# Lista 2

Nícolas André da Costa Morazotti

24 de Março de 2020

## Questão 1

Uma carga elétrica $q$ está na origem de um sistema cartesiano tridimensional. Considere um ponto $A$ com coordenadas $(1, 0, 0)$ e outro ponto $B$ com coordenadas $(2, 0, 0)$. Calcule explicitamente a integral $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da reta que une os pontos $A$ e $B$.

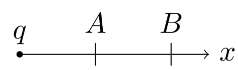



Figura 1: Diagrama da questão 1.

O campo elétrico da carga $q$, na origem do sistema, até uma posição $(x, 0, 0)$ pode ser escrito como

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{x}}{x^2}. \tag{1}$$

O elemento de linha $d\mathbf{r}$, sobre o eixo x, é simplesmente $d\mathbf{r} = (dx, 0, 0)$. Assim, o produto $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_x dx$.

$$\begin{aligned}
\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{dx}{x^2} &(2)\\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\Big|_1^2 &(3)\\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - 1\right) &(4)\\
&= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} &(5)
\end{aligned}$$

## Questão 2

Na condição do problema anterior, calcule a diferença de potencial $V_B - V_A$, a partir da expressão que derivamos para o potencial de um ponto próximo de uma carga. Compare o resultado com o do item 1.

Utilizando o potencial eletrostático de uma carga pontual,

$$V(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{6}$$

Como a carga se encontra na origem, $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$. Então, só precisamos calcular o potencial em cada um dos pontos.

$$\begin{aligned} V(B) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|(2,0,0)|} &(7)\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2} &(8)\\ V(A) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|(1,0,0)|} &(9)\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} &(10)\\ V(B)-V(A) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}-1\right) &(11)\\ &= -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}, &(12)\end{aligned}$$

que é o resultado do item 1 com um sinal alternado. Portanto, podemos verificar que

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}. \tag{13}$$

## Questão 3

Considere um sistema cartesiano tridimensional e um cubo imaginário de lado $a$ posicionado de forma que um dos vértices esteja na origem, com uma das arestas alinhadas com o eixo $\hat{x}$, outra com o eixo $\hat{y}$ e uma terceira com o eixo $\hat{z}$. Assim, um dos vértices está na posição $(a,0,0)$, outro na posição $(0,a,0)$ e outro na posição $(0,0,a)$. Os outros quatro vértices estão nas posições $(0,a,a), (a,0,a), (a,a,0)$ e $(a,a,a)$. Posiciona-se uma carga $q$ no vértice $(a,a,a)$ e uma carga $-q$ na origem do sistema. Calcule o potencial elétrico no centro do cubo.

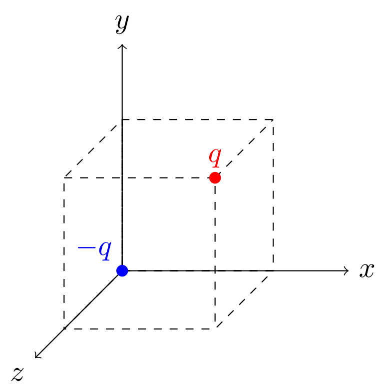



Figura 2: Diagrama da questão 3.

O potencial, devido a uma carga $q$, posicionada em $\mathbf{r}'$, no ponto $\mathbf{r}$, é

$$V(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{14}$$

Para a carga em $(a, a, a)$, o potencial em $(a/2, a/2, a/2)$ é

$$
\begin{aligned}
V(a/2, a/2, a/2; a, a, a) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|(a/2, a/2, a/2) - (a, a, a)|} && (15)\\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|(-a/2, -a/2, -a/2)|} && (16)\\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2/4 + a^2/4 + a^2/4}} && (17)\\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{a\sqrt{3}} && (18)\\
&= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a\sqrt{3}}. && (19)
\end{aligned}
$$

Para a carga em $(0, 0, 0)$, o potencial em $(a/2, a/2, a/2)$ é

$$
\begin{aligned}
V(a/2, a/2, a/2; 0, 0, 0) &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|(a/2, a/2, a/2) - (0, 0, 0)|}\\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|(a/2, a/2, a/2)|}\\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2/4 + a^2/4 + a^2/4}}\\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{a\sqrt{3}}\\
&= -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Ao somarmos ambos os potenciais (podemos fazer isso devido ao princípio de superposição), vemos que $V(a/2, a/2, a/2) = 0$.

## Questão 4

Considerado o cubo da questão 3, posiciona-se uma carga $q$ em cada um dos oito vértices do cubo. Calcule o potencial elétrico no centro do cubo.

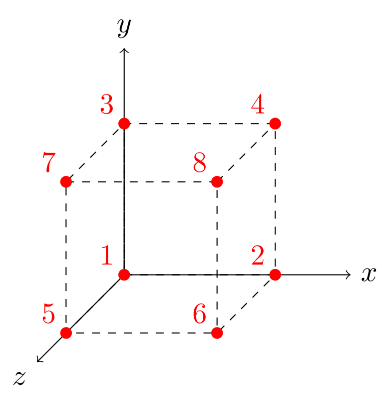



Figura 3: Diagrama da questão 4.

Utilizando a Equação ref:eq:1, temos que

$$V(a/2, a/2, a/2; \mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'|} \tag{20}$$

As distâncias $\mathbf{r}'$ são

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_1 &= (0, 0, 0) \\
\mathbf{r}'_2 &= (a, 0, 0) \\
\mathbf{r}'_3 &= (0, a, 0) \\
\mathbf{r}'_4 &= (a, a, 0) \\
\mathbf{r}'_5 &= (0, 0, a) \\
\mathbf{r}'_6 &= (a, 0, a) \\
\mathbf{r}'_7 &= (0, a, a) \\
\mathbf{r}'_8 &= (a, a, a) \\
|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'_1| &= |(a/2, a/2, a/2) - (0, 0, 0)| \\
&= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'_2| &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'_3| &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'_4| &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'_5| &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'_6| &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'_7| &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
|(a/2, a/2, a/2) - \mathbf{r}'_8| &= \frac{a\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

As distâncias são todas as mesmas, e o potencial é escalar. Portanto, basta calcular para uma das partículas e multiplicar por oito.

$$\begin{aligned}
V(a/2, a/2, a/2) &= 8V(a/2, a/2, a/2; \mathbf{r}'_1) \qquad (21) \\
&= \frac{2q}{\pi\varepsilon_0} \frac{2}{a\sqrt{3}} \qquad (22) \\
&= \frac{4q}{a\sqrt{3}\pi\varepsilon_0} \qquad (23)
\end{aligned}$$

## Questão 5

Define-se uma *superfície equipotencial* como uma superfície imaginária em que todos os pontos têm o mesmo potencial. Por exemplo, todos os pontos a uma distância $R$ de uma carga $q$ isolada formam uma superfície equipotencial. Mostre que a superfície de um metal é sempre equipotencial. *Sugestão: lembre-se de que o campo elétrico dentro do metal é nulo e calcule a integral* $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ *entre dois pontos A e B quaisquer na superfície do metal.*

Seguindo a sugestão, consideremos um metal qualquer, bem como dois pontos da superfície do metal. Uma vez que o rotacional do campo elétrico é nulo na eletrostática, a integral $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ independe do caminho entre $A$ e $B$. A demonstração é apresentada no capítulo 4 do Moysés. Então, vamos considerar um caminho que sai do ponto $A$, entra no condutor, e só sai do condutor no ponto $B$. Assim, por todo o caminho, $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \equiv 0$. Contudo, a integral $-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V(B) - V(A) = 0$. Ou seja, $V(A) = V(B)$ para quaisquer dois pontos $A$ e $B$ na superfície do metal. Assim, a superfície do metal é uma equipotencial.

## Questão 6

Uma carga $q$ está na origem de um sistema cartesiano. É dada uma distância $a$. Calcule a diferença de potencial entre os pontos $A = (a, a, a)$ (onde $a$ é uma distância conhecida) e $B = (b, b, b)$, onde $b = 1.01a$.

O potencial em $A$ com a carga na origem, ainda utilizando a Equação ref:eq:1, é

$$V(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{3}}. \tag{24}$$

No ponto $B$,

$$\begin{aligned} V(B) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b\sqrt{3}} \qquad (25) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{1.01a\sqrt{3}}. \qquad (26) \end{aligned}$$

A diferença de potencial entre $A$ e $B$ é então

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{3}} \left( \frac{1}{1.01} - 1 \right) \qquad (27) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{3}} \left( \frac{1 - 1.01}{1.01} \right) \qquad (28) \\ &= -\frac{0.01}{1.01} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{3}}. \qquad (29) \end{aligned}$$

## Questão 7

Compare o resultado da questão 6 com o produto $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r}$, onde $E$ é o campo elétrico no ponto $A$ e $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. Discuta essa comparação.

O campo elétrico, no ponto $A$, é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(A) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})}{(a\sqrt{3})^3} \qquad (30) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})}{a^2 3\sqrt{3}}. \qquad (31) \end{aligned}$$

O elemento $\Delta\mathbf{r} = (b,b,b) - (a,a,a) = 0.01a(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$. Assim, o produto escalar

$$-\mathbf{E}(A)\cdot\Delta\mathbf{r} = -\frac{q}{12a^2\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\cdot 0.01a(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}) \tag{32}$$

$$= -\frac{q}{12\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{3}}(3\cdot 0.01a) \tag{33}$$

$$= -0.01\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{3}}. \tag{34}$$

Vemos que $0.01/1.01 \approx 0.01$. Portanto, o potencial entre dois pontos muito próximos pode ser aproximado desta forma. Quanto mais próximos os pontos, melhor é a aproximação.

## Questão 8

O potencial de uma carga $q$ no ponto $\mathbf{r} = x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ é $V = (1/4\pi\varepsilon_0)q/r$. Use a expressão $\mathbf{E} = -\nabla V$ para calcular o campo elétrico em $\mathbf{r}$.

Vamos calcular o gradiente de duas maneiras diferentes. Primeiro, utilizando coordenadas cartesianas, substituindo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Fazendo a derivada em $x$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x}V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \tag{35}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x \tag{36}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}. \tag{37}$$

Pela simetria de rotação do potencial, podemos trocar $x$ por $y$ ou por $z$, e temos então

$$\frac{\partial}{\partial y}V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^3} \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}. \tag{39}$$

Assim, substituímos as derivadas no gradiente:

$$\nabla V = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}V + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}V + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}V \tag{40}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{r^3} \tag{41}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{42}$$

Trocando o sinal, obtemos o campo elétrico de uma carga pontual, como já conhecíamos a partir da Lei de Coulomb.

Poderíamos ter utilizado, também pela simetria esférica do problema, coordenadas **esféricas**. Como o potencial é radial, o gradiente só tem a componente radial da derivada. Assim, $\nabla V = \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r}$.

$$\frac{\partial}{\partial r}V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}(r^{-1}) \tag{43}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(-r^{-2}) \tag{44}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r^3}. \tag{45}$$

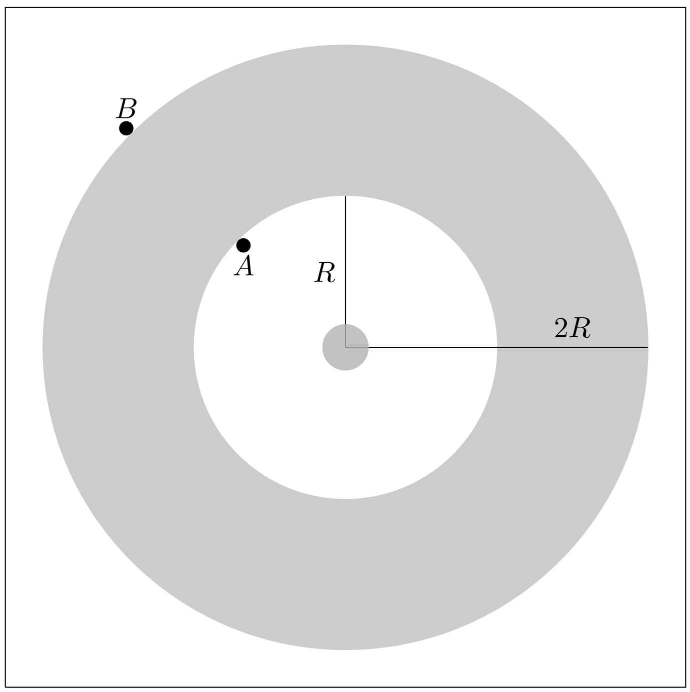
Concluímos que

$$\nabla V = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r}V(r) \tag{46}$$
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{47}$$

Trocando o sinal, reobtemos o resultado a partir de coordenadas cartesianas.

## Questão 9

Uma carga $q$ está posicionada no centro de uma casca esférica metálica com raio interno $R$ e raio externo $2R$, como mostra a figura abaixo. Calcule o potencial do ponto $B$, praticamente encostado na superfície de fora da casca. *Sugestão: o campo elétrico fora da casca é igual ao campo elétrico de uma carga q no centro da casca. A mesma afirmação vale para o potencial fora da casca.*




Vamos calcular o campo elétrico fora da casca metálica utilizando a Lei de Gauss. Temos que

$$\mathbf{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{48}$$

Colocando o zero do potencial para $r \to \infty$, e integrando num caminho radial, temos

$$V = -\int_{\infty}^{B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \tag{49}$$
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{2R+\delta}\frac{dr}{r^2} \tag{50}$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}r^{-1}\Big|_{\infty}^{2R+\delta} \tag{51}$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2R+\delta)}. \tag{52}$$

Jogando $\delta \to 0$,

$$V = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}. \tag{53}$$

## Questão 10

Calcule o potencial no ponto $A$, praticamente encostado na superfície de dentro da casca. Esse potencial é igual ao de um ponto a uma distância (praticamente igual a) $R$ de uma carga $q$? Explique. *Sugestão: para calcular a diferença de potencial entre A e B, lembre-se de que o campo elétrico dentro do metal é nulo.*

Para calcular o potencial no ponto $A$, podemos empregar a mesma técnica do item anterior. Vamos traçar um caminho de $B$ até $A$, passando por dentro do condutor. Contudo, como dentro do condutor o campo é nulo, vemos que todo o condutor é equipotencial. Então podemos integrar num caminho radial da parede do condutor, a uma distância de $R$ da carga, até $A$, a uma distância $R - \delta$. Podemos utilizar o campo da carga $q$.

$$V(R) - V(R-\delta) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R-\delta}^{R} \frac{dr}{r^2} \tag{54}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_{R-\delta}^{R} \tag{55}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R-\delta}\right). \tag{56}$$

Com $\delta \to 0$, vemos que a diferença de potencial entre $R - \delta$ e $R$ tende a zero. Contudo, veja que $V(R) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$ é o potencial na superfície interna da casca condutora. Portanto,

$$\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} - V(R-\delta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R-\delta)} \tag{57}$$

$$V(R-\delta) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R-\delta)} \tag{58}$$

$$= -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R-\delta)} \tag{59}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R-\delta}\right) \tag{60}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R-\delta-2R}{2R(R-\delta)} \tag{61}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1+(\delta/R)}{R-\delta} \tag{62}$$

$$\lim_{\delta\to 0} V(R-\delta) = V(R) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}, \tag{63}$$

que **não é** igual ao potencial gerado pela carga interna. Tomando $\delta \to 0$, temos o potencial da superfície interna da casca, como esperado. Isso ocorre pois a equação do potencial nasce do trabalho necessário de trazer uma carga infinito, cujo potencial adotamos como nulo, até algum ponto $\mathbf{r}$, sob o campo elétrico gerado pela carga. Entretanto, como há o condutor, há uma região do espaço que o campo elétrico não é o campo elétrico da carga, mas sim $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Gráfico do campo elétrico e do potencial elétrico, em unidades de $q/(4\pi\varepsilon_0)$.