

# Moderne Physik für Informatiker

## Zusammenfassung

Patrick Petersen

17. Juli 2014

### **Zusammenfassung**

Zusammenfassung der "Moderne Physik für Informatiker"-Vorlesung  
von Prof. Dr.Schnirman.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mathe Tricks</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Newtonsche Mechanik</b>	<b>4</b>
2.1	Konservative Kräfte . . . . .	4
2.2	Mehrere Massenpunkte . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Analytische Mechanik</b>	<b>4</b>
3.1	Lagrange . . . . .	4
3.2	Wirkung . . . . .	5
3.3	Phasenraum . . . . .	5
3.4	Lioville-Theorem . . . . .	5
3.5	Hamilton . . . . .	5
3.6	Noether-Theorem . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Quantenmechanik</b>	<b>6</b>
4.1	Wellengleichung . . . . .	6
4.2	Operatoren . . . . .	6
4.3	Observable . . . . .	7
4.4	Harmonischer Oszillator . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Maxwell-Gleichung</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Relativitätstheorie</b>	<b>8</b>
6.1	Zeitdilatation . . . . .	8
6.2	Längenkontraktion . . . . .	8
6.3	Energie . . . . .	8
6.4	4-Impuls . . . . .	8
6.5	Eigenzeit . . . . .	8

# 1 Mathe Tricks

Trigonometrische Funktionen:

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \quad (1)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y) \quad (2)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x) * \cos(y) - \cos(x) * \sin(y) \quad (3)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) * \cos(y) - \sin(x) * \sin(y) \quad (4)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x) * \cos(y) + \sin(x) * \sin(y) \quad (5)$$

Ableitung:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{x}{t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{y}{t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{z}{t} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6)$$

Kugelkoordinaten:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (7)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (8)$$

$$z = r \cos(\theta) \quad (9)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \quad (10)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} \quad (11)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (12)$$

Zylinderkoordinaten:

$$x = \rho \cos(\phi) \quad (13)$$

$$y = \rho \sin(\phi) \quad (14)$$

$$z = z \quad (15)$$

$$\text{pq formel} = x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Komplexezahlen:

$$|z| = \sqrt{z * z^*} = \sqrt{(a - ib)(a + ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z * z^* = |z|^2$$

Eigenvektoren: Bestimme  $\lambda$  mit  $\det(A - \lambda E) = \text{char-poly}$ . Löse Gleichungen nach 0 und setze in  $|a|^2 + |b|^2 + \dots = 1$ , falls normiert, andernfalls normieren.

Determinante von 3x3-Matrix:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (17)$$

Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix} \quad (18)$$

## 2 Newtonsche Mechanik

### 2.1 Konservative Kräfte

$$[r, r_0] = \int_{r_0}^r F(r) dr \Rightarrow dw = F dr$$

$$\frac{d}{dt} T = m v \dot{v} = v F \Rightarrow dT = V F dt = F dr = dW$$

$$\text{Spezialfall: } F = -\vec{\nabla} V = \oint F dr = 0$$

### 2.2 Mehrere Massenpunkte

$$m_i \ddot{r}_i = - \sum_{i+g} F_{ig} \Rightarrow F_{ig} = - \frac{\partial}{\partial r_i} V([r_i - r_j])$$

$$p = \sum_i p_i = \sum_i m_i v_i, L = \sum r_i x p_i$$

## 3 Analytische Mechanik

### 3.1 Lagrange

$$\text{Lagrange Gleichung: } L = T - U$$

$$\text{MERKE: } F = -\nabla U \Leftrightarrow \int F = U$$

$$\text{Euler-Lagrange } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Verallgemeinerter Impuls  $p_i = \frac{dx}{dq_i}$  Zyklische Koordinaten:

L unabhängig von  $q_i$  also  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = \text{const} = P_i$  (verallgemeinerter Impuls

Federschwingung:  $\frac{k}{2} * (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_3)^2$

Aufstellen der Lagrange Matrix aus Euler-Lagrange Gleichung. Aufstellen der  $\dot{x}_i = \dots$  eintragen in Matrix.

### 3.2 Wirkung

$s = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ , Wirkung zwischen  $q(t_1) - q(t_2)$  minimal

$$\delta s \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i, L' = L + \frac{d}{dt} f(\vec{q}, t) \Rightarrow \delta s = \delta s' = 0$$

### 3.3 Phasenraum

2n-Dimensionen

$$\dot{x}_j = F_j(\vec{x}(q, \vec{p}), F_j = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_j + f} & 1 \leq j \leq f \\ -\frac{\partial H}{\partial x_j - f} & f+1 \leq j \leq 2nk \end{cases}$$

### 3.4 Liouville-Theorem

Schließe von Zustand  $t = 0$  auf  $t = 1$ , dabei bleibt Volumen gleich.  $\vec{x} \rightarrow x(\vec{t} + dt) = g$

$$V(t) = \int f(x) d^{2f} \Rightarrow V(t + dt) = \int |det \frac{\partial g_i}{\partial x_i}| d^{2f} \Rightarrow 0$$

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

### 3.5 Hamilton

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) = E(\vec{p}, \vec{q}, t) \quad (19)$$

$$H(\vec{p}, \vec{p}, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t) - L(\vec{p}, \vec{q}(\vec{p}, \vec{q}, t), t) \quad (20)$$

Kanonischer Impuls

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t), \dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)$$

Kanonische Gleichung = Hamilton Bewegungsgleichung

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Hamilton Prinzip = Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \text{ falls } \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \textbf{Energie Erhalten}$$

### 3.6 Noether-Theorem

Falls eine Schar von Bahnkurven existiert und invariant ist unter den transformierten Koordinaten (es gilt  $q(t, \epsilon = 0) = q(t)$ )

$$L(q(t, \epsilon)^*, \dot{q}^*(t, \epsilon), t^*) = L(q(t)^*, \dot{q}(t)^*, t^*)$$

$$\text{es gilt } \frac{d}{d\epsilon} L(q(t, \epsilon)^*, \dot{q}^*(t, \epsilon), t^*) = 0$$

Man benutzt die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} = 0$$

#### Erweitertes Noether-Theorem

Falls nicht invariant bei transformierten Koordinaten:

$$\frac{d}{d\epsilon}(L(q^*(t, \epsilon), \dot{q}^*(t, \epsilon), t^*))_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt}f(q(t), \dot{q}(t), t)$$

Dafür L transformieren, ableiten nach Epsilon, anschließend umschreiben in eine totale ableitung der Zeit, falls dies geht gilt Noether's Bedingung (SS12)

Noether-Ladung:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} - f$$

## 4 Quantenmechanik

### 4.1 Wellengleichung

$$\psi(t) = (\vec{\nabla})^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Lösungen:

- Transversalwellen  $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_k e^{i\vec{k}\vec{r} - \omega t}$
- Longitudinalwellen  $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_k e^{i\vec{k}\vec{r} - \omega t}$

mit:  $\omega = c|\vec{k}|$

$\psi(t)$  nicht Galilei-invariant  $\Rightarrow K \rightarrow K' \quad \psi(t) \neq \psi(t')$

### 4.2 Operatoren

Lineare Abbildung:

- Homogen:  $f(ax) = af(x)$
- Adaptiv:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- Homogen und Adaptiv:  $f(ax+y) = af(x) + f(y)$

Hermite'scher Operator:

- Hermite'sch ist:  $A^\dagger = (A^*)^T$
- Für Hermite'sch muss bei Matrix etc. gelten  $A = A^\dagger$
- $\int dx f^*(x) [P(g(x))] = \int dx (P[f(x)])^* g(x)$

Kommutator:

$[a, b] = ab - ba$ , 0 wenn  $a$  und  $b$  kommutieren also wenn  $ab = ba$  gilt.

- alternierend (antisymmetrisch):  $[a, b] = -[b, a]$
- Linear:  $[\lambda a + \mu b, c] = \lambda[a, c] + \mu[b, c]$
- Jacobi-Identität:  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ .
- Produktregel:  $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c], [ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ .

Impulsoperator:

$\langle p \rangle = \hat{p} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$ , für eine ebene Welle  $\phi(x) = e^{ikx}$ . Impulsoperator ist hermitesch

Ortsoperator:

$\langle x \rangle = \hat{x} = \int_{\mathbb{R}} x |\phi(x)|^2 dx$ . Ist Hermitesch Hamilton-Operator (Energieoperator)

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \hat{H} \psi(t), \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Schrödingergleichung:

$$\text{Allgemeiner Form: } i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

$$\text{Mit Hamilton-Operator: } i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t)$$

### 4.3 Observable

2 Observable sind kommutativ wenn sie kommutieren.

Betragsquadrat

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte für das Teilchen in Ort  $x$  zu sein:

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \text{grad } \Psi - \Psi \text{grad } \Psi^*)$$

Normierungsbedingung:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int |\psi(x)|^2 = 1$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

$$\phi^2 = \phi^* \phi$$

$$\nabla^2 = \Delta$$

### 4.4 Harmonischer Oszillator

$$\vec{x} = \vec{A} \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\dot{\vec{x}} = \omega \vec{A} \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$$

Für Eigenfrequenz muss man die Eigenwerte von  $M$  berechnen.  $M$  kann hierbei die komplette Matrix der Lagrange Funktion sein.

Alternativ:

$\det(K - \omega^2 M) = 0$ , wobei  $K$  die Matrix der  $K$ s aus  $U$  ist und  $M$  die Matrix aus  $M$  aus  $T$ .

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Anschließend homogenes lineares Gleichungssystem  $(K - \omega^2 M) \vec{v} = 0$  lösen.

Ggf normieren  $x = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$

## 5 Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ Transformationsinvariant}$$

$$\text{Vakuum: } \rho = 0, \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## 6 Relativitätstheorie

### 6.1 Zeitdilatation

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, t \equiv \text{bewegter Uhr}$$

### 6.2 Längenkontraktion

$$dl' = \frac{dl}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, l \equiv \text{Strecke aus Sicht der Bewegung}$$

### 6.3 Energie

$$E = \vec{p} \vec{v}$$

$$L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m c^2 + \frac{1}{2} m v^2, E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$$

### 6.4 4-Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \text{vecv} \right) = \frac{m(c, \vec{v})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

### 6.5 Eigenzeit

$$T = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$