1 Lagrangegleichungen

Betrachten sie ein gekoppeltes Pendel in einer Ebene mit der Masse m_1 und der Länge des Seiles l_1, auf dessen ein weiteres Pendel befestigt ist (Masse m_2 und Seillänge l_2).

a) Wie lautet die potentielle Energie des Systems im Schwerefeld (Schwerkraft auf wirkend auf einer Masse $F_z = -mg$)?

Lösung: Da beide Massen mit einander verbunden sind, wirkt auf der zweiten Masse eine Kraft abhängig vom Ort der ersten Masse. Insgesamt gilt:

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2(z_1)$$

b) Schreiben sie die Lagrange-Funktion L des Systems hin, mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Lösung: Als erstes beschreibt man die Position und Geschwindigkeit der Massen durch verallgemeinerte Koordinaten.

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin(\phi_1)l_1, & x_2 &= \sin(\phi_2)l_2 + x_1 \\ z_1 &= \cos(\phi_1)l_1, & z_2 &= \cos(\phi_1)l_1 + z_1 \\ \dot{x_1} &= \cos(\phi_1)l_1\dot{\phi_1}, & \dot{x_2} &= \cos(\phi_2)l_2\dot{\phi_2} + \dot{x_1} \\ \dot{z_1} &= -\sin(\phi_1)l_1\dot{\phi_1}, & \dot{z_2} &= -\sin(\phi_2)l_2\dot{\phi_2} + \dot{z_1} \\ v_1^2 &= \dot{x_1} + \dot{z_1} & v_2^2 &= \dot{x_2} + \dot{z_2} \end{aligned}$$

Danach stellt man die potentielle und kinetische Energie je Masse auf.

$$\begin{aligned} V_1 &= -m_1 g\cos(\phi_1)l_1, & V_2 &= -m_2 g(\cos(\phi_1)l_1 + z_1) \\ T_1 &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\phi}_1^2 & T_2 &= \frac{1}{2}m_1 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2\dot{\phi_1}\dot{\phi_2}\cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Lagrange-Funtkion L:

$$\begin{aligned} L &= T_1 + T_2 + V_1 + V_2 \\ &= \frac{1}{2}((m_1 + m_2)l_1^2\dot{\phi}_1^2 + m_2 l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2\dot{\phi}_1^2\dot{\phi}_2^2\cos(\phi_1 - \phi_2)) + g((m_1 + m_2)l_1\cos(\phi_1) + m_2 l_2\cos(\phi_2)) \end{aligned}$$

c) Benutzen Sie Die Lagrangegleichungen um die Bewegungsgleichungen herzuleiten. Zur Erinnerung:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{q_a}}) - \frac{\delta L}{\delta q_a} = 0$$

Lösung:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi_1}}) = ((m_1 + m_2)l_1^2\phi_1'' + m_2 l_1 l_2\phi_2''\cos(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_1 l_2\dot{\phi_2}\sin(\phi_1 - \phi_2)(\dot{\phi_1} - \dot{\phi_2})$$

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\phi_1} \dot{\phi_2} \sin(\phi_1 - \phi_2) + g(m_1 + m_2) l_2 sin(\phi_1)$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi_2}}) = m_2 l_2^2 \phi_2'' + m_2 l_1 l_2 \phi_1'' \cos(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_1 l_2 \phi_1 \sin(\phi_1 - \phi_2)(\dot{\phi_1} - \dot{\phi_2})$$
$$\frac{\delta L}{\delta \phi_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\phi_1} \dot{\phi_2} \sin(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_2 sin(\phi_2)$$

2 Zeitdilatation und Längenkontraktion

Trivial :D

3 Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator beschrieben durch die eine Wellenfunktion

$$\psi(x,0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\sqrt{2}\hbar}x^2 + \sqrt{\frac{3m\omega}{2\hbar}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Und den Eigenfunktionen

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$
$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$
$$\psi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

und der Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

a) Schreiben Sie die Wellenfunktion als eine Summe von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators und bestimmen Sie eine zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x,t)$.

Lösung: Durch scharfes hinsehen sieht man:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x) + \frac{1}{2}\psi_2(x)$$

Der Faktor $\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ kommt in allen Eigenfunktionen vor. Betrachte also nur die Klammer, ψ_1 ist die einzige Funktion die x^1 enthält und ψ_2 die einzige mit x^2. Es gilt

$$\psi(x,t) = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} \psi_k(x)$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= N_0 e^{-iE_0t/\hbar}\psi_0(x) + N_1 e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1(x) + N_2 e^{-iE_2t/\hbar}\psi_2(x)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\psi_1(x) + \frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}i\omega t}\psi_2(x)
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie Orts- und Impulsmittelwert $\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle$ und $\langle p\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle$ im Zustand $\psi(x,t)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\langle\psi^*|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|\psi\rangle\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(N_0^*\langle 0| + N_1^*\langle 1| + N_2^*\langle 2|)\,(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\,(N_0|0\rangle + N_1|1\rangle + N_2|2\rangle)
\end{aligned}$$

Da die N_i rein reell sind, ist $N_i = N_i^*$. Außerdem ist $N_0 = 0$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\,\hat{a}\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big)\\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\,\hat{a}^\dagger\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\big(N_1|0\rangle + \sqrt{2}N_2|1\rangle\big)\\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\big(\sqrt{2}N_1|2\rangle + \sqrt{3}N_2|3\rangle\big)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Big(N_1N_1\langle 1|0\rangle + \sqrt{2}N_1N_2\langle 1|1\rangle + N_2N_0\langle 2|0\rangle + \sqrt{2}N_2N_2\langle 2|1\rangle\\
&\quad + \sqrt{2}N_1N_1\langle 1|2\rangle + \sqrt{3}N_1N_2\langle 1|3\rangle + \sqrt{2}N_2N_1\langle 2|2\rangle + \sqrt{3}N_2N_2\langle 2|3\rangle\Big)
\end{aligned}$$

Wegen $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ vereinfacht sich der Term zu

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Big(\sqrt{2}N_1N_2 + \sqrt{2}N_2N_1\Big)$$

$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, N_2 = \frac{1}{2}$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Big(\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\Big)$$

$$= \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}}$$

$$\Big(= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2 \, dx \Big)$$

Da $\langle x \rangle$ nicht von t abhängt, ist

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \frac{d \langle x \rangle}{dt} \\ &= 0\end{aligned}$$

c) Überprüfen Sie Heisenbergs Prinzip

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \Rightarrow \hat{x}^2 &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \\ \hat{p} &= \frac{\sqrt{2\hbar m\omega}}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \\ \Rightarrow \hat{p}^2 &= -\frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\end{aligned}$$

Berechne dann $\langle x^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\psi^*(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \psi \\ &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\left(N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle\right)\end{aligned}$$

Es ist wieder $N_0^* = N_0 = 0$ und $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}\hat{a}(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}\hat{a}^\dagger(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big((N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\, \hat{a}(N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \\
&\qquad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\, \hat{a}(\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle) \\
&\qquad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\, \hat{a}^\dagger(N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \\
&\qquad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\, \hat{a}^\dagger(\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big((N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\, (N_1 \cdot 0 + \sqrt{2}N_2 |0\rangle) \\
&\qquad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\, (\sqrt{2}\sqrt{2}N_1 |1\rangle + \sqrt{3}\sqrt{3}N_2 |2\rangle) \\
&\qquad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\, (N_1 |1\rangle + \sqrt{2}\sqrt{2}N_2 |2\rangle) \\
&\qquad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\, (\sqrt{2}\sqrt{3}N_1 |3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4}N_2 |4\rangle)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(0 + (2N_1N_1 + 3N_2N_2) + (N_1N_1 + 2N_2N_2) + 0\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(3N_1^2 + 5N_2^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4}\Big) \\
&= \frac{7}{4}\frac{\hbar}{m\omega}
\end{aligned}
$$

Integration von $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{x}^2\psi(x)\,dx$ ergibt das Gleiche (mit CAS)

Bei der Lösung ist es enorm hilfreich, dass $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ ist, d.h. fast alle Brakets fallen weg. Man kann sich außerdem überlegen, wie $\hat{a}\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^\dagger, \ldots$ aussehen und spart sich damit einen Zwischenschritt und viel Schreibarbeit.

$$
\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\psi^*(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\psi \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}(N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|)\,(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)\,(N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)
\end{aligned}
$$

Es ist wieder $N_0^* = N_0 = 0$ und $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\,(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)\,(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|)\,(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)\,(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\Big((N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,\hat{a}\hat{a}(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle) \\
&\qquad - (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,\hat{a}\hat{a}^\dagger(N_1|1\rangle - N_2|2\rangle) \\
&\qquad - (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,\hat{a}^\dagger\hat{a}(N_1|1\rangle - N_2|2\rangle) \\
&\qquad + (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle)\Big) \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\Big((N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,\hat{a}(N_1|0\rangle + \sqrt{2}N_2|1\rangle) \\
&\qquad - (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,\hat{a}(\sqrt{2}N_1|2\rangle - \sqrt{3}N_2|3\rangle) \\
&\qquad - (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,\hat{a}^\dagger(N_1|0\rangle - \sqrt{2}N_2|1\rangle) \\
&\qquad + (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,\hat{a}^\dagger(\sqrt{2}N_1|2\rangle + \sqrt{3}N_2|3\rangle)\Big) \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\Big((N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,(0 + \sqrt{2}N_2|0\rangle) \\
&\qquad - (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,(\sqrt{2}\sqrt{2}N_1|1\rangle - \sqrt{3}\sqrt{3}N_2|2\rangle) \\
&\qquad - (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,(N_1|1\rangle - \sqrt{2}\sqrt{2}N_2|2\rangle) \\
&\qquad + (N_1\langle 1| + N_2\langle 2|)\,(\sqrt{2}\sqrt{3}N_1|3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4}N_2|4\rangle)\Big) \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\Big(0 - (2N_1^2 + 3N_2^2) - (N_1^2 + 2N_2^2) + 0\Big) \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}\Big(3N_1^2 + 5N_2^2\Big) \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}\Big(3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4}\Big) \\
&= \frac{7}{4}\hbar m\omega
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \\
&= \sqrt{\frac{7}{4}\frac{\hbar}{m\omega} - \frac{3\hbar}{2m\omega}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \\
\Delta p &= \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} \\
&= \sqrt{\langle p^2\rangle - 0}
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{\frac{7}{4}\hbar m\omega}$$

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{7}{16}\hbar^2 \geq \frac{4}{16}\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

4 Teilchen mit Spin im magnetischen Feld

Betrachten Sie ein Elektron in einem Überlagerungszustand durch

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ Spin $\frac{\hbar}{2}$ in x- bzw. y-Richtung zu messen.

Lösung: Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ den Spin $\frac{\hbar}{2}$ in x-Richtung zu messen:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|S_x|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right)^* \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\hbar}{16}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\hbar}{16}2(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{3})\\
&= \frac{\hbar}{16}2(1-3) = -\frac{\hbar}{2}
\end{aligned}$$

Genauso für die y-Richtung:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|S_y|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right)^* \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{\hbar}{16}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i+i\sqrt{3}\\ i+i\sqrt{3}\end{pmatrix}\\
&= \frac{i\hbar}{16}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}\\
&= \frac{i\hbar}{16}(-1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-3)\\
&= \frac{i\hbar}{16}0 = 0
\end{aligned}$$

b) Das Teilchen ruht in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{B} = B_0 e_z$. Der Hamilton-operator lautet

$$\hat{H} = -\vec{\mu}\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}\vec{B}$$

Berechnen Sie die Eigenvektoren und die Eigenwerte (Energien E_1, E_2) von $\hat{H}$. Ist ψ ein stationärer Zustand? Begründen Sie!

Lösung:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{e}{m}\vec{S}\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}B_0 e_x = \frac{e}{m}B_0 S_x = \frac{e}{m}B_0\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \frac{e\hbar B_0}{2m}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eigenwerte E_i von $\hat{H}$ erfüllen

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_n &= E_i\psi_n\\ \frac{e\hbar B_0}{2m}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\psi_n &= E_i\psi_n\end{aligned}$$

$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, also ist

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{e\hbar B_0}{2m}, & \psi_1 &\in \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]\\ E_2 &= -\frac{e\hbar B_0}{2m}, & \psi_2 &\in \left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

Offensichtlich ist ψ weder im Eigenraum $\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$ noch im Eigenraum $\left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]$ enthalten deshalb kein Eigenvektor und nicht stationär.

c) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ die Energie E_1 bzw. E_2 zu messen. Geben Sie anschließend den Mittelwert der Energien

$$\langle E\rangle = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$$

an.

Lösung:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{e\hbar B_0}{2m}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\\ \langle E\rangle &= \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\frac{e\hbar B_0}{2m}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}|\psi\rangle = \frac{e\hbar B_0}{2m}\langle\psi|\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}|\psi\rangle = -\frac{e\hbar B_0}{2m}\frac{\hbar}{2} = -\frac{e\hbar^2 B_0}{4m}\end{aligned}$$