1 Teilchen mit Spin im magnetischen Feld

Betrachten Sie ein Elektron mit einem Magnetischen Moment $\vec{\mu}$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{mc}\vec{S} = -\frac{e}{mc}\frac{\hbar}{2}\sigma \qquad (e > 0)$$

Das Teilchen ruht in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{B} = B_0(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y)$. Am Anfang bei $t = 0$ befindet sich das Elektron in einem Zustand, in dem die Wahrscheinlichkeit einen Wert $\frac{\hbar}{2}$ für die z-Komponente des Spins $\hat{S}_z$ zu messen $P_z\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ist, d.h. $P_z\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

a) Schreiben Sie den Anfangszustand ψ als Überlagerung von Eigenzuständen der Paulimatrix σ_z. Zur Erinnerung: Die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_z lauten:

$$\lambda_1 = 1, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -1, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, $\frac{\hbar}{2}$ in z-Richtung zu messen, berechne deshalb die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_z (sind bereits gegeben!). Die Eigenvektoren repräsentieren jeweils den Zustand „Spin $\pm\frac{\hbar}{2}$" in z-Richtung. ψ ist die normierte Superposition der Eigenvektoren (=Zustände) gewichtet mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normiere ψ' zu ψ:

$$\psi = \frac{\psi'}{\|\psi'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Der Hamiltonoperator des Systems lautet $\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Berechnen Sie die Eigenvektoren und die Eigenwerte (die Energien E_1, E_2) von $\hat{H}$. Ist ψ ein stationärer Zustand? Begründen Sie.

Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ &= -\frac{e}{mc}\frac{\hbar}{2}\sigma B_0(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_z) \\ &= -\frac{e\hbar B_0}{2mc}\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{e\hbar B_0}{2mc}(\sigma_x + \sqrt{3}\sigma_z)$$
$$= \underbrace{-\frac{e\hbar B_0}{2mc}}_{=:\Lambda}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\hat{H}$:

$$\begin{vmatrix}\sqrt{3}-E & \Lambda \\ \Lambda & -\sqrt{3}-E\end{vmatrix} = (E^2 - \Lambda^2(1+3)) = E^2 - 4\Lambda^2 \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow E_{1,2} = \pm 2\Lambda = \mp \frac{e\hbar B_0}{mc}$$

Eigenvektoren von $\hat{H}$:

$\lambda_1 = 2\Lambda$:

$$\begin{pmatrix}-2\Lambda & (1-i\sqrt{3})\Lambda \\ (1+i\sqrt{3})\Lambda & -2\Lambda\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-2 & 1-i\sqrt{3} \\ 2 & \frac{-2\cdot 2}{1+i\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}-2 & 1-i\sqrt{3} \\ 0 & \frac{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})} - \frac{4}{1+i\sqrt{3}}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{4}{(1+i\sqrt{3})} - \frac{4}{1+i\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -1\text{-Trick: Eigenraum zu } \lambda_1 = 2 \text{ ist } \left[\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1\end{pmatrix}\right]. \text{ Wähle } v_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1\end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -2\Lambda$:

$$\begin{pmatrix}2\Lambda & (1-i\sqrt{3})\Lambda \\ (1+i\sqrt{3})\Lambda & 2\Lambda\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 1-i\sqrt{3} \\ -2 & \frac{-2\cdot 2}{1+i\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 1-i\sqrt{3} \\ 0 & \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} + \frac{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -1\text{-Trick: Eigenraum zu } \lambda_2 = -2 \text{ ist } \left[\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1\end{pmatrix}\right]. \text{ Wähle } v_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1\end{pmatrix}.$$

ψ ist nicht stationär, da ψ nicht das vielfache eines Eigenvektors ist.

c) Schreiben Sie ψ als Linearkombination der Eigenzustände von $\hat{H}$ um.

Lösung:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Durch scharfes Hinsehen erkennt man (nicht wirklich...):

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{3}i}{4\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{3}i}{4\sqrt{2}}$$

d) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit in dem Zustand ψ die Energie E_1 und E_2 zu messen. Geben Sie anschließend den Mittelwert der Energie

$$\langle E \rangle = \psi^+ H \psi$$

Lösung: Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ Energie E_n zu messen ist