Lista Suplementar 1

Nícolas André da Costa Morazotti

20 de Março de 2020

1 Questão 1

É dado um sistema cartesiano $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$. Um fio reto infinito, de raio a muito pequeno, se estende de $z = -\infty$ a $z = \infty$. Calcule o campo elétrico num ponto P a uma distância $r > a$ do fio. *Sugestão. Considere uma superfície imaginária cilíndrica cujo eixo coincide com o eixo z, com raio r e comprimento L qualquer, de forma que o ponto P esteja na superfície cilíndrica. Argumente que o campo elétrico em P tem de ser perpendicular ao eixo z e radial. Aplique em seguida a Lei de Gauss à superfície cilíndrica.*

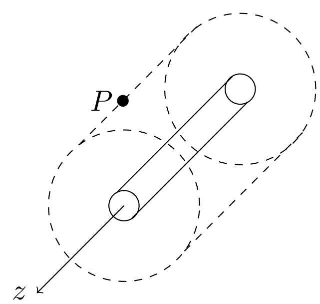


Figura 1: Diagrama do exercício 1.

Então, seja uma superfície gaussiana cilíndrica de raio $r > a$, de comprimento L. Podemos aplicar a Lei de Gauss

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}.$$

Veja que, para um fio reto infinito carregado uniformemente com densidade de carga λ, cada ponto (x, y, z) tem um ponto oposto $(x, y, -z)$ com mesma carga. Assim, na componente z, não pode haver campo elétrico. Portanto, o campo elétrico deve ter apenas componentes das direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

Com um pouco mais de análise, vemos que o campo na verdade é na direção *radial* $\hat{\rho}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| 2\pi r L = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \quad &(1) \\
= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{fio} dV \lambda \quad &(2) \\
= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \int_{fio} dV \quad &(3) \\
= \frac{\lambda \pi a^2 L}{\varepsilon_0} \quad &(4) \\
|\mathbf{E}| = \frac{\lambda a^2}{2\varepsilon_0 r} \quad &(5) \\
\mathbf{E} = \hat{\rho} \frac{\lambda a^2}{2\varepsilon_0 r}. \quad &(6)
\end{aligned}
$$

2 Questão 2

Num metal (condutor), o campo elétrico no interior do material é necessariamente nulo; caso contrário, campo movimentaria eternamente as cargas do metal. Mostre que as cargas elétricas num objeto metálico somente podem estar na superfície do objeto. *Sugestão. Dado um ponto P no interior do objeto, considere uma pequena superfície esférica, imaginária, centrada em P. Aplique a Lei de Gauss a essa superfície.*

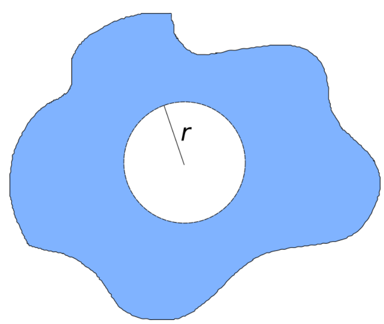


Figura 2: Em azul, um condutor sólido qualquer. Em branco, a superfície gaussiana de raio r interna ao condutor.

Considerando uma superfície gaussiana esférica de raio r interna ao condutor, como visto na Figura ref:fig:ex-2, podemos ver que

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}.$$

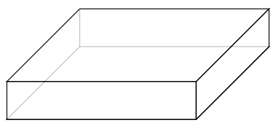
Por construção, $\mathbf{E} \equiv 0$ dentro do condutor. Assim, a integral é identicamente nula.

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \\
\implies Q_{in} &\equiv 0.
\end{aligned}
$$

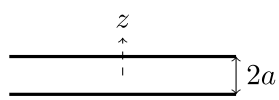
Contudo, caso tenhamos uma superfície gaussiana externa ao condutor, fica claro que o campo não é necessariamente 0, e portanto as cargas devem se manter na superfície do condutor.

3 Questão 3

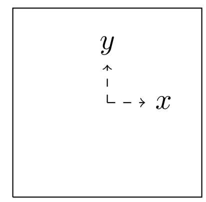
Uma placa metálica plana tem espessura uniforme $2a$ e é infinita nas outras direções. Posiciona-se um sistema cartesiano com os eixos x e y paralelos à superfície da placa, de forma que a origem esteja no plano central da placa. Assim, uma das superfícies da placa está no plano $z = a$, e a outra, no plano $z = -a$. Sabe-se que as duas faces da placa estão carregadas com densidade superficial σ. Calcule o campo elétrico num ponto sobre o eixo z na posição $(0, 0, z_0)$, com $z_0 > a$. Para isso, considere uma superfície imaginária cilíndrica cujo eixo coincide com o eixo z e que tem tampas (paralelas ao plano xy) em $z = 0$ (dentro do metal) e $z = z_0$. Aplique a lei de Gauss a essa superfície.



(a) Placa metálica.



(b) Vista lateral da placa.



(c) Vista superior da placa.

Figura 3: Diagrama das questões 3 e 4.

Fazendo uma superfície gaussiana cilíndrica com tampas em $z = 0$ e $z = z_0$, e sabendo que o campo de uma placa infinita é na direção perpendicular ($\hat{z}$), temos

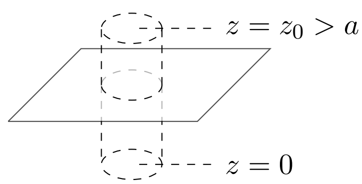


Figura 4: Superfície gaussiana sobre uma das superfícies da placa metálica.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0} \\ |\mathbf{E}| \pi r^2 &= \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, z > a. \end{aligned}$$

O campo dentro da placa, por ser metálica, é nulo.

4 Questão 4

Repita o problema anterior, mas agora considere uma superfície imaginária cilíndrica como a do problema anterior, exceto que as tampas estão em $z = -z_0$ e $z = z_0$.

Agora, faremos a superfície gaussiana maior que a espessura da placa, como na Figura ref:fig:ex-4. O campo que sai por cima da placa é em $\hat{z}$, enquanto o campo que sai por baixo é $-\hat{z}$. Além disso,

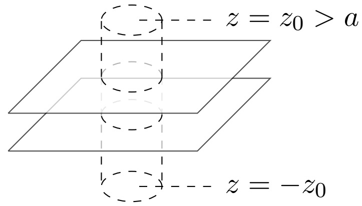


Figura 5: Superfície gaussiana sobre as duas superfícies da placa metálica.

as áreas são orientadas para cima em $z = z_0$ e para baixo em $z = -z_0$. Somando-se os campos,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0}$$
$$2|\mathbf{E}|\pi r^2 = \frac{2\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0}$$
$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

5 Questão 5

Uma superfície esférica de raio R está uniformemente carregada com carga Q. Calcule o campo elétrico que ela produz a uma distância $r > R$ de seu centro. *Sugestão. Aplique a Lei de Gauss a uma superfície imaginária de raio r, esférica e concêntrica com a superfície carregada.*

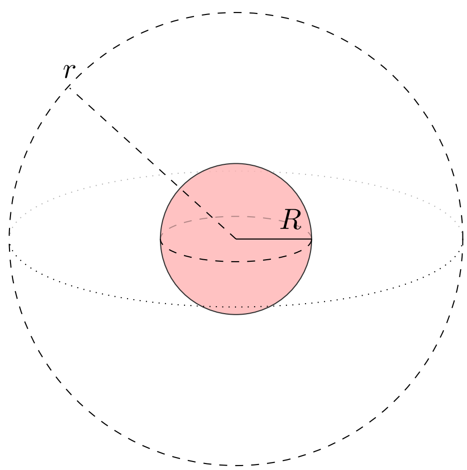


Figura 6: Diagrama do exercício 5.

Pela Lei de Gauss,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$
$$|\mathbf{E}|4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},$$

que é o campo de uma carga Q pontual.

6 Questão 6

Repita o problema anterior, mas agora calcule o campo no interior da esfera ($r < R$).

Como estamos tratando de uma superfície esférica carregada, não há cargas que estejam a uma distância $r < R$ da origem. Assim, no caso de uma superfície gaussiana interior à superfície esférica, não há cargas internas e portanto o campo elétrico interno é nulo.

7 Questão 7

Duas superfícies esféricas concêntricas, de raios R e $2R$, estão uniformemente carregadas, com cargas Q e $-Q$, respectivamente. Calcule o campo elétrico na região $R < r < 2R$, entre as duas superfícies.

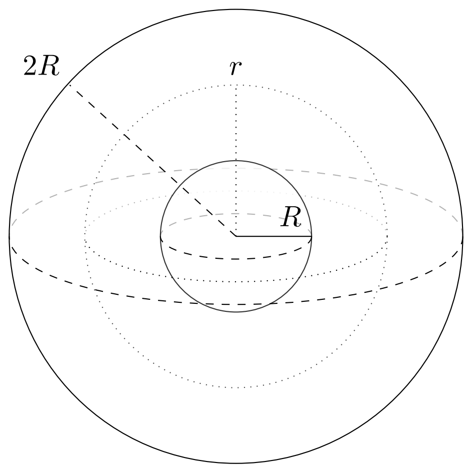


Figura 7: Diagrama do exercício 6.

Na região $R < r < 2R$, a única carga interna é a carga Q. Assim,

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{E} 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \hat{r} \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}. \end{aligned}$$

8 Questão 8

No problema anterior, mostre que os campos elétricos no interior da superfície menor e na região externa à superfície maior são nulos e mostre em diagrama esquemático as linhas de força em todo o espaço.

Novamente, no interior da superfície de raio R, não há cargas. Portanto, o campo elétrico na região interna a ela é nulo. Na região externa a ambas as superfícies, $Q_{in} = Q - Q = 0$. Portanto, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$, para qualquer superfície gaussiana escolhida, o que significa que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ para pontos fora da superfície de raio $2R$. Vemos o diagrama de forças na Figura ref:fig:ex-8-forca.

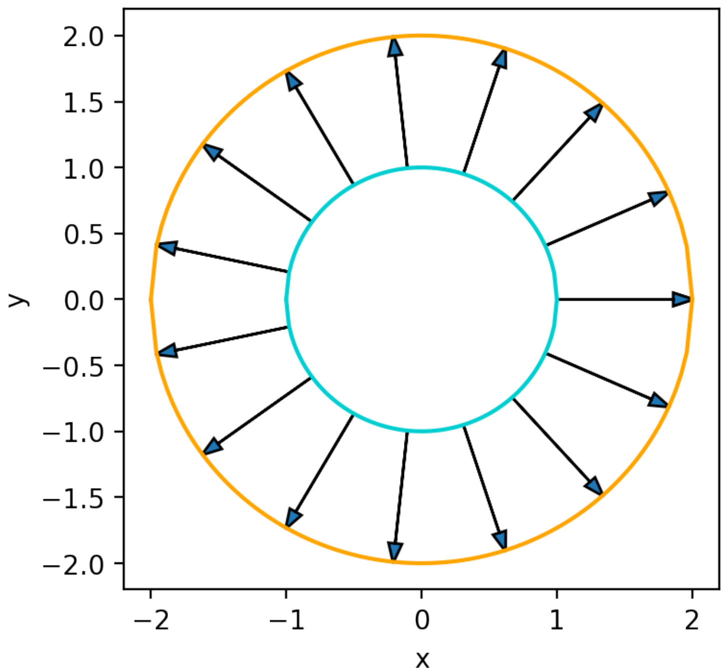


Figura 8: Diagrama das linhas de força no interior das superfícies, secção transversal. Os eixos estão em unidades de R.

9 Questão 9

Um disco muito fino de raio a está carregado com densidade superficial uniforme σ. Escolha um sistema de coordenadas com origem no centro do disco e eixo z perpendicular ao plano do disco. Calcule o campo elétrico num ponto P com coordenadas $(0, 0, z)$. Para que valor tende o campo quando $z \to 0$? Fisicamente, você acha que esse resultado faz sentido?

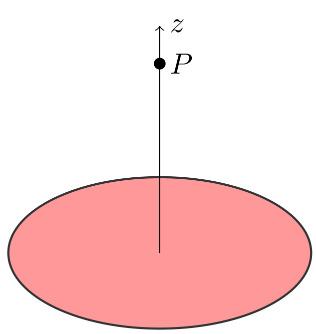


Figura 9: Diagrama da questão 9.

Vamos considerar diversos anéis infinitesimais de raio r e espessura dr, concêntricos. Cada anel terá uma carga $dq = \sigma 2\pi r dr$. O campo que cada anel realiza sobre o ponto P é

$$\begin{aligned}
d\mathbf{E} &= \frac{dq(-r\hat{r} + z\hat{z})}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \\
&= \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}} z\hat{z}.
\end{aligned}$$

Por argumentos de simetria, só há campo na direção $\hat{z}$. Integrando sobre o raio de 0 a a, temos

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}.$$

Com a mudança de variáveis $u = r^2 + z^2$, $du = 2rdr$, temos a integral

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} \\
&= -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2} 2u^{-1/2}\Big|_{z^2}^{a^2+z^2} \\
&= -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{z}\right).
\end{aligned}$$

Com $z^2 \ll a^2$, a raiz se aproxima de a. Então

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &\approx -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right) \\
&= -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z-a}{az}\right) \\
&\approx -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{z}\right) \\
&= \frac{\sigma\hat{z}}{2\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Quando muito próximo do disco, o campo se aproxima do campo de um plano carregado.

10 Questão 10

Uma esfera maciça de raio R tem carga elétrica uniformemente distribuída em seu interior, de forma que a densidade volumétrica de carga seja ρ. Em outras palavras, qualquer volume ΔV no interior da esfera tem carga $\Delta q = \rho\Delta V$. Calcule o campo elétrico num ponto P da esfera a uma distância $r < R$ do centro. *Sugestão. Imagine uma superfície de raio r cujo centro coincida com o da esfera e aplique nela a Lei de Gauss.*

Utilizando a Lei de Gauss para o sistema da Figura ref:fig:ex-10, com uma superfície gaussiana esférica, de raio r, interna à esfera de raio R, temos

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}|4\pi r^2 &= \frac{4\pi r^3\rho}{3\varepsilon_0} \\
|\mathbf{E}| &= \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

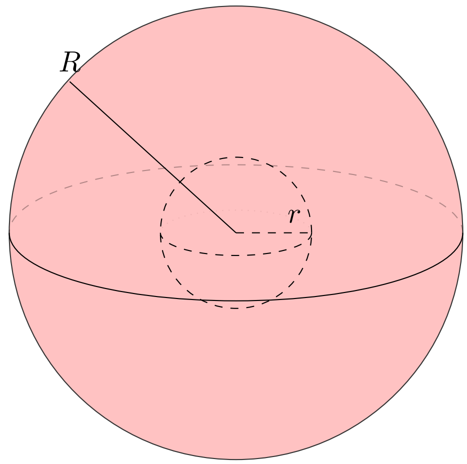


Figura 10: Diagrama do exercício 10.

Poderíamos ter calculado o campo para pontos exteriores à esfera de raio R. A única diferença em relação as contas anteriores seria que $Q_{in} = 4\pi R^3\rho/3$. Assim,

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$
$$|\mathbf{E}|4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3\rho}{3\varepsilon_0}$$
$$|\mathbf{E}| = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Veja que o campo elétrico em tal situação é contínuo.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib.pyplot import figure
figure(dpi=250)

def e_dentro(r):
    return r/3

def e_fora(r):
    return 1/(3*r**2)

x_d = np.linspace(0,1,20)
x_f = np.linspace(1,5,35)
plt.plot(x_d,e_dentro(x_d))
plt.plot(x_f,e_fora(x_f))
plt.xlabel(r"$r/R$")
plt.ylabel(r"$|E(r)|$ em unidades de $\rho/\varepsilon_0$.")
plt.legend([r"$r<R$",r"$r>R$"])
plt.savefig("imagens/ex-10.png")
```

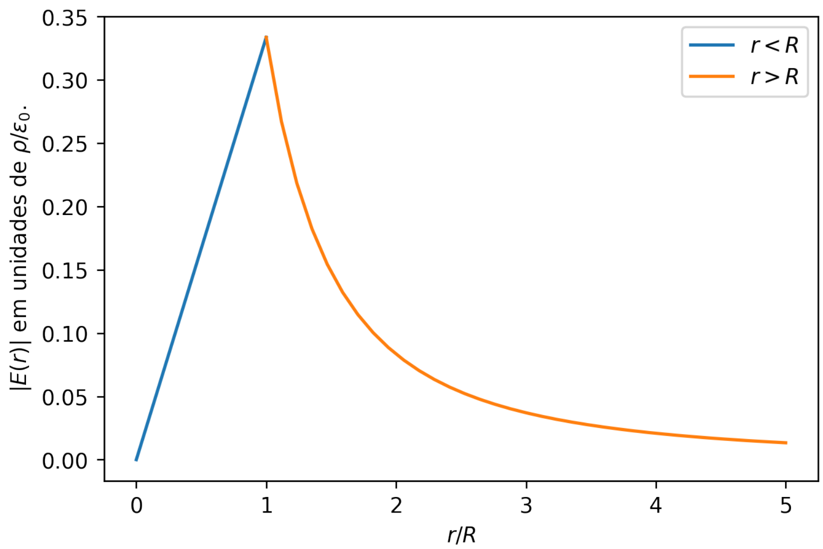


Figura 11: Intensidade do campo em função da distância ao centro da esfera.