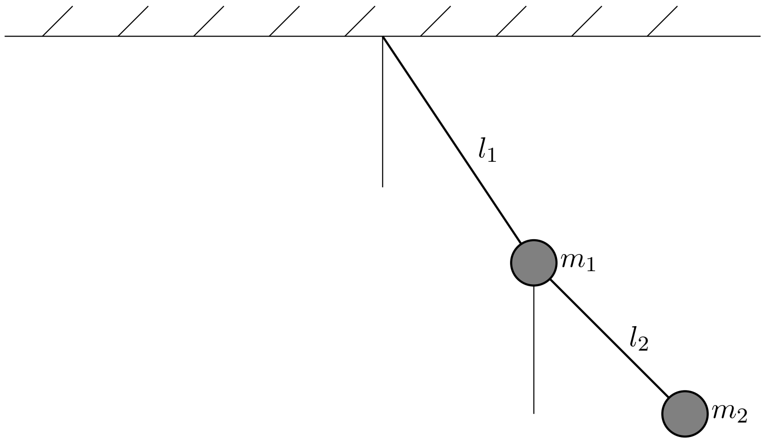

1 Doppelpendel

Betrachten Sie ein gekoppeltes Pendel in einer Ebene mit den Massen m_1 und m_2 und den Seillängen l_1 und l_2 (siehe Abbildung:)

a) Wie lautet die potentielle Energie des Systems im Schwerefeld (Schwerkraft auf eine Masse m: $F_z = -mg$).

Lösung: Potentielle Energie setzt sich aus V_1 und V_2 zusammen. Die Position der Massen sei mit $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ bzw. mit $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ bezeichnet (z-Achse zeige nach oben und x-Achse nach rechts).

$$\begin{aligned} V_1 &= -F_{1_z} z_1 \\ &= m_1 g z_1 \\ V_2 &= m_2 g z_2 \\ V &= V_1 + V_2 \\ &= m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \\ &= g(m_1 z_1 + m_2 z_2) \end{aligned}$$

b) Schreiben Sie die Lagrangefunktion L des Systems. Führen Sie Polarkoordinaten ein!

Lösung:

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1 \sin\phi_1 \\ x_1 &= l_1 \cos\phi_1 \\ y_2 &= y_1 + l_2 \sin\phi_2 \\ &= l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2 \\ z_2 &= z_1 + l_2 \cos\phi_2 \\ &= l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2 \end{aligned}$$

Potentielle Energie ist aus a) bekannt. Berechne noch kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} l_1 \sin\phi_1 \\ l_1 \cos\phi_1 \end{pmatrix} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi_1 \\ -\sin\phi_1 \end{pmatrix}^2}_{1} \\
&= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1 \\
T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2 \\ l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2 \end{pmatrix} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 l_1 \cos\phi_1 + \dot{\phi}_2 l_2 \cos\phi_2 \\ -\dot{\phi}_1 l_1 \sin\phi_1 - \dot{\phi}_2 l_2 \sin\phi_2 \end{pmatrix}^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 \Big((\dot{\phi}_1 l_1 \cos\phi_1 + \dot{\phi}_2 l_2 \cos\phi_2)^2 \\
&+ (\dot{\phi}_1 l_1 \cos\phi_1 + \dot{\phi}_2 l_2 \cos\phi_2)(-\dot{\phi}_1 l_1 \sin\phi_1 - \dot{\phi}_2 l_2 \sin\phi_2) \quad + (-\dot{\phi}_1 l_1 \sin\phi_1 - \dot{\phi}_2 l_2 \sin\phi_2)^2
\end{aligned}$$

2 Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator beschrieben durch die eine Wellenfunktion

$$\psi(x,0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\sqrt{2}\hbar} x^2 + \sqrt{\frac{3m\omega}{2\hbar}} x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Und den Eigenfunktionen

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\
\psi_1(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\
\psi_2(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}
\end{aligned}$$

und der Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

a) Schreiben Sie die Wellenfunktion als eine Summe von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators und bestimmen Sie eine zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x,t)$.

Lösung: Durch scharfes hinsehen wieht man:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x) + \frac{1}{2}\psi_2(x)$$

Der Faktor $\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ kommt in allen Eigenfunktionen vor. Betrachte also nur die Klammer, ψ_1 ist die einzige Funktion die x^1 enthält und ψ_2 die einzige mit x^2. Es gilt

$$\psi(x,t) = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} \psi_k(x)$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= N_0 e^{-iE_0 t/\hbar}\psi_0(x) + N_1 e^{-iE_1 t/\hbar}\psi_1(x) + N_2 e^{-iE_2 t/\hbar}\psi_2(x)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\psi_1(x) + \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{2}i\omega t}\psi_2(x)\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie Orts- und Impulsmittelwert $\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle$ und $\langle p\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle$ im Zustand $\psi(x,t)$

Lösung:

$$\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\psi^*(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\psi \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(N_0^*\langle 0| + N_1^*\langle 1| + N_2^*\langle 2|)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)(N_0|0\rangle + N_1|1\rangle + N_2|2\rangle$$

Da die N_i rein reell sind, ist $N_i = N_i^*$. Außerdem ist $N_0 = 0$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\,\hat{a}\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big)\\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\,\hat{a}^\dagger\big(N_1|1\rangle + N_2|2\rangle\big)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\big(N_1|0\rangle + \sqrt{2}N_2|1\rangle\big)\\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\big(N_1\langle 1| + N_2\langle 2|\big)\big(\sqrt{2}N_1|2\rangle + \sqrt{3}N_2|3\rangle\big)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Big(N_1N_1\langle 1|0\rangle + \sqrt{2}N_1N_2\langle 1|1\rangle + N_2N_0\langle 2|0\rangle + \sqrt{2}N_2N_2\langle 2|1\rangle\\
&\quad + \sqrt{2}N_1N_1\langle 1|2\rangle + \sqrt{3}N_1N_2\langle 1|3\rangle + \sqrt{2}N_2N_1\langle 2|2\rangle + \sqrt{3}N_2N_2\langle 2|3\rangle\Big)
\end{aligned}$$

Wegen $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ vereinfacht sich der Term zu

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Big(\sqrt{2}N_1N_2 + \sqrt{2}N_2N_1\Big)$$

$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, N_2 = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Big(\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\Big) \\
&= \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}} \\
&\Big(= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2\, dx\Big)
\end{aligned}
$$

Da $\langle x\rangle$ nicht von t abhängt, ist

$$
\begin{aligned}
\langle p\rangle &= \frac{d\,\langle x\rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

c) Überprüfen Sie Heisenbergs Prinzip

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) \\
\Rightarrow \hat{x}^2 &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2 \\
\hat{p} &= \frac{\sqrt{2\hbar m\omega}}{2i}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger) \\
\Rightarrow \hat{p}^2 &= -\frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)^2
\end{aligned}
$$

Berechne dann $\langle x^2\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\psi^*(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2\psi \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\left(N_0^*\,\langle 0| + N_1^*\,\langle 1| + N_2^*\,\langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_0\,|0\rangle + N_1\,|1\rangle + N_2\,|2\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Es ist wieder $N_0^* = N_0 = 0$ und $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\left(N_1\,\langle 1| + N_2\,\langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_1\,|1\rangle + N_2\,|2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(\left(N_1\,\langle 1| + N_2\,\langle 2|\right)\hat{a}\hat{a}(N_1\,|1\rangle + N_2\,|2\rangle)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \hat{a}\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \hat{a}^\dagger\hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\Big) \\
= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(&\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \hat{a} (N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \hat{a} (\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \hat{a}^\dagger (N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) \hat{a}^\dagger (\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle)\Big) \\
= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(&\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) (N_1 \cdot 0 + \sqrt{2}N_2 |0\rangle) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) (\sqrt{2}\sqrt{2}N_1 |1\rangle + \sqrt{3}\sqrt{3}N_2 |2\rangle) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) (N_1 |1\rangle + \sqrt{2}\sqrt{2}N_2 |2\rangle) \\
&+ \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right) (\sqrt{2}\sqrt{3}N_1 |3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4}N_2 |4\rangle)\Big) \\
= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(&0 + (2N_1N_1 + 3N_2N_2) + (N_1N_1 + 2N_2N_2) + 0\Big) \\
= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(&3N_1^2 + 5N_2^2\Big) \\
= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\Big(&3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4}\Big) \\
= \frac{7}{4}\frac{\hbar}{m\omega}&
\end{aligned}
$$

Integration von $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{x}^2\psi(x)\,dx$ ergibt das Gleiche (mit CAS)

Bei der Lösung ist es enorm hilfreich, dass $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$, d.h. fast alle Brakets fallen weg. Man kann sich außerdem überlegen, wie $\hat{a}\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^\dagger, \ldots$ aussehen und spart sich damit einen Zwischenschritt und viel Schreibarbeit.

$$
\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\psi^*(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\psi \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Es ist wieder $N_0^* = N_0 = 0$ und $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle\right)\\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\left(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle\right)\\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\Big(\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}\hat{a}(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\\
&\qquad - \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}\hat{a}^\dagger(N_1 |1\rangle - N_2 |2\rangle)\\
&\qquad - \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}(N_1 |1\rangle - N_2 |2\rangle)\\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger(N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\Big)\\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\Big(\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}(N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle)\\
&\qquad - \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}(\sqrt{2}N_1 |2\rangle - \sqrt{3}N_2 |3\rangle)\\
&\qquad - \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger(N_1 |0\rangle - \sqrt{2}N_2 |1\rangle)\\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)\hat{a}^\dagger(\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle)\Big)\\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\Big(\left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)(0 + \sqrt{2}N_2 |0\rangle)\\
&\qquad - \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)(\sqrt{2}\sqrt{2}N_1 |1\rangle - \sqrt{3}\sqrt{3}N_2 |2\rangle)\\
&\qquad - \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)(N_1 |1\rangle - \sqrt{2}\sqrt{2}N_2 |2\rangle)\\
&\qquad + \left(N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|\right)(\sqrt{2}\sqrt{3}N_1 |3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4}N_2 |4\rangle)\Big)\\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\Big(0 - (2N_1^2 + 3N_2^2) - (N_1^2 + 2N_2^2) + 0\Big)\\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}\Big(3N_1^2 + 5N_2^2\Big)\\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}\Big(3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4}\Big)\\
&= \frac{7}{4}\hbar m\omega
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}\\
&= \sqrt{\frac{7}{4}\frac{\hbar}{m\omega} - \frac{3\hbar}{2m\omega}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \\
\Delta p &= \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} \\
&= \sqrt{\langle p^2\rangle - 0} \\
&= \sqrt{\frac{7}{4}\hbar m\omega}
\end{aligned}
$$

$$
(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{7}{16}\hbar^2 \geq \frac{4}{16}\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{4}
$$

3 Teilchen mit Spin im magnetischen Feld

Betrachten Sie ein Elektron in einem Überlagerungszustand durch

$$
\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
$$

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ Spin $\frac{\hbar}{2}$ in x- bzw. y-Richtung zu messen.

Lösung: Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ den Spin $\frac{\hbar}{2}$ in x-Richtung zu messen:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|S_x|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right)^* \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{16}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{16}2(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{3}) \\
&= \frac{\hbar}{16}2(1-3) = -\frac{\hbar}{2}
\end{aligned}
$$

Genauso für die y-Richtung:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|S_y|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right)^* \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{16}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i+i\sqrt{3} \\ i+i\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i\hbar}{16}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}\\
&= \frac{i\hbar}{16}(-1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-3)\\
&= \frac{i\hbar}{16}0 = 0
\end{aligned}
$$

b) Das Teilchen ruht in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{B} = B_0 e_z$. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = -\vec{\mu}\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}\vec{B}$$

Berechnen Sie die Eigenvektoren und die Eigenwerte (Energien E_1, E_2) von $\hat{H}$. Ist ψ ein stationärer Zustand? Begründen Sie!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{e}{m}\vec{S}\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}B_0 e_x = \frac{e}{m}B_0 S_x = \frac{e}{m}B_0\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{e\hbar B_0}{2m}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Eigenwerte E_i von $\hat{H}$ erfüllen

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\psi_n &= E_i\psi_n\\
\frac{e\hbar B_0}{2m}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\psi_n &= E_i\psi_n
\end{aligned}
$$

$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, also ist

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{e\hbar B_0}{2m}, \qquad \psi_1 \in \left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right]\\
E_2 &= -\frac{e\hbar B_0}{2m}, \qquad \psi_2 \in \left[\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist ψ weder im Eigenraum $\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right]$ noch im Eigenraum $\left[\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right]$ enthalten deshalb kein Eigenvektor und nicht stationär.

c) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ die Energie E_1 bzw. E_2 zu messen. Geben Sie anschließend den Mittelwert der Energien

$$\langle E\rangle = \langle\psi|E\hat{H}|\psi\rangle$$

an.

Lösung:

$$\hat{H} = \frac{e\hbar B_0}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle E \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{e\hbar B_0}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} | \psi \rangle = \frac{e\hbar B_0}{2m} \langle \psi | \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} | \psi \rangle = -\frac{e\hbar B_0}{2m} \frac{\hbar}{2} = -\frac{e\hbar^2 B_0}{4m}$$