

Lista Suplementar 1

Nícolas André da Costa Morazotti

5 de Março de 2020

1 Questão 1

É dado um sistema cartesiano \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} . Um fio reto infinito, de raio a muito pequeno, se estende de $z = -\infty$ a $z = \infty$. Calcule o campo elétrico num ponto P a uma distância $r > a$ do fio. *Sugestão. Considere uma superfície imaginária cilíndrica cujo eixo coincide com o eixo z , com raio r e comprimento L qualquer, de forma que o ponto P esteja na superfície cilíndrica. Argumente que o campo elétrico em P tem de ser perpendicular ao eixo z e radial. Aplique em seguida a Lei de Gauss à superfície cilíndrica.*

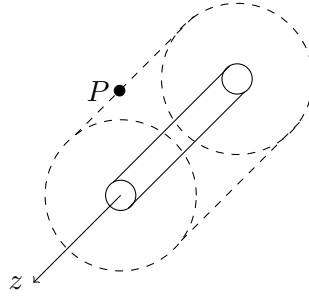


Figura 1: Diagrama do exercício 1.

Então, seja uma superfície gaussiana cilíndrica de raio $r > a$, de comprimento L . Podemos aplicar a Lei de Gauss

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}.$$

Veja que, para um fio reto infinito carregado uniformemente com densidade de carga λ , cada ponto (x, y, z) tem um ponto oposto $(x, y, -z)$ com mesma carga. Assim, na componente z , não pode haver campo elétrico. Portanto, o campo elétrico deve ter apenas componentes das direções \hat{x} e \hat{y} .

Com um pouco mais de análise, vemos que o campo na verdade é na direção *radial* $\hat{\rho}$. Assim,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| 2\pi r L = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{fio} dV \lambda \quad (2)$$

$$= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \int_{fio} dV \quad (3)$$

$$= \frac{\lambda \pi a^2 L}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda a^2}{2\varepsilon_0 r} \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\rho} \frac{\lambda a^2}{2\varepsilon_0 r}. \quad (6)$$

2 Questão 2

Num metal (condutor), o campo elétrico no interior do material é necessariamente nulo; caso contrário, campo movimentaria eternamente as cargas do metal. Mostre que as cargas elétricas num objeto metálico somente podem estar na superfície do objeto. *Sugestão. Dado um ponto P no interior do objeto, considere uma pequena superfície esférica, imaginária, centrada em P . Aplique a Lei de Gauss a essa superfície.*

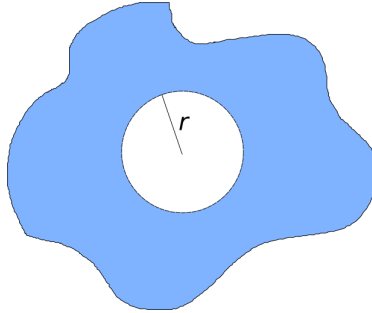


Figura 2: Em azul, um condutor sólido qualquer. Em branco, a superfície gaussiana de raio r interna ao condutor.

Considerando uma superfície gaussiana esférica de raio r interna ao condutor, como visto na Figura 2, podemos ver que

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}.$$

Por construção, $\mathbf{E} \equiv 0$ dentro do condutor. Assim, a integral é identicamente nula.

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \\ \implies Q_{in} &\equiv 0. \end{aligned}$$

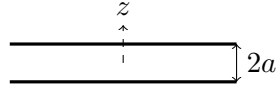
Contudo, caso tenhamos uma superfície gaussiana externa ao condutor, fica claro que o campo não é necessariamente 0, e portanto as cargas devem se manter na superfície do condutor.

3 Questão 3

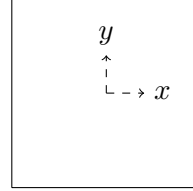
Uma placa metálica plana tem espessura uniforme $2a$ e é infinita nas outras direções. Posiciona-se um sistema cartesiano com os eixos x e y paralelos à superfície da placa, de forma que a origem esteja no plano central da placa. Assim, uma das superfícies da placa está no plano $z = a$, e a outra, no plano $z = -a$. Sabe-se que as duas faces da placa estão carregadas com densidade superficial σ . Calcule o campo elétrico num ponto sobre o eixo z na posição $(0, 0, z_0)$, com $z_0 > a$. Para isso, considere uma superfície imaginária cilíndrica cujo eixo coincide com o eixo z e que tem tampas (paralelas ao plano xy) em $z = 0$ (dentro do metal) e $z = z_0$. Aplique a lei de Gauss a essa superfície.



(a) Placa metálica.



(b) Vista lateral da placa.



(c) Vista superior da placa.

Figura 3: Diagrama das questões 3 e 4.

Fazendo uma superfície gaussiana cilíndrica com tampas em $z = 0$ e $z = z_0$, e sabendo que o campo de uma placa infinita é na direção perpendicular (\hat{z}), temos

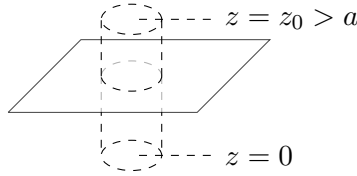


Figura 4: Superfície gaussiana sobre uma das superfícies da placa metálica.

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}| \pi r^2 &= \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}, z > a.\end{aligned}$$

O campo dentro da placa, por ser metálica, é nulo.

4 Questão 4

Repita o problema anterior, mas agora considere uma superfície imaginária cilíndrica como a do problema anterior, exceto que as tampas estão em $z = -z_0$ e $z = z_0$.

Agora, faremos a superfície gaussiana maior que a espessura da placa, como na Figura 5. O campo que sai por cima da placa é em \hat{z} , enquanto o campo que sai por baixo é $-\hat{z}$. Além disso, as

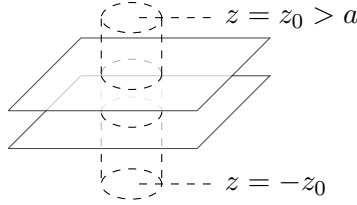


Figura 5: Superfície gaussiana sobre as duas superfícies da placa metálica.

áreas são orientadas para cima em $z = z_0$ e para baixo em $z = -z_0$. Somando-se os campos,

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0} \\ 2|\mathbf{E}|\pi r^2 &= \frac{2\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

5 Questão 5

Uma superfície esférica de raio R está uniformemente carregada com carga Q . Calcule o campo elétrico que ela produz a uma distância $r > R$ de seu centro. *Sugestão. Aplique a Lei de Gauss a uma superfície imaginária de raio r , esférica e concêntrica com a superfície carregada.*

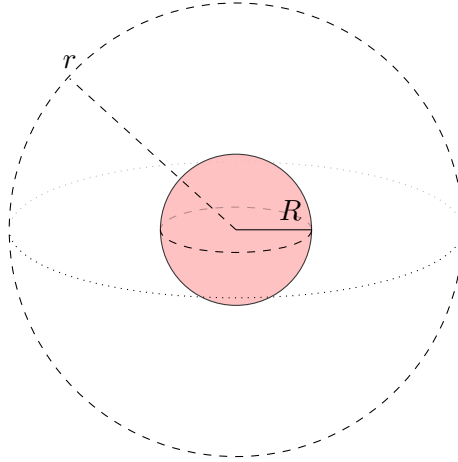


Figura 6: Diagrama do exercício 5.

Pela Lei de Gauss,

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \\ |\mathbf{E}|4\pi r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r},\end{aligned}$$

que é o campo de uma carga Q pontual.

6 Questão 6

Repita o problema anterior, mas agora calcule o campo no interior da esfera ($r < R$).

Como estamos tratando de uma superfície esférica carregada, não há cargas que estejam a uma distância $r < R$ da origem. Assim, no caso de uma superfície gaussiana interior à superfície esférica, não há cargas internas e portanto o campo elétrico interno é nulo.

7 Questão 7

Duas superfícies esféricas concêntricas, de raios R e $2R$, estão uniformemente carregadas, com cargas Q e $-Q$, respectivamente. Calcule o campo elétrico na região $R < r < 2R$, entre as duas superfícies.

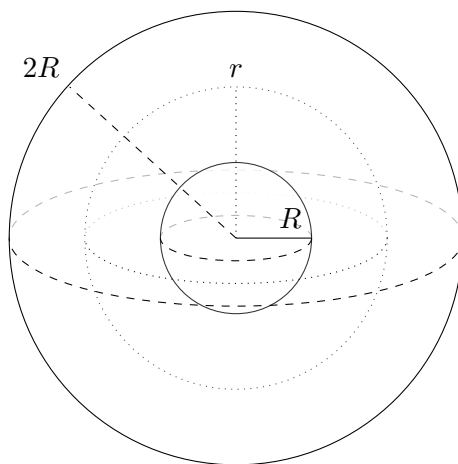


Figura 7: Diagrama do exercício 6.

Na região $R < r < 2R$, a única carga interna é a carga Q . Assim,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\mathbf{E} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \hat{r}$$
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

8 Questão 8

No problema anterior, mostre que os campos elétricos no interior da superfície menor e na região externa à superfície maior são nulos e mostre em diagrama esquemático as linhas de força em todo o espaço.

Novamente, no interior da superfície de raio R , não há cargas. Portanto, o campo elétrico na região interna a ela é nulo. Na região externa a ambas as superfícies, $Q_{in} = Q - Q = 0$. Portanto, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$, para qualquer superfície gaussiana escolhida, o que significa que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ para pontos fora da superfície de raio $2R$. Vemos o diagrama de forças na Figura 8.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.pyplot import figure
```

```

import numpy as np
figure(dpi=200,figsize=(4,4))

def semicircle(r, x):
    return np.sqrt(r**2-x**2)

def reta(theta):
    x = np.linspace(1,2,10)
    return x*np.cos(theta)

r1 = 1
r2 = 2
x = np.linspace(-r1,r1,100)
plt.plot(x,semicircle(r1,x),'darkturquoise')
plt.plot(x,-semicircle(r1,x),'darkturquoise')
x = np.linspace(-r2,r2,100)
plt.plot(x,semicircle(r2,x),'orange')
plt.plot(x,-semicircle(r2,x),'orange')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

theta = np.linspace(0,2*np.pi,16)
r = np.linspace(r1,r2,100)
for item in theta:
    x = r*np.cos(item)
    y = r*np.sin(item)
    plt.arrow(x[0],y[0],x[1],y[1],head_width=.1,shape='full',length_includes_head=True)
plt.savefig("imagens/ex-8.png")

```

9 Questão 9

Um disco muito fino de raio a está carregado com densidade superficial uniforme σ . Escolha um sistema de coordenadas com origem no centro do disco e eixo z perpendicular ao plano do disco. Calcule o campo elétrico num ponto P com coordenadas $(0, 0, z)$. Para que valor tende o campo quando $z \rightarrow 0$? Fisicamente, você acha que esse resultado faz sentido?

Vamos considerar diversos anéis infinitesimais de raio r e espessura dr , concêntricos. Cada anel terá uma carga $dq = \sigma 2\pi r dr$. O campo que cada anel realiza sobre o ponto P é

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{E} &= \frac{dq(-r\hat{r} + z\hat{z})}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z} \\
 &= \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}}z\hat{z}.
 \end{aligned}$$

Por argumentos de simetria, só há campo na direção \hat{z} . Integrando sobre o raio de 0 a a , temos

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

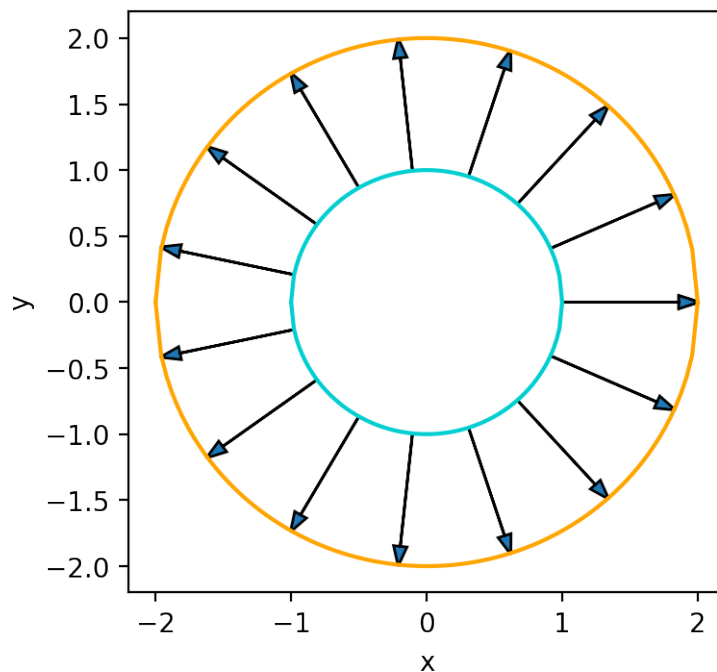


Figura 8: Diagrama das linhas de força no interior das superfícies, seção transversal. Os eixos estão em unidades de R .

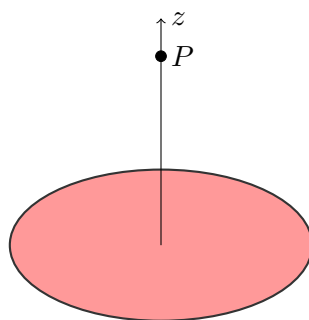


Figura 9: Diagrama da questão 9.

Com a mudança de variáveis $u = r^2 + z^2$, $du = 2rdr$, temos a integral

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} \\ &= -\frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} 2u^{-1/2} \Big|_{z^2}^{a^2+z^2} \\ &= -\frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Com $z^2 \ll a^2$, a raiz se aproxima de a . Então

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\approx -\frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z} \right) \\ &= -\frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \left(\frac{z-a}{az} \right) \\ &\approx -\frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \left(\frac{-1}{z} \right) \\ &= \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0}.\end{aligned}$$

Quando muito próximo do disco, o campo se aproxima do campo de um plano carregado.

10 Questão 10

Uma esfera maciça de raio R tem carga elétrica uniformemente distribuída em seu interior, de forma que a densidade volumétrica de carga seja ρ . Em outras palavras, qualquer volume ΔV no interior da esfera tem carga $\Delta q = \rho \Delta V$. Calcule o campo elétrico num ponto P da esfera a uma distância $r < R$ do centro. *Sugestão. Imagine uma superfície de raio r cujo centro coincida com o da esfera e aplique nela a Lei de Gauss.*

Utilizando a Lei de Gauss para um sistema similar ao da Figura 6, com a esfera interna maciça, temos

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}| 4\pi r^2 &= \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}.\end{aligned}$$

Poderíamos ter calculado o campo para pontos interiores à esfera de raio R . A única diferença em relação as contas anteriores seria que $Q_{in} = 4\pi r^3 \rho/3$. Assim,

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}| 4\pi r^2 &= \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.\end{aligned}$$

Veja que o campo elétrico em tal situação é contínuo.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib.pyplot import figure
figure(dpi=250)
```

```
def e_dentro(r):
    return r/3
```

```
def e_fora(r):
```



```

return 1/(3*r**2)

x_d = np.linspace(0,1,20)
x_f = np.linspace(1,5,35)
plt.plot(x_d,e_dentro(x_d))
plt.plot(x_f,e_fora(x_f))
plt.xlabel(r"$r/R$")
plt.ylabel(r"$|E(r)|$ em unidades de $\rho/\epsilon_0$.")
plt.legend([r"$r < R$", r"$r > R$"])
plt.savefig("imagens/ex-10.png")

```

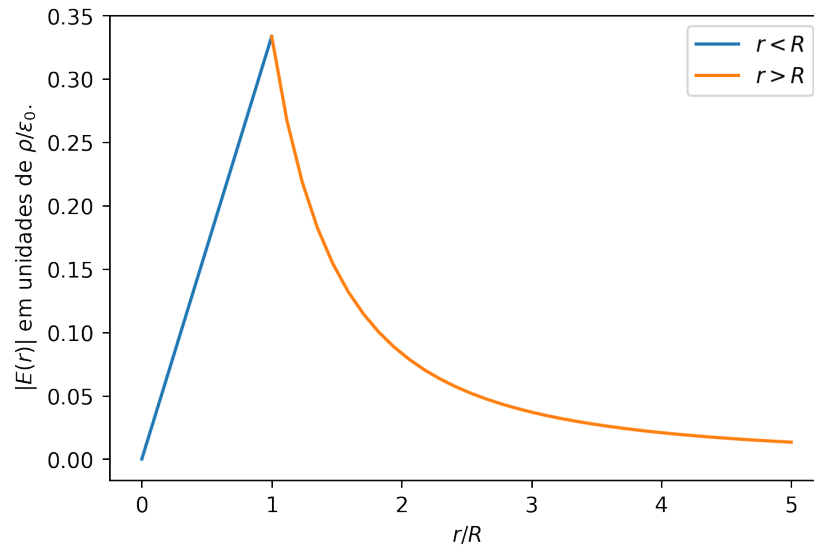


Figura 10: Intensidade do campo em função da distância ao centro da esfera.