

# 1 Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator beschrieben durch die eine Wellenfunktion

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left( \frac{m\omega}{\sqrt{2}\hbar} x^2 + \sqrt{\frac{3m\omega}{2\hbar}} x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Und den Eigenfunktionen

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ \psi_1(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ \psi_2(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}\end{aligned}$$

und der Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

- a) Schreiben Sie die Wellenfunktion als eine Summe von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators und bestimmen Sie eine zeitabhängige Wellenfunktion  $\psi(x, t)$ .

Lösung: Durch scharfes hinsehen sieht man:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_1(x) + \frac{1}{2} \psi_2(x)$$

Der Faktor  $\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$  kommt in allen Eigenfunktionen vor. Betrachte also nur die Klammer,  $\psi_1$  ist die einzige Funktion die  $x^1$  enthält und  $\psi_2$  die einzige mit  $x^2$ . Es gilt

$$\psi(x, t) = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} \psi_k(x)$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= N_0 e^{-iE_0 t/\hbar} \psi_0(x) + N_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1(x) + N_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2(x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{3}{2}i\omega t} \psi_1(x) + \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \psi_2(x)\end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie Orts- und Impulsmittelwert  $\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle$  und  $\langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle$  im Zustand  $\psi(x, t)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \langle \psi | x | \psi \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \psi^* (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \psi \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\end{aligned}$$

Da die  $N_i$  rein reell sind, ist  $N_i = N_i^*$ . Außerdem ist  $N_0 = 0$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 |0\rangle + \sqrt{2} N_2 |1\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2} N_1 |2\rangle + \sqrt{3} N_2 |3\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left( N_1 N_1 \langle 1|0\rangle + \sqrt{2} N_1 N_2 \langle 1|1\rangle + N_2 N_0 \langle 2|0\rangle + \sqrt{2} N_2 N_2 \langle 2|1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} N_1 N_1 \langle 1|2\rangle + \sqrt{3} N_1 N_2 \langle 1|3\rangle + \sqrt{2} N_2 N_1 \langle 2|2\rangle + \sqrt{3} N_2 N_2 \langle 2|3\rangle \right)\end{aligned}$$

Wegen  $\langle i|j \rangle = \delta_{i,j}$  vereinfacht sich der Term zu

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\sqrt{2} N_1 N_2 + \sqrt{2} N_2 N_1)$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, N_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left( \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}} \\ &\quad \left( = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx \right)\end{aligned}$$

Da  $\langle x \rangle$  nicht von  $t$  abhängt, ist

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \frac{d\langle x \rangle}{dt} \\ &= 0\end{aligned}$$

c) Überprüfen Sie Heisenbergs Prinzip

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \Rightarrow \hat{x}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \\ \hat{p} &= \frac{\sqrt{2\hbar m\omega}}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \\ \Rightarrow \hat{p}^2 &= -\frac{\hbar m\omega}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\end{aligned}$$

Berechne dann  $\langle x^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \psi^* (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \psi \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} (N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\end{aligned}$$

Es ist wieder  $N_0^* = N_0 = 0$  und  $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left( (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}\hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \right. \\ &\quad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\quad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger\hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\quad \left. + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left( (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (N_1 |0\rangle + \sqrt{2} N_2 |1\rangle) \right. \\ &\quad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (\sqrt{2} N_1 |2\rangle + \sqrt{3} N_2 |3\rangle) \\ &\quad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger (N_1 |0\rangle + \sqrt{2} N_2 |1\rangle) \\ &\quad \left. + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger (\sqrt{2} N_1 |2\rangle + \sqrt{3} N_2 |3\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left( (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 \cdot 0 + \sqrt{2} N_2 |0\rangle) \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2}\sqrt{2}N_1 |1\rangle + \sqrt{3}\sqrt{3}N_2 |2\rangle) \\
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 |1\rangle + \sqrt{2}\sqrt{2}N_2 |2\rangle) \\
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2}\sqrt{3}N_1 |3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4}N_2 |4\rangle) \Big) \\
& = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left( 0 + (2N_1N_1 + 3N_2N_2) + (N_1N_1 + 2N_2N_2) + 0 \right) \\
& = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left( 3N_1^2 + 5N_2^2 \right) \\
& = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left( 3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4} \right) \\
& = \frac{7}{4} \frac{\hbar}{m\omega}
\end{aligned}$$

Integration von  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{x}^2 \psi(x) dx$  ergibt das Gleiche (mit CAS)

Bei der Lösung ist es enorm hilfreich, dass  $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ , d.h. fast alle Brackets fallen weg. Man kann sich außerdem überlegen, wie  $\hat{a}\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^\dagger, \dots$  aussehen und spart sich damit einen Zwischenschritt und viel Schreibarbeit.

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle & = \langle \psi | \hat{p}^2 | \psi \rangle \\
& = -\frac{\hbar m\omega}{2} \psi^* (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \psi \\
& = -\frac{\hbar m\omega}{2} (N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)
\end{aligned}$$

Es ist wieder  $N_0^* = N_0 = 0$  und  $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$\begin{aligned}
& = -\frac{\hbar m\omega}{2} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
& = -\frac{\hbar m\omega}{2} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
& = -\frac{\hbar m\omega}{2} \left( (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}\hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \right. \\
& \quad - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle - N_2 |2\rangle) \\
& \quad - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger\hat{a} (N_1 |1\rangle - N_2 |2\rangle) \\
& \quad \left. + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \right) \\
& = -\frac{\hbar m\omega}{2} \left( (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}(\sqrt{2}N_1 |2\rangle - \sqrt{3}N_2 |3\rangle) \\
& - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger(N_1 |0\rangle - \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \\
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger(\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle) \Big) \\
= & -\frac{\hbar m \omega}{2} \Big( (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (0 + \sqrt{2}N_2 |0\rangle) \\
& - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2}\sqrt{2}N_1 |1\rangle - \sqrt{3}\sqrt{3}N_2 |2\rangle) \\
& - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 |1\rangle - \sqrt{2}\sqrt{2}N_2 |2\rangle) \\
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2}\sqrt{3}N_1 |3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4}N_2 |4\rangle) \Big) \\
= & -\frac{\hbar m \omega}{2} \Big( 0 - (2N_1^2 + 3N_2^2) - (N_1^2 + 2N_2^2) + 0 \Big) \\
= & \frac{\hbar m \omega}{2} \Big( 3N_1^2 + 5N_2^2 \Big) \\
= & \frac{\hbar m \omega}{2} \Big( 3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4} \Big) \\
= & \frac{7}{4} \hbar m \omega
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\
&= \sqrt{\frac{7}{4} \frac{\hbar}{m\omega} - \frac{3\hbar}{2m\omega}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \\
\Delta p &= \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \\
&= \sqrt{\langle p^2 \rangle - 0} \\
&= \sqrt{\frac{7}{4} \hbar m \omega} \\
(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 &= \frac{7}{16} \hbar^2 \leq \frac{8}{16} \hbar^2 = \frac{\hbar^2}{2}
\end{aligned}$$

## 2 Teilchen mit Spin im magnetischen Feld

Betrachten Sie ein Elektron in einem Überlagerungszustand durch

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit im Zustand  $\psi$  Spin  $\frac{\hbar}{2}$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung zu messen.

Lösung: Wahrscheinlichkeit im Zustand  $\psi$  den Spin  $\frac{\hbar}{2}$  in  $x$ -Richtung zu messen:

$$\begin{aligned} \langle \psi | S_x | \psi \rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right)^* \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{16} (1 + \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{16} 2(1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{3}) \\ &= \frac{\hbar}{16} 2(1 + 3) = \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

Genauso für die  $y$ -Richtung:

$$\begin{aligned} \langle \psi | S_y | \psi \rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right)^* \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{16} (1 + \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{3}) \begin{pmatrix} -i + i\sqrt{3} \\ i + i\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\hbar}{16} (1 + \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{3}) \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\hbar}{16} (-1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 3) \\ &= \frac{i\hbar}{16} 0 = 0 \end{aligned}$$

- b) Das Teilchen ruht in einem homogenen magnetischen Feld  $\vec{B} = B_0 e_z$ . Der Hamilton-operator lautet

$$\hat{H} = -\vec{\mu} \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} \vec{B}$$

Berechnen Sie die Eigenvektoren und die Eigenwerte (Energien  $E_1, E_2$ ) von  $\hat{H}$ . Ist  $\psi$  ein stationärer Zustand? Begründen Sie!

Lösung:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{e}{m} \vec{S} \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} B_0 e_x = \frac{e}{m} B_0 S_x = \frac{e}{m} B_0 \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e\hbar B_0}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eigenwerte  $E_i$  von  $\hat{H}$  erfüllen

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_n &= E_i\psi_n \\ \frac{e\hbar B_0}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi_n &= E_i\psi_n\end{aligned}$$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ , also ist

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{e\hbar B_0}{2m}, & \psi_1 &\in \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ E_2 &= -\frac{e\hbar B_0}{2m}, & \psi_2 &\in \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]\end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\psi$  weder im Eigenraum  $\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$  noch im Eigenraum  $\left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$  enthalten deshalb kein Eigenvektor und nicht stationär.

- c) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit im Zustand  $\psi$  die Energie  $E_1$  bzw.  $E_2$  zu messen. Geben Sie anschließend den Mittelwert der Energien

$$\langle E \rangle = \langle \psi | E | \psi \rangle$$

an.