

# 1 Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator beschrieben durch die eine Wellenfunktion

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left( \frac{m\omega}{\sqrt{2}\hbar} x^2 + \sqrt{\frac{3m\omega}{2\hbar}} x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Und den Eigenfunktionen

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ \psi_1(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ \psi_2(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}\end{aligned}$$

und der Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

- a) Schreiben Sie die Wellenfunktion als eine Summe von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators und bestimmen Sie eine zeitabhängige Wellenfunktion  $\psi(x, t)$ .

Lösung: Durch scharfes hinsehen sieht man:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_1(x) + \frac{1}{2} \psi_2(x)$$

Der Faktor  $\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$  kommt in allen Eigenfunktionen vor. Betrachte also nur die Klammer,  $\psi_1$  ist die einzige Funktion die  $x^1$  enthält und  $\psi_2$  die einzige mit  $x^2$ . Es gilt

$$\psi(x, t) = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} \psi_k(x)$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= N_0 e^{-iE_0 t/\hbar} \psi_0(x) + N_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1(x) + N_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2(x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{3}{2}i\omega t} \psi_1(x) + \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \psi_2(x)\end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie Orts- und Impulsmittelwert  $\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle$  und  $\langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle$  im Zustand  $\psi(x, t)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \langle \psi | x | \psi \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \psi^* (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \psi \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\end{aligned}$$

Da die  $N_i$  rein reell sind, ist  $N_i = N_i^*$ . Außerdem ist  $N_0 = 0$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 |0\rangle + \sqrt{2} N_2 |1\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2} N_1 |2\rangle + \sqrt{3} N_2 |3\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left( N_1 N_1 \langle 1|0\rangle + \sqrt{2} N_1 N_2 \langle 1|1\rangle + N_2 N_0 \langle 2|0\rangle + \sqrt{2} N_2 N_2 \langle 2|1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} N_1 N_1 \langle 1|2\rangle + \sqrt{3} N_1 N_2 \langle 1|3\rangle + \sqrt{2} N_2 N_1 \langle 2|2\rangle + \sqrt{3} N_2 N_2 \langle 2|3\rangle \right)\end{aligned}$$

Wegen  $\langle i|j \rangle = \delta_{i,j}$  vereinfacht sich der Term zu

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\sqrt{2} N_1 N_2 + \sqrt{2} N_2 N_1)$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, N_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left( \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}} \\ &\left( = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx \right)\end{aligned}$$

Da  $\langle x \rangle$  nicht von  $t$  abhängt, ist

$$\langle p \rangle = \frac{d \langle x \rangle}{dt} \tag{1}$$

$$= 0 \tag{2}$$

c) Überprüfen Sie Heisenbergs Prinzip

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Lösung: Berechne zuerst  $\langle x^2 \rangle$  und  $\langle p^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \psi^* (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \psi \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \end{aligned}$$