diventa un **segnale campionato** (*a tempo discreto*), e lo indichiamo con $x(n)$ per indicare che ora la variabile indipendente non è più il tempo continuo, ma una variabile n **discreta**.

Abbiamo scelto n proprio perché evoca, ovvero ci ricorda l'insieme dei numeri naturali. I nuovi valori della variabile indipendente vengono chiamati **campioni** e la distanza tra un campione e un altro è detta **passo di campionamento** ed è l'inverso della **frequenza di campionamento**.

Un'alta frequenza di campionamento significa una buona riproduzione del segnale ma dei volumi di dati più elevati, viceversa una frequenza più bassa richiede meno spazio ma produce dei fenomeni di **aliasing** del segnale, ovvero questo viene modificato e il risultato è ad esempio un segnale con una frequenza diversa o addirittura un segnale con frequenza zero (*ovvero costante*).

C'è quindi un **punto di limite** oltre il quale se prendo meno campioni non sono più in grado di ricostruire il mio segnale originale; questo punto limite dipende dalla frequenza del segnale originale.

Inoltre, scegliendo bene la frequenza di campionamento in base alla frequenza massima del segnale, siamo in grado di ricostruire il segnale senza errori.

- Dopo che abbiamo campionato il segnale, lo quantizziamo ed il segnale di output del quantizzatore è ancora diverso da quelli di prima, quindi per rappresentarlo e per distinguere dal segnale la cui ampiezza è ancora definita su infiniti valori, utilizziamo una nuova notazione $x_q(n)$ dove il pedice q sta per *quantizzato*.

Questo segnale avrà quindi i valori del codominio discretizzati, ovvero avrà un numero finito di **livelli**.

La distanza tra un livello e un altro la chiamiamo Δ ed è detta **passo di quantizzazione**, mentre l'insieme dei valori che possiamo descrivere con questo processo di quantizzazione è detto **range del quantizzatore**.

A differenza del campionamento, la quantizzazione introduce **sempre** un **errore** non recuperabile nel segnale, quindi la quantizzazione è un processo irreversibile.

- Ovviamente una volta codificato, il segnale sarà rappresentato con una sequenza di zeri e uni.

In analogia con lo schema precedente, notiamo che il segnale rappresentato nella prima immagine è un segnale di tipo $s_a(t)$, quello nella seconda immagine è un segnale di tipo $s_q(t)$, quello rappresentato nella terza immagine è un segnale di tipo $s(n)$ e quello nella quarta immagine è un segnale di tipo $s_q(n)$.

SEGNALI: ALCUNE DEFINIZIONI

Abbiamo detto che un segnale è una **funzione** che descrive un **fenomeno fisico** e il suo comportamento in base ad una o più **variabili indipendenti**; a seconda di queste variabili indipendenti possiamo definire una dimensione del segnale: un segnale definito su una variabile indipendente unica (*ad esempio il segnale audio*) è detto **segnale monodimensionale**, un segnale definito su più variabili indipendenti (*ad esempio le immagini, il cui segnale è definito nello spazio, quindi su lunghezza e larghezza*) è detto **segnale multidimensionale**.

Un segnale composto da più segnali invece è detto **segnale multicanale**; un esempio è l'**EEG**, che è rappresentato da un insieme di 16 segnali monodimensionali. La caratteristica dei segnali multicanale è che in un certo istante t , i valori assunti dai singoli segnali sono correlati tra loro poiché si riferiscono allo stesso fenomeno fisico.

Esempio: un'immagine in scala di grigi è definita da un segnale monocanale multidimensionale (*essendo definito sullo spazio*), mentre un'immagine a colori è definita da un segnale multidimensionale multicanale (*uno per ogni canale dei colori principali RGB*).

NOTA SUL DOMINIO: Generalmente parliamo di segnali nel dominio del tempo o dello spazio, spesso però i segnali sono rappresentati nel dominio delle frequenze.

Inoltre, una volta che campioniamo il segnale, utilizziamo n per indicare i campioni con cui il segnale è stato campionato. Nota bene che n è privo delle informazioni riguardo al dominio originale; prendendo un campione non so se il segnale che sto analizzando cambiava in base al tempo piuttosto che allo spazio piuttosto che ad un'altra variabile indipendente. Per poter ricostruire il segnale ho bisogno anche del **passo di campionamento (o della frequenza di campionamento che è il suo inverso)** in modo da sapere quanto tempo (*o spazio o frequenze o qualsiasi altra quantità di una variabile indipendente*) c'è tra un campione e l'altro.

In generale, il valore assunto da un segnale si chiama **AMPIEZZA** (*variabile dipendente, codominio*).

VALOR MEDIO DEL SEGNALE

- Segnale continuo $\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$ da $-\infty$ a $+\infty$ $\mu = \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} x(t) dt$ da T_0 a T_1
- Segnale discreto e finito $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$

DEVIAZIONE STANDARD E VARIANZA

Deviazione standard σ o varianza σ^2 forniscono informazioni aggiuntive per caratterizzare il segnale: la deviazione standard rappresenta quanto lontano dal valor medio il segnale può fluttuare, mentre la varianza rappresenta la **potenza** di questa fluttuazione.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

ATTENZIONE: occhio ai limiti, da 0 a $N - 1$ o da 1 a N è la stessa cosa.

Il valore rappresenta la media delle distanze al quadrato dei campioni x_i dal valor medio. Questa distanza viene calcolata al quadrato in modo che il segno non la influenzi, mentre viene considerata la deviazione standard σ in modo che questo scostamento sia della stessa dimensione del segnale stesso.

La varianza ha significato quando comparata con l'ampiezza massima del segnale; avere una varianza 100 su un segnale che varia da -1000 a +1000 è diverso da avere una varianza 10 su un segnale che varia da -1 a +1, così come avere una grossa varianza su un segnale che da pulito oscilla molto è diverso che averla su un segnale rumoroso.

In particolare, la varianza rappresenta quanto il segnale varia, ma questo significa che rappresenta, oltre al rumore del segnale che sicuramente contribuirà alla varianza, il **contenuto informativo** del segnale; un segnale **costante**, con basso contenuto informativo quindi, ha **deviazione standard 0!**

DEFINIZIONI

- Il valor medio del segnale è chiamato anche **DC (Direct Current)** o anche **componente continua**.
- Se il segnale è una forma d'onda ripetuta, le fluttuazioni del segnale rispetto al valor medio sono costanti e possono essere descritte da una grandezza chiamata **Ampiezza Picco-Picco A_{pp}** , da non confondere con la varianza.
- È ragionevole pensare che un segnale totalmente randomico sia un segnale rumoroso, poiché un fenomeno fisico tipicamente ha dei valori che sono correlati tra loro, questo significa che anche i rispettivi campioni dovranno avere una correlazione tra loro. Dei campioni si dicono scorrelati quando *vanno a caso*, ovvero quando c'è una grande variazione tra un campione e il successivo.

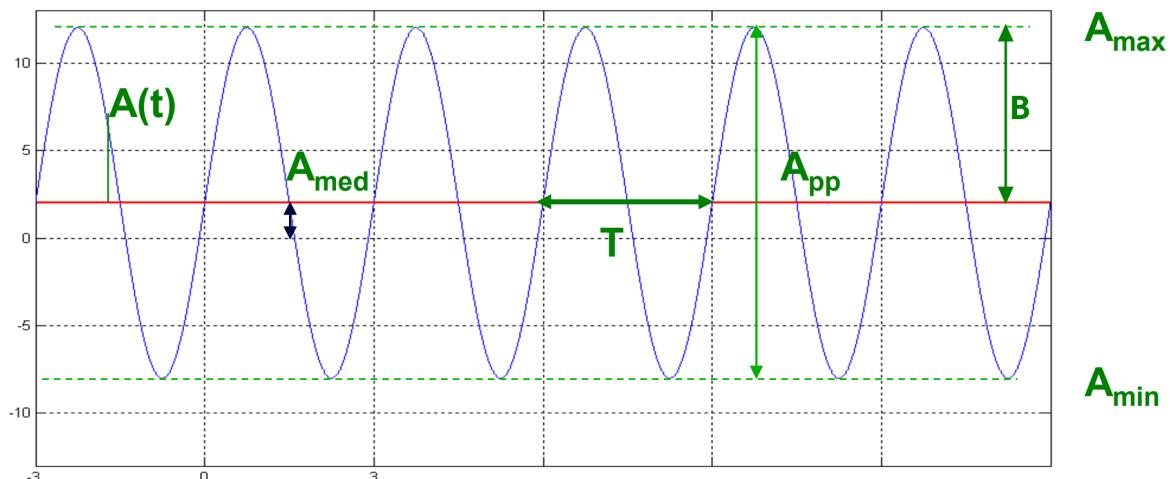
SEGNALI PERIODICI E APERIODICI

La **periodicità** di un segnale è una caratteristica importante; indica la ripetizione rispetto alla variabile indipendente di una forma d'onda in un certo **periodo T** . In particolare, un segnale periodico può essere descritto interamente analizzando un suo solo periodo a caso, poiché esso contiene tutta e sola l'informazione che contraddistingue il segnale e la durata del segnale stesso è infinita.

La **frequenza fondamentale** di un segnale periodico è strettamente legata al periodo dalla relazione $f_0 = \frac{1}{T}$.

Nella realtà non esistono dei segnali puramente periodici, ma solo dei segnali quasi periodici.

SEGNALE SINUSOIDALE



Un segnale sinusoidale è un segnale che oscilla intorno al valor medio in maniera simmetrica

$$A(t) = A_{med} + B * \sin(2\pi f t + \phi_0) \quad \text{con } B = \frac{A_{pp}}{2} \text{ e } A_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt.$$

Notiamo che per calcolare A_{med} usiamo la formula definita in un periodo, anche se un segnale periodico è definito da $-\infty$ a $+\infty$, poiché abbiamo detto che i segnali periodici sono descritti interamente da un loro periodo.

I parametri importanti dei segnali sinusoidali sono la **frequenza** f e la **fase** ϕ che rappresenta l'alternarsi di positività e negatività del segnale, in particolare è significativa la fase iniziale ϕ_0 . La fase ci dice quindi da dove iniziare a guardare la nostra sinusoide, se guardarla da zero o se sfasarla.

È interessante perché la fase è ciò che mi permette di passare da un seno ad un coseno, tramite un $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Un altro parametro importante è la **pulsazione** $\omega = 2\pi f$.

ENERGIA E POTENZA

La potenza istantanea di un segnale è definita come $P(t) = |x(t)|^2$, mentre l'energia di un segnale è definita come $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$.

Notiamo subito che se consideriamo un segnale periodico, visto che l'energia considera $|x(t)|^2$, l'Energia di un tale segnale è infinita, poiché corrisponde alla somma di infiniti contributi positivi.

DECIBEL

Il decibel dB , è un'unità di misura di tipo logaritmico che esprime il rapporto tra due livelli di cui uno, *quello al denominatore*, è preso come riferimento.

Dunque la misura in dB fra due grandezze fisiche dello stesso tipo è una misura

- **RELATIVA** rispetto ad un valore di riferimento.
- **ADIMENSIONALE** poiché è il rapporto fra due grandezze della stessa dimensione.
- **NON LINEARE**.

$Bel = \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$ il decibel è un decimo di Bel, quindi per ottenere il valore in dB , devo moltiplicare il Bel per 10.

Sapendo che P è legata all'ampiezza al quadrato del segnale A^2 , possiamo scrivere
 $dB = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 20 \log_{10} \frac{A_1}{A_2}$.

Quindi, 20 dB corrispondono ad un aumento di potenza di 100 volte:

$$20 dB = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} dB; \quad 2 = 1 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}; \quad 100 = \frac{P_1}{P_2}.$$

O ad un aumento di ampiezza di 10 volte:

$$20 dB = 20 \log_{10} \frac{A_1}{A_2} dB; \quad 1 = 1 \log_{10} \frac{A_1}{A_2}; \quad 10 = \frac{A_1}{A_2}.$$

In particolare, 6 dB raddoppia l'ampiezza, -6 dB la dimezza.

TRASFORMAZIONI DI SEGNALI

- **TRASLAZIONE RITARDO:** Fissato un tempo t_0 , la traslazione trasforma il segnale $x(t)$ nel segnale $x(t - t_0)$, che rappresenta lo stesso segnale ritardato di t_0 .
- **TRASLAZIONE ANTICIPO:** Fissato un tempo t_0 , la traslazione trasforma il segnale $x(t)$ nel segnale $x(t + t_0)$, che rappresenta lo stesso segnale anticipato di t_0 .
- **CAMBIO DI SCALA:** Fissato un numero reale $a > 0$, la scalatura trasforma il segnale $f(t)$ nel segnale $f(at)$.
 - Se $a > 1$, l'effetto che si ottiene è quello di una compressione lineare.
 - Se $a < 1$, l'effetto che si ottiene è quello di un allungamento o rilassamento lineare.
- **INVERSIONE:** Trasforma il segnale $f(t)$ nel segnale $f(-t)$, che rappresenta il segnale col tempo invertito.
 - Un segnale si dice **pari** se $f(t) = f(-t)$.
 - Un segnale si dice **dispari** se $f(t) = -f(-t)$.

SEGNALI CONTINUI

Uno dei segnali continui più importanti è il **gradino unitario** $u(t)$ definito come

$$\begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Importante è anche l'**impulso rettangolare unitario** o **finestra** $\text{rect}(t)$ definito da

$$\begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La finestra è molto importante perché ci permette, moltiplicandola ad un segnale, di analizzare solo una porzione di quel segnale.

Inoltre, possiamo ottenere un rettangolo di una certa base B ed una certa altezza A moltiplicando l'altezza alla funzione stessa (*ottenendo quindi 0 dove già prima era 0 e A dove prima valeva 1*) e dividendone l'argomento per la base (*in questo modo il rettangolo si crea da $-\frac{B}{2}$ a $+\frac{B}{2}$*).

Quindi, un rettangolo di base B e altezza A è ottenibile dalla funzione $A \text{ rect}(\frac{t}{B})$.

Se poi vogliamo traslare la finestra, ci basta aggiungere o sottrarre a t un certo tempo t_0 che rappresenti di quanto vogliamo traslare.

DELTA DI DIRAC E IMPULSO UNITARIO

La distribuzione (perché siamo nel mondo continuo) delta di Dirac $\delta(t)$ (ovviamente possiamo avere una qualsiasi variabile indipendente al posto di t) è definita come un rettangolo di base **infinitesima** Δ e di altezza **infinita** $\frac{1}{\Delta}$ (infinita appunto perché Δ è infinitesima), in modo che l'area sottostante sia pari a 1.

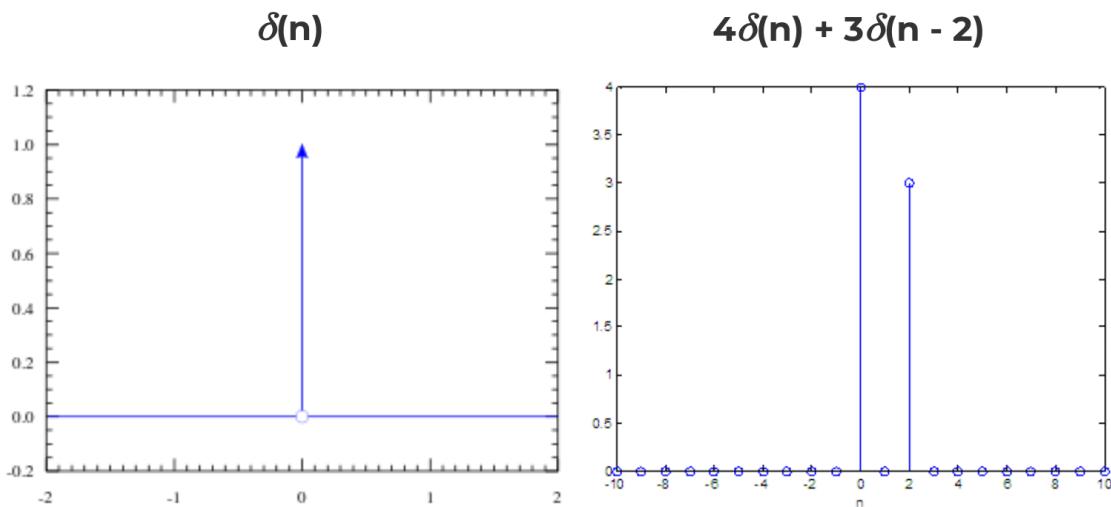
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Possiamo quindi pensare alla delta di Dirac come ad un rettangolo di base Δ e altezza $\frac{1}{\Delta}$ per Δ infinitesimale come segue: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$.

Il corrispondente della delta di Dirac nel mondo discreto è l'**impulso unitario** (o Delta di Kronecker) definita come $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$ e che viene rappresentata con una freccia verticale di altezza 1.

Ovviamente anche su questa funzione possiamo applicare delle trasformazioni, per esempio possiamo avere un impulso di ampiezza A che occorre ad un certo tempo n_0 scrivendo $A\delta(n - n_0)$, che si traduce nel moltiplicare l'ampiezza di A e ritardare la funzione di un tempo n_0 . Ricordando la definizione della **delta di Kronecker**, sappiamo che essa vale 1 quando l'argomento vale 0; essendo ora l'argomento $n - n_0$, esso varrà 0 solo quando $n = n_0$.

Notiamo che se scriviamo delle sequenze di δ , otteniamo diversi impulsi che sono molto importanti perché ci permettono di descrivere dei campioni.



PROPRIETÀ DELL'IMPULSO

- $x(n) * \delta(n) = x(0)$: Poiché la δ assume valore unitario solo quando $n = 0$, moltiplicando un segnale per $\delta(n)$, ottengo solo il suo valore in corrispondenza del campione $n = 0$ (*non a caso abbiamo definito la delta di Dirac come un rettangolo infinitesimale, è come se restringessimo la finestra con la quale osserviamo il segnale ad un solo campione*).
- $f(n) * \delta(n - n_0) = f(n_0)$: Stesso discorso di prima, ma con un ritardo pari ad n_0 .
- $u(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta(n - i)$: Se riconsideriamo ora il **gradino unitario** definito prima ma in un mondo discreto, è facile rendersi conto che esso è definibile come un *treno* di δ unitarie che parte dal campione $n = 0$. Questo ci permette anche di dire che $\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$.

SEQUENZE

Definiamo un segnale discretizzato come una sequenza $x(n)$. Le sequenze quantizzate in ampiezza formano un segnale digitale.

SEQUENZA CAUSALE: Una sequenza definita per $n \geq 0$. Non esistono campioni negativi per questo segnale. Solitamente i segnali fisici sono di questo tipo; possiamo misurare da *ora* per vedere cosa succederà in futuro, ma non posso sapere cosa è successo *prima* di iniziare a misurare.

SEQUENZA ANTICAUSALE: Una sequenza definita per $n < 0$. Non esistono campioni positivi per questo segnale.

SEQUENZA PARI: $x(n) = x(-n)$, proprio come le funzioni in ambito continuo.

SEQUENZA DISPARI: $x(n) = -x(-n)$, proprio come le funzioni in ambito continuo.

SEQUENZA PERIODICA: $x(n) = x(n + T)$, ovvero una sequenza è periodica quando si ripete dopo un certo periodo T .

SEQUENZA LIMITATA: $|x(n)| \leq X_0 < \infty \forall n$, ovvero quando la sequenza non ha valori che divergono.

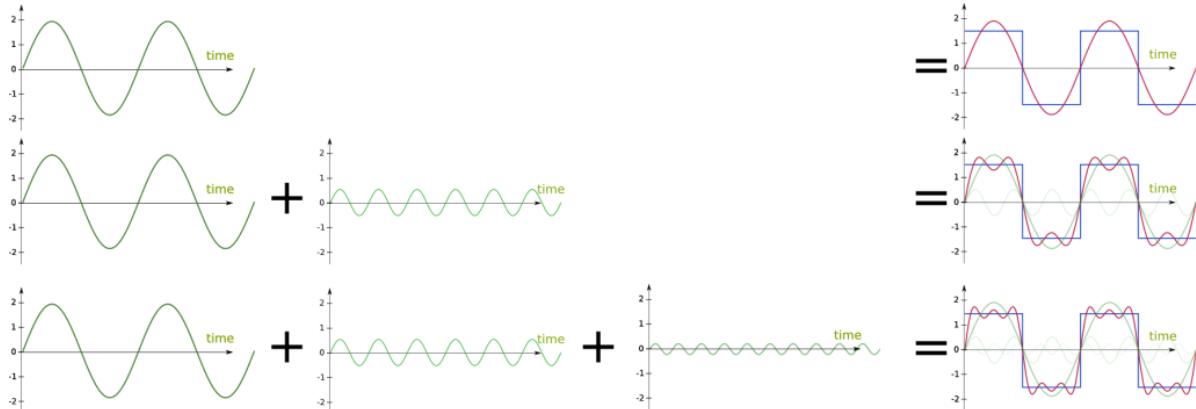
ANALISI DI FOURIER

L'analisi di Fourier di base richiede dei segnali *particolari*; richiede di avere in input dei segnali periodici e permette la loro decomposizione in **costituenti sinusoidali (funzioni armoniche)** di differenti **frequenze**.

Ci permette dunque di vedere il segnale non più nel dominio del tempo/spazio, ma nel dominio delle **frequenze**.

ATTENZIONE: L'analisi di Fourier ci permette di scomporre il segnale **senza modificarlo**; guardando il segnale da un'altra prospettiva (*quella delle frequenze*), non lo stiamo modificando!

Esempio per costruire una forma d'onda quadra:



L'ampiezza di ogni segnale sinusoidale ci dice **quanto è presente** quel segnale nel nostro segnale originario.

In generale, la sinusoide con la maggior ampiezza è quella con minor frequenza e viene anche chiamata **frequenza fondamentale**.

In generale, quando abbiamo un segnale che varia poco (*ad esempio una foto in cui prevale un certo colore*), l'analisi in frequenza ci restituirà delle frequenze basse.

SERIE DI FOURIER

Ricordando che gli argomenti di seno e coseno sono $2\pi f(x)$ e indicando il periodo del nostro segnale periodico con N , possiamo scrivere:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi \frac{k}{N} x) + b_k \sin(2\pi \frac{k}{N} x)$$

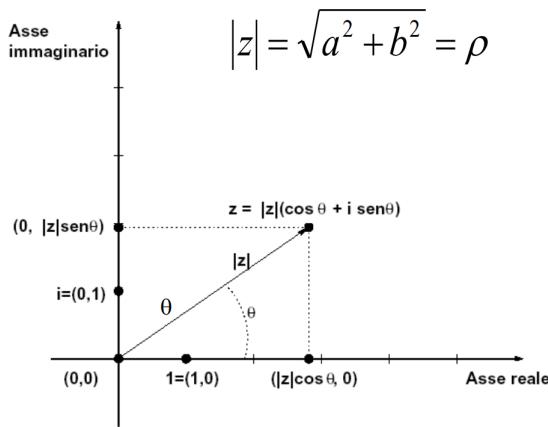
Dove:

- a_k e b_k sono dei *pesi* che applichiamo ai seni e coseni, in modo da modificarne l'**ampiezza**.
- $\frac{k}{N}$ sta ad indicare che modifichiamo le frequenze delle sinusoidi, in particolare questo ci dice che, per ottenere il nostro segnale originale, stiamo sommando delle sinusoidi con frequenze **multiple intere** (*per questo c'è una sommatoria e non un integrale*) di $\frac{1}{N}$ che è la **frequenza fondamentale** del nostro segnale (*ricordiamo che il periodo vale N , quindi la frequenza è $\frac{1}{N}$*).
- a_0 è semplicemente un termine che ci permette di traslare verso l'alto o verso il basso la nostra funzione. È importante notare che se aggiungiamo un termine costante alle nostre frequenze, e quindi le trasliamo, le frequenze stesse **non cambiano**.
- Notiamo che la sommatoria va da 1 a ∞ , ma questo non significa che tutti i segnali periodici contengono tutte le possibili frequenze sinusoidali; alcune di queste avranno i coefficienti a_k e b_k pari a 0.
- Stiamo praticamente dicendo che $f(x)$ è **combinazione lineare** (*o sovrapposizione degli effetti*) di funzioni di tipo seno e coseno pesate con i rispettivi coefficienti a_k e b_k .

Quello che poi otteniamo dall'analisi di Fourier è una serie di coppie frequenza / ampiezza che ci permettono di descrivere il segnale originale.

NUMERI COMPLESSI

Definiamo i numeri complessi come $z = a + ib$, dove b è la parte immaginaria.



Osservando il grafico definiamo le **coordinate polari**, che non sono altro che un altro modo di guardare i punti su un piano come: $a = \rho \cos(\Theta)$, $b = \rho \sin(\Theta)$ e $\Theta = \arctg(\frac{b}{a})$.

SPAZIO COMPLESSO

Passiamo adesso nello spazio complesso utilizzando le **formule di Eulero** che stabiliscono che
 $e^{i\Theta} = \cos(\Theta) + i \sin(\Theta)$
 $e^{-i\Theta} = \cos(\Theta) - i \sin(\Theta)$

Di conseguenza, possiamo riscrivere $\cos(\Theta)$ e $\sin(\Theta)$ come:

$$\cos(\Theta) = \frac{1}{2}(e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}) = \frac{1}{2}([\cos(\Theta) + i \sin(\Theta)] + [\cos(\Theta) - i \sin(\Theta)]) = \frac{1}{2}(2 \cos(\Theta))$$

$$\sin(\Theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}) = \frac{1}{2i}([\cos(\Theta) + i \sin(\Theta)] - [\cos(\Theta) - i \sin(\Theta)]) = \frac{1}{2i}(2i \sin(\Theta))$$

Riprendiamo ora la serie di Fourier e notiamo che è definita come una somma di coseni e seni;

Possiamo quindi riscriverla come $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k e^{j(2\pi f_k x)}$

Notiamo che ora la sommatoria va da $-\infty$ a $+\infty$ perché abbiamo introdotto dei termini con l'esponente negativo e dei termini con l'esponente positivo, perché abbiamo introdotto anche le frequenze negative.

Possiamo leggere la nuova formula semplificata come: *Una qualunque funzione periodica $f(x)$ può essere espressa come somma di infiniti termini di tipo esponenziali complessi, con frequenze (dell'esponenziale complesso) multiple intere di una frequenza fondamentale e pesante da un coefficiente R_k .*

Dove R_k è il peso con il quale la componente (ovvero della frequenza) k -sima "entra in gioco" nel descrivere la nostra $f(x)$.

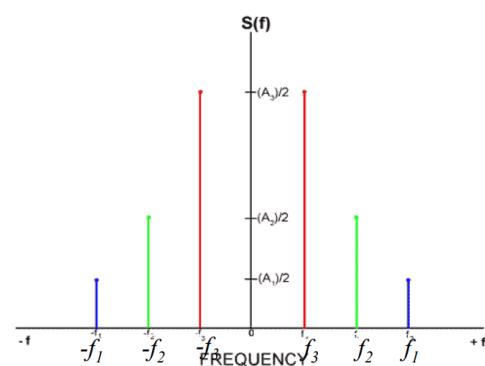
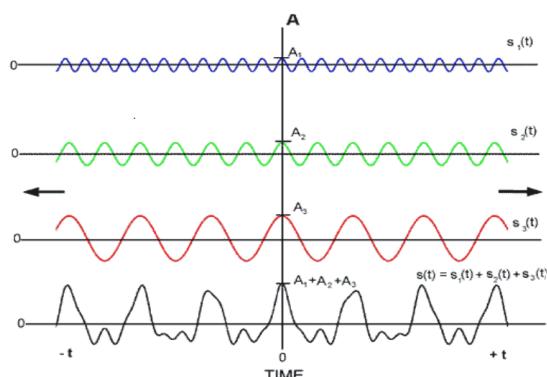
Notiamo che abbiamo ancora una combinazione lineare, non più di seni e coseni ma di esponenziali complessi.

Considerando l'equazione di prima possiamo quindi scrivere $R_k = \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} f(x) e^{-j(2\pi f_k x)} dx$.

Notiamo che stiamo integrando questa volta; questo perché stiamo considerando $f(x)$, che è definita su una variabile *continua* x .

In particolare, questa formula sta *proiettando* la nostra funzione $f(x)$ in uno spazio i cui versori sono gli esponenziali complessi; stiamo quindi proiettando la funzione $f(x)$ lungo dei versori a cui corrispondono delle frequenze f_k , ovvero stiamo proiettando $f(x)$ lungo ciascuna frequenza f_k .

In questo modo passiamo da una rappresentazione nel tempo del segnale ad una rappresentazione nello spazio delle frequenze.



I due domini sono ovviamente corrispondenti; notiamo che nel dominio delle frequenze abbiamo delle δ che hanno una certa ampiezza A , che ci dice quanto il segnale rappresentato da quella δ influenza sulla creazione del segnale originario. Se prendiamo ogni frequenza individuata nel dominio delle frequenze e le combiniamo linearmente con i vari pesi A , otterremo il segnale di partenza. C'è quindi una **corrispondenza biunivoca** tra di essi.

TRASFORMATA DI FOURIER (FT)

Tutto quello che abbiamo detto fino ad ora si applica solo alle funzioni periodiche, il che ci limita non poco considerando che in natura non esistono dei veri fenomeni periodici, quindi dobbiamo generalizzare quanto detto.

Introduciamo quindi la **trasformata di Fourier**, che stabilisce che ogni funzione continua $f(x)$, **anche non periodica** (purché abbia area finita, ovvero a patto che l'integrale della funzione su tutto il suo dominio sia finito), può essere espressa come **integrale di sinusoidi complesse** (o esponenziali complessi) opportunamente pesate.

ANTI TRASFORMATA DI FOURIER (Dominio spaziale/temporale o dominio diretto)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du \quad \text{dove } F(u) \text{ è il peso con il quale la frequenza } u \text{ "entra in gioco".}$$

Notiamo subito che, a differenza della formula della serie di Fourier, questa usa un integrale, poiché siamo passati da una variabile discreta k ad una frequenza u che assume infiniti valori continui.

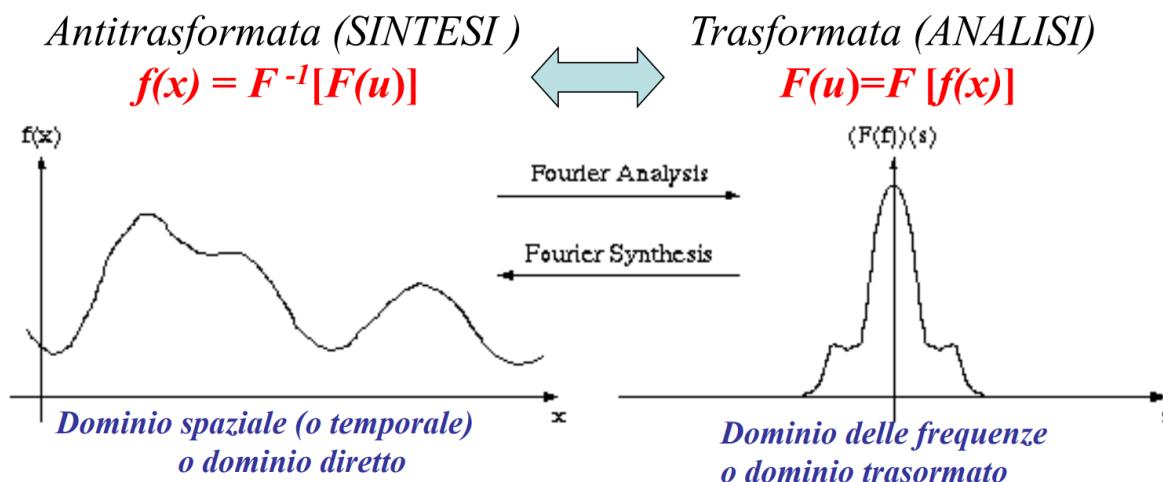
Essendo la variabile u continua, $F(u)$, che assegna ad ogni frequenza un peso, è essa stessa una funzione continua.

TRASFORMATA DI FOURIER (Dominio delle frequenze o dominio trasformato)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

Qui la formula è esattamente come prima, essendo x ancora una variabile continua.

La differenza è che prima avevamo una grandezza R_k discreta e quindi ottenevamo, nel dominio trasformato, delle δ , mentre in questo caso otteniamo una funzione continua. Ovviamente anche in questo caso **non c'è perdita di informazione** tra un dominio e l'altro.



TRASFORMATA DI FOURIER 1D

Quando applichiamo la trasformata di Fourier ad un segnale $f(x)$, otteniamo un segnale composto da un **modulo** (*spettro, componente di intensità*) e da una **fase** (*componente spaziale*), che corrispondono quindi alla parte reale e alla parte immaginaria del mondo complesso della trasformata.

In coordinare polari avremo quindi:

$$F(u) = \mathbf{F}[f(x)] = \Re(u) + j\Im(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$$

SPETTRO: $|F(u)| = \sqrt{[\Re(u)^2 + \Im(u)^2]}$

FASE: $\phi(u) = \arctan\left[\frac{\Im(u)}{\Re(u)}\right]$

POTENZA (DENSITÀ SPETTRALE): $|F(u)|^2 = \Re(u)^2 + \Im(u)^2$

TRASFORMATA DI FOURIER 2D

TRASFORMATA: $F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$

ANTI TRASFORMATA: $f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$

SPETTRO: $|F(u, v)| = \sqrt{[\Re(u, v)^2 + \Im(u, v)^2]}$

FASE: $\phi(u, v) = \arctan\left[\frac{\Im(u, v)}{\Re(u, v)}\right]$

POTENZA (DENSITÀ SPETTRALE): $|F(u, v)|^2 = \Re(u, v)^2 + \Im(u, v)^2$

Notiamo che avendo due dimensioni nel dominio di partenza, ne avremo due anche in quello trasformato; avremo infatti degli esponenziali complessi con una componente in frequenza in una direzione e una nell'altra.

In particolare quindi possiamo dire che quello che facciamo in una dimensione si replica in maniera identica nell'altra; difatti potremo, invece che fare un'operazione bidimensionale, fare due volte la stessa operazione su ogni dimensione. Questa è una proprietà della trasformata di Fourier che prende il nome di proprietà di separabilità, ma la vedremo in seguito.

DISCRETE TIME FOURIER TRANSFORM (DTFT)

Consideriamo ora una funzione discreta (*campionata*), spostiamoci quindi dal mondo continuo a quello discreto.

Un primo cambiamento causato da questo spostamento è che $f(x)$ (dove x è **continua**) diventa $f(i)$ con i **discreta** che rappresenta una quantità $i * \Delta x$, dove Δx è il **passo di campionamento**.

Ciò implica anche che la trasformata di Fourier diventi $F(u) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)e^{-j2\pi ui\Delta x}$

ATTENZIONE: $F(u)$ è ancora continua poiché la variabile u che rappresenta le infinite possibili frequenze non è cambiata ed è ancora continua!

LIMITE SPAZIALE

Consideriamo ora una funzione discreta (*campionata*) e **limitata spazialmente**, ovvero una funzione che precede il processo di quantizzazione, campionata su un numero limitato di campioni pari ad N con un passo $\Delta x = \frac{1}{N}$.

Avremo quindi $f(i) = f(x_0 + i * \Delta x) \quad \forall i \in 0, \dots, N - 1$

Cosa ci cambia questo nella formula precedente quindi?

Cambia il fatto che ora la nostra sommatoria non andrà più da $-\infty$ a $+\infty$, poiché i nostri campioni sono limitati all'intervallo $[1, N]$.

La nostra formula diventa quindi $F(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(i)e^{-j2\pi u \frac{1}{N} i}$

Il $\frac{1}{N}$ davanti alla sommatoria è un **termine di normalizzazione**.

$F(u)$ è **ancora continua**.

CONSEGUENZE

C'è una grande conseguenza legata alla discretizzazione e alla considerazione di un numero finito di campioni della nostra funzione iniziale; la trasformata di Fourier di questo segnale non sarà più come prima, ma diverrà una **funzione periodica** con un periodo pari ad N (N.B. è ancora una *funzione continua*).

Questo risulta chiaro anche dalla proprietà di **biunivocità** tra trasformata e anti trasformata; è chiaro che **non potrò avere**, come risultato della funzione campionata su un numero finito di campioni, **lo stesso risultato** che otterrei con la funzione non campionata, altrimenti crollerebbe l'assunzione della biunivocità visto che il segnale continuo ed il segnale discretizzato sono **diversi**.

DIMOSTRAZIONE

$$F(u + N) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}(u+N)i} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}ui} e^{-j2\pi i}$$

Ora se consideriamo $e^{-j2\pi i}$ come $\cos(2\pi i) - j \sin(2\pi i)$, e, considerando che $\cos(2\pi i)$ vale sempre 1, mentre $\sin(2\pi i)$ vale sempre 0, possiamo dire che $e^{-j2\pi i} = 1$.

Di conseguenza possiamo scrivere che $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}ui} e^{-j2\pi i} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}ui} = F(u)$

TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA (DFT)

A questo punto, essendo diventata la nostra trasformata periodica, dovremo campionare anche la parte in frequenze, passando quindi ora da una funzione $F(u)$ continua ad una **discreta**.

$$\text{La nostra anti trasformata diverrà quindi } f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j \frac{2\pi}{M} ux} \quad x \in 0, \dots, M-1$$

Una conseguenza importante è che, come nel caso della funzione $f(i)$ discretizzata, quando andremo a anti trasformare la nostra funzione $F(u)$ ora discreta, creeremo una $f(x)$ periodica, per il dualismo fra spazio diretto e spazio trasformato.

PROPRIETÀ DFT

- **PROPRIETÀ 1: LINEARITÀ** (*vale anche per FT e DTFT*):

La trasformata di Fourier è un **operatore lineare**, il che significa che:

- Applicare la trasformata su una somma di funzioni equivale a sommare le singole trasformate delle due funzioni.

$$F(f(x) + g(x)) = F(f(x)) + F(g(x)) = F(u) + G(u)$$

- Applicare la trasformata ad una funzione moltiplicata per una costante A equivale a moltiplicare tale costante alla trasformata della funzione stessa.

$$F(Af(x)) = AF(f(x)) = AF(u)$$

Questo ci permette, nel caso avessimo un problema complesso, di lavorare su dei suoi sotto-problemi più semplici applicando la trasformata ad essi e poi tornare al problema complesso solo alla fine.

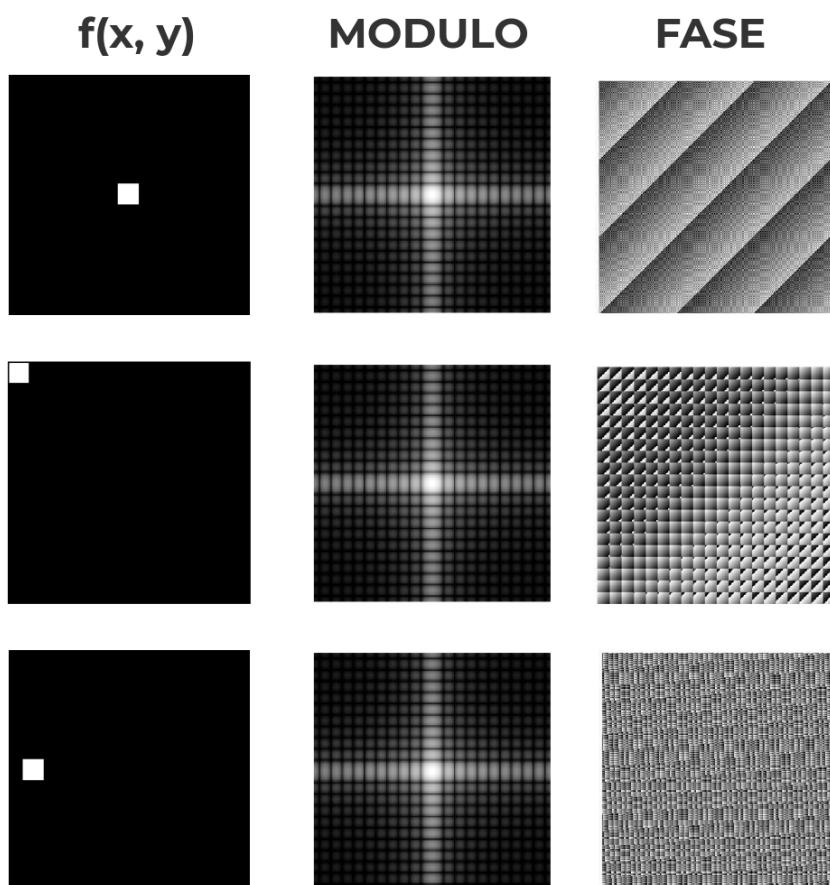
- **PROPRIETÀ 2: TRASLAZIONE NELLO SPAZIO/TEMPO** (*vale anche per FT e DTFT*):

Quando effettuiamo una traslazione sulla funzione $f(x + x_0)$, questo equivale, nel mondo trasformato, ad una **modulazione in frequenza**, che si traduce nel moltiplicare la trasformata della funzione di partenza non traslata $f(x)$ per un esponenziale $e^{j2\pi ux_0}$ nel quale viene espressa questa traslazione.

$$F(f(x + x_0)) = e^{j2\pi ux_0} F(u) \quad \text{con } F(u) = F(f(x))$$

Questo ci conferma che se, ad esempio, abbiamo un'immagine di un oggetto su uno sfondo, quando lo trasliamo il modulo della sua trasformata $F(u)$ non cambia, ma cambia la fase.

Osserviamo un esempio: notiamo che nonostante il quadratino bianco **trasli** sullo sfondo nero, il modulo dell'immagine non cambia, mentre cambia la *fase*.



- **PROPRIETÀ 3: TRASLAZIONE NELLE FREQUENZE:**

Ricordiamoci che le formule della trasformata e dell'anti-trasformata sono identiche a meno del segno dell'esponente.

Questo ha una grossa conseguenza sui nostri segnali e sulle loro proprietà; certe proprietà che troviamo nel dominio di partenza le ritroviamo anche nel dominio di arrivo.

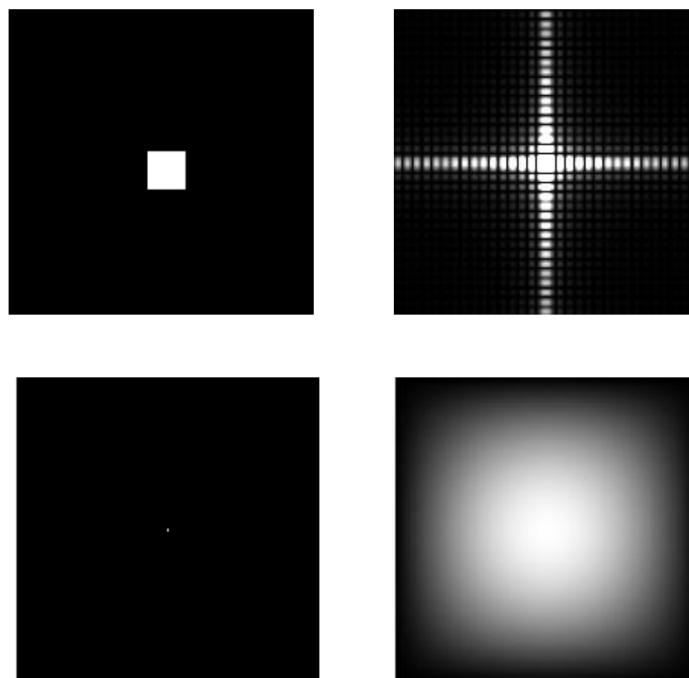
Questo significa che se abbiamo una traslazione nelle frequenze questa volta, ciò si traduce in una **modulazione nello spazio** con un esponenziale complesso.

$$F^{-1}(F(u + \omega)) = f(x)e^{-j2\pi x\omega}$$

- **PROPRIETÀ 4: SCALA** (*vale anche per FT e DTFT*):

Se applichiamo un fattore di scala alla nostra funzione nel dominio di partenza, la funzione trasformata subisce lo stesso scaling, ma inverso.

$$F(f(ax)) = \frac{1}{|\alpha|} F(\frac{u}{\alpha})$$



- **PROPRIETÀ 5: INVERSIONE** (*vale anche per FT e DTFT*):

Se inverto il segnale di partenza $f(x)$, anche la trasformata risulterà invertita.

$$F(f(-x)) = F(-u)$$

- **PROPRIETÀ 6: SIMMETRIA** (*vale anche per FT e DTFT*):

La trasformata gode della **simmetria Hermitiana**: questo significa che:

- La parte **reale** e il **modulo** sono **simmetrici rispetto all'origine**.
- La parte **immaginaria** e la **fase** sono **antisimmetriche rispetto all'origine**.

Questo non dovrebbe sorprendere in quanto l'esponenziale complesso che utilizziamo nella trasformata di Fourier è fatto da una parte reale, definita da un **coseno** (*pari*) e da una parte immaginaria, definita da un **seno** (*dispari*).

Facendo il modulo inoltre portiamo tutto ad essere pari, visto che rendiamo tutto positivo, mentre nella fase prevale l'asimmetria dispari del seno.

- **PROPRIETÀ 7: PERIODICITÀ DELLA DFT** (*Vale anche per DTFT*):

Abbiamo visto come la discretizzazione della funzione iniziale introduca una periodicità; ovviamente quindi questa proprietà non si applica alla trasformata continua.

La proprietà ci dice che quando campioniamo una funzione con un passo di campionamento pari a $\frac{1}{M}$, la sua trasformata diventa **periodica** e, in particolare, il suo periodo vale M , ovvero l'inverso del passo di campionamento.

- **PROPRIETÀ 7B: PERIODICITÀ DTF⁻¹** (*vale solo per DFT*):

Per via della simmetria presente tra trasformata e anti-trasformata, quando andiamo ad applicare l'anti-trasformata su un segnale trasformato **campionato** (*ricordiamoci che noi lavoriamo nel mondo digitale*), introduciamo una periodicità questa volta nel **dominio iniziale**.

- **PROPRIETÀ 8:**

Diversamente dal caso continuo, la **DFT** e **DTF⁻¹** esiste sempre, qualunque sia la funzione considerata.

- **PROPRIETÀ 9: SEPARABILITÀ** (*Vale anche per FT e DTFT*):

Questa è una proprietà molto importante quando la **dimensione** del nostro segnale cresce e abbiamo quindi più coppie di variabili nel nostro esponenziale complesso.

Questo ci permette, grazie alle proprietà degli esponenziali, di suddividere queste coppie nel prodotto di più esponenziali; ovvero effettuare la trasformata di Fourier su un segnale a più dimensioni applicando la singola trasformata su ogni dimensione in successione.

Passiamo quindi da $f(x, y)$, nel dominio di partenza, a $F(x, v)$, dove solo y è stata trasformata, a $F(u, v)$ dove è stata trasformata anche la variabile x .

In termini computazionali passiamo da un fattore n^2 ad uno $2n$.

$$F(u, v) = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M})} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \left(\frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{vy}{M})} \right) e^{-j2\pi(\frac{ux}{N})}$$

- **PROPRIETÀ 10: REVERSIBILITÀ** (*Vale anche per FT e DTFT*):

Questa proprietà ci dice che la trasformata non modifica in alcun modo il segnale di partenza ed è sempre possibile spostarsi da un mondo all'altro senza alcuna perdita di dati.

$$F^{-1}F(f(x, y)) = f(x, y)$$

- **PROPRIETÀ 11: VALOR MEDIO** (*Vale anche per DTFT*):

Questa proprietà ci ribadisce un concetto che abbiamo già visto: il valor medio di una funzione $f(x)$ rappresenta la sua frequenza fondamentale $F(0)$.

$$F(0) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)$$

ALCUNE OSSERVAZIONI

Abbiamo detto che, data la formula $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$,

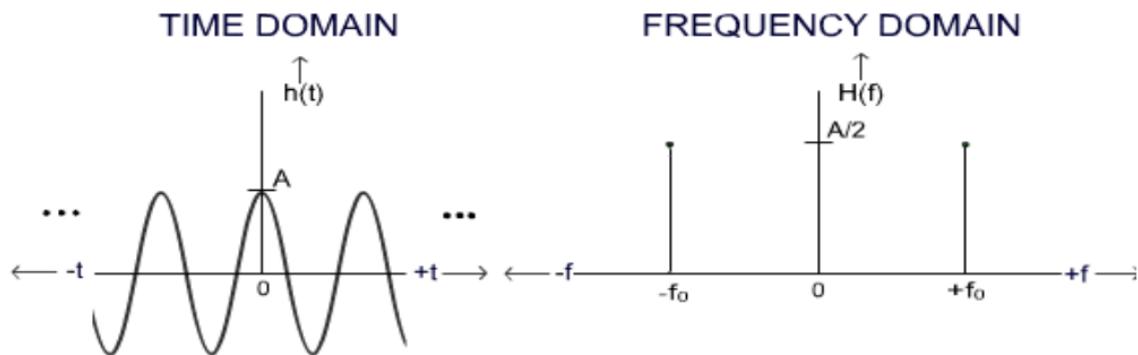
$F(u_0)$ rappresenta il **peso** con cui l'**onda complessa** $e^{-j2\pi u_0 x}$ di **frequenza** u_0 concorre per formare il segnale $f(x)$.

Cosa succede però se $f(x) = Ae^{j2\pi u_k x}$, ovvero se $f(x)$ è un'onda complessa di frequenza u_k ? Innanzitutto questo significa che il nostro segnale è composto da **un'unica frequenza**, ovvero u_k . La sua trasformata $F(u)$ sarà zero per ogni frequenza diversa da u_k , mentre in corrispondenza di u_k presenterà una **delta** di altezza A , ovvero $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{j2\pi u_k x} e^{-j2\pi ux} dx = A\delta(u - u_k)$.

Consideriamo ora la formula di Eulero $\cos(\Theta) = \frac{1}{2}(e^{j\Theta} + e^{-j\Theta})$, se $f(x) = A \cos(2\pi u_0 x)$, la sua trasformata sarà:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi u_0 x) e^{-j2\pi ux} dx = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{j2\pi u_0 x} + e^{-j2\pi u_0 x}) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$F(u) = \frac{A}{2} \delta(u - u_0) + \frac{A}{2} \delta(u + u_0)$$



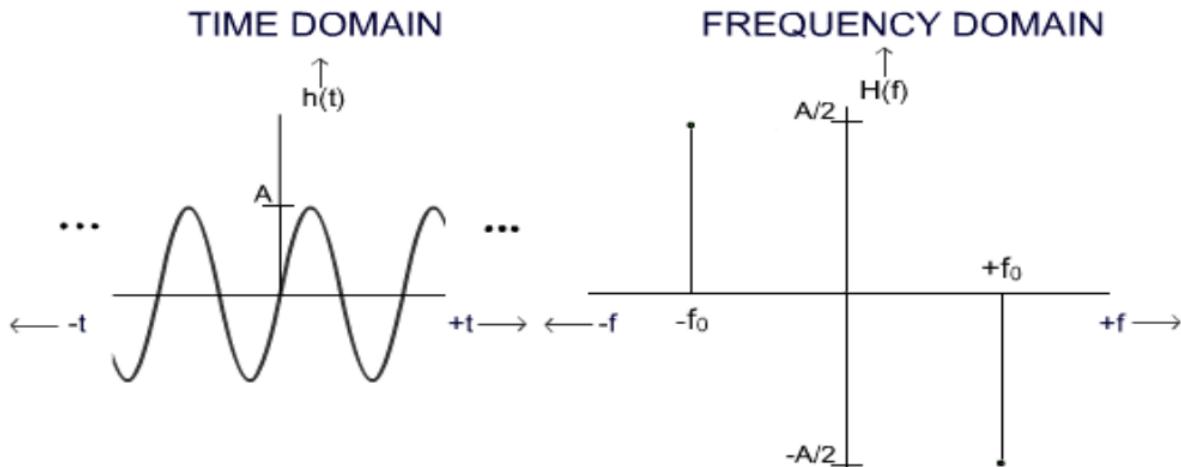
Quindi, la trasformata di un coseno corrisponde a due delta in corrispondenza della sua frequenza positiva e negativa. Questo risulta chiaro se applichiamo la proprietà di linearità; il coseno non è altro che una combinazione lineare di onde complesse come possiamo vedere anche sopra, quindi possiamo ottenere il risultato della trasformata anche combinando linearmente i risultati dei singoli esponenziali complessi.

Notiamo inoltre che la trasformata del coseno ha solo una parte reale.

Se avessimo considerato il seno, sarebbero intervenuti innanzitutto un cambio di segno e poi una parte immaginaria, difatti $\sin(\Theta) = -\frac{j}{2}(e^{j\Theta} - e^{-j\Theta})$.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \sin(2\pi u_0 x) e^{-j2\pi ux} dx = -j\frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{j2\pi u_0 x} - e^{-j2\pi u_0 x}) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$F(u) = -j\frac{A}{2}\delta(u - u_0) + j\frac{A}{2}\delta(u + u_0)$$



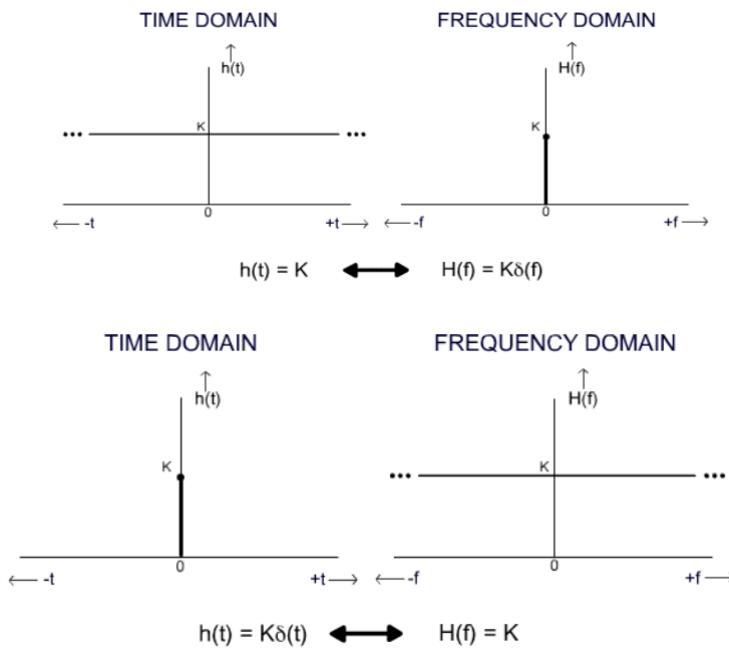
Notiamo che il cambio di segno ci porta ad una delta negativa. Inoltre, ora la trasformata ha soltato una parte immaginaria.

Se invece $f(x)$ fosse una costante $x = K$?

Possiamo vedere la costante come un coseno a frequenza 0; questo comporta che nel dominio trasformato le due delta del coseno convergano a 0 dove eventualmente si sovrappongono e creano un'unica delta alta K .

E se $f(x)$ fosse una delta centrata in zero?

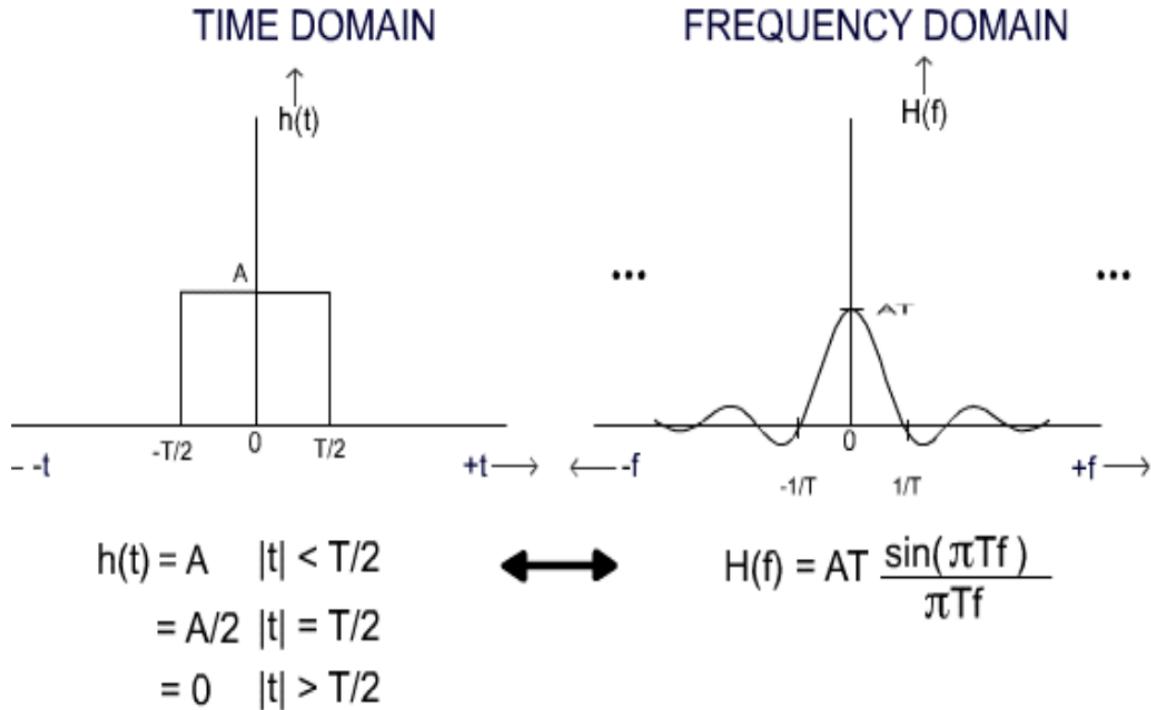
Applicando la proprietà della reversibilità, otteniamo che la trasformata di una delta centrata in 0 corrisponde ad una costante. Questo risulta chiaro anche considerando che un cambio istantaneo di valori (es. da 0 a 1) comporta la presenza di **tutte** le possibili frequenze dentro di esso.



SINC

La trasformata di una finestra è una funzione molto importante e si chiama **Sinc** ed è definita come $H(f) = AT \frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}$.

È una funzione che ha valore massimo in 0, mentre lontano dallo 0 oscilla.



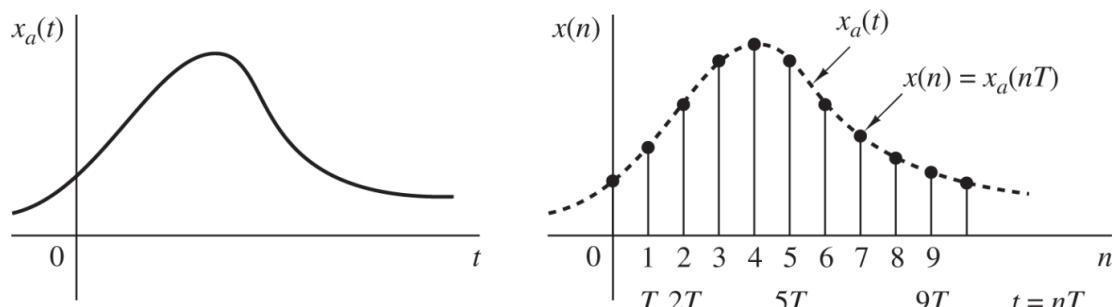
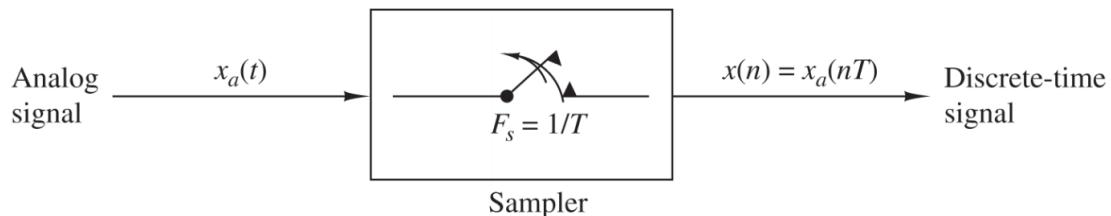
Notiamo subito che la prima oscillazione avviene a $\frac{1}{T}$, dove T è la grandezza della nostra finestra; più è larga la nostra finestra, più se restringe il Sinc (*proprietà scala*).

Questo significa che se consideriamo una finestra infinita, ovvero una costante, la Sinc oscillatorà subito, creando una delta, come abbiamo visto prima.

CAMPIONAMENTO

Un **campionatore** è un "interruttore" che si apre e si chiude con una certa frequenza $\frac{1}{T}$ e ogni volta che si chiude legge il valore del segnale in quel istante di tempo per quel determinato campione.

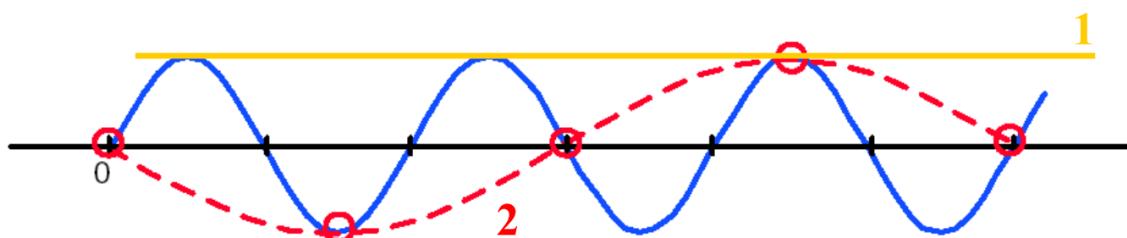
Notiamo che indichiamo il segnale con x_a e con (t) quando siamo ancora nel dominio continuo, mentre indichiamo con (n) il segnale campionato, proprio per ricordarci che stiamo trattando un segnale che varia nei campioni (*interi*) e non più nel tempo (*continuo*).



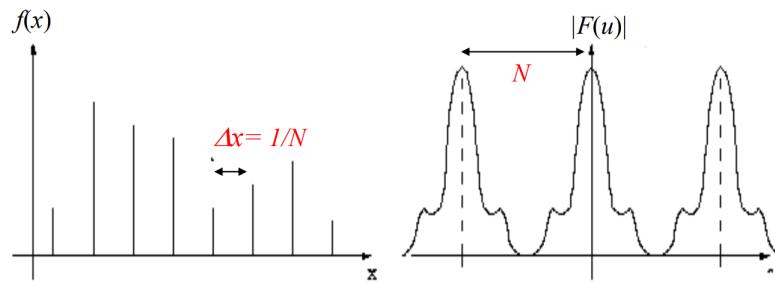
Qual è quindi il passo di campionamento adatto per non perdere troppe informazioni del segnale originario?

Sappiamo che

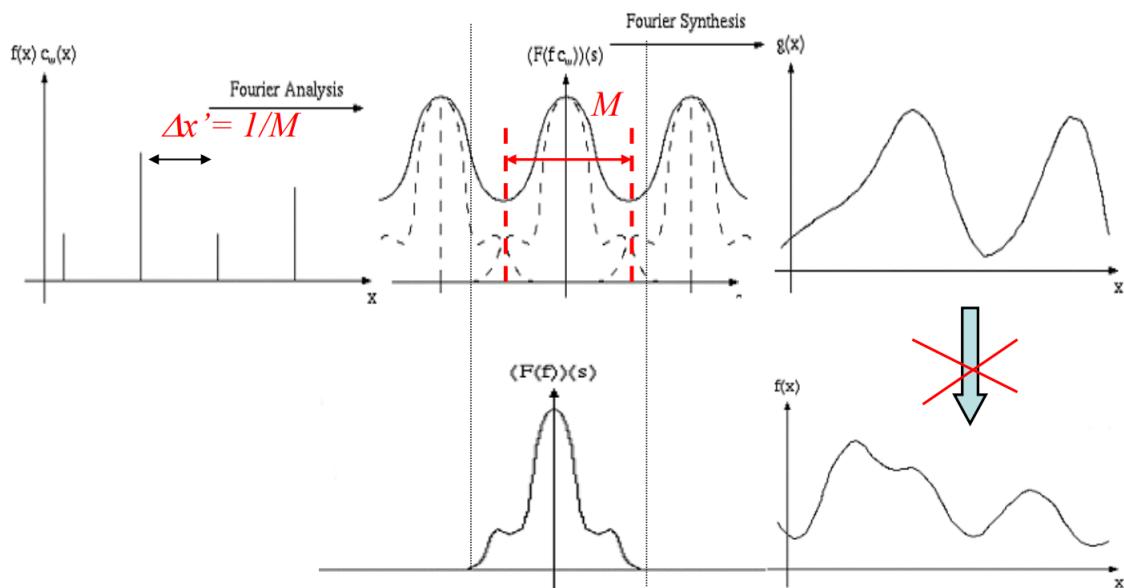
- Un'alta frequenza di campionamento significa una buona riproduzione del segnale, a costo però di volumi di dati più elevati.
- Una bassa frequenza di campionamento può produrre fenomeni di **aliasing**: il segnale originario (*segnale blu*) viene interpretato come un segnale a frequenza minore (*segnale 2, rosso*) o addirittura come una costante (*segnale 1, giallo*).



Abbiamo visto che, quando campioniamo una funzione con un passo $\Delta x = \frac{1}{N}$, la sua trasformata è uno **spettro periodico** che ha periodo = N .



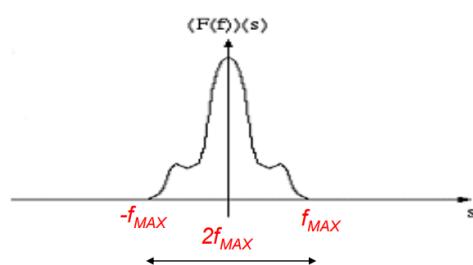
È chiaro dunque che il passo di campionamento che utilizziamo ha una certa importanza; se il passo di campionamento è **tropppo alto** (*bassa frequenza di campionamento*), le repliche dello spettro finiranno per sovrapporsi per via del **periodo più breve** (*passo di campionamento e periodo sono inversamente proporzionali*) e non sarà più possibile risalire al segnale di partenza poiché le frequenze più alte si 'mescolano' con quelle delle altre repliche, andando a finire nella parte delle frequenze più basse (*proprio come abbiamo osservato prima col segnale rosso*).



TEOREMA DI SHANNON

Abbiamo quindi visto che la frequenza di campionamento *controlla* la possibilità di ricostruire o meno il segnale originale, ma qual è allora la frequenza minima che lo permette?

Il teorema di Shannon dice che, data la frequenza massima del segnale f_{max} (*o frequenza di Nyquist*), la frequenza di campionamento deve essere $F_s = \frac{1}{\Delta x} > 2f_{max}$. Questo risulta chiaro perché se non vogliamo sovrapposizioni, dobbiamo coprire tutta l'area del segnale trasformato che va quindi da $-f_{max}$ a $+f_{max}$.



Quindi, più è grande la frequenza massima, tanto più piccolo è il passo di campionamento.
Ma se la frequenza massima è troppo alta (*o perché tendente ad infinito o perché troppo alta per le nostre risorse?*)?

Un primo approccio potrebbe essere quello di campionare con la massima frequenza di campionamento disponibile, pur rischiando di avere delle sovrapposizioni, introducendo del rumore che però non è sotto il nostro controllo (*aliasing*).

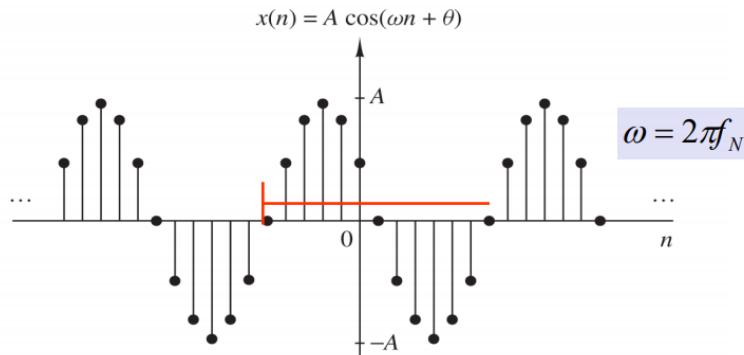
Un'alternativa è un preventivo filtraggio passabasso, in modo da limitare la frequenza massima e permettere una frequenza di campionamento minore, soluzione che generalmente viene scelta poiché in natura i segnali non sono solitamente limitati in frequenze, ma solo nel tempo/spazio.

ALIASING

Se il campionamento avviene con una frequenza inferiore a quella di Nyquist, c'è '*equivocazione*' del segnale; il segnale originale non è più ricostruibile ed il risultato è un segnale a frequenza più bassa.

SEGNALE SINUSOIDALE A TEMPO DISCRETO

Quando campioniamo un segnale, la variabile tempo/spazio non è più esplicita e, senza informazioni su di essa, quindi senza sapere la **frequenza di campionamento**, il segnale trasformato potrebbe essere stato generato da potenzialmente infiniti segnali originari per via dell'effetto dell'aliasing.



Sappiamo che, nel dominio continuo, misuriamo un segnale in Hz, più specificamente in **cicli/secondo**, tuttavia quando discretizziamo il nostro segnale è sempre misurato in Hz, ma questa volta si tratta di **cicli/campione**, poiché passiamo dalla variabile continua tempo ai campioni.

Un'altra frequenza che indichiamo con gli Hz è la frequenza di campionamento, che a sua volta significa **campioni/secondo**.

Quindi ricapitolando:

- Segnale analogico nel tempo: **cicli/secondo**
- Segnale discretizzato: **cicli/campione**
- Frequenza di campionamento: **campioni/secondo**

Quindi, la f_N (**frequenza normalizzata**) del grafico è l'equivalente della frequenza *cicli/secondo* del segnale analogico, ma non essendo più esplicita la variabile temporale nel mondo discreto, questa viene letta come *cicli/campione*. In particolare, possiamo osservare nel grafico che un ciclo viene effettuato in 12 campioni (*l'ultimo non viene contato poiché è uguale al primo*), quindi $f_N = \frac{1}{12}$.

Sapendo il valore della f_N , sappiamo anche che la pulsazione del segnale è $\omega = 2\pi \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Sapendo inoltre che il segnale originale è un coseno, possiamo notare che è sfasato di due campioni; quindi lo sfasamento Θ era $2\pi : 12 = \Theta : 2 \implies \Theta = \frac{\pi}{3}$ poiché un intero ciclo equivale a 2π e siamo interessati a sapere quanto di π ricoprono 2 campioni.

Supponiamo ora di conoscere la frequenza di campionamento $f_c = 1 \text{ campione/sec}$.

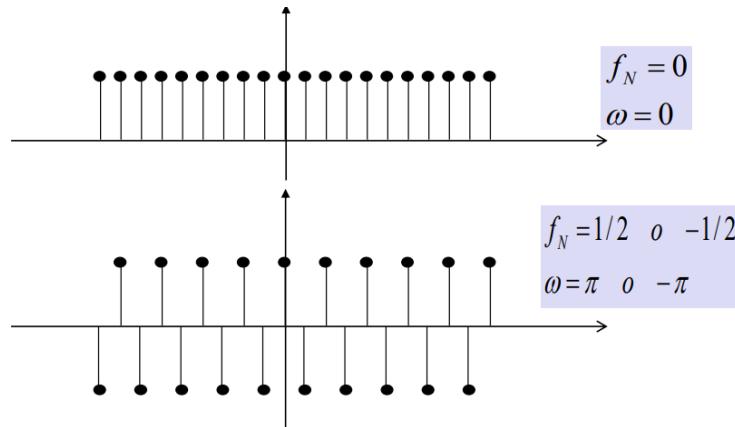
La frequenza del segnale originale sarà allora

$$f = f_c * f_N = 1 \text{ campione/sec} * 1/12 \text{ ciclo/campione.}$$

Questo risulta chiaro se consideriamo le unità di misura: il risultato dell'operazione fatta avrà come unità *ciclo/sec*.

Notiamo che la frequenza minima di una sinusoide a tempo discreto è zero e corrisponde ad una costante, mentre la frequenza massima è $1/2$, ovvero ad un ciclo ogni 2 campioni.

Quindi, in termini di frequenze normalizzate, un segnale sinusoidale discreto può assumere frequenze che variano da $-1/2$ a $1/2$. Se f_N esce da questo intervallo, abbiamo, nuovamente, un effetto di aliasing.



PROPRIETÀ SINGOLARI SINUSOIDALI A TEMPO DISCRETO

- **PROPRIETÀ 1:** Segnali sinusoidali a tempo discreto con pulsazioni separate da multipli di 2π sono identici.

$$\cos((\omega + k2\pi)n + \Theta) = \cos(\omega n + \Theta) \implies \cos(\omega n + kn2\pi + \Theta) = \cos(\omega n + \Theta)$$

Ricordiamo che $\cos(k2\pi)$ è sempre 1, ovvero il coseno traslato di un multiplo di 2π equivale al coseno non traslato.

- **PROPRIETÀ 2:** Il segnale è periodico solo se la sua frequenza f è un numero razionale.

Imponiamo la periodicità al nostro segnale di partenza: $x(n+N) = x(n)$

Sostituiamo col coseno: $\cos(2\pi f(n+N) + \Theta) = \cos(2\pi fn + \Theta)$

Affinché l'equazione di sopra sia soddisfatta dobbiamo avere $2\pi fN = 2\pi k$, ovvero $f = \frac{k}{N}$.

CONVOLUZIONE

La convoluzione è un operatore che descrive tutti i filtri di tipo lineare.

Rappresenta l'applicazione ad una funzione f di una funzione g chiamata *filtro* (o *filter kernel*).

Osserviamo la formula:
$$g * f = \int_{s=-\infty}^{\infty} g(x-s)f(s) ds$$

Notiamo che è una somma e che la funzione g è stata ribaltata (*difatti il suo argomento è $-s$*) e traslata di x (*che il punto nel quale stiamo calcolando il valore*).

La funzione g viene poi fatta traslare da $-\infty$ a $+\infty$ e per ogni traslazione si calcola il prodotto tra il segnale traslato e quello non traslato, infine si calcola l'area di tale prodotto.

Nel mondo discreto la convoluzione è definita come
$$g(x) = \sum_m f(m)h(x-m).$$

TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE

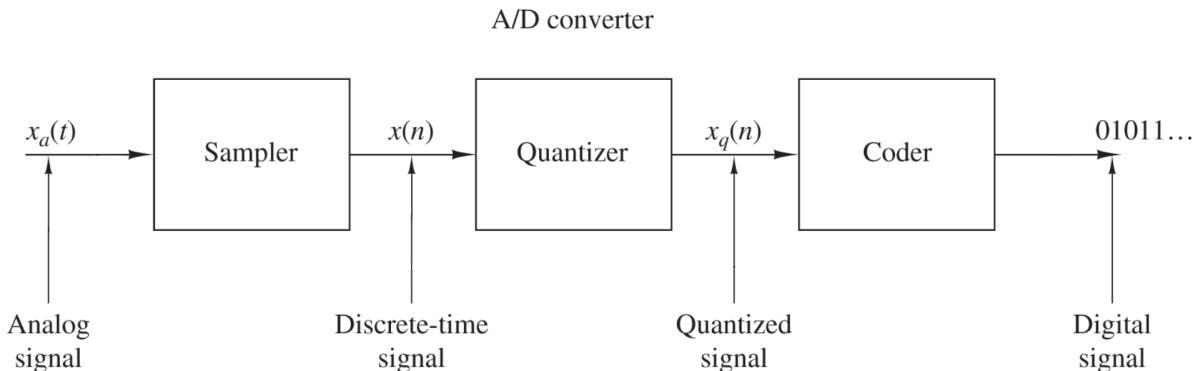
La trasformata della convoluzione di due funzioni è il prodotto delle trasformate delle due funzioni.

$$G(u) = F[g(x)] = F[f(x) * h(x)] = F(u)H(u).$$

Questo implica che ogni volta che osserviamo un segnale in una certa finestra, lo stiamo quindi moltiplicando per una funzione rettangolo, la trasformata che osserviamo è la trasformata del segnale originario **convoluta** con la trasformata della finestra (*il Sinc*).

QUANTIZZAZIONE

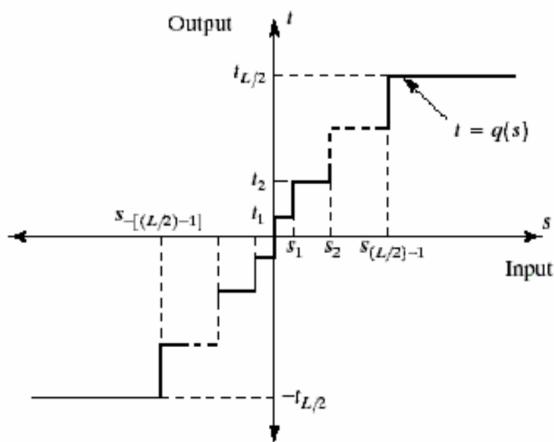
Ricordiamo la pipeline che segue il segnale per essere convertito da analogico a digitale.



- **CAMPIONAMENTO:** genera, a partire da un segnale analogico $x_a(t)$, un segnale a tempo discreto.
I segnali a tempo discreto possono essere riconvertiti in segnali analogici attraverso un'operazione detta **interpolazione**.
- **QUANTIZZAZIONE:** i segnali a tempo discreto sono convertiti in segnali a tempo e a valore discreti.
Ciascuno di questi valori appartiene ad un **set limitato** di possibili valori (*livelli*) ed il segnale è detto **digitale**.
- **CODIFICA:** ciascun valore quantizzato viene espresso attraverso una sequenza di b bit.

La quantizzazione quindi è un'operazione che esprime un campione reale, che quindi avrebbe bisogno di un numero infinito di bit per essere completamente rappresentato, su un **numero finito** di bit detto **risoluzione**.

A differenza del campionamento, che abbiamo visto essere un'operazione reversibile a patto di rispettare il teorema di Shanon, la quantizzazione introduce **sempre** un errore non recuperabile, quindi è un processo irreversibile.



La quantizzazione è un processo di discretizzazione di ampiezza ed il quantizzatore viene rappresentato da una curva a gradini (*non lineare*) che associa a tutti i valori di input che appartengono ad uno degli intervalli su cui sono definiti i gradini il valore del gradino stesso.

Sull'asse orizzontale abbiamo tutti i possibili valori dell'input (*ad esempio da $-\infty$ a $+\infty$*), mentre sull'asse verticale l'output della quantizzazione.

L'esempio sopra riportato rappresenta un quantizzatore non uniforme, in quanto i livelli hanno distanza diversa fra loro, mentre se fossero ugualmente distribuiti rispetto all'asse delle ascisse si tratterebbe di un quantizzatore uniforme.

In un quantizzatore uniforme, data la dinamica $[-V, V]$ del quantizzatore che contiene il segnale, abbiamo due parametri da stabilire: il numero di bit n che stabilisce la sua risoluzione e quindi il **numero di livelli** $L = 2^n$ e l'**ampiezza di ogni intervallo** $\Delta = 2V/L$ (*passo di quantizzazione*).

Ragionando al limite, se il numero di bit a nostra disposizione fosse infinito, la curva caratteristica

del quantizzatore sarebbe una retta; quanto più ci spostiamo da questa diagonale ideale, tanto più rumore introduciamo nel segnale quantizzato.

SATURAZIONE

Un quantizzatore è caratterizzato da una dinamica di ingresso, ovvero dal massimo range di valori ammissibili (*ad es.* $[-V, V]$); se il nostro segnale va oltre questa dinamica va trattato con delle strategie.

Le principali strategie sono:

- La **saturazione** che assegna al segnale il valore massimo della dinamica V o $-V$ a seconda se il segnale supera il limite superiore o inferiore.
- La **saturazione con azzeramento** che invece assegna un specifico valore (*ad esempio 0*) dove il segnale supera i limiti.

RANGE DINAMICO DI UN QUANTIZZATORE

Un quantizzatore è caratterizzato anche dalla sua risoluzione (*n bit*) e dal passo di quantizzazione Δ .

L'intervallo di valori che può coprire (*dinamica*) è allora dato da $D_q = \Delta L = \Delta 2^n$.

Il **range dinamico** di un quantizzatore rappresenta il rapporto fra il numero minimo e massimo di valori rappresentabili.

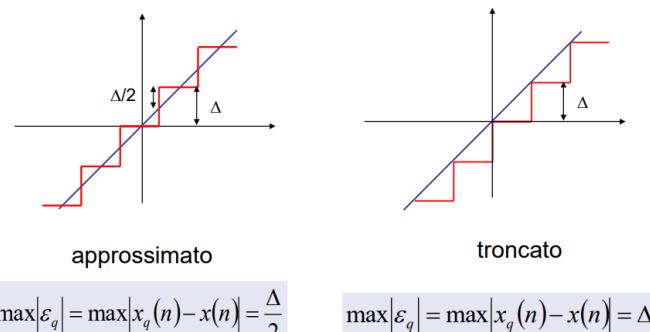
Dipende quindi dalla risoluzione (*n bit*), quindi da quanti livelli $L = 2^n$ ammette il quantizzatore. Il range dinamico (*in dB*) è definito come $20 \log_{10} L$.

Ad esempio se la risoluzione è 16 bit, il range dinamico è $20 \log_{10} 2^{16} \approx 96 \text{ dB}$.

ERRORE DI QUANTIZZAZIONE

Si definisce errore (*o rumore*) di quantizzazione la differenza fra il valore quantizzato ed il valore reale del campione $\epsilon_q(n) = x_q(n) - x(n)$.

In generale quanto quantizziamo possiamo usare una strategia di **approssimazione** o una di **troncamento**; tutta via quella di approssimazione introduce meno errore.



$$\max |\epsilon_q| = \max |x_q(n) - x(n)| = \frac{\Delta}{2} \quad \max |\epsilon_q| = \max |x_q(n) - x(n)| = \Delta$$

La **qualità** del segnale quantizzato si esprime come rapporto della potenza media del segnale a tempo discreto P_S e la potenza media dell'errore di quantizzazione P_N tramite quello che viene chiamato il rapporto segnale/rumore $SNR_Q = 10 \log_{10} P_S / P_N$ che ha come unità di misura il dB.

$$P_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\epsilon_q(n)|^2$$

$$P_S = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Ricordiamo che la potenza è una media del quadrato dell'ampiezza del segnale.

DEFINIAMO L'ERRORE

Per segnali con ampiezza nella dinamica del quantizzatore, l'errore di quantizzazione ϵ è associato alla strategia di quantizzazione ed in particolare è una variabile casuale che ha una **distribuzione uniforme** tra $-\Delta/2$ e $\Delta/2$ con valor medio nullo.

Sapendo che la potenza del rumore di quantizzazione equivale alla varianza della variabile casuale ϵ , possiamo dire che

$$P_N = \sigma_\epsilon^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (\epsilon - \mu)^2 f(\epsilon) d\epsilon \text{ ma sapendo che il valor medio è nullo possiamo semplificare}$$

$$P_N = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \epsilon^2 f(\epsilon) d\epsilon \text{ ma sappiamo che } f(\epsilon) \text{ è costante, quindi } P_N = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \epsilon^2 \frac{1}{\Delta} d\epsilon = \frac{1}{\Delta} \frac{\epsilon^3}{3} \Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2}$$

$$\text{Valutando l'integrale fra } \Delta/2 \text{ e } -\Delta/2 \text{ abbiamo quindi } P_N = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\Delta^3/8}{3} - \frac{-\Delta^3/8}{3} \right] = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Notiamo che la potenza del rumore dipende da Δ , il passo di quantizzazione, che è definito in base al numero di bit che abbiamo a disposizione; meno bit abbiamo, maggiore è Δ e quindi maggiore è la potenza del rumore.

DEFINIAMO IL SEGNALE

Consideriamo un segnale sinusoidale analogico $x_a(t) = A \cos(\omega_0 t)$ e calcoliamone la potenza

$$P_S = \frac{1}{T} \int_0^T |x_a(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T |A \cos(\omega_0 t)|^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

L'effetto di fare il modulo quadro del nostro segnale è quello di renderlo tutto positivo e con ampiezza quadratica A^2 ; è chiaro a questo punto che la media sul periodo del segnale dell'ampiezza quadratica è $A^2/2$.

$$\text{Analogamente se il segnale fosse campionato } P_S = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

DEFINIAMO IL SNR

$$SNR_Q = 10 \log_{10} \frac{P_S}{P_N} = 10 \log_{10} \frac{A^2/2}{\Delta^2/12}.$$

Avremo potuto definire il SNR anche come $20 \log_{10} \frac{\sqrt{P_S}}{D_q} + 20 \log_{10} 2^b = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{P_S}}{D_q} + 6.02b$ dove $\sqrt{P_S}$ è l'ampiezza del segnale e b è il numero di bit; notiamo che il rapporto segnale rumore dipende da questo numero linearmente, in particolare ogni bit aggiuntivo lo fa aumentare di circa 6 dB, che si traduce in un raddoppiamento dell'intensità del segnale rispetto all'intensità del rumore.

Notiamo inoltre che definiremo un quantizzatore **ottimo** quando il rapporto $\sqrt{P_S}/D_q$ è 1, ovvero quando la dinamica del quantizzatore è tale da contenere tutto il segnale senza sprecare livelli.

SNRq OTTIMO

La condizione ideale (**quando non saturiamo, perché se saturassimo il rumore avrebbe una distribuzione differente!**) quindi si ha quando le dinamiche del segnale e del quantizzatore sono uguali, ovvero quando $D_s = D_q$.

Sappiamo che un segnale sinusoidale ha $D_s = 2A$.

Se il quantizzatore ha b bit

- Il numero dei livelli del quantizzatore è $L = 2^b$.
- Il passo di quantizzazione è $\Delta = D_q/L = D_s/L = 2A/2^b$.

Riprendendo i calcoli di prima avremo a questo punto $P_N = \Delta^2/12 = \frac{A^2/3}{2^{2b}}$.

$$\text{Quindi } SNR_Q = 10 \log_{10} \frac{P_S}{P_N} = 10 \log_{10} \frac{A^2/2}{A^2/3/2^{2b}}$$

Semplificando A^2 otteniamo

$$SNR_Q = 10 \log_{10} 2^{2b} \frac{3}{2} = 10 \log_{10} \frac{3}{2} + 10 \log_{10} 2^{2b} = 1.76 + 2b \log_{10} 2 = 1.76 + 6.02b.$$

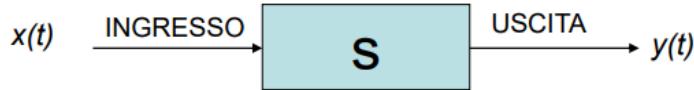
Notiamo nuovamente il $6.02b$.

Si può dimostrare che per un insieme più ampio di segnali che si distribuiscono sull'intero range dinamico del quantizzatore si ha $SNR_Q = 1.25 + 6.02b$.

SISTEMI

Un sistema fisico è un apparato che, ricevendo in ingresso un segnale, dà in uscita un nuovo segnale.

Quindi un sistema è un *processo* per il quale esiste una relazione *ingresso/uscita (I/O)* o *causa-effetto*.



$$y(t) = S[x(t)]$$

$y(t)$ è la risposta del sistema S all'ingresso $x(t)$.

ESEMPI DI SISTEMI

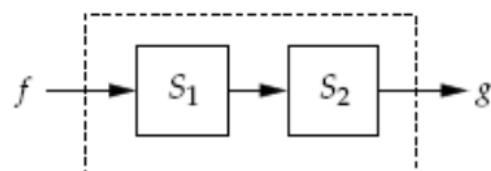
- Il campionatore di periodo τ è un sistema; esso trasforma il segnale a tempo continuo $f(t)$ nel segnale a tempo discreto $f(n\tau)$.
- Anche il quantizzatore è un sistema che associa al segnale $f(t)$ il segnale $Q[f(t)]$; ovvero riceve in ingresso un segnale continuo e restituisce un segnale a valori finiti.

I sistemi possono avere più ingressi e/o uscite, non necessariamente della stessa cardinalità. Ad esempio il sistema **somma** riceve in ingresso due segnali e ne restituisce la somma.

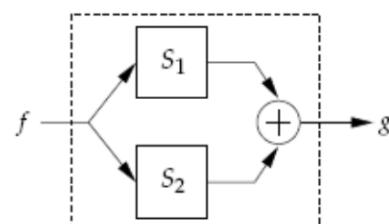
SISTEMI COMPLESSI

I sistemi *complessi* sono dei sistemi composti da più sistemi *semplici*, che possono essere composti

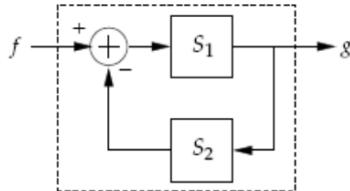
- **sequenzialmente** (*o in cascata*): dati due sistemi $S_1 : F_1 \rightarrow F_2$ e $S_2 : F_2 \rightarrow F_3$, la loro composizione sequenziale è il sistema $S_3 : F_1 \rightarrow F_3$.
Un esempio è il convertitore da analogico a digitale che compone in cascata i sistemi campionatore e quantizzatore. Notiamo che è necessaria una coerenza tra gli spazi delle variabili: lo spazio di uscita di S_1 deve essere lo stesso di entrata di S_2 .



- **parallelamente**: dati due sistemi $S_1 : F_1 \rightarrow F_2$ e $S_2 : F_1 \rightarrow F_2$, la loro composizione parallela è il sistema che ha come risposta la somma delle risposte di S_1 ed S_2 .
Purché si possa definire la composizione parallela, in particolare per eseguire la somma finale, il dominio dei sistemi deve essere lo stesso.



- in **retroazione**: dati due sistemi $S_1 : F_1 \rightarrow F_2$ e $S_2 : F_2 \rightarrow F_1$, il sistema ottenuto per retroazione è il sistema S_3 che ha ingresso f ed uscita g ottenuta ponendo in ingresso ad S_1 la differenza tra f e la risposta di S_2 a f .
Da notare che lo spazio di uscita di S_2 è lo stesso spazio che ha S_1 in ingresso, altrimenti non si potrebbe eseguire la somma.



Un sistema complesso si studia a partire dalle sue *componenti elementari*.

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Un sistema a **tempo discreto** è un dispositivo che trasforma un sequenza $x(n)$ in ingresso in una sequenza $y(n)$ in uscita attraverso un operatore $L[\cdot]$.

ESEMPIO

Dato il segnale **bilatero** (*definito sia per valori positivi che negativi*) di input $\begin{cases} |n| & -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

I segnali di output per le seguenti relazioni I/O sono:

- | | |
|---|---|
| • $y(n) = x(n)$ (<i>relazione identità</i>) | $y(n) = \{\dots, 0, 0, 3, 2, 1, \underline{0}, 1, 2, 3, 0, 0 \dots\}$ |
| • $y(n) = x(n+1)$ | $y(n) = \{\dots, 0, 3, 2, 1, 0, \underline{1}, 2, 3, 0, 0 \dots\}$ |
| • $y(n) = x(n-1)$ | $y(n) = \{\dots, 0, 0, 0, 3, 2, \underline{1}, 0, 1, 2, 3, 0 \dots\}$ |
| • $y(n) = \text{mediana}[x(n+1); x(n); x(n-1)]$ | $y(n) = \{\dots, 0, 0, 2, 2, 1, \underline{1}, 1, 2, 2, 0, 0 \dots\}$ |

SISTEMI LINEARI

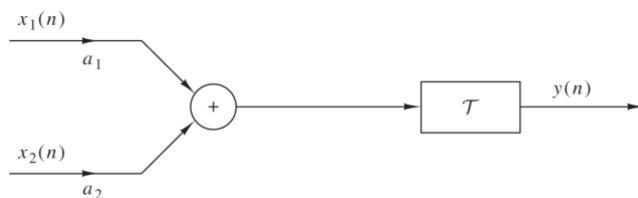
Un sistema è lineare quando la relazione I/O soddisfa il **principio di sovrapposizione degli effetti**.

Dato il segnale in ingresso

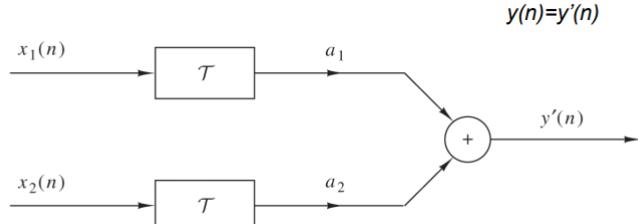
$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)$$

che può quindi essere espresso come combinazione lineare di altri segnali x_1, x_2 , la risposta è una combinazione lineare delle risposte del sistema ai singoli ingressi

$$L[x(n)] = L[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 L[x_1(n)] + \alpha_2 L[x_2(n)].$$



Il vantaggio dei sistemi lineari è che permette di scomporre un'operazione molto complicata in termini più semplici.



SISTEMI A TEMPO INVARIATO O STAZIONARI

Un sistema è a tempo invariato se la relazione I/O produce un segnale d'uscita $y(n)$ che dipende solo dalla **forma del segnale** d'ingresso $x(n)$.

Questo significa che se l'ingresso del sistema è ritardato (*o anticipato*) di una quantità n_0 , anche la risposta sarà ritardata (*o anticipata*) di n_0 .

SISTEMI CAUSALI

Un sistema causale è un sistema in cui la risposta corrente $y(n)$ non dipende dai valori futuri d'ingresso, cioè da termini del tipo $x(n + n_0)$ con $n_0 > 0$.

Un sistema, per essere fisicamente realizzabile, deve essere causale.

SISTEMI ANTICAUSALI

Un sistema causale è un sistema in cui la risposta corrente $y(n)$ non dipende dai valori passati d'ingresso, cioè da termini del tipo $x(n - n_0)$ con $n_0 > 0$.

ESEMPI

Il sistema descritto dalla relazione $y(n) = x(n^4) \cos(2\pi f_0 n)$ non è causale, poiché la sequenza di uscita $y(n)$ richiede la conoscenza di $x(n^4)$ (*valore futuro*)

Il sistema descritto dalla relazione $y(n) = x(n) - x(n - n_0)$ è causale, in quanto la risposta dipende solo dal valore corrente $x(n)$ e da un valore $x(n - n_0)$ passato.

SISTEMI CON MEMORIA

Sono i sistemi per i quali la risposta corrente $y(n)$ dipende dai valori di ingresso negli istanti di tempo precedenti a quello corrente n .

Se la risposta dipende solo dal valore d'ingresso nel medesimo istante n , il sistema si dice **senza memoria o statico**.

$y(n) = 3x(n - 4)$ ha memoria pari a 4

$y(n) = 2x(n) - 3x(n - 1)$ ha memoria pari a 1

$y(n) = x(n)$ non ha memoria

SISTEMI PASSIVI

Un sistema a tempo discreto è detto passivo se ad un ingresso $x(n)$ con **energia finita** E_x risponde con un segnale $y(n)$ con energia $E_y \leq E_x < \infty$.

In altri termini, deve essere verificata $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$.

Se tale relazione è verificata col segno di uguaglianza, allora il sistema è detto **senza perdite**, in quanto conserva l'energia del segnale di ingresso.

SISTEMI LTI

Un sistema LTI (**Linear Time Invariant**) è un sistema per il quale la relazione I/O soddisfa contemporaneamente le proprietà di **linearità** e **stazionarietà**.

I sistemi LTI possono essere descritti in tre modi differenti:

1. Relazione I/O (*describe anche qualsiasi altro sistema*)
2. Equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti (*describe solo sistemi LTI causali*)
3. Risposta all'impulso (*dominio del tempo e dominio delle frequenze*) (*describe solo sistemi LTI*)

EQUAZIONE LINEARE ALLE DIFFERENZE A COEFFICIENTI COSTANTI

Il comportamento di un sistema LTI a **tempo discreto** e **casuale** può essere descritto da

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_M y(n-M) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_N x(n-N)$$

Sintetizzando: $y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{j=1}^M a_j y(n-j)$

Ovvero l'uscita $y(n)$ dipende sia dai valori che l'ingresso $x(n)$ assume in un arco temporale fino ad N istanti precedenti all'istante n , sia dai valori assunti dal segnale di uscita $y(n)$ sino ad M istanti di tempo precedenti all'istante n .

I coefficienti a_1, \dots, a_M e b_1, \dots, b_N sono termini costanti, indipendenti dal tempo (*altrimenti il sistema sarebbe non stazionario*).

Se almeno un coefficiente a_j è diverso da zero, l'equazione alle differenze è detta **ricorsiva**, quindi ha memoria ∞ .

Se tutti i coefficienti a_j sono nulli l'equazione è non ricorsiva e ha memoria pari ad N .

RISPOSTA ALL'IMPULSO

Ricordiamo che una sequenza è rappresentabile come somma di funzioni δ traslate in corrispondenza delle posizioni dei punti campionati e pesate per il valore della sequenza in quel punto

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

Se ora consideriamo $y(n) = L[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)]$

Applicando la definizione di linearità otteniamo $y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)L[\delta(n-i)]$

Applicando la stazionarietà $y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i)$ otteniamo la definizione di **convoluzione**.

Ciò che abbiamo ottenuto è che la sequenza di output $y(n)$ è uguale alla convoluzione della sequenza di input $x(n)$ per una funzione h , detta **risposta del sistema all'impulso**.

Se il sistema è causale, la risposta all'impulso $h(n)$ è nulla per istanti di tempo $n < 0$.

ANALISI LTI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Ipotizziamo adesso che la risposta all'impulso del sistema LTI e la sequenza in ingresso siano entrambi trasformabili mediante la DTFT.

Per il teorema della convoluzione avremmo che $y(n) = x(n) * h(n) \iff Y(f) = X(f)H(f)$.

Utilizzando l'esponenziale complesso $y(n) = x(n) * h(n) \iff Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, con $\omega = 2\pi f$.

La funzione **continua** $H(e^{j\omega}) = DTFT[h(n)]$ viene detta **risposta in frequenza del sistema LTI** e può essere definita come $H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$ ed è una funzione complessa della variabile ω .

Possiamo quindi scriverla anche in forma polare

$$H(e^{j\omega}) = \Re(H(e^{j\omega})) + j(\Im(H(e^{j\omega})) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(H(e^{j\omega}))}$$

dove il modulo vale $|H(e^{j\omega})| = [\Re(H(e^{j\omega}))^2 + \Im(H(e^{j\omega}))^2]^{1/2}$

e la fase $\phi(H(e^{j\omega})) = \tan^{-1}[\frac{\Im(H(e^{j\omega}))}{\Re(H(e^{j\omega}))}]$.

SISTEMI LTI: FILTRI

Un filtro è un sistema LTI che taglia alcune componenti in frequenza nel segnale di ingresso $x(n)$ e ne lascia quindi passare altre, a seconda di come è specificata la risposta in frequenza.

Esistono diversi tipi di filtri, i più comuni sono:

- **FILTRO IDEALE PASSA BASSO:** $|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_t \\ 0 & \omega_t < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

Viene detto ideale per via del suo taglio netto da 0 a 1.

Questo filtro fa passare solo le basse frequenze.

- **FILTRO IDEALE PASSA ALTO:** $|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0 & |\omega| \leq \omega_t \\ 1 & \omega_t < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

Notare che è complementare al passa basso.

Questo filtro fa passare solo le alte frequenze.

- **FILTRO IDEALE PASSA BANDA:** $|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0 & |\omega| \leq \omega_1 \\ 1 & \omega_1 < |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & \omega_2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

Questo filtro fa passare solo un centro range di frequenze (*quelle tra ω_1 e ω_2*).

- **FILTRO IDEALE ATTENUA BANDA:** $|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0 & \omega_1 < |\omega| \leq \omega_2 \\ 1 & \omega_2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

Questo filtro blocca solo un centro range di frequenze (*quelle tra ω_1 e ω_2*).

Sappiamo che la trasformata di una finestra è un **sinc** che, tanto più è ampia la finestra, tanto più è stretto e che è una sequenza che va da $-\infty$ a $+\infty$, ovvero bilatera e quindi fisicamente **NON realizzabile**; per questo motivo i filtri **ideali** non sono fisicamente realizzabili.

CONDIZIONI DI STABILITÀ

I sistemi LTI a tempo discreto devono soddisfare alcune condizioni specifiche al fine di poter essere impiegati in applicazioni specifiche; una di queste condizioni riguarda la **stabilità**.

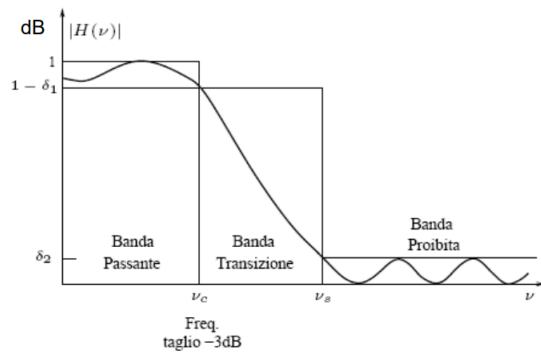
La condizione di stabilità più usata è detta **BIBO (Bounded Input Bounded Output)**: un sistema a tempo discreto è detto *BIBO* se e solo se, per ogni ingresso limitato, anche la sequenza in output assume ampiezze limitate.

Una condizione necessaria e sufficiente per garantire la stabilità *BIBO* coinvolge la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema LTI.

TEOREMA: un sistema LTI discreto è stabile secondo la definizione *BIBO* se e solo se la sua risposta all'impulso $h(n)$ è sommabile in modulo, ovvero se $h_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$.

Dunque i filtri ideali, oltre a non essere fisicamente realizzabili, non sono nemmeno stabili secondo le condizioni *BIBO*.

FILTRO REALE



Il filtro ideale presenta solo una **banda passante** ed una **banda proibita** che sono confinanti e sono separate dalla **frequenza di taglio**. In particolare, $|H|$ è costante sia nella banda passante che in quella proibita.

Un filtro reale presenta ancora una **banda passante** ed una **banda proibita**, ma sono separate da una **banda di transizione**. Inoltre, nessuna banda ha valori costanti nei filtri reali.

In particolare:

- **BANDA PASSANTE:** $|H(v)|$ non è costante e in particolare presenta delle oscillazioni di ampiezza δ_1 .
- **BANDA PROIBITA:** $|H(v)|$ non è costante.
Un parametro importante è detto **attenuazione** = $20 \log_{10} \delta_2 \text{ dB}$ con δ_2 = ampiezza della massima oscillazione.
- **BANDA DI TRANSIZIONE:** Tale banda inizia dalla frequenza di taglio v_c e termina alla frequenza di stop v_s ; la dimensione della banda di transizione dunque è data da $v_s - v_c$.
La **fq di taglio** generalmente è la frequenza per la quale si ha un guadagno in potenza pari al 50% di quello in banda passante. Se quindi $|H(v_c)|^2 = 1$ in banda passante, v_c è la frequenza tale per cui $|H(v_c)|^2 = 1/2$.
Corrisponde quindi ad un'attenuazione di 3 dB.

Quindi, i valori che caratterizzano un filtro reale sono la **frequenza di taglio v_c** , la **frequenza di stop v_s** e le dimensioni massimi e permesse alle **oscillazioni δ_1 e δ_2** .

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE IN DETTAGLIO

Abbiamo visto che se abbiamo un sistema possiamo descriverlo in diversi modi.

In particolare, un generico sistema, indipendentemente dalle sue proprietà può essere descritto dalla **relazione I/O**, se introduciamo la *linearità* e la *tempo invarianza (LTI)* possiamo usare la **risposta all'impulso**, se introduciamo anche la *causalità*, ovvero se il sistema è fisicamente realizzabile, possiamo utilizzare l'**equazione alle differenze** per descrivere il sistema.

Sappiamo che il comportamento di un sistema **LTI** a tempo **discreto** e **causale** può essere descritto anche da equazioni alle differenze a coefficienti costanti

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - \dots - a_M y(n-M) + b_0 x(n) + \dots + b_N x(n-N)$$

Abbiamo quindi che l'uscita $y(n)$ dipende sia dai valori che l'ingresso $x(n)$ assume in un arco temporale fino ad N istanti precedenti all'istante n , sia dai valori assunti dal segnale di uscita stesso $y(n)$ sino a M istanti di tempo precedenti a n .

Possiamo riscrivere l'equazione, mettendo in evidenza la combinazione lineare (*ricordiamo che è un sistema lineare*), notando che abbiamo sempre campioni ritardati poiché abbiamo sempre ($n - pos$), come:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{j=1}^M a_j y(n-j) \text{ dove:}$$

- I coefficienti a_1, \dots, a_M e b_0, \dots, b_N sono termini costanti indipendenti dal tempo (*altrimenti il sistema sarebbe non stazionario*).
- L'equazione è detta **ricorsiva** se almeno un coefficiente a_j è diverso da zero.
 - Quando il sistema è ricorsivo, dipende, di fatto, da più istanti precedenti all'input e non solo dagli N istanti evidenti nella sommatoria.
 - Quando il sistema **NON** è ricorsivo, dipende solo da un numero finito N di istanti temporali nel passato, quindi possiamo definire una memoria del sistema.
Se tutti i coefficienti b_k sono zero tranne b_0 , il sistema è **puramente ricorsivo**.
- M è l'**ordine dell'equazione alle differenze** o **ordine di sistema**.

SISTEMI RICORSIVI E NON RICORSIVI

La differenza principale tra sistemi ricorsivi e non è che l'output dei sistemi ricorsivi deve essere calcolato in ordine $y(0), \dots, y(n)$, mentre l'output dei sistemi non ricorsivi può essere calcolato valutando i campioni della sequenza di output in qualsiasi ordine.

RISPOSTA ALL'IMPULSO - FIR & IIR

Abbiamo visto in passato come il comportamento di un sistema LTI possa essere descritto dalla risposta del sistema all'impulso tramite la convoluzione.

In generale, abbiamo che $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i)$.

Se consideriamo solo i sistemi causali possiamo scrivere $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i)$.

In base alla risposta all'impulso i sistemi LTI possono essere suddivisi in due grossi gruppi:

- **FIR** - Finite Impulse Response

La risposta di un FIR è $h(n) = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq n \leq M-1 \\ = 0 & n < 0 \wedge n \geq M \end{cases}$

La risposta di un sistema FIR ad un generico segnale è quindi **limitata**; ovvero l'output a qualsiasi istante n è semplicemente la somma di una combinazione lineare pesata di M valori più recenti della sequenza di input.

Il sistema quindi agisce come una **finestra** che vede solo M valori recenti della sequenza di input, ovvero ha **memoria M** .

Possiamo quindi scrivere $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{M-1} h(i)x(n-i)$.

Notiamo che i sistemi FIR sono sempre realizzabili con **sistemi non ricorsivi**, infatti sono funzione di soli M campioni della sequenza di ingresso pesati per la risposta all'impulso $h(n)$, che per ogni $h(i)$ è costante e non dipende dal tempo.

Si può infatti subito notare come la formula scritta prima altro non è che un'equazione alle differenze in cui i coefficienti a_j sono nulli ed i coefficienti b_k sono sostituiti da $h(n)$.

- **IIR** - Infinite Impulse Response

La risposta di un IIR è $h(n) = \begin{cases} \neq 0 & n \geq n_0 \\ = 0 & n < n_0 \end{cases}$

Ovvero la risposta è 0 per tutti i valori della parte anticausale.

La risposta di un IIR ad un generico segnale dipende da tutti i valori della sequenza di input ed il sistema ha **memoria infinita**. Di conseguenza un sistema IIR non è realizzabile (*computazionalmente*) attraverso la convoluzione poiché richiederebbe infinita memoria, ma può essere risolto con l'equazione alle differenze in modo computazionalmente efficiente.

Possiamo quindi scrivere $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i)$.

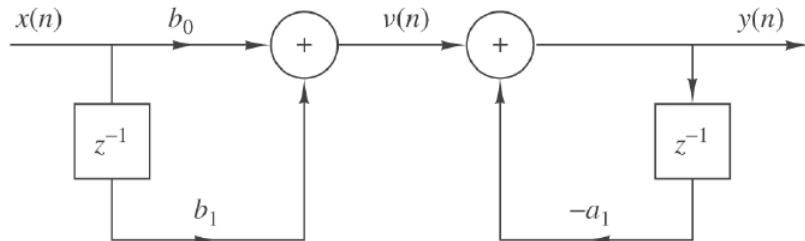
Ora non è più così immediato passare dalla rappresentazione attraverso la convoluzione alla rappresentazione attraverso l'equazione alle differenze poiché non c'è più una corrispondenza diretta tra $h(n)$ ed i coefficienti dell'equazione, poiché essendo $h(n)$ infinito introduce una ricorsione.

STRUTTURE LTI

PRIMA FORMA DIRETTA

Consideriamo la seguente equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti del primo ordine $y(n) = -a_1y(n-1) + b_0x(n) + b_1x(n-1)$.

Possiamo rappresentare tale sistema come:



Notiamo la separazione tra i coefficienti, e quindi tra la parte non ricorsiva e ricorsiva che permette di trattare il sistema come due sistemi in cascata.

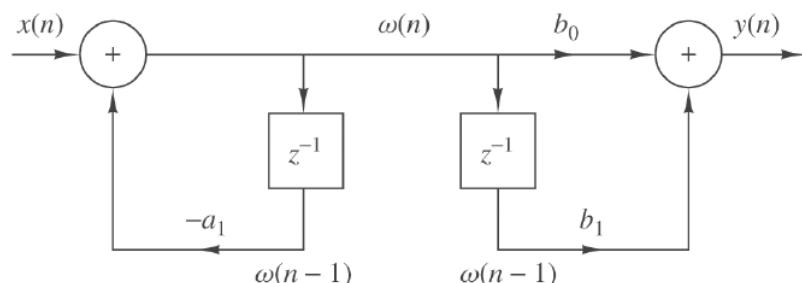
Se avessimo più ritardi, sia nella parte ricorsiva che in quella non, ci basterebbe aggiungere dei blocchi z^{-1} che li gestiscano.

Questa modalità di rappresentazione si chiama una **Struttura in Prima Forma Diretta (Direct Form I)** che presenta di fatto due sottosistemi:

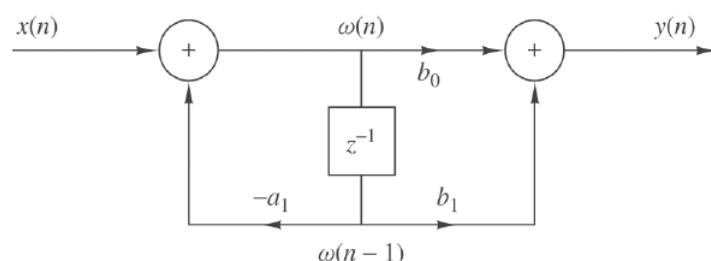
1. Il primo sistema è non ricorsivo $v(n) = +b_0x(n) + b_1x(n-1)$
2. Il secondo sistema è ricorsivo $y(n) = -a_1y(n-1) + v(n)$

SECONDA FORMA DIRETTA

Ovviamente, trattandosi di sistemi **lineari**, invertendoli il risultato non cambia.



Notiamo però che, a differenza di prima, la sequenza $\omega(n)$ che entra nel modulo di ritardo della parte ricorsiva è **la stessa** che entra anche nel modulo di ritardo della parte non ricorsiva; questo significa che, invece che avere due moduli di ritardo, possiamo utilizzarne uno solo in condivisione, rendendo il sistema più efficiente in termini di memoria.



Questa viene chiamata **Struttura in Seconda Forma Diretta**

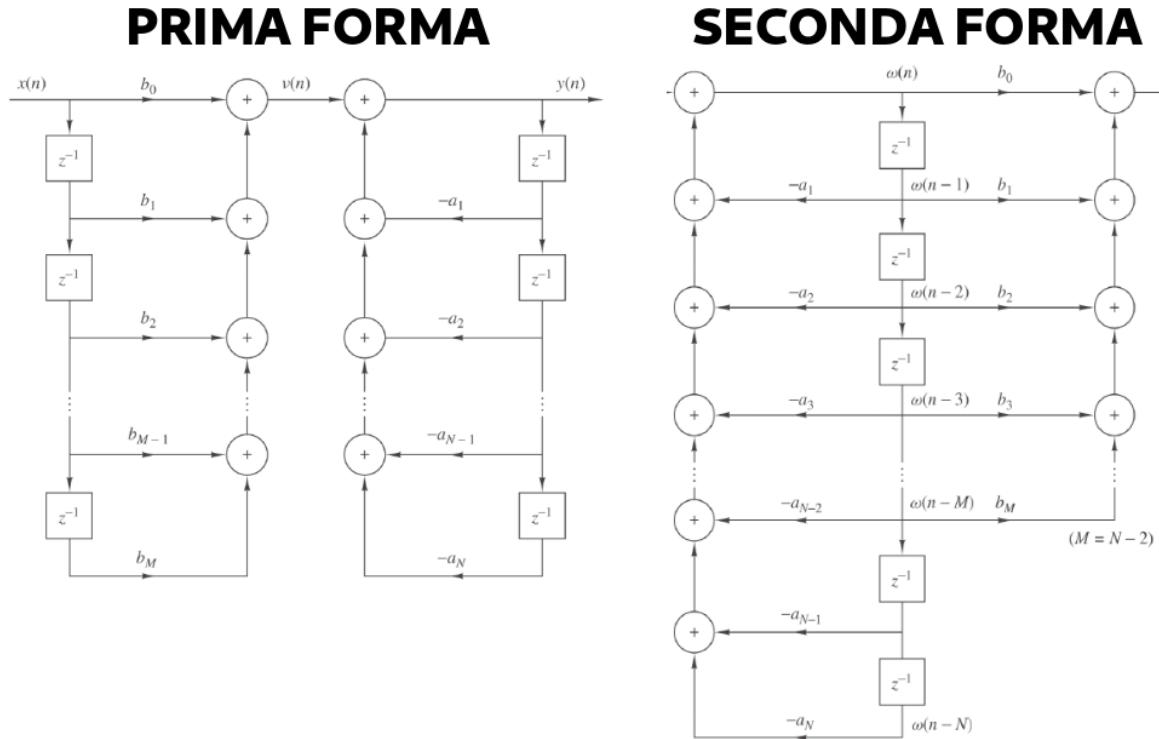
$$\text{con } \omega(n) = -a_1\omega(n-1) + x(n) \quad \text{e} \quad y(n) = b_0\omega(n) + b_1\omega(n-1).$$

COMPARAZIONI

Estendiamo ora il ragionamento fatto al caso di una generica equazione alle differenze di ordine

$$N y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{j=1}^N a_j y(n-j).$$

Per rappresentare tale sistema nella prima forma diretta avremmo bisogno di $N + M$ unità di ritardo e di $N + M + 1$ moltiplicazioni, mentre nella seconda forma avremmo un numero di ritardi pari a $\max(N, M)$ ed un numero di moltiplicazioni che è ancora $N + M + 1$.



ESEMPI

1: Scriviamo ora l'equazione alle differenze di un sistema non ricorsivo (*ordine 0*) con memoria 2:
 $y(n) = +b_0 x(n) + b_1 x(n - 1) + b_2 x(n - 2)$ *notiamo che tutti i coefficienti a_j sono zero*

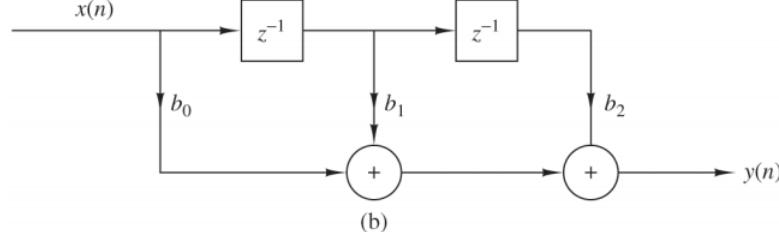
Notiamo che non è altro che un sistema **FIR** che media su tre valori di input; in particolare se volessimo scrivere tale sistema come risposta all'impulso, scriveremmo

$$y(n) = h(n) * x(n) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + h_2 x(n-2).$$

Dunque, la **risposta all'impulso** di tale sistema è $h(n) = \{b_0, b_1, b_2\}$.

Possiamo rappresentare la risposta all'impulso anche come $b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + b_2\delta(n-2)$.

Graficamente il sistema può essere rappresentato come



Notiamo che, non essendoci la parte ricorsiva, non possiamo applicare la linearità per invertire le due parti, di conseguenza per questo sistema le rappresentazioni in **prima forma diretta** ed in **seconda forma diretta coincidono**.

2: Scriviamo l'equazione alle differenze di un sistema del 2° ordine puramente ricorsivo:

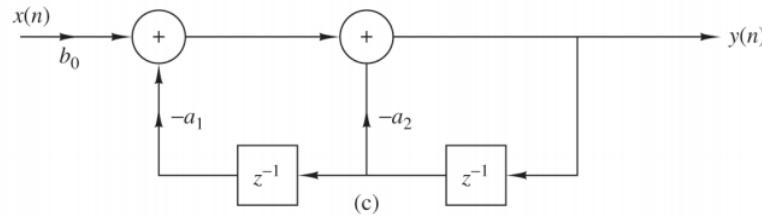
$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

ricordiamo che b_0 è sempre $\neq 0$ per avere un sistema che risponda ad uno stimolo.

Essendo il sistema ricorsivo, quindi come memoria infinita, è un sistema **IIR**.

Avendo una risposta infinita dunque non possiamo rappresentare il sistema attraverso la descrizione della risposta all'impulso $h(n)$ come prima (*o per lo meno non in maniera semplice come accade con i sistemi FIR*).

Graficamente possiamo rappresentare tale sistema come



Notiamo che anche in questo caso, non essendoci la parte non ricorsiva, le rappresentazioni in **prima e seconda** forma **coincidono** nuovamente.

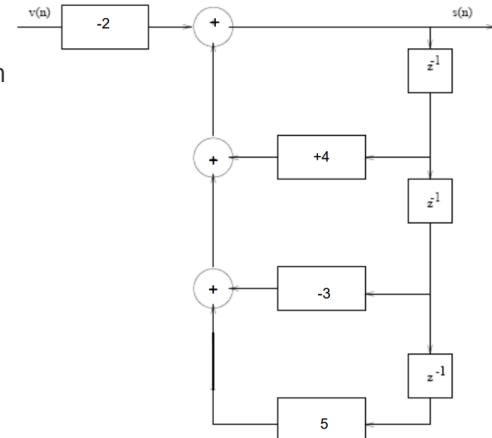
3: Vediamo ora il ragionamento inverso; passiamo da questa forma grafica all'equazione alle differenze:

Notiamo subito che il sistema è puramente ricorsivo, non avendo ritardi sulla sequenza di input ed è di ordine 3, avendo 3 ritardi sulla sequenza di output.

Essendo ricorsivo, ovviamente la memoria del sistema è infinita.

A questo punto, estrapolando dal grafico i vari coefficienti possiamo scrivere:

$$s(n) = -2s(n) + 4s(n-1) - 3s(n-2) + 5s(n-3)$$



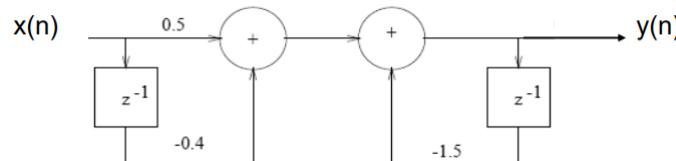
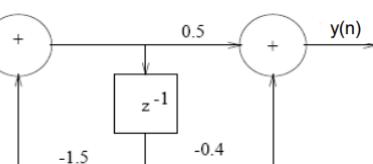
4: Proviamo ora invece a passare dalla seconda forma alla prima:

Prima di tutto scriviamo l'equazione alle differenze di tale sistema:

$$y(n) = 0.5x(n) - 0.4x(n-1) - 1.5y(n-1)$$

Notiamo quindi che il sistema è ricorsivo di ordine 1.

A questo punto risulta semplice disegnare la rappresentazione in prima forma diretta.



TRASFORMATA ZETA

La trasformata Zeta rappresenta il caso discreto della **trasformata di Laplace** e permette di studiare i sistemi LTI.

In particolare, permette di studiare sistemi lineari per i quali la trasformata di Fourier non è definita; la DTFT infatti, quando esiste, permette di descrivere solo i comportamenti dei sistemi **scarichi**.

La trasformata Zeta permette quindi di analizzare una classe più ampia della DTFT e permette di analizzare sistemi LTI anche in presenza di *condizioni iniziali* non nulle.

Permette inoltre di mettere immediatamente in luce alcune caratteristiche dei sistemi LTI come la **causalità** e la **stabilità**.

DEFINIZIONE

Data una sequenza **bilatera** $x(n)$ con $-\infty < n < +\infty$, si dice trasformata zeta:

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

La trasformata zeta definisce una relazione biunivoca tra la sequenza $x(n)$ ed una funzione della **variabile complessa** z , dove z generalizza il concetto di frequenza al piano complesso e viene indicata con **pulsazione complessa**; dunque il suo dominio è tutto il piano complesso.

Scritta in termini di modulo e fase $z = \rho e^{j2\pi f} = \rho e^{j\omega}$.

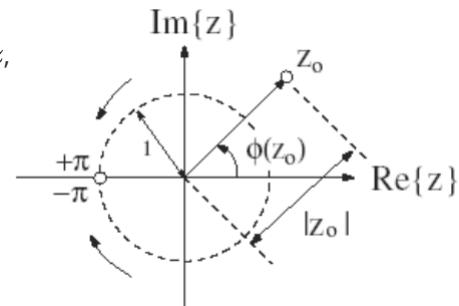
Quindi, la trasformata zeta non è altro che una serie infinita di potenze.

In particolare, $X(z)$ può **convergere** (avere valore finito) per *alcuni* valori di z , mentre può **divergere** per altri valori.

I valori per i quali la trasformata converge, vengono detti **regione di convergenza (ROC)**.

Nella ROC, $X(z)$ è una funzione analitica, cioè continua e indefinitamente derivabile con derivate continue in z .

ATTENZIONE: Ogni volta che parliamo di trasformata zeta, dobbiamo definire la sua **ROC**.



CONDIZIONE DI ESISTENZA

Si può notare che la trasformata zeta contiene anche la trasformata di Fourier esplicitando

$$z = \rho e^{j2\pi f} = \rho e^{j\omega}: \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x(n)\rho^{-n})e^{-j\omega n} = DTFT(x(n)\rho^{-n})$$

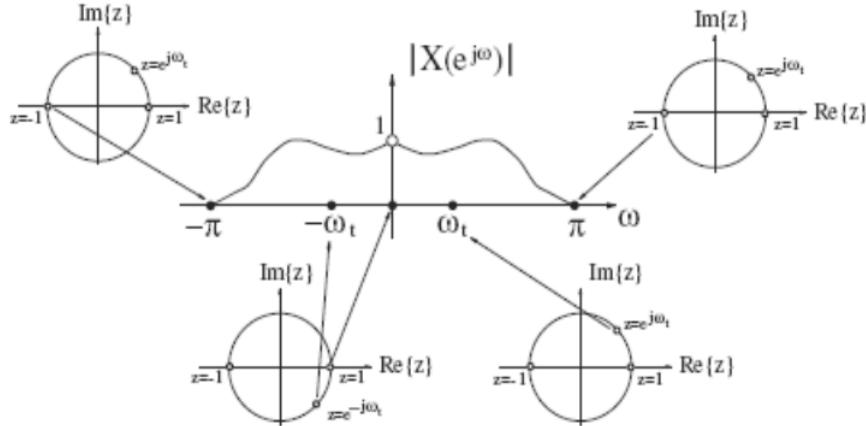
Notiamo che quando $\rho = 1$, quella sopra non è altro che la DTFT di $x(n)$.

Ricordiamo che la **DTFT** esiste (*ovvero la sommatoria converge*) per le sequenze che godono di una proprietà che stabilisce che esse siano **sommabili in modulo**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)\rho^{-n}| < \infty \implies \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|\rho^{-n} < \infty$$

Notiamo che l'esistenza o meno della trasformata zeta **non** dipende dalla pulsazione ω , ma soltanto dal modulo ρ delle pulsazioni complesse z , che rappresenta la **distanza di z dall'origine**; questo significa che le regioni di convergenza ROC dipendono da quanto siamo distanti dall'origine del piano, e sono quindi definite come **circonferenze**, luoghi dei punti z a modulo costante.

Possiamo quindi dire che la trasformata di Fourier di una sequenza coincide con la trasformata zeta sulla circonferenza di raggio unitario $\rho = 1$.



Notiamo che per $z = 1$ avremmo e^{j0} , quindi quando calcoliamo la trasformata zeta per $z = 1$, calcoliamo infatti la trasformata di Fourier per la componente continua del segnale ($f = 0$ ovvero $\omega = 0$).

ALCUNE APPLICAZIONI

1: Proviamo ora ad applicare la trasformata zeta all'impulso $x(n) = \delta(n)$.

$$\text{Ricordando la definizione scriviamo } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) z^{-n}$$

Per le proprietà di δ , la sommatoria sarà diversa da 0 solo quando il suo argomento è nullo, quindi $X(z) = \delta(0)z^0 = 1$.

Notiamo che in questo caso, la trasformata converge per ogni valore z del piano.

2: Proviamo ora con la sequenza bilatera $x(n) = 2\delta(n+1) + \delta(n) + 4\delta(n-2)$.

La trasformata zeta di tale sequenza sarà

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [2\delta(n+1) + \delta(n) + 4\delta(n-2)] z^{-n} =$$

$$2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n+1) z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) z^{-n} + 4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-2) z^{-n} =$$

$$2z^1 + 1z^0 + 4z^{-2}$$

Notiamo che z^{-n} corrisponde ai moduli di ritardo introdotti nelle notazioni grafiche.

Notiamo che la trasformata diverge, nel caso di z^1 , quando $z = \infty$, mentre per z^{-2} , per $z = 0$. Per cui la ROC è definita come $0 < |z| < \infty$.

3: Consideriamo ora $x(n) = u(n)$ (gradino, sequenza causale):

ANALISI: Serie Geometrica

Ricordiamo che una serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ viene detta **serie geometrica**.

In particolare, ricordiamo che tale serie vale $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \emptyset & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$

Ricordando che quando la serie è infinita $q^{n+1} \rightarrow 0$.

$$\text{La trasformata sarà } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Notiamo che passiamo da $-\infty$ a 0 come limite inferiore della sommatoria, considerando che il gradino unitario ha valore da 0 in poi.

Successivamente mettiamo in evidenza la **ragione** $q = z^{-1}$ della **serie geometrica**, in modo da poter scrivere il valore a cui converge tale serie $\frac{1}{1-z^{-1}}$.

Sapendo che la serie geometrica converge solo per $|q| < 1$, possiamo dire che la ROC è definita da $|z^{-1}| < 1 \implies |z| > 1$, che corrisponde all'esterno del cerchio unitario.

4: Consideriamo $x(n) = -u(-n - 1)$, sequenza anticausale e traslata:

$$\text{La trasformata sarà } X(z) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} u(-n - 1)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = -\sum_{m=1}^{+\infty} z^m = -\left(\sum_{m=0}^{+\infty} z^m - 1\right)$$

Notiamo che tiriamo fuori dalla sommatoria il $-$ iniziale, per la linearità dell'operatore, e poi trasformiamo il gradino $u(-n - 1)$ in una sommatoria da $-\infty$ a -1 poiché è invertito e traslato di -1 ; eseguiamo poi un cambio di variabile dalla variabile negativa $-n$ alla variabile positiva m che andrà da 1 a $+\infty$.

A questo punto non ci resta che esplicitare la serie geometrica con la sommatoria da 0 a $+\infty$, sottraendo $z^0 = 1$ ad essa.

La serie a questo punto converge a $1 - \frac{1}{1-z} = -\frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z^{-1}}$, poiché ora la nostra ragione geometrica q è z (*mentre prima era z^{-1}*).

A questo punto possiamo dire che la ROC è definita da $|z| < 1$, per via della ragione che è z .

Notiamo che la ROC è diversa da quella di prima è questo perché la trasformata zeta definisce una relazione **biunivoca** tra la sequenza $x(n)$ ed una funzione della variabile complessa z che però è **garantita** solo se si specifica la **ROC** di $X(z)$ oltre che l'espressione analitica della trasformata $X(z)$.

Praticamente la biunivocità è definita tra la **sequenza** che abbiamo nel dominio di partenza e i **valori a cui converge** la trasformata zeta oltre che alla **regione di convergenza**.

Negli esempi di prima possiamo notare che se non avessimo fornito anche la ROC, non ci sarebbe più stata la biunivocità poiché il valore di convergenza era lo stesso per le due serie diverse.

SEQUENZE FINITE

Le sequenze $x(n)$ con supporto finito sono i segnali a tempo discreto che possiedono un numero finito di coefficienti non nulli.

Questo tipo di sequenze ammette sempre una trasformata $X(z)$ esprimibile in forma chiusa come un **polinomio composto da un numero finito** di variabili del tipo $z^k; z^{-k}$ con k intero.

Un esempio di sequenza finita è $X(z) = \sum_{n=-M}^L x(n)z^{-n}$

Ricordiamo che la trasformata $X(z)$ converge per qualunque z nel piano complesso, eccetto i punti $z = 0$ se esistono termini del tipo z^{-k} con $k > 0$ e $z = \infty$ se esistono termini del tipo z^{+k} con $k > 0$.

ESEMPI

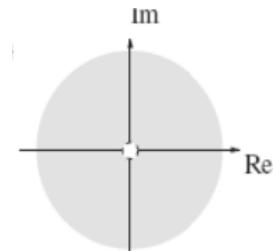
Abbiamo visto prima che la trasformata zeta di $x(n) = \delta(n)$ converge a 1 e la sua ROC è definita $\forall z$.

Se consideriamo invece $x(n) = \delta(n - k)$ con $k > 0$ (*causale*), la trasformata è z^{-k} e la ROC è definita $\forall z$ tranne $z = 0$.

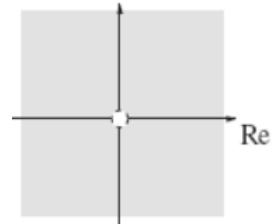
Se consideriamo invece $x(n) = \delta(n + k)$ con $k > 0$ (*anticausale*), la trasformata è z^k e la ROC è definita $\forall z$ tranne $|z| = \infty$.

CONCLUSIONI

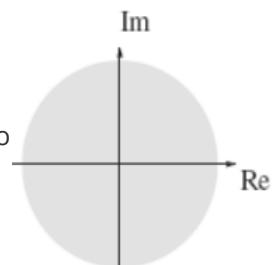
Possiamo quindi dire che, per i segnali di **durata finita bilateri**, la ROC è l'intero piano complesso zeta tranne i punti 0 e ∞ .



Per i segnali di **durata finita causali**, la ROC è l'intero piano complesso zeta tranne il punto 0.



Per i segnali di **durata finita anticausali**, la ROC è l'intero piano complesso zeta tranne il punto ∞ .



POLI E ZERI

Calcoliamo la trasformata zeta della sequenza finita $x(n) = \alpha^n [u(n) - u(n - N)]$ con N costante intera finita e α costante reale.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}$$

Sappiamo per quanto detto prima che $X(z)$ converge in ogni punto del piano complesso eccetto $z = 0$.

Definiamo a questo punto:

- **POLI:** Valori che annullano il denominatore.
- **ZERI:** Valori che annullano il numeratore.

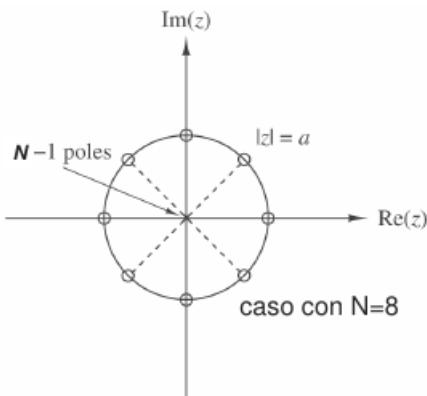
Per trovare zeri e poli, dobbiamo inanzitutto raccogliere la **potenza negativa** di z sia dal denominatore che dal numeratore per poi analizzare i polinomi del numeratore e del denominatore.

$$X(z) = \frac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}} = z^{-N} \frac{1}{z^{-1}} \frac{1-\alpha^N}{z-\alpha} = z^{-N+1} \frac{z^N - \alpha^N}{z-\alpha}$$

A questo punto, per trovare i poli consideriamo $z - \alpha$ e notiamo subito che si annulla per $z = \alpha$.

Per trovare gli zeri consideriamo $z^N - \alpha^N$ e notiamo che questo polinomio ha N zeri, ma come possiamo calcolarli?

Proviamo a ragionare graficamente:



Siamo nel piano complesso; notiamo che la soluzione reale è $|z| = \alpha$, che definisce il raggio di una circonferenza sulla quale sono distribuite in modo uniforme le altre soluzioni, che sono in totale N .

Notiamo che alcune soluzioni sono reali, altre sono complesse e conniugate (*stessa parte reale ma parte immaginaria di segno opposto*).

Le soluzioni generalmente sono $z = \alpha e^{j \frac{2\pi}{N} k}$.

In questo caso notiamo che il polo $z = \alpha$ si sovrappone con uno degli zeri, quindi è come se non ci fosse difatto alcun polo e solo $N - 1$ zeri.

Notiamo però che il termine raccolto $z^{-N+1} = \frac{1}{z^{N-1}}$ rappresenta altri $N - 1$ poli (*o un polo di ordine N-1*) nella posizione 0.

SEQUENZE INFINITE

Le sequenze $x(n)$ illimitate sono i segnali a tempo discreto che possiedono un supporto temporale illimitato.

Per le sequenze **causali**, la ROC è del tipo $|z| > d_M$, dove d_M è il modulo del polo più **distante** dall'origine $z = 0$.

L'abbiamo visto per $x(n) = u(n)$.

Per le sequenze **anticausali**, la ROC è del tipo $|z| < d_m$, dove d_m è il modulo del polo più **vicino** all'origine $z = 0$.

L'abbiamo visto per $x(n) = -u(-n - 1)$.

TRASFORMATA ZETA RAZIONALE

Nei casi pratici di interesse, $X(z)$ è una funzione razionale di due polinomi: $X(z) = N(z)/D(z)$ dove $N(z)$ e $D(z)$ sono due polinomi nella variabile z^{-1} di grado rispettivamente p_n e p_d .

$$\text{In forma estesa } X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{p_n} z^{-p_n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{p_d} z^{-p_d}}$$

(Notare la similitudine dei coefficienti con quelli dell'eq. alle differenze)

Ragioniamo su cosa succede a $H(z)$:

- Se il numeratore si azzera, $H(z) = 0$ negli zeri e negli intorni avrà un valore piccolo essendo una funzione regolare.
- Se il denominatore si azzera, $H(z) = \infty$ e negli intorni dei poli $H(z)$ assumera dei valori molto grandi.

Riscrivendo i polinomi come prodotti di monomi otteniamo: $X(z) = \frac{b_0}{a_0} (z^{p_d - p_n}) \frac{\prod_{i=1}^{p_n} (z - c_i)}{\prod_{i=1}^{p_d} (z - d_i)}$

Dove:

- I coefficienti c_i con $i = 1, \dots, p_n$ sono gli **zeri** non nulli di $X(z)$
- I coefficienti d_i con $i = 1, \dots, p_d$ sono i **poli** non nulli di $X(z)$

In particolare, ci saranno $p_n - p_d$ **poli** in $z = 0$ se $p_n > p_d$ oppure $p_d - p_n$ **zeri** in $z = 0$ se $p_d > p_n$.

ANALISI SISTEMI LTI TRAMITE TRASFORMATA Z

Abbiamo visto che un sistema LTI a tempo discreto può essere descritto da un'equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - \dots - a_M y(n-M) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \dots + b_N x(n-N)$$

Se applichiamo la DTFT ad ogni termine (*che equivale ad applicarla a tutti per la linearità*) otteniamo:

$$Y(e^{j\omega}) = -a_1 Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} - \dots - a_M Y(e^{j\omega})e^{-j\omega M} + b_0 X(e^{j\omega}) + b_1 X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \dots + b_N X(e^{j\omega})e^{-j\omega N}$$

Ricordando che $F(f(x - x_0)) = e^{-j\omega x_0} F(u)$

Se a questo punto, tenendo a mente il teorema della convoluzione, raccogliamo i termini in $Y(e^{j\omega})$ e in $X(e^{j\omega})$ otteniamo:

$$Y(e^{j\omega})(1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_M e^{-j\omega M}) = X(e^{j\omega})(b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_N e^{-j\omega N})$$

Sappiamo inoltre che la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ di un sistema LTI può essere calcolata come:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{(b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_N e^{-j\omega N})}{(1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_M e^{-j\omega M})} \quad \text{notiamo la somiglianza con la trasformata Z}$$

Ricordando ora la relazione tra la DTFT e la trasformata Z (*in particolare la DTFT è una trasformata Z con $\rho = 1$*) e applicando il teorema della convoluzione otteniamo:

$$Y(z) = Z[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$$

Ricordando che $z = \rho e^{j\omega}$ possiamo scrivere $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$, che ci fa capire che il nostro sistema è intuitibile dalla posizione dei poli e degli zeri.

FIR

Ad esempio, un sistema FIR, quindi a risposta finita, non ricorsivo, ricordiamo avere coefficienti a_j nulli dall'equazione alle differenze; la sua risposta in frequenza sarà quindi $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}$, in linea con quanto visto anche graficamente prima.

IIR

Allo stesso modo, un sistema IIR, puramente ricorsivo, sappiamo che ha tutti i coefficienti b_k tranne b_0 nulli; la sua risposta in frequenza è quindi $H(z) = \frac{1}{1+a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$, in linea con quanto visto graficamente.

CASO GENERALE

Nel caso generale la risposta in frequenza di un sistema LTI è $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$

STABILITÀ BIBO E TRASFORMATA Z

Per sistemi **causali**, condizione necessaria e sufficiente a garantire la stabilità BIBO è che $H(z)$ abbia tutti i poli contenuti nel cerchio di raggio unitario escluso.

Per sistemi **anticausalì** la condizione è che $H(z)$ abbia i poli all'esterno del cerchio unitario escluso.

In sintesi, per avere la stabilità BIBO è necessario che la circonferenza di raggio unitario sia contenuta nella ROC del sistema.

REALIZZABILITÀ FISICA DI UN SISTEMA LTI

Un sistema LTI è fisicamente realizzabile se la sua risposta all'impulso $h(n)$ è:

- **CAUSALE:** la ROC di $H(z)$ corrisponde all'esterno di un cerchio di raggio $>$ del polo di $H(z)$ di valore massimo.
- **CON COEFFICIENTI REALI:** quindi, per ogni polo e per ogni zero complesso, deve essere presente anche il rispettivo complesso coniugato.
I poli e gli zeri sull'asse reale possono essere anche singoli.

PROGETTAZIONE FILTRI CON POLI E ZERI

- **POLI:** devono essere posizionati in prossimità del cerchio di raggio unitario (*ma non su di esso, altrimenti il sistema non sarebbe più stabile, in particolare tutti i poli devono cadere all'interno del cerchio di raggio unitario per far sì che la risposta sia causale*) nelle pulsazioni complesse z corrispondenti alle componenti armoniche nel segnale d'ingresso $x(n)$ da **enfatizzare**.
- **ZERI:** devono essere posizionati in prossimità delle pulsazioni complesse z corrispondenti alle componenti armoniche nel segnale d'ingresso $x(n)$ da **attenuare**.
Gli zeri possono essere posizionati in qualunque punto del piano complesso.