1 Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator beschrieben durch die eine Wellenfunktion

$$\psi(x,0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\sqrt{2}\hbar}x^2 + \sqrt{\frac{3m\omega}{2\hbar}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Und den Eigenfunktionen

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
\psi_1(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
\psi_2(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}
\end{aligned}$$

und der Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

a) Schreiben Sie die Wellenfunktion als eine Summe von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators und bestimmen Sie eine zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x,t)$.

Lösung: Durch scharfes hinsehen wieht man:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x) + \frac{1}{2}\psi_2(x)$$

Der Faktor $\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ kommt in allen Eigenfunktionen vor. Betrachte also nur die Klammer, ψ_1 ist die einzige Funktion die x^1 enthält und ψ_2 die einzige mit x^2. Es gilt

$$\psi(x,t) = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} \psi_k(x)$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= N_0 e^{-iE_0 t/\hbar}\psi_0(x) + N_1 e^{-iE_1 t/\hbar}\psi_1(x) + N_2 e^{-iE_2 t/\hbar}\psi_2(x) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\psi_1(x) + \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{2}i\omega t}\psi_2(x)
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie Orts- und Impulsmittelwert $\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle$ und $\langle p\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle$ im Zustand $\psi(x,t)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\psi^*(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\psi \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\left(N_0^*\langle 0| + N_1^*\langle 1| + N_2^*\langle 2|\right)\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\left(N_0|0\rangle + N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\right)
\end{aligned}$$

Da die N_i rein reell sind, ist $N_i = N_i^*$. Außerdem ist $N_0 = 0$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\,\hat{a}\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big) \\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\,\hat{a}^\dagger\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\big(N_1|0\rangle + \sqrt{2}N_2|1\rangle\big) \\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\big(\sqrt{2}N_1|2\rangle + \sqrt{3}N_2|3\rangle\big) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Big(N_1N_1\langle 1|0\rangle + \sqrt{2}N_1N_2\langle 1|1\rangle + N_2N_0\langle 2|0\rangle + \sqrt{2}N_2N_2\langle 2|1\rangle \\
&\quad + \sqrt{2}N_1N_1\langle 1|2\rangle + \sqrt{3}N_1N_2\langle 1|3\rangle + \sqrt{2}N_2N_1\langle 2|2\rangle + \sqrt{3}N_2N_2\langle 2|3\rangle\Big)
\end{aligned}$$

Wegen $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ vereinfacht sich der Term zu

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\left(\sqrt{2}N_1N_2 + \sqrt{2}N_2N_1\right)$$

$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, N_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}} \\
&\left(= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2\,dx\right)
\end{aligned}$$

Da $\langle x\rangle$ nicht von t abhängt, ist

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle &= \frac{d\langle x\rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) Überprüfen Sie Heisenbergs Prinzip

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) \\
\Rightarrow \hat{x}^2 &= \Big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2
\end{aligned}$$

Berechne dann $\langle x^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\psi^*(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2\psi \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\left(N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle\right)
\end{aligned}$$

Es ist wieder $N_0^* = N_0 = 0$ und $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(\\
&\qquad \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}\hat{a}(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}\hat{a}^\dagger(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(\\
&\qquad \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}(N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}(\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle) \\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger(N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger(\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(\\
&\qquad \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\left(N_1 \cdot 0 + \sqrt{2}N_2 |0\rangle\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \left(\sqrt{2}\sqrt{2} N_1 |1\rangle + \sqrt{3}\sqrt{3} N_2 |2\rangle\right) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \left(N_1 |1\rangle + \sqrt{2}\sqrt{2} N_2 |2\rangle\right) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \left(\sqrt{2}\sqrt{3} N_1 |3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4} N_2 |4\rangle\right)\Big) \\
= &\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(0 + (2N_1N_1 + 3N_2N_2) + (N_1N_1 + 2N_2N_2) + 0\Big) \\
= &\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(3N_1^2 + 5N_2^2\Big) \\
= &\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4}\Big) \\
= &\frac{7}{4}\frac{\hbar}{m\omega}
\end{aligned}
$$

Integration von $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{x}^2\psi(x)\,dx$ ergibt das Gleiche (mit CAS)

Bei der Lösung ist es enorm hilfreich, dass $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$, d.h. fast alle Brakets fallen weg. Man kann sich außerdem überlegen, wie $\hat{a}\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^\dagger, \ldots$ aussehen und spart sich damit einen Zwischenschritt und viel Schreibarbeit.

Berechne nun $\langle p^2\rangle$. Dazu müssen wir zunächst überlegen, wie $\hat{p}^2$ in Ortsdarstellung aussieht.

$$\langle p\rangle = ? \cdot \hat{a} - \hat{a}^\dagger$$

2 Teilchen mit Spin im magnetischen Feld

Betrachten Sie ein Elektron in einem Überlagerungszustand durch

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ Spin $\frac{\hbar}{2}$ in x- bzw. y-Richtung zu messen.

Lösung: Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ den Spin $\frac{\hbar}{2}$ in x-Richtung zu messen:

$$
\begin{aligned}
\langle \psi | S_x | \psi \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right)^* \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{16}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\hbar}{16}2(1+3) = \frac{\hbar}{2}
\end{aligned}
$$

Genauso für die y-Richtung:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|S_y|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right)^{*}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\hbar}{16}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i+i\sqrt{3}\\ i+i\sqrt{3}\end{pmatrix}\\
&= \frac{i\hbar}{16}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}\\
&= \frac{i\hbar}{16}(-1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-3)\\
&= \frac{i\hbar}{16}0 = 0
\end{aligned}
$$

b) Das Teilchen ruht in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{B} = B_0 e_z$. Der Hamiltonoperator lautet

$$
\hat{H} = -\vec{\mu}\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}\vec{B}
$$

Berechnen Sie die Eigenvektoren und die Eigenwerte (Energien E_1, E_2) von $\hat{H}$. Ist ψ ein stationärer Zustand? Begründen Sie!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{e}{m}\vec{S}\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}B_0 e_x = \frac{e}{m}B_0 S_x = \frac{e}{m}B_0\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{e\hbar B_0}{2m}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Eigenwerte E_i von $\hat{H}$ erfüllen

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\psi_n &= E_i\psi_n\\
\frac{e\hbar B_0}{2m}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\psi_n &= E_i\psi_n
\end{aligned}
$$

$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, also ist

$$
E_1 = \frac{e\hbar B_0}{2m}, \qquad \psi_1 \in \left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right]
$$

$$E_2 = -\frac{e\hbar B_0}{2m}, \qquad \psi_2 \in \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Offensichtlich ist ψ weder im Eigenraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ noch im Eigenraum $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ enthalten deshalb kein Eigenvektor und nicht stationär.

c) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ die Energie E_1 bzw. E_2 zu messen. Geben Sie anschließend den Mittelwert der Energien

$$\langle E \rangle = \langle \psi | E | \psi \rangle$$

an.