

Moderne Physik für Informatiker

Zusammenfassung

Pascal Bies, Daniel Kosinski, Patrick Petersen

17. Juli 2014

Zusammenfassung

Zusammenfassung der "Moderne Physik für Informatiker"-Vorlesung
von Prof. Dr.Schnirman.

Inhaltsverzeichnis

1	Mathe Tricks	3
2	Newtonsche Mechanik	4
2.1	Konservative Kräfte	4
2.2	Mehrere Massenpunkte	4
3	Analytische Mechanik	4
3.1	Lagrange	4
3.2	Wirkung	5
3.3	Phasenraum	5
3.4	Liouville-Theorem	5
3.5	Hamilton	5
3.6	Noether-Theorem	5
4	Quantenmechanik	6
4.1	Wellengleichung	6
4.2	Operatoren	6
4.3	Observable	7
4.4	Kontinuitätsgleichung	7
4.5	Harmonischer Oszillator	7
5	Maxwell-Gleichung	8
6	Relativitätstheorie	8
6.1	Zeitdilatation	8
6.2	Längenkontraktion	8
6.3	Energie	8
6.4	4-Impuls	9
6.5	Eigenzeit	9
7	New Stuff	9
7.1	Delta-Funktion	9
7.2	Gauss Verteilung	9
7.3	Unschärfe Relation	9
7.4	Wellenpakete	9
7.5	Gruppengeschwindigkeit	9
7.6	Dispersion	10
7.7	Gebundene Zustände	10
7.8	Randbedingungen	10
7.9	Streuzustände	10
7.10	Potential Barriere	10

1 Mathe Tricks

Trigonometrische Funktionen:

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \quad (1)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y) \quad (2)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x) * \cos(y) - \cos(x) * \sin(y) \quad (3)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) * \cos(y) - \sin(x) * \sin(y) \quad (4)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x) * \cos(y) + \sin(x) * \sin(y) \quad (5)$$

Ableitung:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{x}{t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{y}{t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{z}{t} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6)$$

Kugelkoordinaten:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (7)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (8)$$

$$z = r \cos(\theta) \quad (9)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \quad (10)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} \quad (11)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (12)$$

Zylinderkoordinaten:

$$x = \rho \cos(\phi) \quad (13)$$

$$y = \rho \sin(\phi) \quad (14)$$

$$z = z \quad (15)$$

$$\text{pq formel} = x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Komplexe Zahlen:

$$|z| = \sqrt{z * z^*} = \sqrt{(a - ib)(a + ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z * z^* = |z|^2$$

Eigenvektoren: Bestimme λ mit $\det(A - \lambda E) = \text{char-poly}$. Löse Gleichungen nach 0 und setze in $|a|^2 + |b|^2 + \dots = 1$, falls normiert, andernfalls normieren.

Determinante von 3x3-Matrix:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (17)$$

Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix} \quad (18)$$

2 Newtonsche Mechanik

2.1 Konservative Kräfte

$$[r, r_0] = \int_{r_0}^r F(r) dr \Rightarrow dw = F dr$$

$$\frac{d}{dt} T = mv\dot{v} = vF \Rightarrow dT = VF dt = F dr = dW$$

$$\text{Spezialfall: } F = -\vec{\nabla} V = \oint F dr = 0$$

2.2 Mehrere Massenpunkte

$$m_i \ddot{r}_i = - \sum_{i+g} F_{ig} \Rightarrow F_{ig} = - \frac{\partial}{\partial r_i} V([r_i - r_j])$$

$$p = \sum_i p_i = \sum_i m_i v_i, L = \sum r_i x p_i$$

3 Analytische Mechanik

3.1 Lagrange

Lagrange Gleichung: $L = T - U$

MERKE: $F = -\nabla U \Leftrightarrow \int F = U$, U ist unabhängig von \dot{q}_i

relativistisch $\Rightarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Euler-Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

3N-s Gleichungen, s Zwangsbedingungen

Verallgemeinerter Impuls $p_i = \frac{dx}{dq_i}$ Zyklische Koordinaten:

L unabhängig von q_i also $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = \text{const} = P_i$ (verallgemeinerter Impuls

Federschwingung: $\frac{k}{2} * (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_3)^2$

Aufstellen der Lagrange Matrix aus Euler-Lagrange Gleichung. Aufstellen der $\dot{x}_i = \dots$ eintragen in Matrix.

3.2 Wirkung

$s = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$, Wirkung zwischen $q(t_1) - q(t_2)$ minimal

$$\delta s \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i, L' = L + \frac{d}{dt} f(\vec{q}, t) \Rightarrow \delta s = \delta s' = 0$$

3.3 Phasenraum

2n-Dimensionen

$$\dot{x}_j = F_j(\vec{x}(q, \vec{p}), F_j = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_j + f} & 1 \leq j \leq f \\ -\frac{\partial H}{\partial x_j - f} & f+1 \leq j \leq 2nk \end{cases}$$

3.4 Liouville-Theorem

Schließe von Zustand $t = 0$ auf $t = 1$, dabei bleibt Volumen gleich. $\vec{x} \rightarrow x(\vec{t} + dt) = g$

$$V(t) = \int f(x) d^{2f} \Rightarrow V(t + dt) = \int |det \frac{\partial g_i}{\partial x_i}| d^{2f} \Rightarrow 0$$

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

3.5 Hamilton

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) = E(\vec{p}, \vec{q}, t) \quad (19)$$

$$H(\vec{p}, \vec{p}, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t) - L(\vec{p}, \vec{q}(\vec{p}, \vec{q}, t), t) \quad (20)$$

Kanonischer Impuls (Verallgemeinerter Impuls)

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t), \dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)$$

Kanonische Gleichung = Hamilton Bewegungsgleichung

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Hamilton Prinzip = Prinzip der kleinen Wirkung

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \text{ falls } \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{\text{zeitinvariant}} = 0 \Rightarrow \text{Energie Erhalten}$$

3.6 Noether-Theorem

Falls eine Schar von Bahnkurven existiert und invariant ist unter den transformierten Koordinaten (es gilt $q(t, \epsilon = 0) = q(t)$)

$$L(q(t, \epsilon)^*, \dot{q}^*(t, \epsilon), t^*) = L(q(t)^*, \dot{q}(t)^*, t^*)$$

$$\text{es gilt } \frac{d}{d\epsilon} L(q(t, \epsilon)^*, \dot{q}^*(t, \epsilon), t^*) = 0$$

Man benutzt die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} = 0$$

Erweitertes Noether-Theorem

Falls nicht invariant bei transformierten Koordinaten:

$$\frac{d}{d\epsilon}(L(q^*(t, \epsilon), \dot{q}^*(t, \epsilon), t^*))_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt}f(q(t), \dot{q}(t), t)$$

Dafür L transformieren, ableiten nach Epsilon, anschließend umschreiben in eine totale ableitung der Zeit, falls dies geht gilt noethers bedingung (SS12)

Noether-Ladung:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} - f$$

4 Quantenmechanik

4.1 Wellengleichung

$$\psi(t) = (\vec{\nabla})^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Lösungen:

- Transversalwellen $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_k e^{i\vec{k}\vec{r} - \omega t}$
- Longitudinalwellen $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_k e^{i\vec{k}\vec{r} - \omega t}$

mit: $\omega = c|\vec{k}|$

$\psi(t)$ nicht Galilei-invariant $\Rightarrow K \rightarrow K' \quad \psi(t) \neq \psi(t')$

4.2 Operatoren

Lineare Abbildung:

- Homogen: $f(ax) = af(x)$
- Adaptiv: $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- Homogen und Adaptiv: $f(ax+y) = af(x) + f(y)$

Hermitsch Operator:

- Hermesch ist: $A^\dagger = (A^*)^T$
- Für Hermesch muss bei Matrix etc. gelten $A = A^\dagger$
- $\int dx f^*(x)[P(g(x))] = \int dx (P[f(x)])^* g(x)$

Kommutator:

$[a, b] = ab - ba$, 0 wenn a und b kommutieren also wenn $ab = ba$ gilt.

- alternierend (antisymmetrisch): $[a, b] = -[b, a]$
- Linear: $[\lambda a + \mu b, c] = \lambda[a, c] + \mu[b, c]$
- Jacobi-Identität: $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

- Produktregel: $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$, $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$
- Regel: $[\lambda a + \mu b, c] = \lambda[a, c] + \mu[b, c]$

Impulsoperator:

$$\hat{p} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x}, \text{ für eine ebene Welle } \phi(x) = e^{ikx}. \hat{p}\phi(x) = \hbar k \phi(x)$$

Impulsoperator ist hermitesch

Ortsoperator:

$$\hat{x} = \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx. \text{ Ist Hermitesch}$$

Hamilton-Operator (Energieoperator)

$$\hat{H} = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t), \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\text{Für 1D: } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(\hat{x})$$

Schrödingergleichung:

$$\text{Allgemeiner Form: } \hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle$$

$$\text{Mit Hamilton-Operator: } \hat{H}\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t)$$

4.3 Observable

2 Observable sind komperativ wenn sie kommutieren.

Betragsquadrat

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte für das Teilchen in Ort \mathbf{x} zu sein:

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial x} \Psi^*)$$

Normierungsbedingung:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int |\psi(x)|^2 = 1$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$$

$$\text{für } \vec{x} \Rightarrow \vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* (\vec{\nabla}) - (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi)$$

$$|\phi|^2 = \phi^* \phi$$

$$\nabla^2 = \Delta$$

4.4 Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

4.5 Harmonischer Oszillator

$$\vec{x} = \vec{A} * \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\dot{\vec{x}} = \omega \vec{A} * \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$$

Für Eigenfrequenz mussman die Eigenwerte von M berechnen. M kann hierbei

die komplette Matrix der Lagrange Funktion sein.

Alternativ:

$\det(K - \omega^2 M) = 0$, wobei K die Matrix der K_s aus U ist und M die Matrix aus M aus T.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Anschließend homogenes lineares Gleichungssystem $(K - \omega^2 M)\vec{v} = 0$ lösen.

Ggf normieren $x = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$

5 Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Transformationsinvariant}}$$

Vakuum: $\rho = 0, \vec{j} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

6 Relativitätstheorie

6.1 Zeitdilatation

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, t \equiv \text{bewegter Uhr}$$

6.2 Längenkontraktion

$$dl' = \frac{dl}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, l \equiv \text{Strecke aus Sicht der Bewegung}$$

6.3 Energie

$$E = \vec{p} \vec{v}$$

$$L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

6.4 4-Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, vecv\right) = \frac{m(c, \vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

6.5 Eigenzeit

$$T = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

7 New Stuff

7.1 Delta-Funktion

$$\int \rho(q) dq = 1, \text{ falls } f(q) \text{ stetig}$$
$$\int \rho(q - q_0) f(q) dq = f(q_0)$$

7.2 Gauss Verteilung

$$\Psi = N e^{ik_0 x} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4b^2}}, N = \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}}$$

Erwartungswert:

$$\langle x \rangle = \langle \Psi | x | \Psi \rangle = N^2 \int (y + y_0) \underbrace{e^{-\frac{y^2}{2b^2}}}_a dy \Rightarrow y * a = 0 \Rightarrow \langle \Psi | x | \Psi \rangle = x_0$$

Variation:

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle [x^{????} - \langle x \rangle^2] \rangle \Rightarrow (\Delta x)^2 = b^2 \Rightarrow b \text{ ist Breite der}$$

Verteilung

$$(\Delta p)^2 = \hbar(\Delta k)^2 = \hbar^2 c^2 = \frac{\hbar^2}{4b^2}$$

7.3 Unschärfe Relation

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$


7.4 Wellenpakete

$$t = 0 \Psi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} g(k) e^{ikx}, H = \frac{p^2}{2m}$$
$$t > 0 \Psi(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} g(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t}, \hbar\omega(k) = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

7.5 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \left. \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right|_{k_0}$$

7.6 Dispersion



$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\hbar}{4} \left(1 + \frac{a^2 t^2}{b^2} \right), a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2}$$

7.7 Gebundene Zustände

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{-\frac{Et}{\hbar}} \Rightarrow \hat{H} \Psi(x, t) = E \Psi(x), \text{ mit Potential } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

Falls $V(x)$ stückweise konstant, löse:

$$V(x) = V_1 x_1 \leq x < x_2, \dots$$

$$\hat{H} \Psi(x) = (E - V_n) \Psi(x) \text{ Lösungen: } e^{ikx}, k = \pm \sqrt{\frac{2m(E - V_n)}{\hbar^2}}$$

7.8 Randbedingungen

$$\Psi(x), \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \in C^1$$

7.9 Streuzustände

nicht normiert, ebene Wellen für $x \rightarrow \infty$ und/oder $x \rightarrow -\infty$

$$\Psi(x) = e^{ikx}, \text{ Amplitude } 1$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar k}{m} = v_g, p = |\Psi|^2 = 1 \Rightarrow j = pv_g = v_g$$

Welche Anteile werden reflektiert (zurück gestreut) oder gehen weiter (vorwärts gestreut)

7.10 Potential Barriere

Breite a , für $x < a$ (I) und $x > a$ (III) $\Rightarrow V(x) = 0$

$$0 \leq x \text{ (II)} \leq a \Rightarrow V(x) = V_0$$

$$\text{I+III: } k_1 = k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ Wellenvektor}$$

$$\text{II: } k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}, k \in \mathbb{R} \text{ falls } E > V_0, \text{ sonst } k_2 \in \mathbb{C}$$

$$\Psi_I(x) = e^{ik_1 x} + \underbrace{\gamma e^{-ik_1 x}}_{\text{Reflexieren}}, \gamma = A + B - 1$$

$$\Psi_{II}(x) = A e^{ik_2 x} + B e^{-ik_2 x}, A = \frac{t e^{-ik_1 x}}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right), B = \frac{t e^{ik_2 x}}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right)$$

$$\Psi_{III}(x) = \underbrace{t}_{\text{Transmission}} e^{ik_3(x-a)}$$

Für $E > V_0$

$$|t|^2 = \frac{U E (E - V_0)}{U E (E - V_0) + V_0^2 \sin^2(k_2 a)}$$

Für $E < V_0$

$$|t|^2 = \frac{U E (E - V_0)}{U E (E - V_0) + V_0^2 \sinh^2(k a)}$$

$$\text{mit: } k = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$