

1 Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator beschrieben durch die eine Wellenfunktion

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\sqrt{2}\hbar} x^2 + \sqrt{\frac{3m\omega}{2\hbar}} x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Und den Eigenfunktionen

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ \psi_1(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ \psi_2(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}\end{aligned}$$

und der Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

- a) Schreiben Sie die Wellenfunktion als eine Summe von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators und bestimmen Sie eine zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x, t)$.

Lösung: Durch scharfes hinsehen sieht man:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_1(x) + \frac{1}{2} \psi_2(x)$$

Der Faktor $\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$ kommt in allen Eigenfunktionen vor. Betrachte also nur die Klammer, ψ_1 ist die einzige Funktion die x^1 enthält und ψ_2 die einzige mit x^2 . Es gilt

$$\psi(x, t) = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle = \sum_k N_k e^{-iE_k t/\hbar} \psi_k(x)$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= N_0 e^{-iE_0 t/\hbar} \psi_0(x) + N_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1(x) + N_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2(x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{3}{2}i\omega t} \psi_1(x) + \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \psi_2(x)\end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie Orts- und Impulsmittelwert $\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle$ und $\langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle$ im Zustand $\psi(x, t)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \langle \psi | x | \psi \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \psi^* (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \psi \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\end{aligned}$$

Da die N_i rein reell sind, ist $N_i = N_i^*$. Außerdem ist $N_0 = 0$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 |0\rangle + \sqrt{2} N_2 |1\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2} N_1 |2\rangle + \sqrt{3} N_2 |3\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left(N_1 N_1 \langle 1|0\rangle + \sqrt{2} N_1 N_2 \langle 1|1\rangle + N_2 N_0 \langle 2|0\rangle + \sqrt{2} N_2 N_2 \langle 2|1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} N_1 N_1 \langle 1|2\rangle + \sqrt{3} N_1 N_2 \langle 1|3\rangle + \sqrt{2} N_2 N_1 \langle 2|2\rangle + \sqrt{3} N_2 N_2 \langle 2|3\rangle \right)\end{aligned}$$

Wegen $\langle i|j \rangle = \delta_{i,j}$ vereinfacht sich der Term zu

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\sqrt{2} N_1 N_2 + \sqrt{2} N_2 N_1)$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, N_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left(\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}} \\ &\quad \left(= \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx \right)\end{aligned}$$

Da $\langle x \rangle$ nicht von t abhängt, ist

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \frac{d\langle x \rangle}{dt} \\ &= 0\end{aligned}$$

c) Überprüfen Sie Heisenbergs Prinzip

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \Rightarrow \hat{x}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \\ \hat{p} &= \frac{\sqrt{2\hbar m\omega}}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \\ \Rightarrow \hat{p}^2 &= -\frac{\hbar m\omega}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\end{aligned}$$

Berechne dann $\langle x^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \psi^* (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \psi \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} (N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)\end{aligned}$$

Es ist wieder $N_0^* = N_0 = 0$ und $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left((N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}\hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \right. \\ &\quad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\quad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger\hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\ &\quad \left. + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left((N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (N_1 |0\rangle + \sqrt{2} N_2 |1\rangle) \right. \\ &\quad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (\sqrt{2} N_1 |2\rangle + \sqrt{3} N_2 |3\rangle) \\ &\quad + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger (N_1 |0\rangle + \sqrt{2} N_2 |1\rangle) \\ &\quad \left. + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger (\sqrt{2} N_1 |2\rangle + \sqrt{3} N_2 |3\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left((N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 \cdot 0 + \sqrt{2} N_2 |0\rangle) \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2}\sqrt{2}N_1 |1\rangle + \sqrt{3}\sqrt{3}N_2 |2\rangle) \\
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 |1\rangle + \sqrt{2}\sqrt{2}N_2 |2\rangle) \\
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2}\sqrt{3}N_1 |3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4}N_2 |4\rangle) \Big) \\
& = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left(0 + (2N_1N_1 + 3N_2N_2) + (N_1N_1 + 2N_2N_2) + 0 \right) \\
& = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left(3N_1^2 + 5N_2^2 \right) \\
& = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left(3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4} \right) \\
& = \frac{7}{4} \frac{\hbar}{m\omega}
\end{aligned}$$

Integration von $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{x}^2 \psi(x) dx$ ergibt das Gleiche (mit CAS)

Bei der Lösung ist es enorm hilfreich, dass $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$, d.h. fast alle Brackets fallen weg. Man kann sich außerdem überlegen, wie $\hat{a}\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^\dagger, \dots$ aussehen und spart sich damit einen Zwischenschritt und viel Schreibarbeit.

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle & = \langle \psi | \hat{p}^2 | \psi \rangle \\
& = -\frac{\hbar m \omega}{2} \psi^* (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \psi \\
& = -\frac{\hbar m \omega}{2} (N_0^* \langle 0| + N_1^* \langle 1| + N_2^* \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger) (N_0 |0\rangle + N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle)
\end{aligned}$$

Es ist wieder $N_0^* = N_0 = 0$ und $N_1^* = N_1, N_2^* = N_2$

$$\begin{aligned}
& = -\frac{\hbar m \omega}{2} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
& = -\frac{\hbar m \omega}{2} (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger) (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \\
& = -\frac{\hbar m \omega}{2} \left((N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}\hat{a} (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \right. \\
& \quad - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}\hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle - N_2 |2\rangle) \\
& \quad - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger \hat{a} (N_1 |1\rangle - N_2 |2\rangle) \\
& \quad \left. + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger (N_1 |1\rangle + N_2 |2\rangle) \right) \\
& = -\frac{\hbar m \omega}{2} \left((N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a} (N_1 |0\rangle + \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}(\sqrt{2}N_1 |2\rangle - \sqrt{3}N_2 |3\rangle) \\
& - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger(N_1 |0\rangle - \sqrt{2}N_2 |1\rangle) \\
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) \hat{a}^\dagger(\sqrt{2}N_1 |2\rangle + \sqrt{3}N_2 |3\rangle) \Big) \\
= & -\frac{\hbar m \omega}{2} \Big((N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (0 + \sqrt{2}N_2 |0\rangle) \\
& - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2}\sqrt{2}N_1 |1\rangle - \sqrt{3}\sqrt{3}N_2 |2\rangle) \\
& - (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (N_1 |1\rangle - \sqrt{2}\sqrt{2}N_2 |2\rangle) \\
& + (N_1 \langle 1| + N_2 \langle 2|) (\sqrt{2}\sqrt{3}N_1 |3\rangle + \sqrt{3}\sqrt{4}N_2 |4\rangle) \Big) \\
= & -\frac{\hbar m \omega}{2} \Big(0 - (2N_1^2 + 3N_2^2) - (N_1^2 + 2N_2^2) + 0 \Big) \\
= & \frac{\hbar m \omega}{2} \Big(3N_1^2 + 5N_2^2 \Big) \\
= & \frac{\hbar m \omega}{2} \Big(3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4} \Big) \\
= & \frac{7}{4} \hbar m \omega
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\
&= \sqrt{\frac{7}{4} \frac{\hbar}{m\omega} - \frac{3\hbar}{2m\omega}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \\
\Delta p &= \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \\
&= \sqrt{\langle p^2 \rangle - 0} \\
&= \sqrt{\frac{7}{4} \hbar m \omega} \\
(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 &= \frac{7}{16} \hbar^2 \geq \frac{4}{16} \hbar^2 = \frac{\hbar^2}{4}
\end{aligned}$$

2 Teilchen mit Spin im magnetischen Feld

Betrachten Sie ein Elektron in einem Überlagerungszustand durch

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ Spin $\frac{\hbar}{2}$ in x - bzw. y -Richtung zu messen.

Lösung: Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ den Spin $\frac{\hbar}{2}$ in x -Richtung zu messen:

$$\begin{aligned} \langle \psi | S_x | \psi \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right)^* \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{16} (1 + \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{16} 2(1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{3}) \\ &= \frac{\hbar}{16} 2(1 - 3) = -\frac{\hbar}{4} \end{aligned}$$

Genauso für die y -Richtung:

$$\begin{aligned} \langle \psi | S_y | \psi \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right)^* \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{16} (1 + \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{3}) \begin{pmatrix} -i + i\sqrt{3} \\ i + i\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\hbar}{16} (1 + \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{3}) \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\hbar}{16} (-1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 3) \\ &= \frac{i\hbar}{16} 0 = 0 \end{aligned}$$

- b) Das Teilchen ruht in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{B} = B_0 e_z$. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = -\vec{\mu} \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} \vec{B}$$

Berechnen Sie die Eigenvektoren und die Eigenwerte (Energien E_1, E_2) von \hat{H} . Ist ψ ein stationärer Zustand? Begründen Sie!

Lösung:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{e}{m} \vec{S} \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} B_0 e_x = \frac{e}{m} B_0 S_x = \frac{e}{m} B_0 \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e\hbar B_0}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eigenwerte E_i von \hat{H} erfüllen

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_n &= E_i\psi_n \\ \frac{e\hbar B_0}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi_n &= E_i\psi_n\end{aligned}$$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, also ist

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{e\hbar B_0}{2m}, & \psi_1 &\in \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ E_2 &= -\frac{e\hbar B_0}{2m}, & \psi_2 &\in \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]\end{aligned}$$

Offensichtlich ist ψ weder im Eigenraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ noch im Eigenraum $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ enthalten deshalb kein Eigenvektor und nicht stationär.

- c) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit im Zustand ψ die Energie E_1 bzw. E_2 zu messen. Geben Sie anschließend den Mittelwert der Energien

$$\langle E \rangle = \langle \psi | E | \psi \rangle$$

an.