Moderne Physik für Informatiker
Zusammenfassung

Patrick Petersen

17. Juli 2014

Zusammenfassung

Zusammenfassung der "Moderne Physik für Informatiker"-Vorlesung von Prof. Dr.Schnirman.

Inhaltsverzeichnis

1 Mathe Tricks

Trigonometrische Funktionen:

$$1 = sin^2(x) + cos^2(x) \tag{1}$$
$$\sin(x+y) = \sin(x) * cos(y) + \cos(x) * sin(y) \tag{2}$$
$$\sin(x-y) = \sin(x) * cos(y) - \cos(x) * sin(y) \tag{3}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x) * cos(y) - \sin(x) * sin(y) \tag{4}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x) * cos(y) + \sin(x) * sin(y) \tag{5}$$

Ableitung:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{z}{t} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{6}$$

Kugelkoordinaten:

$$x = r\sin(\theta) cos(\phi) \tag{7}$$
$$y = r\sin(\theta) sin(\phi) \tag{8}$$
$$z = r\cos(\theta) \tag{9}$$
$$\dot{x} = \dot{r}\sin(\theta)\cos(\phi) + r\cos(\theta)\cos(\phi)\dot{\theta} - r\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi} \tag{10}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin(\theta)\sin(\phi) + r\cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\theta} + r\sin(\theta)\cos(\phi)\dot{\phi} \tag{11}$$
$$\dot{z} = \dot{r}\cos(\theta) - r\sin(\theta)\dot{\theta} \tag{12}$$

Zylinderkoordinaten:

$$x = \rho\cos(\phi) \tag{13}$$
$$y = \rho\sin(\phi) \tag{14}$$
$$z = z \tag{15}$$

pq formel $= x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Komplexezahlen:
$|z| = \sqrt{z * z^*} = \sqrt{(a-ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$
$z * z^* = |z|$

Eigenvektoren: Bestimme λ mit $det(A - \lambda E)$ =char-poly. Löse Gleichungen nach 0 und setze in $|a|^2 + |b|^2 + ... = 1$, falls normiert, andernfalls normieren.

Determinante von 3x3-Matrix:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{16}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{17}$$

Inverse
$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$
$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix} \quad (18)$$

2 Newtonsche Mechanik

2.1 Konservative Kräfte

$[r, r_0] = \int_{r_0}^{r} F(r)dr \Rightarrow dw = Fdr$

$\frac{d}{dt}T = mv\dot{v} = vF \Rightarrow dT = VFdt = Fdr = dW$
Spezialfall: $F = -\vec{\nabla}V = \oint Fdr = 0$

2.2 Mehrere Massenpunkte

$mi\ddot{r}_i - -\sum_{i+g} F_{ig} \Rightarrow F_{ig} = -\frac{\partial}{\partial r_i}V([r_i - r_j])$

$p = \sum_i p_i = \sum_i m_i v_i, L = \sum r_i x p_i$

3 Analytische Mechanik

3.1 Lagrange

Lagrange Gleichung: $L = T - U$

MERKE: $F = -\nabla U \Leftrightarrow \int F = U$, U ist unabhängig von $\dot{q}_i$
relativistisch $\Rightarrow L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$
Euler-Langrange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
3N-s Gleichungen, s Zwangbedingungen
Verallgemeineter Impuls $p_i = \frac{dx}{dq_i}$ Zyklische Koordinaten:
L unabhängig von q_i also $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = const = P_i$ (verallgemeinter Impuls
Federschwinning: $\frac{k}{2} * (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_3)^2$
Aufstellen der Lagrgange Matrix aus Euler-Lagrgange gleichung. Aufstellen der $\dot{x_i} = ...$) eintragen in Matrix.

3.2 Wirkung

$s = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$, Wirkung zwischen $q(t_1) - q(t_2)$ minimal

$$\delta s \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d\partial L}{dt\partial \dot{q}} \right) \delta q, L' = L + \frac{d}{dt} f(\vec{q}, t) \Rightarrow \delta s = \delta s' = 0$$

3.3 Phasenraum

2n-Dimensionen

$\dot{x_j} = F_j(\vec{x}(q, \vec{p}F_j = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_j + f} & 1 \leq j \leq f \\ -\frac{\partial H}{\partial x_j - f} & f + 1 \leq j \leq 2nk \end{cases}$

3.4 Lioville-Theorem

Schließe von Zustand $t = 0$ auf $t = 1$, dabei leibt Volumen gleich. $\vec{x} \rightarrow x(\vec{t} + dt) = g$

$V(t) = \int f(x)d^{2f} \Rightarrow V(t + dt) = \int |det \frac{\partial g_i}{\partial x_i}|d^{2f} \Rightarrow 0$

$\frac{dV}{dt} = 0$

3.5 Hamilton

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) = E(\vec{p}, \vec{q}, t) \tag{19}$$

$$H(\vec{p}, \vec{p}, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t) - L(\vec{p}, \vec{\dot{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t) \tag{20}$$

Kanonischer Impuls (Verallgemeineter Impuls
$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t), \dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)$

Kanonische Gleichung = Hamilton Bewegungsgleichung
$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

Hamilton Prinzip = Prinzip der kleinen WIrkung
$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$, falls $\underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{zeitinvariant} = 0 \Rightarrow$ **Energie Erhalten**

3.6 Noether-Theorem

Falls eine Schar von bahnkurven existiert und invariant ist unter den transformierten Koordinanten (es gilt $q(t, \epsilon = 0) = q(t)$)
$L(q(t, \epsilon)^*, \dot{q}^*(t, \epsilon), t*) = L(q(t)*, \dot{q(t)}*, t*)$
es gilt $\frac{d}{d\epsilon} L(q(t, \epsilon)^*, \dot{q}^*(t, \epsilon), t*) = 0$
Man benutzt die Euler-Lagrgange-Gleichung:
$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} = 0$

Erweitertes Noether-Theorem
Falls nicht invariant bei transforierten Koordinaten:
$\frac{d}{d\epsilon}(L(q^*(t,\epsilon),\dot{q}^*(t,\epsilon),t^*))_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt}f(q(t),\dot{q}(t),t)$
Dafür L transofrmieren, ableiten nach Epsilon, anschließend umschreiben in eine totale ableitung der Zeit, falls dies geht gilt noethrer bedingung (SS12)

Noether-Ladung:
$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} - f$

4 Quantenmechanik

4.1 Wellengleichung

$\psi(t) = (\vec{\nabla})^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Lösungen:

- Transversalwellen $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E_k}e^{i\vec{k}\vec{r}-\omega t}$

- Longitunalwellen $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B_k}e^{i\vec{k}\vec{r}-\omega t}$

mit: $\omega = c|\vec{k}|$

$\psi(t)$ nicht Galilei-invariant $\Rightarrow K \to K' \qquad \psi(t) \neq \psi(t')$

4.2 Operatoren

Lineare Abbildung:

- Homogen: $f(ax) = af(x)$
- Adaptiv: $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- Homogen und Adaptiv: $f(ax+y) = af(x) + f(y)$

Hermitsch Operator:

- Hermitesch ist: $A^\dagger = (A^*)^T$
- Für Hermitesch muss bei Matrix etc. gelten $A = A^\dagger$
- $\int dx f^*(x)[P(g(x)] = \int dx(P[f(x)])^* g(x)$

Kommutator:
$[a,b] = ab - ba$, 0 wenn a und b kommutieren also wenn $ab = ba$ gilt.

- alternierend (antisymmetrisch): $[a,b] = -[b,a]$
- Linear: $[\lambda a + \mu b, c] = \lambda[a,c] + \mu[b,c]$
- Jacobi-Identität: $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$

- Produktregel: $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c], [ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$
- Regel: $[\lambda a + \mu b, c] = \lambda[a, c] + \mu[b, c]$

Imulsoperator:
$\hat{p} = -i * h * \frac{\partial}{\partial x}$, für eine ebene Welle $\phi(x) = e^{eik}$. $\hat{\phi}(x) = \hbar k \psi(x)$
Imulsoperator ist hermitesch

Ortsoperator:
$\hat{x} = \int_{\mathbb{R}} x|phi(x)|^2 dx$. Ist Hermitesch

Hamilton-Operator (Energieoperator)
$\hat{H} = \mathrm{i}\,\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t)\,\psi(t), \hbar = \frac{h}{2\pi}$

Für 1D: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(\hat{x})$

Schrödingergleichung:
Allgemeiner Form: $\hat{H}|\,\psi(t)\rangle = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\,\psi(t)\rangle$
Mit Hamilton-Operator: $\hat{H}\psi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t)$

4.3 Observable

2 Observable sind komperativ wenn sie kommutieren.

Betragsquadrat
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte für das Teilchen in Ort x zu sein:
$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^* \frac{\partial}{\partial x}\Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial x}\Psi^*)$

Normierungsbedingung:
$< \psi|\psi >= \int |\psi(x)|^2 = 1$

Wahrscheinlichkeitsdichte
$\rho(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$
für $\vec{x} \Rightarrow \vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*(\vec{\nabla}) - (\nabla\Psi^*)\Psi)$

$|\phi|^2 = \phi^*\phi$
$\nabla^2 = \Delta$

4.4 Kontinuitätsgleichung

$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$

4.5 Harmonischer Oszilator

$\vec{(x)} = \vec{A} * sin(\omega t + \phi_0)$
$\vec{(\dot{x})} = \omega\vec{A} * cos(\omega t + \phi_0)$
$\vec{(\ddot{x})} = -\omega^2$
Für Eigenfrequenz mussman die Eigenwerte von M berechnen. M kann hierbei

die komplette Matrix der Lagrange Funktion sein.

Alternativ:
$det(K - \omega^2 M) = 0$, wobei K die Matrix der Ks aus U ist und M die Matrix aus M aus T.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Anschließend homogenes lineares Gleichungssystem $(K - \omega^2 M)\vec{(v)} = 0$ lösen. Ggf normieren $x = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}}$

5 Maxwell-Gleichung

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\underbrace{\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}Transformationsinvariant$

Vakuum: $\rho = 0, \vec{j} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

6 Relativitätstheorie

6.1 Zeitdilatation

$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, t \equiv bewegterUhr$

6.2 Längenkontration

$dl' = \frac{dl}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, l \equiv$ Strecke aus Sicht der Bewegung

6.3 Energie

$E = \vec{p}\vec{v}$
$L = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$

6.4 4-Impuls

$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$p^\mu = (\frac{E}{c}, vecv) = \frac{m(c,\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

6.5 Eigenzeit

$T = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

7 New Stuff

7.1 Delta-Funktion

7.2 Gauss Verteilung

7.3 Unschärfe Relation

7.4 Wellenpakete

7.5 Gruppengeschwindigkeit

7.6 Dispersion

7.7 Gebundene Zustände

$\Psi(x,t) = \Psi(x,t)e^{\frac{-Et}{\hbar}} \Rightarrow \hat{H}\Psi(x,t) = E\Psi(x)$, mit Potential $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$
Falls V(x) stückweise konstant, löse:
$V(x) = V_1 x_1 \leq x < x_2, - - -$
$\hat{H}\Psi(x) = (E - V_n)\Psi(x)$ Lösungen: $e^{ikx}, k = \pm\sqrt{\frac{2m(E-V_n}{\hbar^2}}$

7.8 Randbedingungen

$\Psi(x), \frac{\partial x \Psi(x)}{\Psi x} \in C^1$

7.9 Streuzustände

nicht normiert, ebene Wellen für $x \to \infty$ und/oder $x \to -\infty$
$\Psi(x) = e^{ikx}$, Amplitude 1
$\vec{j} = \frac{\hbar k}{m} = v_g, p = |\Psi|^2 = 1 \Rightarrow j = p v_g = v_g$
Welche Anteile werden reflektiert (zurück gestreut) oder gehen weiter (vorwärts gestreut)

7.10 Potential Barriere

Breite a, für $x < a$ (I) und $x > a$ (III) $\Rightarrow V(x) = 0$
$0 \leq x$ (II) $\leq a \Rightarrow V(x) = V_0$

I+III: $k_1 = k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ Wellenvektor

II: $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0}{\hbar}}, k \in \mathbb{R}$ falls $E > V_0$, sonst $k_2 \in \mathbb{C}$

$\Psi_I(x) = e^{ik_1x} + \underbrace{\gamma e^{-ik_1x}}_{Reflexieren}, \gamma = A + B - 1$

$\Psi_{II}(x) = Ae^{ik_2x} + be^{ik_2x}, A = \frac{te^{-ik_1x}}{2}(1 + \frac{k_1}{k_2}), B = \frac{te^{ik_2x}}{2}(1 + \frac{k_1}{k_2})$

$\Psi_{III}(x) = \underbrace{t}_{Transsmission} e^{ik_3(x-a)}$

Für $E > V_0$

$|t|^2 = \frac{UE(E-V_0)}{UE(E-V_0)+V_0^2\sin^2(k_2a)}$

Für $E < V_0$

$|t|^2 = \frac{UE(E-V_0)}{UE(E-V_0)+V_0^2\sinh^2(ka)}$

mit: $k = \sqrt{\frac{2m(V_0-E}{\hbar}}$