Lista 1

Nícolas André da Costa Morazotti

5 de Março de 2020

1 Questão 1

Considere um sistema cartesiano tridimensional e um cubo imaginário de lado a posicionado de forma que um dos vértices esteja na origem, com uma das arestas alinhadas com o eixo $\hat{x}$, outra com o eixo $\hat{y}$ e uma terceira com o eixo $\hat{z}$. Assim, um dos vértices está na posição $(a, 0, 0)$, outro na posição $(0, a, 0)$ e outro na posição $(0, 0, a)$. Os outros quatro vértices estão nas posições $(0, a, a), (a, 0, a), (a, a, 0)$ e (a, a, a). Posiciona-se uma carga q no vértice (a, a, a) e uma carga $-q$ na origem do sistema. Calcule a força elétrica sobre a carga no vértice (a, a, a) devida à carga na origem.

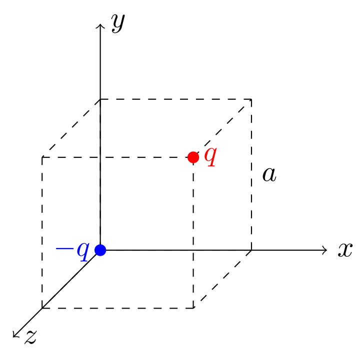

Figura 1: Diagrama da Questão 1.

A equação de força entre as cargas q e $-q$ é

$$\mathbf{F}-q, q(a, a, a) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \tag{1}$$

com $\mathbf{r} = (a, a, a) - (0, 0, 0) = a(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$. Substituindo $\mathbf{r}$ na Equação 1, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{-q,q}(a, a, a) &= -\frac{aq^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})}{(3a^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{q^2}{12\sqrt{3}\pi a^2\varepsilon_0}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}).\end{aligned}$$

2 Questão 2

Na situação da questão 1, calcule a força elétrica sobre a carga na origem devida à carga no vértice (a, a, a) e verifique que ela respeita a Terceira Lei de Newton em relação à força calculada na questão 1.

A equação 1 da força ainda vale, com a distinção de que $\mathbf{r} = (0,0,0) - (a,a,a) = -a(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{q,-q}(0,0,0) &= -\frac{(-a)q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})}{(3a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q^2}{12\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}),\end{aligned}$$

igual em módulo e direção mas em sentido oposto em relação ao resultado do exercício 1. Portanto, vemos que ela respeita a Terceira Lei de Newton.

3 Questão 3

Considerado o cubo da questão 1, posiciona-se uma carga q em cada um dos quatro vértices do plano $z = 0$ e nenhuma carga nos outros vértices. Calcule a força elétrica total sobre a carga no vértice $(a,a,0)$.

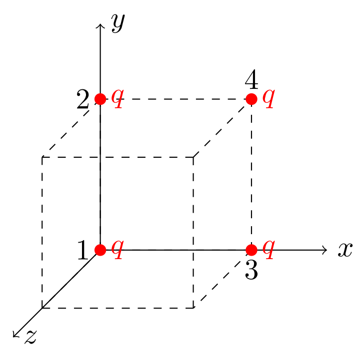

Figura 2: Diagrama da Questão 3.

A força sobre a carga no vértice $(a,a,0)$ (na Figura 2, carga 4) pode ser calculada usando o Princípio de Superposição:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_4(a,a,0) &= \mathbf{F}_{14} + \mathbf{F}_{24} + \mathbf{F}_{34} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{d}_{14}}{|\mathbf{d}_{14}|^3} + \frac{\mathbf{d}_{24}}{|\mathbf{d}_{24}|^3} + \frac{\mathbf{d}_{34}}{|\mathbf{d}_{34}|^3}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

As distâncias podem ser calculadas como

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{14} &= (a,a,0) - (0,0,0) = a(\hat{x}+\hat{y}), \\ |\mathbf{d}_{14}| &= \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}, \\ \mathbf{d}_{24} &= (a,a,0) - (0,a,0) = a\hat{x}, \\ |\mathbf{d}_{24}| &= a, \\ \mathbf{d}_{34} &= (a,a,0) - (a,0,0) = a\hat{y}, \\ |\mathbf{d}_{34}| &= a.\end{aligned}$$

Substituindo-as na Equação 2, temos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_4(a,a,0) &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(a\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2\sqrt{2}a^3} + a\frac{\hat{x}}{a^3} + a\frac{\hat{y}}{a^3}\right)\\
&= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2\sqrt{2}a^2} + \frac{\hat{x}}{a^2} + \frac{\hat{y}}{a^2}\right)\\
&= \frac{(2\sqrt{2}+1)q^2}{8\sqrt{2}a^2\pi\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}).
\end{aligned}
$$

4 Questão 4

De novo considerado o cubo da questão 1, posiciona-se uma carga q em cada um dos oito vértices. Calcule o campo elétrico no centro do cubo. Discuta fisicamente o resultado.

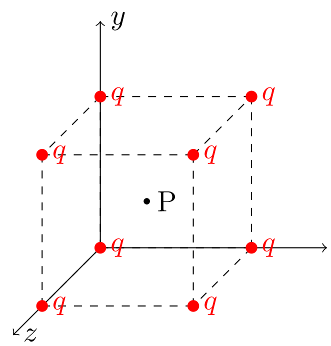

Figura 3: Diagrama da Questão 4.

O campo sobre o ponto P é dado como a superposição dos campos de cada uma das partículas. Por exemplo, para a partícula 1, situada na origem, o campo é

$$
\mathbf{E}_{1P} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}_{1P}}{|\mathbf{d}_{1P}|^3}, \tag{3}
$$

tal que $P = \frac{a}{2}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$. Vou convencionar que as partículas 5, 6, 7 e 8 seguem a mesma ordem que as partículas 1, 2, 3 e 4, com a diferença de terem $z = a$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}_{1P} &= \frac{a}{2}(1,1,1) - (0,0,0) = \frac{a}{2}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}),\\
\mathbf{d}_{2P} &= \frac{a}{2}(1,1,1) - (0,a,0) = \frac{a}{2}(\hat{x}-\hat{y}+\hat{z}),\\
\mathbf{d}_{3P} &= \frac{a}{2}(1,1,1) - (a,0,0) = \frac{a}{2}(-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}),\\
\mathbf{d}_{4P} &= \frac{a}{2}(1,1,1) - (a,a,0) = \frac{a}{2}(-\hat{x}-\hat{y}+\hat{z}),\\
\mathbf{d}_{5P} &= \frac{a}{2}(1,1,1) - (0,0,a) = \frac{a}{2}(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}),\\
\mathbf{d}_{6P} &= \frac{a}{2}(1,1,1) - (0,a,a) = \frac{a}{2}(\hat{x}-\hat{y}-\hat{z}),\\
\mathbf{d}_{7P} &= \frac{a}{2}(1,1,1) - (a,0,a) = \frac{a}{2}(-\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}),\\
\mathbf{d}_{8P} &= \frac{a}{2}(1,1,1) - (a,a,a) = \frac{a}{2}(-\hat{x}-\hat{y}-\hat{z}).
\end{aligned}
$$

Veja que todas as distâncias têm mesmo módulo $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, pois as distâncias têm apenas os versores distintos. Assim, o campo elétrico no centro do cubo pode ser escrito como

$$\mathbf{E}_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8}{3\sqrt{3}a^3}\sum_{i=1}^{8}\mathbf{d}_{iP}.$$

Como as cargas são todas equidistantes e temos, para cada direção, quatro no sentido positivo do eixo e quatro no sentido negativo, veja que a soma das distâncias se anula. Desta forma, o campo elétrico total $\mathbf{E}_P$ no ponto P é nulo. Isso acontece pois as partículas em cada diagonal do cubo geram um campo no ponto P de mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos.

5 Questão 5

Na situação da questão 4, sem fazer contas, usando apenas argumentos gerais, identifique a direção e o sentido do campo elétrico no ponto $(a/2, a/2, 0)$.

Inicialmente, veja que as cargas nas diagonais do quadrado com $z = 0$ são equidistantes do ponto em questão, gerando campos elétricos de igual intensidade e direção, mas sentidos opostos. Portanto, o efeito destas cargas no ponto é nulo.

Para as cargas no quadrado com $z = 2$, nas direções x e y, os campos são nulos por simetria. Contudo, todas elas geram um campo em $-\hat{z}$, que não se anula. Este, portanto, é o sentido do campo.

6 Questão 6

Repita o problema 5, mas identifique agora a direção e o sentido do campo elétrico no ponto $(a, a/2, a/2)$.

A mesma análise da questão 5 pode ser aplicada aqui. Veja que as cargas no quadrado de $x = a$ são equidistantes do ponto, gerando campos elétricos que se anulam. Contudo, as cargas de $x = 0$ produzem campos cujas componentes em y e z são nulas, mas se somam na componente $\hat{x}$, sendo este o sentido do campo.

7 Questão 7

Tem-se de novo um sistema cartesiano tridimensional. Um anel muito delgado está carregado uniformemente com carga q. O seu raio é R e ele está posicionado no plano $z = 0$, com centro na origem. Considere agora um ponto P sobre o eixo z, na posição $(0, 0, z)$. Empregue argumentos gerais para identificar a direção e o sentido do campo elétrico em P.

Veja que um ponto qualquer do anel terá a distância ao ponto P dada como $x^2+y^2+z^2 = R^2+z^2$. Assim, independentemente do ponto do anel que pegarmos, ele será equidistante de P e terá um ponto diametralmente oposto, com mesma carga e distância. Assim, seus campos nas direções radiais se cancelam mutuamente, um por um. Contudo, na direção $\hat{z}$, tais pontos têm campos em mesma direção e sentido, se somando. Desta forma, o campo em P deve ter a direção e sentido como $\hat{z}$ (vertical, para cima).

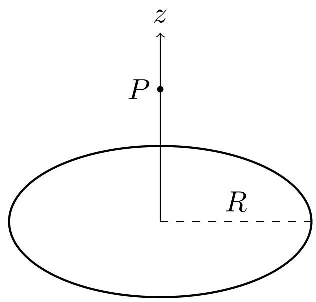

Figura 4: Diagrama da Questão 7.

8 Questão 8

Nas condições da questão 7, calcule o campo elétrico no ponto P. *Sugestão: divida o anel em N segmentos iguais, de tamanho $2\pi R/N$. A partir do resultado da questão 7, você sabe a direção em que está o campo no ponto P. Basta portanto calcular a componente do campo nessa direção. Mostre, por argumentos gerais, que cada segmento do anel dá a mesma contribuição para a componente do campo nessa direção. Basta portanto calcular o campo devido a um dos segmentos (escolha um que facilite o cálculo) e multiplicar o resultado por N.*

Já que o anel é uniformemente carregado com carga q, podemos definir N elementos de carga distribuídos pelo anel com carga

$$dq = q/N$$

. A distância de tal ponto é dada por $\mathbf{d} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, com $x^2 + y^2 = R^2$. O módulo da distância é então $|\mathbf{d}| = \sqrt{R^2 + z^2}$. A componente $\hat{z}$ do campo, que é a única não nula, pode ser calculada como

$$\mathbf{E}_{dq} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\hat{z}}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3},$$

que não depende de x e y e é válido para todos os elementos de carga. Multiplicando por N e usando que $Ndq = q$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Ndq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\hat{z}}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\hat{z}}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}. \end{aligned}$$

De maneira alternativa, poderíamos não ter considerado nenhum elemento de simetria, e integrado tal campo para obter o mesmo resultado. Considere a figura abaixo.

Utilizando o ângulo θ, podemos escrever qualquer ponto do anel com $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$. Assim, podemos integrar sobre θ, de 0 a 2π. O elemento de carga $dq = qd\theta/2\pi$, identificado por um certo ângulo θ, gera um campo

$$d\mathbf{E} = \frac{qd\theta}{8\pi^2\varepsilon_0} \frac{R^2(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) + z\hat{z}}{\sqrt{R^2 + z^2}^3}.$$

Integrando em θ, de 0 a 2π, as componentes x e y têm integrais de seno e cosseno sobre um ciclo

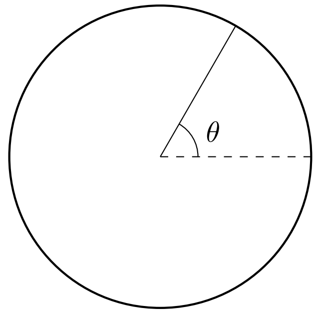

Figura 5: Diagrama para alternativa à questão 8.

inteiro.

$$\int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta = -\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$
$$\int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta = \sin\theta\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

A integral em $\hat{z}$, por outro lado, não depende de θ, tal que a integral resulta em 2π. Portanto,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\hat{z}}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}.$$

9 Questão 9

O seu corpo é composto por prótons, nêutrons e elétrons. Estime o número de elétrons e a carga negativa existente em seu corpo. *Sugestão: o número de elétrons é igual ao de prótons. Para estimar o número de prótons, suponha que ele é aproximadamente igual ao número de nêutrons. Encontre na internet a massa do próton (praticamente igual à do nêutron) e divida sua massa pela massa do próton multiplicada por dois para encontrar o número de prótons.*

```
minha_massa = 83 kilogram
massa_proton = 1.67e-27 kilogram
n_protons = 2.48e+28 dimensionless = n_eletrons
carga_eletron = -1.6e-19 coulomb
carga_negativa_total = -3.98e+09 coulomb
```

10 Questão 10

Suponha que houvesse um desequilíbrio e um em cada milhão dos seus elétrons fosse parar em outra pessoa, a um quilômetro de distância. Qual seria a força elétrica entre vocês dois?

Caso um a cada milhão de meus elétrons tenha saído de meu corpo, teríamos um total de $2.48 \cdot 10^{22}$ elétrons fora de meu corpo, me deixando com uma carga positiva de $Q = 3.98 \cdot 10^3$ C. A outra pessoa teria uma carga negativa de mesma intensidade. A força elétrica entre nós seria

$$F = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Com $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}$ $\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$, e a distância $r = 1$ km, tal força teria intensidade

```
F = -1.42e+11 newton
```